ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 1

Ενότητα # 2: Μοντελοποίηση φυσικών συστημάτων στο πεδίο του χρόνου – Διαφορικές Εξισώσεις

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Μαθηματική αναπαράσταση συστήματος: Πως;

- Βαθμός συστήματος και διαφορικές εξισώσεις

- Παραδείγματα αναπαράστασης: Ομοιότητες μεταξύ διαφορετικών συστημάτων;

Περιεχόμενα ενότητας

Μελέτη συμπεριφοράς συστημάτων (προς έλεγχο)

- Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο χρόνου
- Γραμμικό Σύστημα
- Γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε)
- Μη γραμμικά συστήματα

Περιεχόμενα ενότητας

- Εύρεση μοντέλου (ομοιώματος) συστήματος:
  - Μάζα, ελατήριο, αποσβεστήρας
  - Μέρος ανάρτησης βαρέως οχήματος
  - Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή τάσης
  - Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή έντασης
  - Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα: Κινητήρας Συνεχούς Ρεύματος

Μελέτη συμπεριφοράς συστημάτων (Προς έλεγχο)

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο του χρόνου

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο χρόνου

- Ορισμός: Μαθηματικό μοντέλο (ομοίωμα) ενός φυσικού συστήματος είναι η μαθηματική σχέση που περιγράφει / αναπαριστά τη φυσική σχέση ανάμεσα στα στοιχεία του συστήματος, άρα και τη συμπεριφορά του

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο χρόνου

- Ορισμός: Μαθηματικό μοντέλο (ομοίωμα) ενός φυσικού συστήματος είναι η μαθηματική σχέση που περιγράφει / αναπαριστά τη φυσική σχέση ανάμεσα στα στοιχεία του συστήματος, άρα και τη συμπεριφορά του

- Σχέση: Αλγεβρική εξίσωση:

  $g(u,y)=0$ ή $y=g^*(u)$, u: είσοδος, y: έξοδος

  Π.χ. $F(t) = K \cdot y(t)$, $F(t)$: έξοδος (δύναμη ελατηρίου)
  $y(t)$: είσοδος (μετατόπιση)

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο χρόνου

- Σχέση: Διαφορική εξίσωση

$$\mathrm{g(u,y)=g}\left(\mathrm{u}, \frac{d}{dt}\mathrm{u}, \dots, \frac{d^m}{dt^m}\mathrm{u}, \mathrm{y}, \frac{d}{dt}\mathrm{y}, \dots, \frac{d^n}{dt^n}\mathrm{y}\right)=0$$

Π.χ. $\mathrm{F(t)} = \mathrm{B} \cdot \frac{d}{dt}\mathrm{y(t)}$ $\mathrm{F(t)}$: έξοδος (δύναμη αποσβεστήρα)

$\mathrm{y(t)}$: είσοδος (μετατόπιση)

- Ερώτηση 1: Ποίες οι διαφορές ανάμεσα στις δύο;
- Ερώτηση 2: Παράγωγος – Ολοκλήρωμα: Πώς τα αντιλαμβάνεστε στην πράξη;

Γραμμικό σύστημα

- Ένα γραμμικό σύστημα (linear system) περιγράφεται από μια γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) οπότε και ισχύει η αρχή της υπέρθεσης:

Αν $g(u, y)$ η σχέση εισόδου – εξόδου συστήματος και για είσοδο $u_i(t)$ παράγεται έξοδος $y_i(t)$, τότε εφόσον:

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) \rightarrow\ y_1(t) \\ u_2(t) \rightarrow\ y_2(t) \\ \qquad\ \ \vdots \\ u_k(t) \rightarrow\ y_k(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow\ u(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t) + \cdots + c_k \cdot u_k(t)$$

θα είναι:

$$y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) + \cdots + c_k \cdot y_k(t)$$

<u>Γραμμική διαφορική εξίσωση</u> (Δ.Ε)

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_0 u(t) + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + \cdots + b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t)$$

- a_0 …a_n, b_0, …, b_m συντελεστές Δ.Ε ΠΡΟΣΟΧΗ: n≥ m για φυσικά συστήματα

- <u>Αν</u> οι συντελεστές της Δ.Ε. είναι σταθερές <u>τότε</u> μιλάμε για στάσιμο σύστημα

  (Άρα αν οι συντελεστές της Δ.Ε. μεταβάλλονται με το χρόνο, τότε χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα)

<u>Μη-Γραμμικά Συστήματα</u>

- Περιγράφονται από <u>μη-γραμμικές</u> Δ.Ε.

