



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά



Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

1

Ενότητα # 10: Σύστημα και απόκριση συχνότητας –
Λογαριθμικά διαγράμματα BODE

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr

Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Σκοποί ενότητας

- Η έννοια των διαγραμμάτων BODE
- Σχεδιασμός από Συνάρτηση Μεταφοράς
- Εύρεση Συνάρτησης Μεταφοράς από BODE
- Διαβάζοντας τα BODE

Περιεχόμενα ενότητας

- Διαγράμματα BODE αρμονικής απόκρισης συστημάτων
- Παρουσίαση των ασυμπτωτικών διαγραμμάτων λογαριθμικών κερδών/φάσεων συναρτήσει του ω (διαγράμματα BODE) για στοιχειώδη συστήματα
 - 1. Κέρδος A , $G(s) = A$
 - 2. Απλός μηδενιστής (ρίζα) στο μηδέν, $G(s) = s$
 - 3. Απλός μηδενιστής (ρίζα) στο ω_n , $G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)$
 - 4. Ζεύγος μιγαδικών Μηδενιστών, $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$

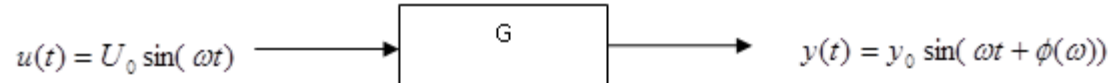
Περιεχόμενα ενότητας

- Παρουσίαση των ασυμπτωτικών διαγραμμάτων λογαριθμικών κερδών/φάσεων συναρτήσει του ω (διαγράμματα BODE) για στοιχειώδη συστήματα
 - 5. Απλός Πόλος στο μηδέν, $G(s) = \frac{1}{s}$
 - 6. Απλός Πόλος στο ω_n , $G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n} + 1)}$
 - 7. Ζεύγος μιγαδικών πόλων, δηλαδή $G(s) = \frac{1}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1)}$
- Παρατηρήσεις
- Παραδείγματα, Παραδείγματα-Αντίστροφη πορεία

Διαγράμματα BODE αρμονικής απόκρισης συστημάτων

Διαγράμματα BODE αρμονικής απόκρισης συστημάτων

- Ημιτονοειδές σήμα εισόδου σε σύστημα δημιουργεί ημιτονοειδή έξοδο με μέτρο και φάση εξαρτώμενες από τη συχνότητα διέγερσης ω :



Διαγράμματα BODE αρμονικής απόκρισης συστημάτων

- Ημιτονοειδές σήμα εισόδου σε σύστημα δημιουργεί ημιτονοειδή έξοδο με μέτρο και φάση εξαρτώμενες από τη συχνότητα διέγερσης ω :



- Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = K \frac{(s-z_1) \cdots (s-z_m)}{(s-p_1) \cdots (s-p_n)} \quad n \geq m, \quad \text{με } z_i, p_i \in \mathcal{R}$$

Διαγράμματα BODE αρμονικής απόκρισης συστημάτων

- Ημιτονοειδές σήμα εισόδου σε σύστημα δημιουργεί ημιτονοειδή έξοδο με μέτρο και φάση εξαρτώμενες από τη συχνότητα διέγερσης ω :



- Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = K \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \quad n \geq m, \quad \text{με } z_i, p_i \in \mathcal{R}$$

Για συχνότητα διέγερσης ω , η αρμονική συνάρτηση $G(j\omega)$ δίδεται αν θέσουμε $s=j\omega$ (όπως έχουμε δείξει παλαιότερα)

$$G(j\omega) = K \frac{(j\omega-z_1)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)\cdots(j\omega-p_n)} = K \frac{M_{z_1} e^{j\varphi_{z_1}} \cdots M_{z_m} e^{j\varphi_{z_m}}}{M_{p_1} e^{j\varphi_{p_1}} \cdots M_{p_n} e^{j\varphi_{p_n}}} \quad (1)$$

Άρα

$$G(j\omega) = K \underbrace{\frac{M_{z_1} \cdots M_{z_m}}{M_{p_1} \cdots M_{p_n}}}_{|G(j\omega)|} e^{j \underbrace{(\varphi_{z_1} + \varphi_{z_2} + \cdots + \varphi_{z_m} - \varphi_{p_1} - \varphi_{p_2} - \cdots - \varphi_{p_n})}_{\varphi\{G(j\omega)\}}} \quad (2)$$

- Για τη δεδομένη συχνότητα ω λοιπόν μπορούμε να βρούμε
 - το μέτρο $|G(j\omega)|$ και
 - τη φάση $\varphi\{G(j\omega)\}$

αν γνωρίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη των στοιχειωδών υποσυστημάτων

$$(s - z_1) \cdots (s - z_m) \quad \text{και} \quad \frac{1}{(s - p_1)} \cdots \frac{1}{(s - p_n)} \quad !!$$

- Μια πλήρης μελέτη του συστήματος $G(s)$ σημαίνει:
 - τη δοκιμή αυτού με ημιτονοειδή είσοδο συχνότητας ω για $0 < \omega < \infty$

- Μια πλήρης μελέτη του συστήματος $G(s)$ σημαίνει:
 - τη δοκιμή αυτού με ημιτονοειδή είσοδο συχνότητας ω για $0 < \omega < \infty$
 - και την καταγραφή του μέτρου $|G(j\omega)|$ και φάσης $\varphi\{G(j\omega)\}$ σε διαγράμματα

- Μια πλήρης μελέτη του συστήματος $G(s)$ σημαίνει
 - τη δοκιμή αυτού με ημιτονοειδή είσοδο συχνότητας ω για $0 < \omega < \infty$
 - και την καταγραφή του μέτρου $|G(j\omega)|$ και φάσης $\varphi\{G(j\omega)\}$ σε διαγράμματα
 - Nyquist (δηλαδή απεικόνιση του $|G(j\omega)|$ συναρτήσεως του $\varphi\{G(j\omega)\}$)
 - ή
 - λογαριθμικά BODE (δηλαδή απεικόνιση του $|G(j\omega)|$ σε λογαριθμική μορφή συναρτήσεως του ω , και του $\varphi\{G(j\omega)\}$ συναρτήσεως του ω).
- Στα επόμενα Θα ασχοληθούμε με τα ασυμπτωτικά διαγράμματα BODE.

- Έχουμε δύο επιλογές:
 - Είτε δοκιμάζουμε το φυσικό σύστημα του οποίου τα χαρακτηριστικά (συνάρτηση μεταφοράς) είναι άγνωστα και καταγράφουμε τα αποτελέσματα $|G(j\omega)|$ και $\varphi\{G(j\omega)\}$ σε διάγραμμα
 - ή
 - Γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ και με τη βοήθεια της σχέσης (2) υπολογίζουμε $|G(j\omega)|$ και $\varphi\{G(j\omega)\}$ ως επαλληλία των στοιχειωδών υποσυστημάτων.
- Σε κάθε περίπτωση μόνο το $|G(j\omega)|$ θα δίδεται σε λογαριθμική μορφή δηλαδή $M_{db} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$ όπου M_{db} σε decibel.