Π.χ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{y(t)} + \mathrm{k} \cdot \mathrm{y}^2\ \mathrm{(t)} = \mathrm{u(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{y(t)} + \cos\big(\mathrm{y(t)}\big) \cdot \mathrm{y(t)} = \mathrm{u(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{y(t)} + \mathrm{k} \cdot \mathrm{y(t)} = \mathrm{u(t)}$$

με συνθήκες $|y| < \lambda\ \kappa\alpha\iota\ \left|\frac{d}{dt}y\right| < \mu$!!

Μη-Γραμμικά Συστήματα

- Η επακριβής μελέτη των συστημάτων αυτών απαιτεί εξειδικευμένες μεθόδους εκτός των ορίων του παρόντος μαθήματος (ΣΑΕ Ι)

Μη-Γραμμικά Συστήματα

- Η επακριβής μελέτη των συστημάτων αυτών απαιτεί εξειδικευμένες μεθόδους εκτός των ορίων του παρόντος μαθήματος (ΣΑΕ Ι)

- Μια προσεγγιστική μελέτη των συστημάτων αυτών μπορεί να γίνει σε γειτονίες γύρω από συγκεκριμένα σημεία λειτουργίας, με την παραδοχή ότι σε κάθε τέτοια γειτονία το τοπικό μοντέλο του συστήματος προκύπτει από γραμμικοποίηση του γενικού μη-γραμμικού μοντέλου αυτού

<u>Μη-Γραμμικά Συστήματα (Συνέχεια)</u>

Δηλαδή, ότι σε κάθε γειτονία γύρω από σημείο λειτουργίας που εξετάζεται ισχύει <u>προσεγγιστικά</u> ένα γραμμικό ομοίωμα που αναπαριστά τη λειτουργία του συστήματος εκεί.

Αν το μη-γραμμικό μοντέλο του συστήματος δίδεται από τη μη-γραμμική Δ.Ε. $\mathrm{g^*(u, y) = 0}$ <u>ή</u> $\mathrm{y{=}g(u)}$ τότε για κάποιο u κοντά στο $\mathrm{u_0}$

$$\mathrm{y} = \underbrace{\mathrm{g(u) = g(u_0)} + \frac{\mathrm{(u-u_0)}}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\mathrm{g(u)}\bigg|_{\mathrm{u=u_0}}}_{\text{Όροι που θεωρούνται για τη γραμμικοποίηση}}$$

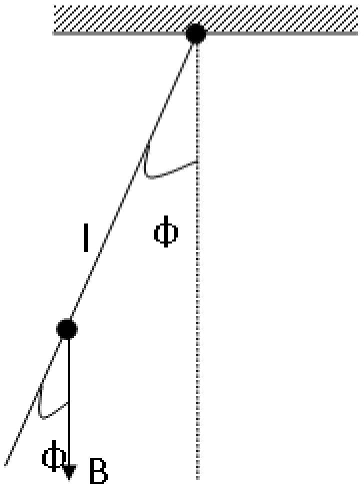
$$+\frac{\mathrm{(u-u_0)^2}}{2!}\frac{\mathrm{d^2}}{\mathrm{du^2}}\mathrm{g(u)}\bigg|_{\mathrm{u=u_0}} + \cdots$$

Σειρά Taylor

Παράδειγμα

Αν:

Μ η ροπή κίνησης εκκρεμούς



Τότε:

$$M=B\cdot l\cdot \sin\varphi \xRightarrow[\substack{\phi \approx 0 \\ \sin\phi \approx \phi}]{\text{Γειτονιά}} M=B\cdot l\cdot \varphi$$

<u>Υπολογίζοντας Μοντέλα (ομοιώματα) Φυσικών Συστημάτων (1)</u>

Με ποιο τρόπο περιγράφουμε (άρα και μελετάμε) μια εφαρμογή (σύστημα);

Α) <u>Προσδιορισμός φυσικών μεγεθών του συστήματος</u>:

- Μετατόπιση
- Ταχύτητα
- Επιτάχυνση
- Ρεύμα
- Δύναμη

Υπολογίζοντας Μοντέλα (ομοιώματα) Φυσικών Συστημάτων (2)

Με ποιο τρόπο περιγράφουμε (άρα και μελετάμε) μια εφαρμογή (σύστημα);

B) Προσδιορισμός φυσικών νόμων:

– Διατήρηση ύλης
– Διατήρηση ενέργειας

Υπολογίζοντας Μοντέλα (ομοιώματα) Φυσικών Συστημάτων (3)

Με ποιο τρόπο περιγράφουμε (άρα και μελετάμε) μια εφαρμογή (σύστημα);

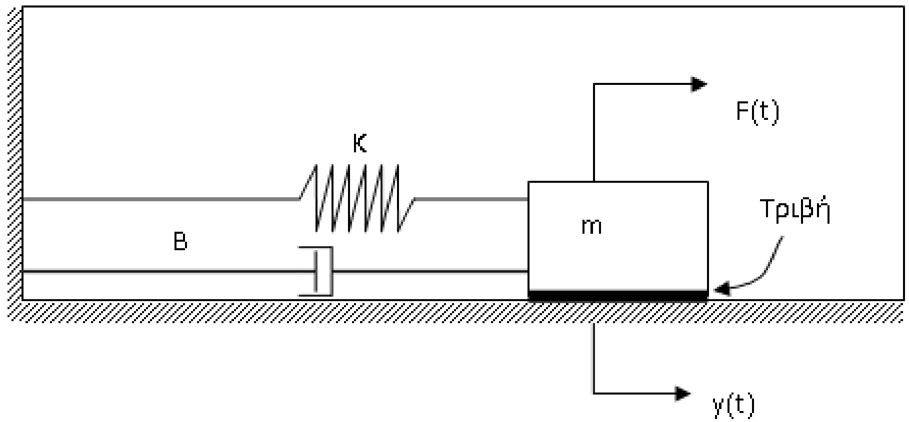
B) Προσδιορισμός φυσικών νόμων:

- Διατήρηση ύλης
- Διατήρηση ενέργειας

Γ) Προσδιορισμός υλικών στοιχείων: (Μέσω των φυσικών νόμων «παράγουν» τα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη)

- Στοιχεία τριβής
- Στοιχεία συσσώρευσης ενέργειας
- Στοιχεία μετατροπής/ απόδοσης ενέργειας

Εφαρμογή σε μηχανικά συστήματα που εκτελούν ευθύγραμμη κίνηση



- Μάζα m
- Ελατήριο K
- Δύναμη F(t)
- Μετακίνηση y(t)

<u>Μεγέθη</u>

- Μετατόπιση $y(t)$

- Ταχύτητα

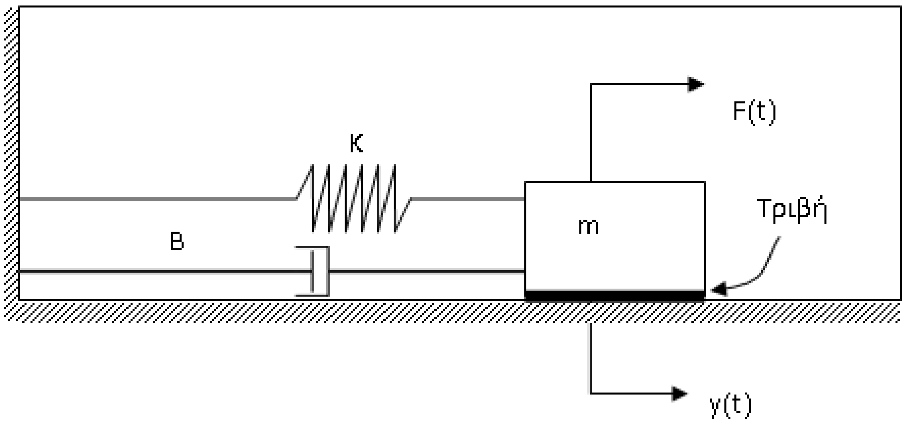
$$u(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

- Επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

- Δύναμη $f(t)$

Εφαρμογή σε μηχανικά συστήματα που εκτελούν ευθύγραμμη κίνηση



- Μάζα m
- Ελατήριο K
- Δύναμη F(t)
- Μετακίνηση y(t)