- Θα μελετήσουμε την περίπτωση που σχεδιάζουμε /αναπτύσσουμε ένα σύστημα οπότε και γνωρίζουμε (αφού το σχεδιάζουμε) τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$. Φέρνουμε την $G(s)$ στη μορφή:

$$G(s) = \frac{A P(s)}{s^\alpha Q(s)} \quad \text{με} \quad P(0)=Q(0)=1 \quad (3)$$

- Όπως πάντα θα ισχύει $|G(j\omega)| = A \frac{M_{z_1} \cdots M_{z_m}}{M_{p_1} \cdots M_{p_n}}$. Λογαριθμίζοντας έχουμε:

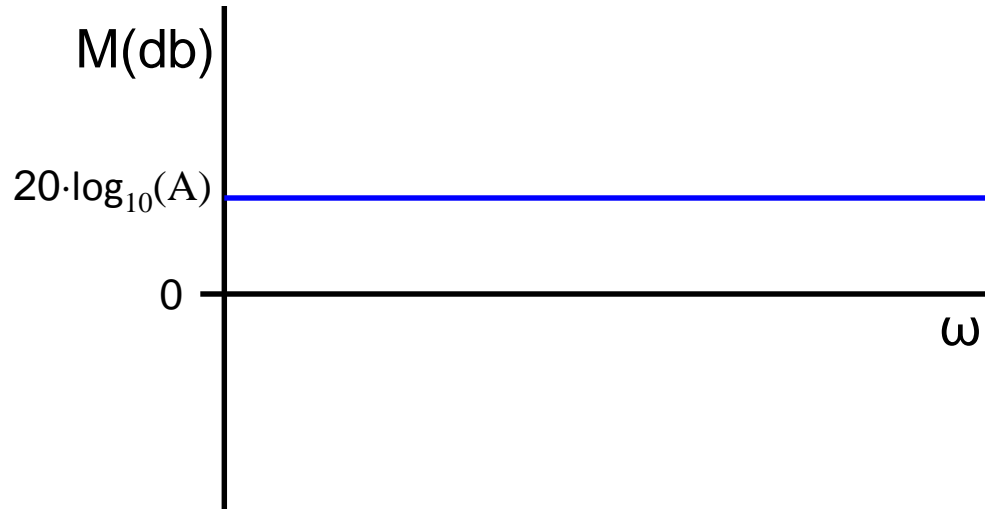
$$\begin{aligned} M_{\text{db}}[|G(j\omega)|] &= 20 \log_{10} |G(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} A + 20 \log_{10} M_{z_1} + \cdots + 20 \log_{10} M_{z_m} \\ &\quad - 20 \log_{10} M_{p_1} - \cdots - 20 \log_{10} M_{p_n} \\ &= M_{\text{db}}[A] + M_{\text{db}}[z_1] + \cdots + M_{\text{db}}[z_m] - M_{\text{db}}[p_1] - \cdots - M_{\text{db}}[p_n] \end{aligned}$$

ΑΡΑ:

- Γνώση των λογαριθμικών κερδών κάθε στοιχειώδους υποσυστήματος για $0 < \omega < \infty$ σε διάγραμμα συναρτήσεως του ω και
- Επαλληλία για κάθε τιμή του ω των αντιστοίχων (λογαριθμικών) κερδών, ώστε να έχουμε το διάγραμμα $|G(j\omega)|$ συναρτήσεως του ω !
- Όμοια εργαζόμαστε και για τις (όχι λογαριθμικές) φάσεις των στοιχειωδών υποσυστημάτων.

**Παρουσίαση των ασυμπτωτικών
διαγραμμάτων λογαριθμικών κερδών/
φάσεων συναρτήσει του ω (διαγράμματα
BODE) για στοιχειώδη συστήματα**

1. Κέρδος A, δηλαδή $G(s)=A$

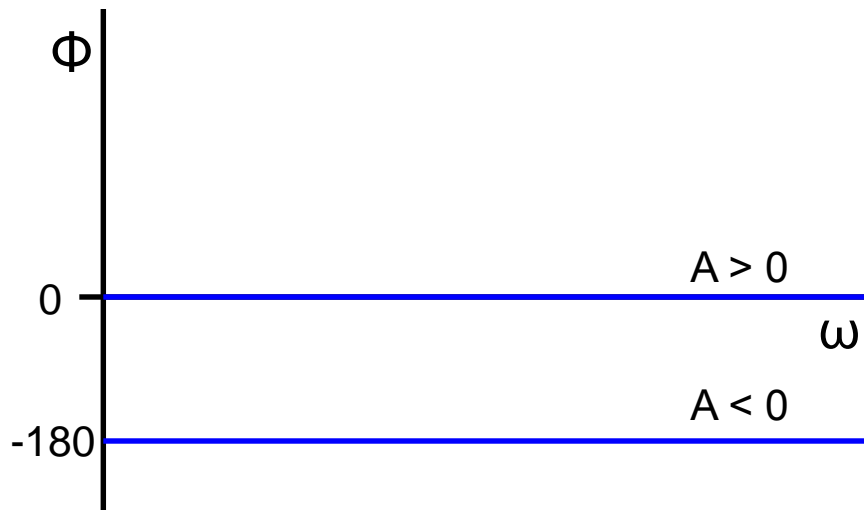


Παράδειγμα:

$$A=1 \rightarrow M_{db} = 20 \log_{10} 1 = 0$$

$$A = \frac{1}{2} \rightarrow M_{db} = -20 \log_{10} 2 = -6db$$

$$A = 2 \rightarrow M_{db} = 20 \log_{10} 2 = 6db$$

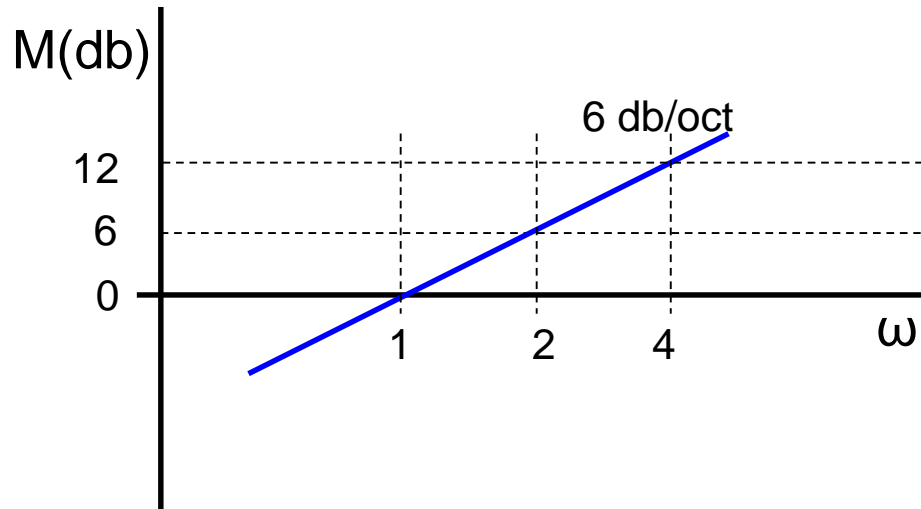


Η φάση είναι πάντα 0 για $A > 0$

ή

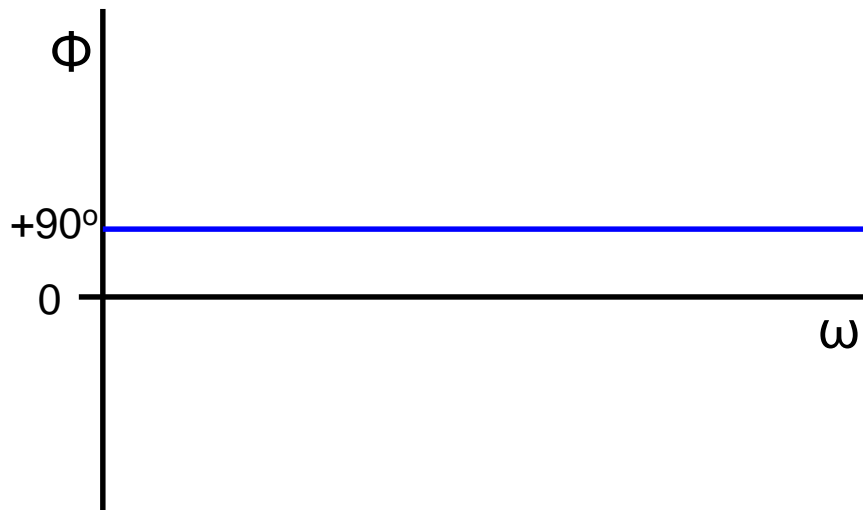
-180 για $A < 0$

2. Απλός μηδενιστής (ρίζα) στο μηδέν $G(s)=s$



Άνοδος με κλίση 6db/oct
(1 Οκτάβα: $\omega \rightarrow 2\omega$)

Τομή με άξονα του ω στο 1



Φάση σταθερά +90°.

3. Απλός μηδενιστής (ρίζα) στο ω_n , $G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^*$

*Μελετούμε την

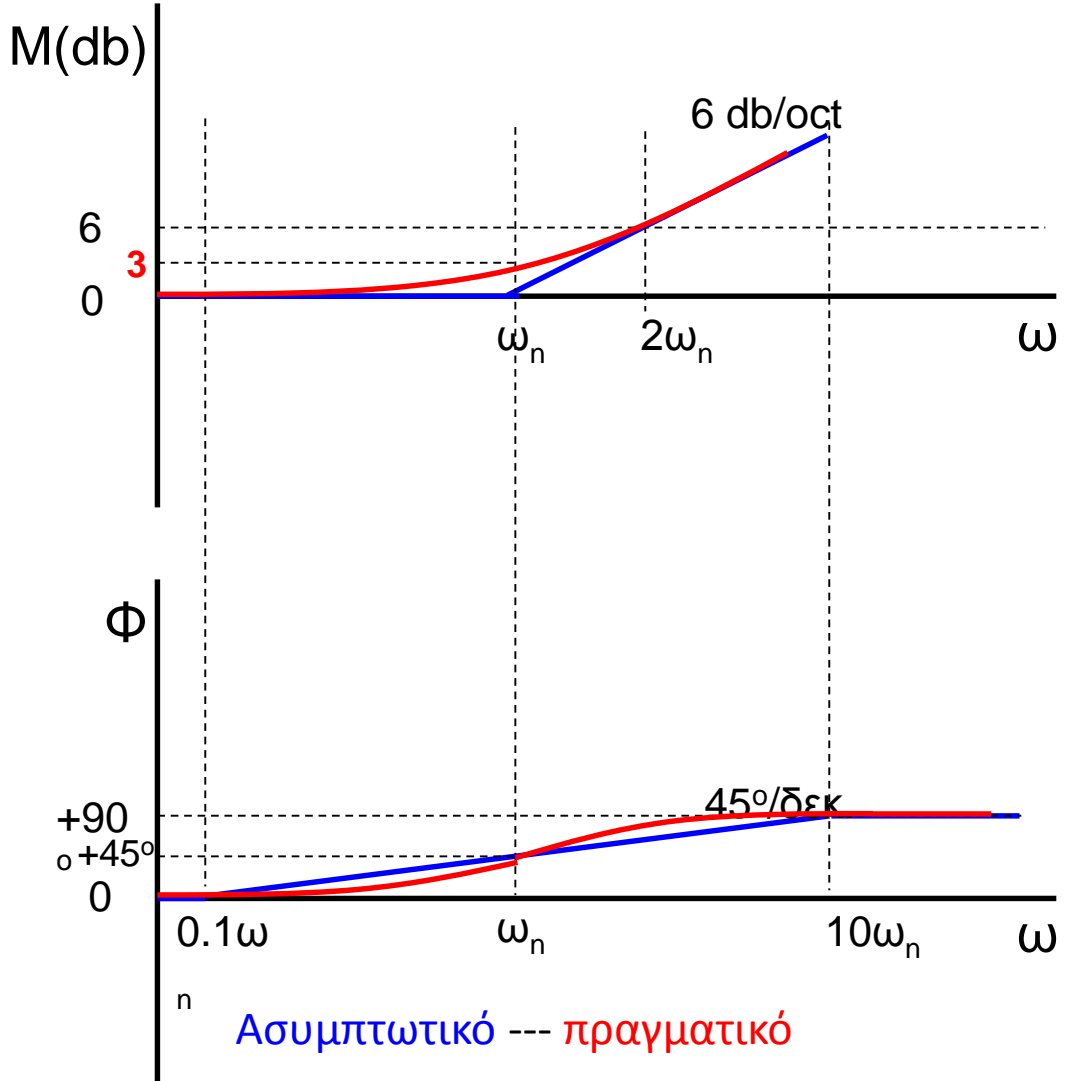
$$G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)$$

και όχι την

$$F(s) = (s + \omega_1)$$

διότι αν $F(s)$ στη μορφή (3) τότε $F(s) = \omega_1 \left(\frac{1}{\omega_1} s + 1\right)$ άρα υπάρχει και απλό κέρδος $A = \omega_1$, που είδη μελετήσαμε πριν!!

3. Απλός μηδενιστής (ρίζα) στο ω_n , $G(s) = \left(\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^*$