<u>Μεγέθη</u>

- Μετατόπιση $y(t)$

- Ταχύτητα

$$u(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

- Επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

- Δύναμη $f(t)$

<u>Νόμοι</u>

Νεύτωνα

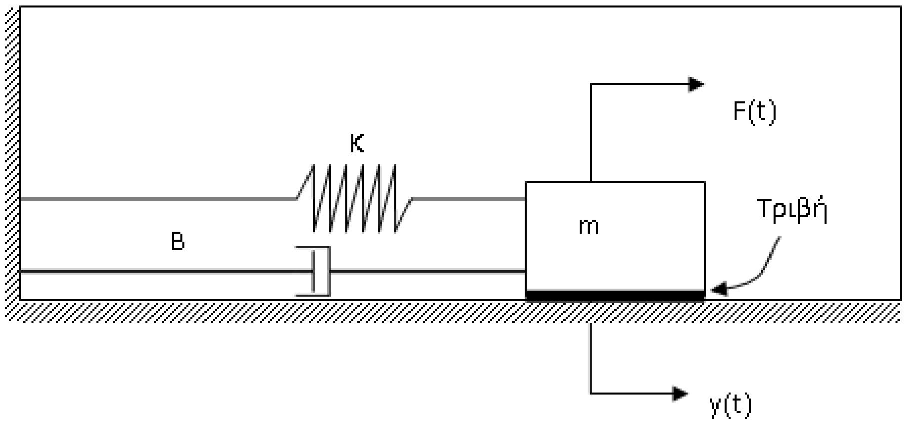
$\Sigma F = m \cdot a$

«Ισορροπία Δυνάμεων»

....

Ενεργειακά πως εξηγείται;

Εφαρμογή σε μηχανικά συστήματα που εκτελούν ευθύγραμμη κίνηση



- Μάζα m
- Ελατήριο K
- Δύναμη F(t)
- Μετακίνηση y(t)

Μεγέθη

- Μετατόπιση y(t)
- Ταχύτητα

$$u(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

- Επιτάχυνση

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

- Δύναμη f(t)

Νόμοι Νεύτωνα

$\Sigma F = m \cdot a$

«Ισορροπία Δυνάμεων»

....

Ενεργειακά πως εξηγείται;

Υλικά στοιχεία

-Τριβή με έδαφος

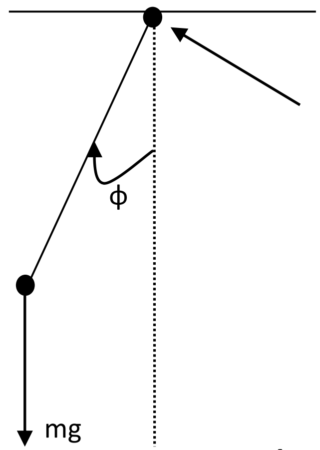
-Αποσβεστήρας (τριβή) $F_a = B \cdot \frac{d}{dt} y(t)$

-Ελατήριο (αποθήκευση ενέργειας)

$$M_K = K \cdot y(t)$$

-Μάζα (μετατροπή ενέργειας)

Εφαρμογή σε Μηχανικά Συστήματα που εκτελούν Περιστροφική κίνηση



περιστροφικός αποσβεστήρας

και

περιστροφικό ελατήριο

<u>Μεγέθη</u>

-Μετατόπιση: φ(t)

-Ταχύτητα:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$$

-Επιτάχυνση:

$$\alpha(t) = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi(t) = \frac{d}{dt}\omega(t)$$

-Ροπή M(t)

<u>Νόμοι</u>

Νεύτωνα

ΣΜ = J·α

«Ισορροπία Ροπών»

……………………………

Ενεργειακά πως εξηγείται;

<u>Υλικά στοιχεία</u>

-Αποσβεστήρας (τριβή)

$$M_a = B \cdot \frac{d}{dt}\varphi(t)$$

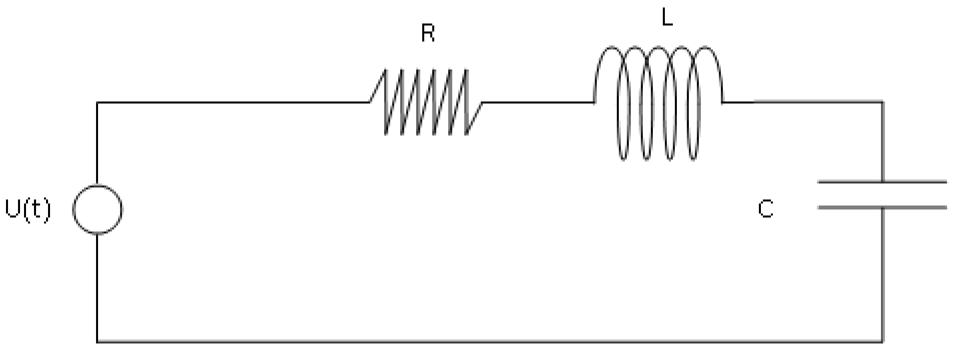
-Ελατήριο (αποθήκευση)

$$\mathrm{M}_K = K\varphi(t)$$

-Αδράνεια (μετατροπή)

$$M_J = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)$$

Εφαρμογή σε Ηλεκτρικά Συστήματα (Κυκλώματα)



<u>Μεγέθη</u>

-Φορτίο Q(t)

-Ρεύμα

$$i(t) = \frac{d}{dt} Q(t)$$

-Τάση u(t)

<u>Νόμοι</u> (Kirchhoff)

- Σi=0 (ισορροπία εντάσεων κόμβου)
- Σu=0 (ισορροπία τάσεων βρόχου)

....