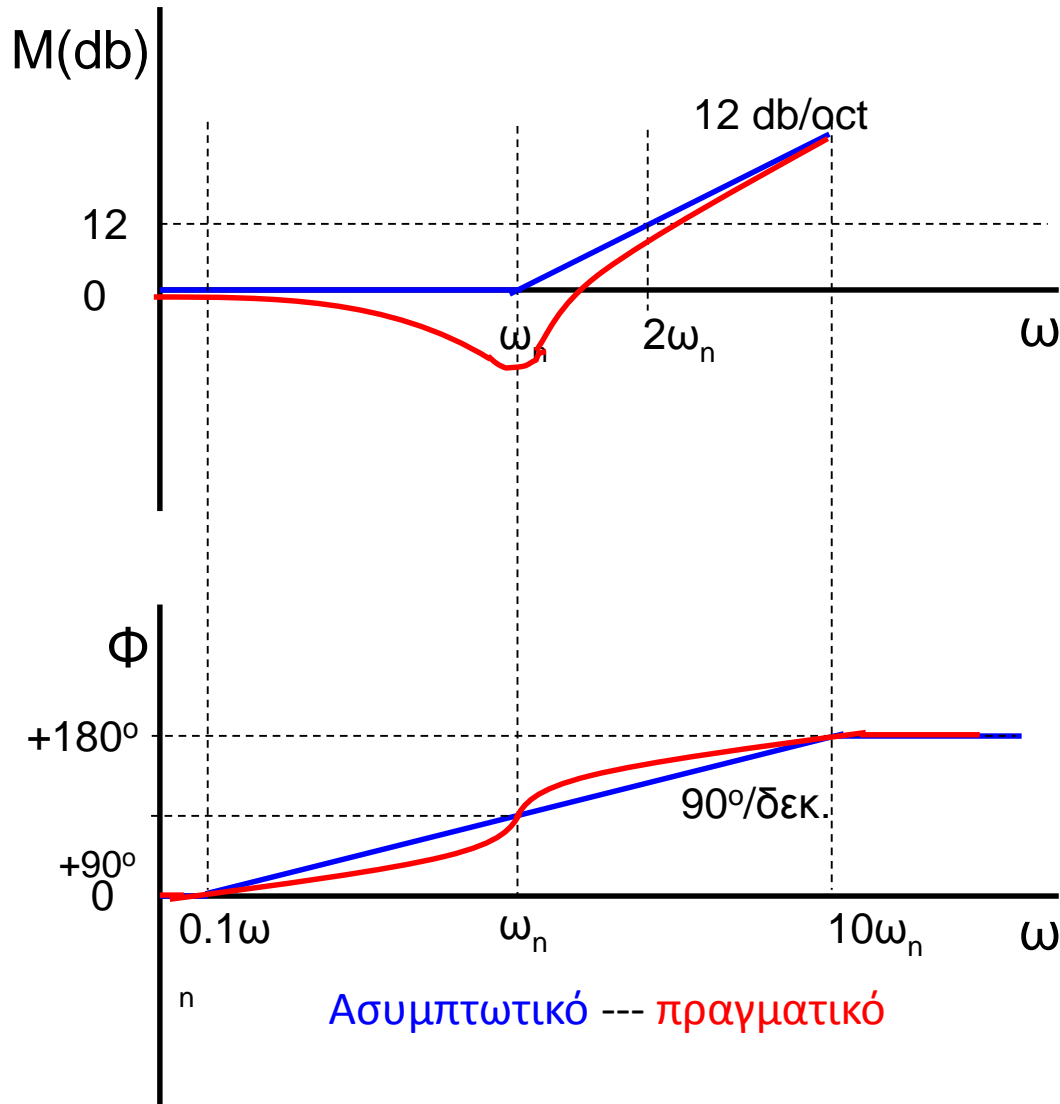


Άνοδος με κλίση 6db/oct
 Τομή με άξονα του ω στο ω_n
 Μέχρι τα ω_n $r/s \rightarrow M_{\text{db}}=0$

0 έως $0.1\omega_n \rightarrow \varphi=0$
 $0.1\omega_n$ έως $10\omega_n \rightarrow$
 Άνοδος με $45^\circ/\text{δεκάδα}$
 $10\omega_n$ έως $\infty \rightarrow \varphi=+90^\circ$

{ $0.1\omega_n \rightarrow \omega_n$: ΜΙΑ δεκάδα
 $\omega_n \rightarrow 10\omega_n$: ΜΙΑ δεκάδα
 $10\omega_n \rightarrow 100\omega_n$: ΜΙΑ δεκάδα }

4. Ζεύγος μιγαδικών Μηδενιστών, $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$



Άνοδος με κλίση 12db/oct

Τομή με άξονα του ω στο ω_n

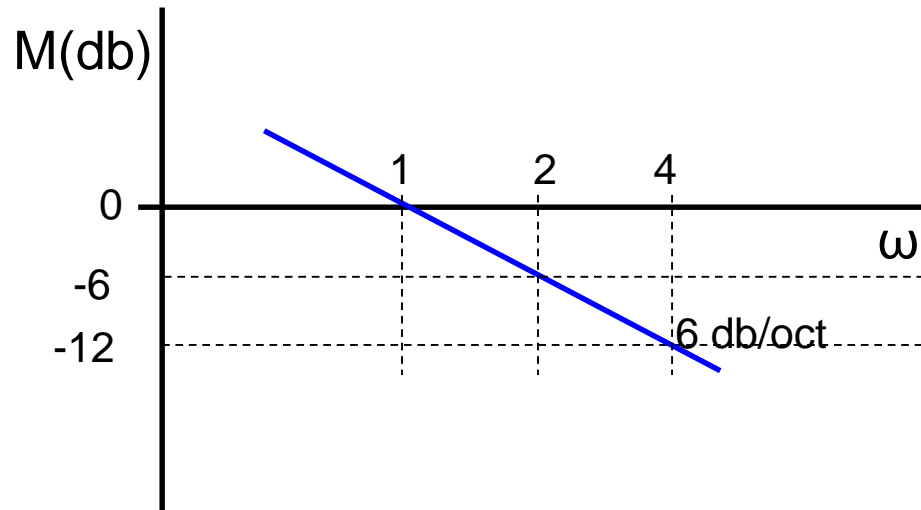
Μέχρι τα ω_n $r/s \rightarrow M_{\text{db}}=0$

Από 0 έως $0.1\omega_n$: $\varphi=0$

$0.1\omega_n$ έως $10\omega_n$: Άνοδος με 90°/δεκάδα

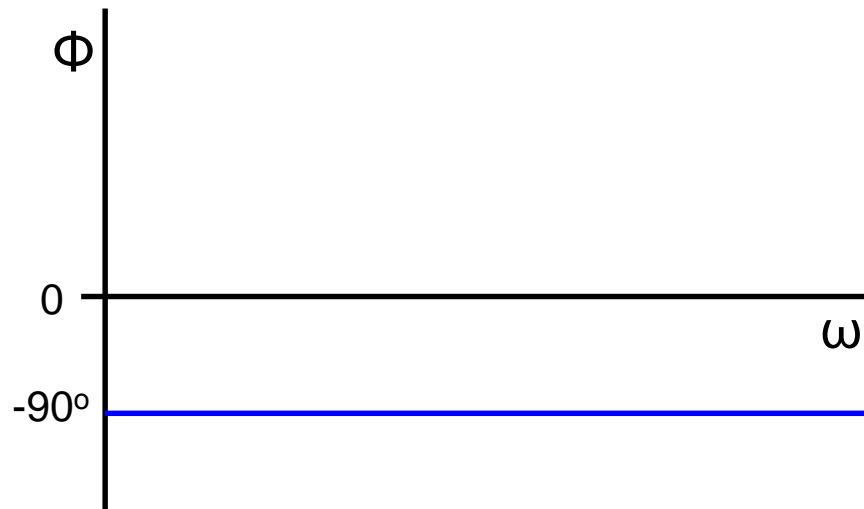
$10\omega_n$ έως ∞ : $\varphi=+180$

5. Απλός Πόλος στο μηδέν, $G(s) = \frac{1}{s}$

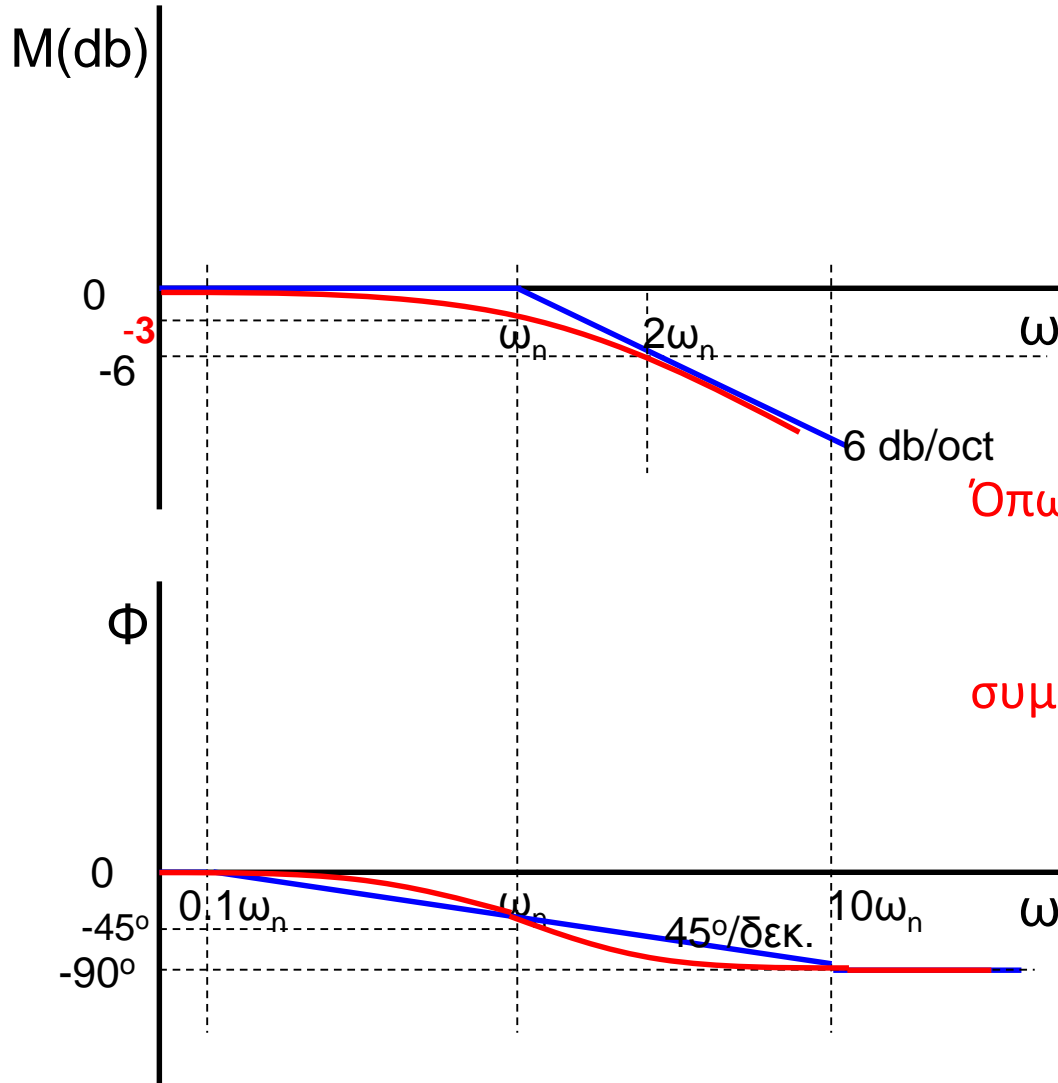


Όπως και με τον αντίστοιχο μηδενιστή
αλλά

συμμετρικά ως προς τον άξονα των ω !

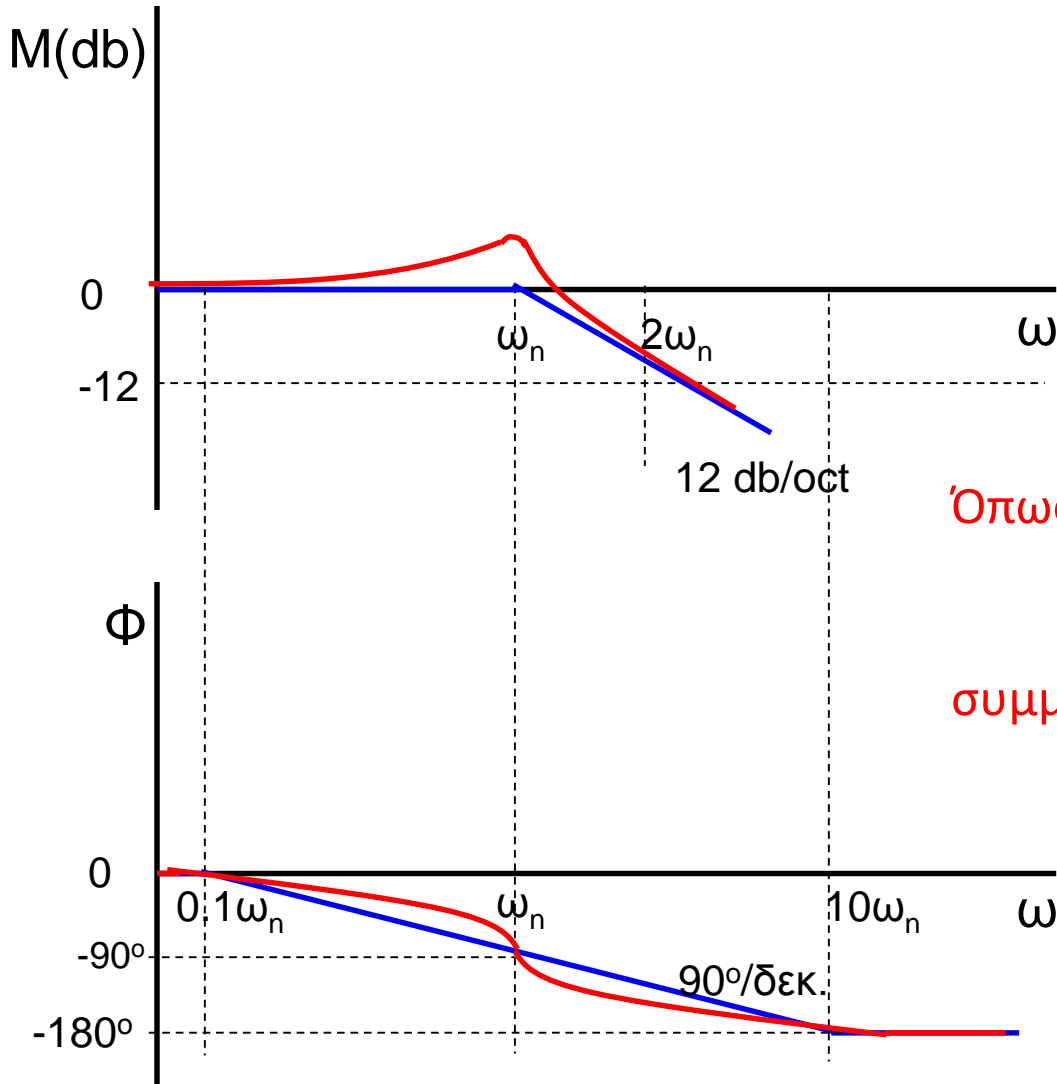


6. Απλός Πόλος στο ω_n , $G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n} + 1)}$



Όπως και με τον αντίστοιχο μηδενιστή
αλλά
συμμετρικά ως προς τον άξονα των ω !