Ενεργειακά πως εξηγείται;

<u>Υλικά στοιχεία</u>

-Αντίσταση (τριβή) $U_R(t) = i(t) \cdot R$

-Πυκνωτής (συσσώρευση)

$$u = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

-Πηνίο (μετατροπή)

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

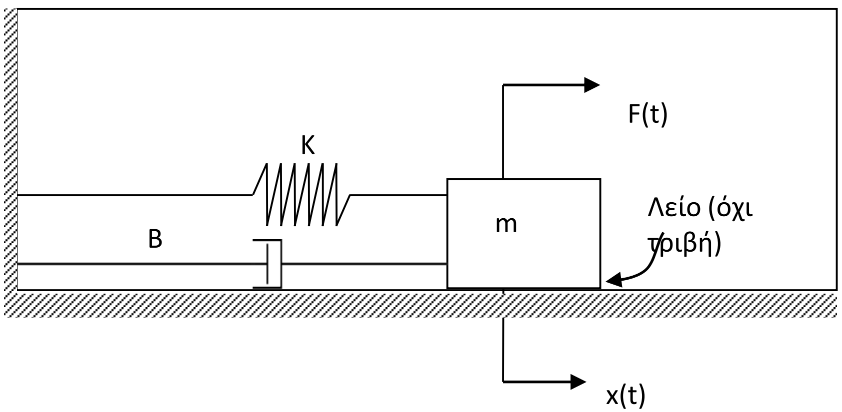
Γενικά θα ισχύουν οι αντιστοιχίες του παρακάτω πίνακα

Φαινόμενα:	Μηχανικό	Περιστροφικό	Ηλεκτρικό	Μαγνητικό	Θερμικό	Υδραυλικό
Γενικευμένη μεταβλητή x	Μετατόπιση x	Γωνία περιστροφής φ	Ηλεκτρικό φορτίο Q	Μαγνητική ροή Φ	Θερμότητα Q	Όγκος ρευστού Q
Γενικευμένη ταχύτητα $\overset{\circ}{x}$	Ταχύτητα υ	Γωνιακή ταχύτητα ω	Ηλεκτρική ένταση i	Τάση u	Παροχή θερμότητας q	Παροχή ρευστού q
Γενικευμένη δύναμη F	Δύναμη F	Ροπή M	Τάση u	Ένταση i	Θερμοκρασία θ	Πίεση p
Απώλειες ισχύος $D = D(\overset{\circ}{x})$	$\frac{1}{2}B\upsilon^2$	$\frac{1}{2}B\omega^2$	$\frac{1}{2}Ri^2$	$\frac{1}{2R}u^2$	$\frac{1}{2}Rq^2$	$\frac{1}{2}Rq^2$
Γενικευμένη δυναμική ενέργεια $V = V(x)$	$\frac{1}{2}Kx^2$	$\frac{1}{2}K\varphi^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$	$\frac{1}{2L}\Phi^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$	$\frac{1}{2C}Q^2$
Γενικευμένη κινητική ενέργεια $J = J(x,\overset{\circ}{x})$	$\frac{1}{2}M\upsilon^2$	$\frac{1}{2}J\omega^2$	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}Cu^2$	–	–

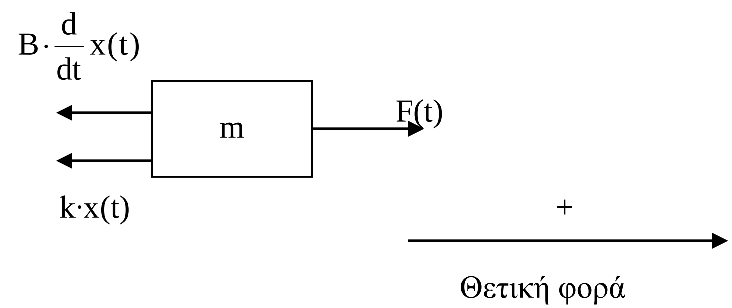
Παραδείγματα εύρεσης μοντέλου (ομοιώματος) συστήματος