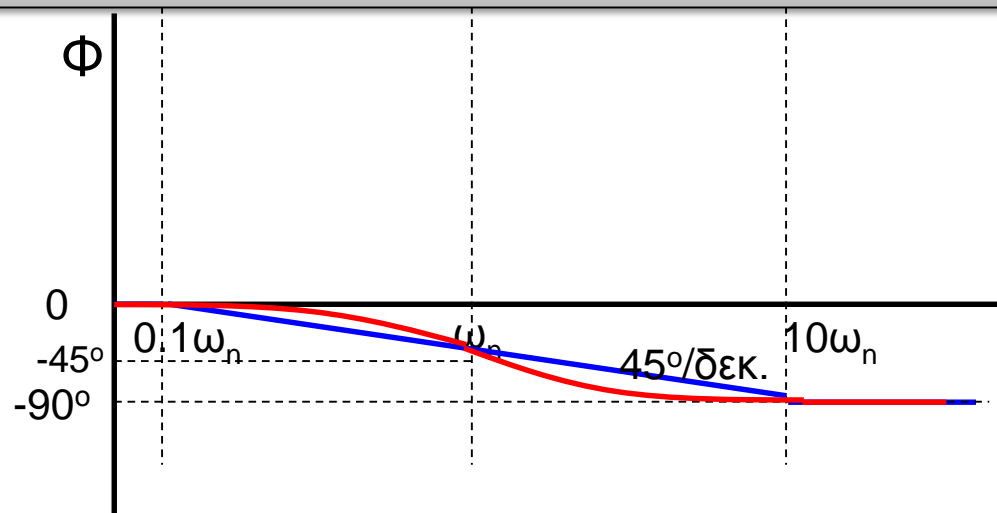
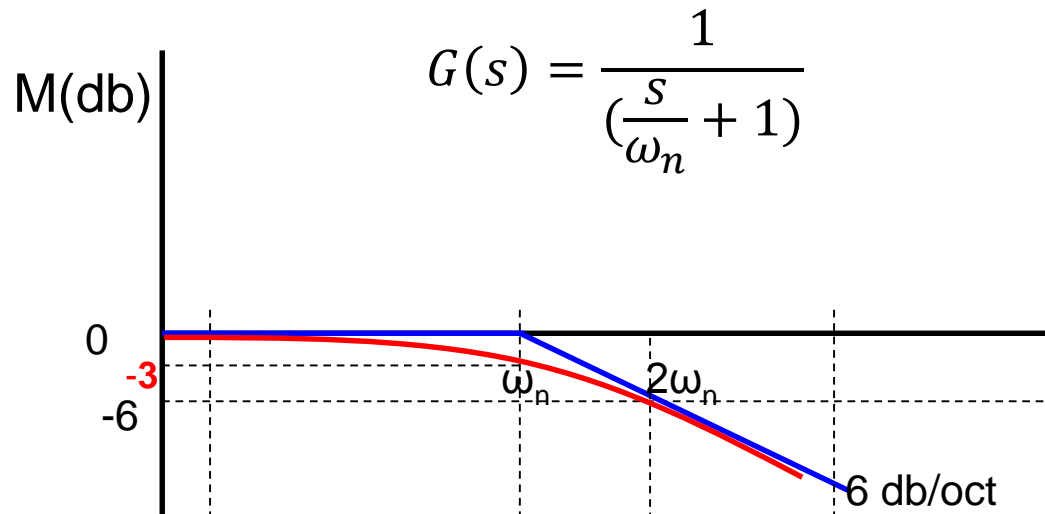
7. Ζεύγος μιγαδικών πόλων, $G(s) = \frac{1}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1)}$

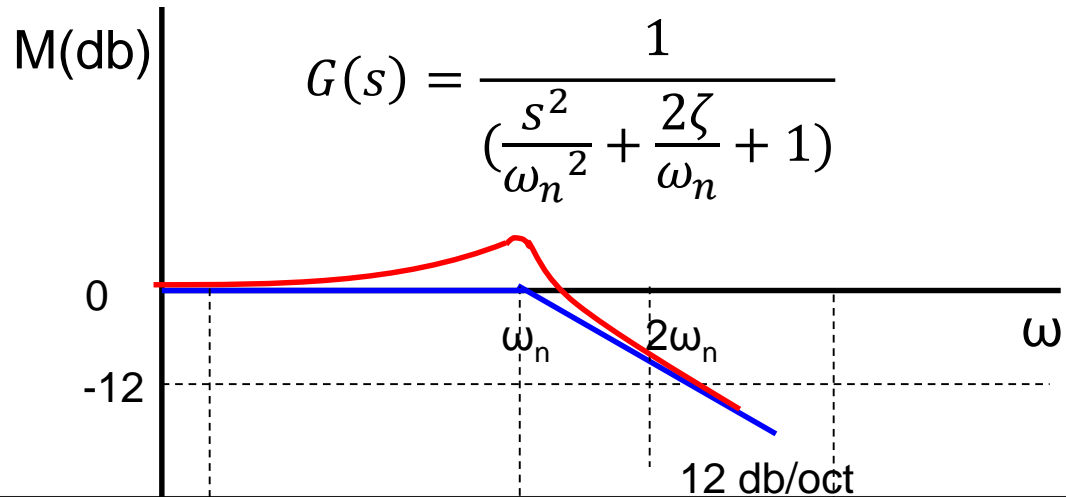


Όπως και με τον αντίστοιχο μηδενιστή
αλλά
 συμμετρικά ως προς τον άξονα των ω !

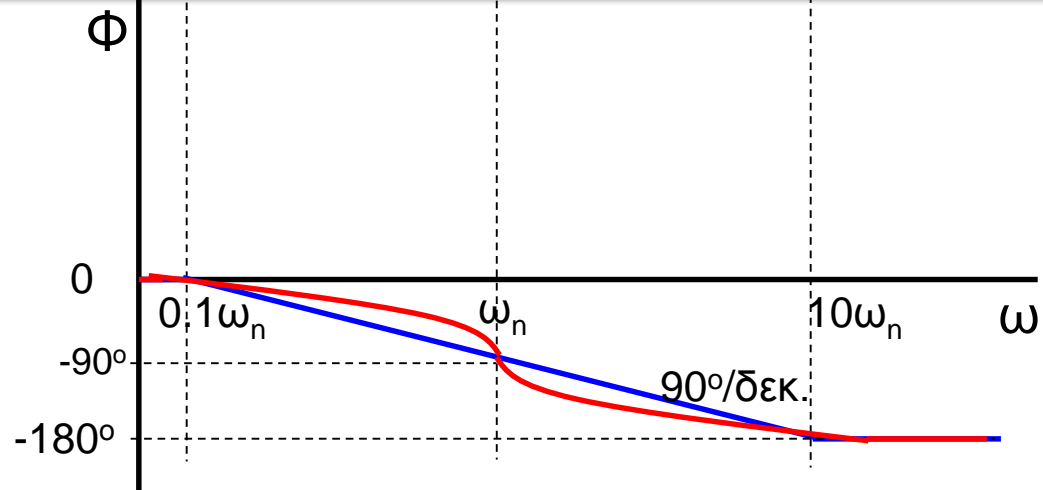
Παρατηρήσεις

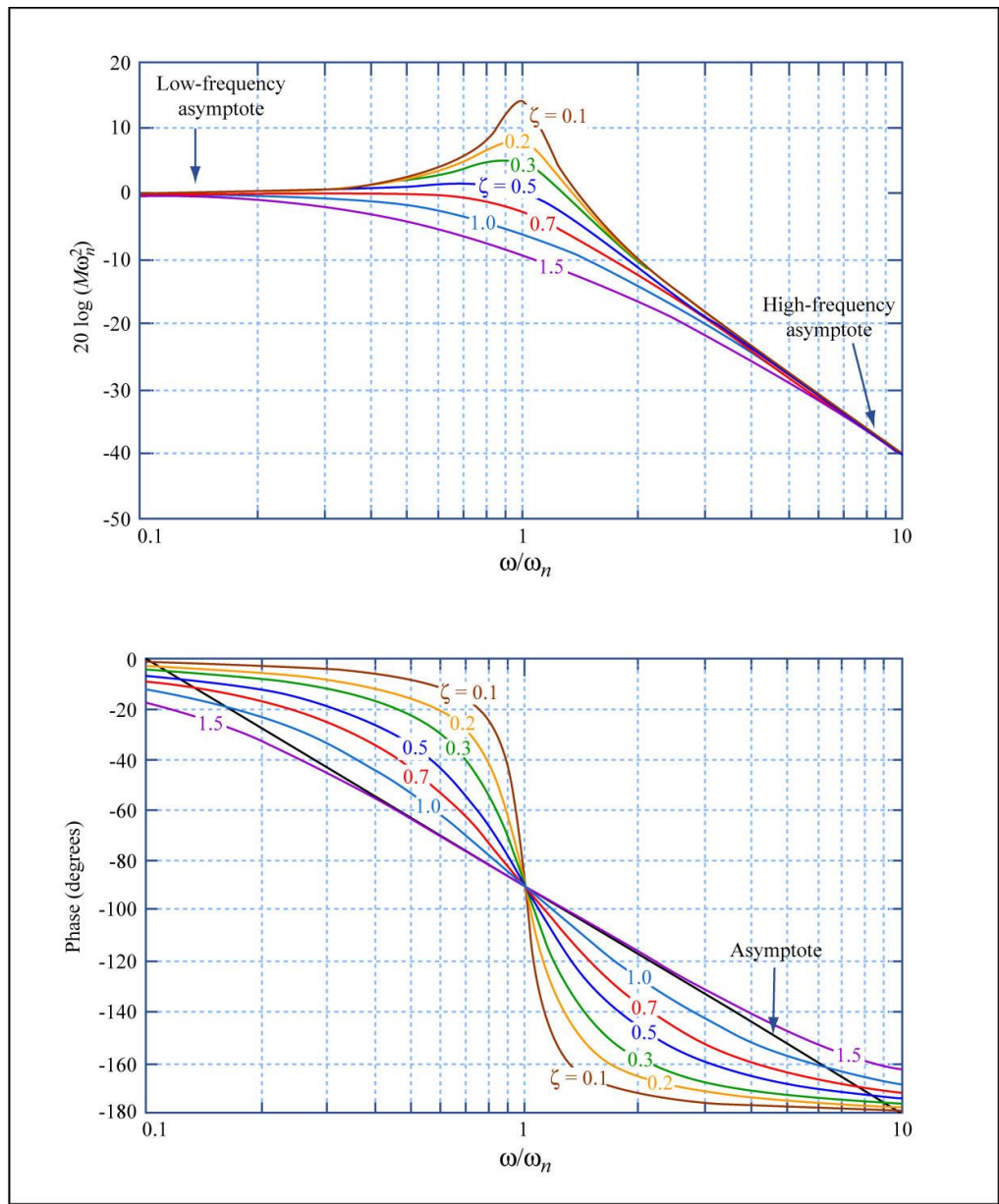
- Όλα τα παραπάνω διαγράμματα BODE είναι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις ων πραγματικών, οι οποίες όμως περιγράφουν επαρκώς την πραγματικότητα.
- Τα ακριβή διαγράμματα BODE είναι δύσκολο να υπολογιστούν / χαραχθούν, εκτός της περιπτώσεως όπου χρησιμοποιείται κατάλληλο λογισμικό.
- Οι κύριες διαφορές μεταξύ ασυμπτωτικών και πραγματικών BODE δίδονται στη συνέχεια για την περίπτωση των στοιχειωδών συστημάτων όπου εμπλέκονται πόλοι.
- Για την περίπτωση των συστημάτων όπου εμπλέκονται μηδενιστές (ρίζες) τα διαγράμματα BODE είναι τα συμμετρικά των προηγούμενων ως προς τον άξονα του ω .





Μέτρο: **Πραγματικό** – **Ασυμπτωτικό** = Η διαφορά δίδεται από πίνακες $\sim \zeta$!





<https://www.flickr.com/photos/mitopencourseware/3028052632/>

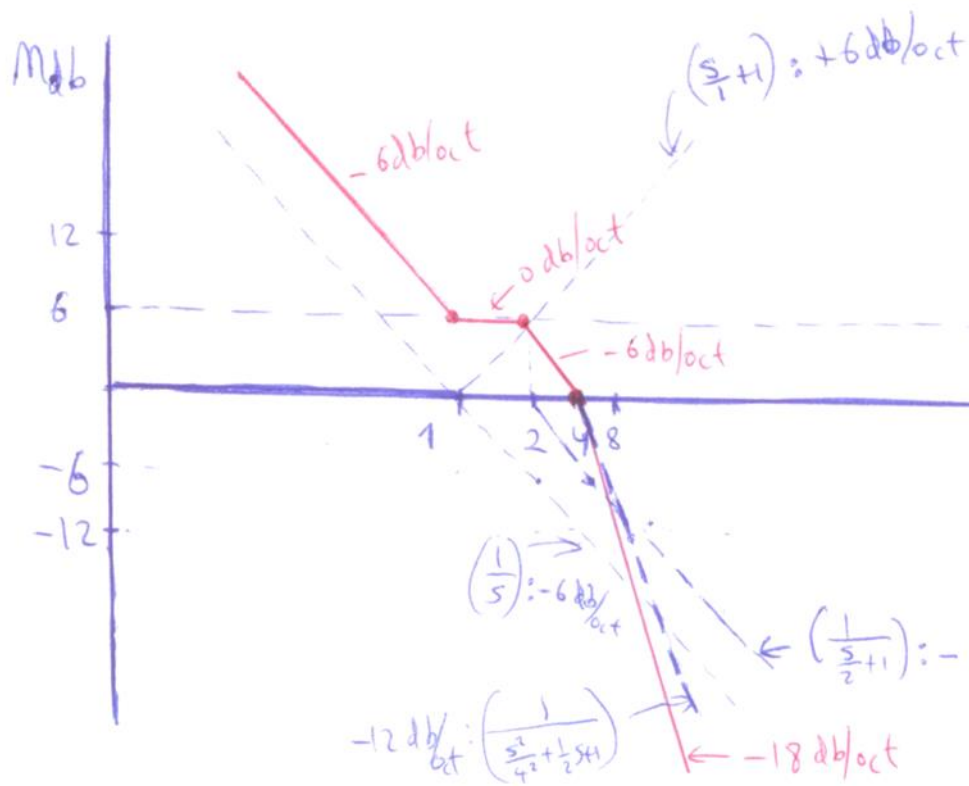
Παράδειγμα

Έστω $G(s) = \frac{64(s+1)}{s(s+2)(s^2+8s+16)}$ Να γίνει το ασυμπτωτικό διάγραμμα BODE

- Μεταφέρουμε την $G(s)$ στην μορφή $G(s) = \frac{A}{s^\alpha} \frac{P(s)}{Q(s)}$ με $P(0)=Q(0)=1$

$$G(s) = \frac{64\left(\frac{s}{1}+1\right)}{2 \cdot 16 \cdot s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{16}+\frac{1}{2}s+1\right)} = \frac{2\left(\frac{s}{1}+1\right)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{4^2}+\frac{1}{2}s+1\right)}$$

- Κέρδος $A = 2 \Rightarrow M_{db} = 20 \log_{10} 2 = 6db$
- Μηδενιστής $z_1=1$, πόλοι $\omega_{p_1} = 2$, $\omega_{p_2} = \omega_{p_3} = 4$, $\omega_{p_4} = 0$

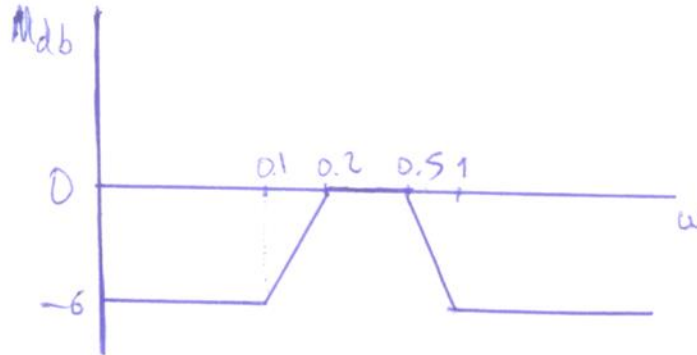


Ακολουθώντας την ίδια λογική της επαλληλίας στοιχειωδών όρων (υποσυστημάτων) κατασκευάζουμε το διάγραμμα φάσης [ΠΡΟΣΟΧΗ στον ΠΙΝΑΚΑ!]

Παράδειγμα – Αντίστροφη πορεία

Αντίστροφη πορεία

- Μας δίδεται το ασυμπτωτικό BODE και αναγνωρίζουμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς



0 → 0.1 r/s: Κλίση 0 db/oct, Κέρδος = -6db → $A = \frac{1}{2}$

0.1 → 0.2 r/s (1 oct) Κλίση +6 db/oct → $\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)$

0.2 → 0.5 r/s Κλίση 0 db/oct άρα παράγοντας που δίδει -6 db/oct → $\left(\frac{1}{\frac{s}{0.2} + 1}\right)$

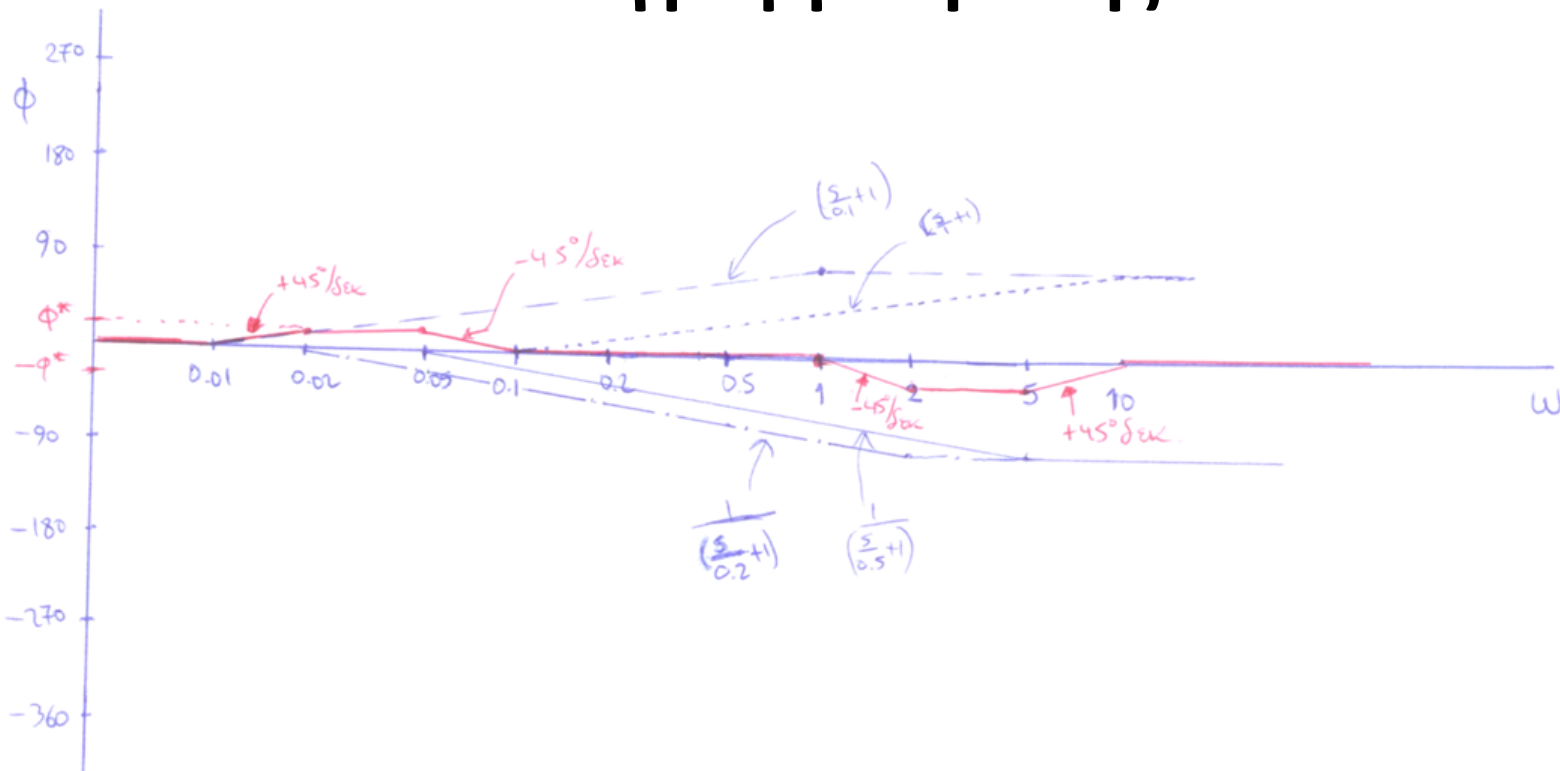
0.5 → 1 r/s (1 oct) Κλίση -6 db/oct άρα παράγοντας που δίδει -6 db/oct → $\left(\frac{1}{\frac{s}{0.5} + 1}\right)$

1 → Κλίση 0 db/oct άρα παράγοντας που δίδει +6 db/oct → $\left(\frac{s}{1} + 1\right)$

Απάντηση....

$$\bullet \quad G(s) = \frac{0.5\left(\frac{s}{0.1}+1\right)(s+1)}{\left(\frac{s}{0.2}+1\right)\left(\frac{s}{0.5}+1\right)} = 0.5 \frac{0.2 \cdot 0.5(s+0.1)(s+1)}{0.1 \cdot (s+0.2)(s+0.5)} = \frac{0.5(s+0.1)(s+1)}{(s+0.2)(s+0.5)}$$

Διάγραμμα φάσης



Με τα διαγράμματα έτοιμα μπορούμε να γνωρίζουμε την απόκριση του συστήματος για κάθε ω :

$$\omega = 0.03 \text{ r/s} \rightarrow y(t) = 1 \sin(0.03t + \varphi^*) \text{ (διότι } M_{\text{db}} = 0, \varphi = \varphi^* \text{ για } \omega = 0.03)$$

$$\omega = 16 \text{ r/s} \rightarrow y(t) = 0.5 \sin(16t)$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