1) Μάζα, ελατήριο, αποσβεστήρας

1) Μάζα, ελατήριο, αποσβεστήρας



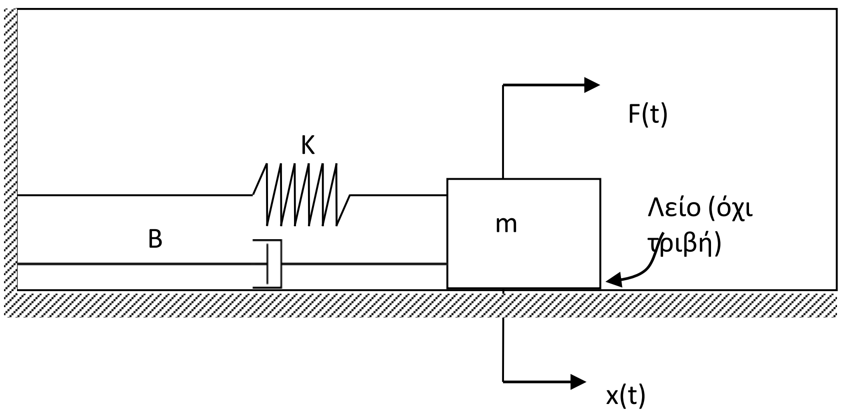
Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος: Δ.Ε.Σ

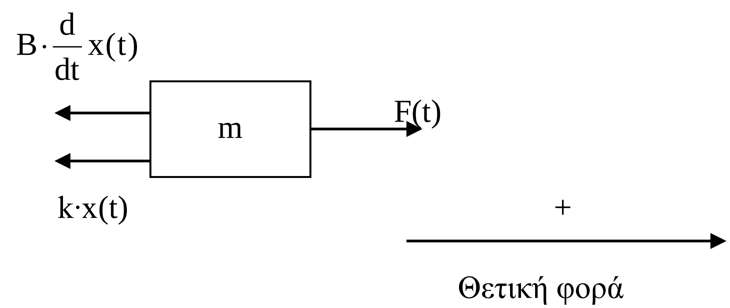


$$\Sigma \mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \alpha \Rightarrow -\mathrm{B} \cdot \frac{d}{dt} x(t) - k \cdot x(t) + f(t) = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) \Rightarrow$$

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + B \cdot \frac{d}{dt} x(t) + k \cdot x(t) = f(t)$$

1) Μάζα, ελατήριο, αποσβεστήρας (συνέχεια)





ή αν

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}\,(t), \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \ddot{x}\,(t)$$

Τότε:

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

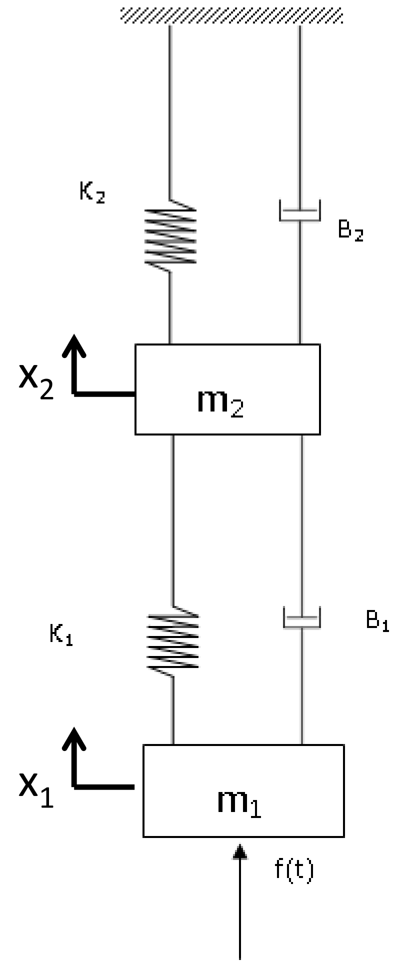
Παραδείγματα εύρεσης μοντέλου (ομοιώματος) συστήματος

2) Μέρος ανάρτησης βαρέως οχήματος

2) Κομμάτι ανάρτησης βαρέως οχήματος

- Έστω m_2 τροχός (ζάντα), m_1 μέρος ελαστικού και $m_2 > m_1$

- Το αμετακίνητο όριο αντιστοιχεί στη μάζα αμαξώματος M.



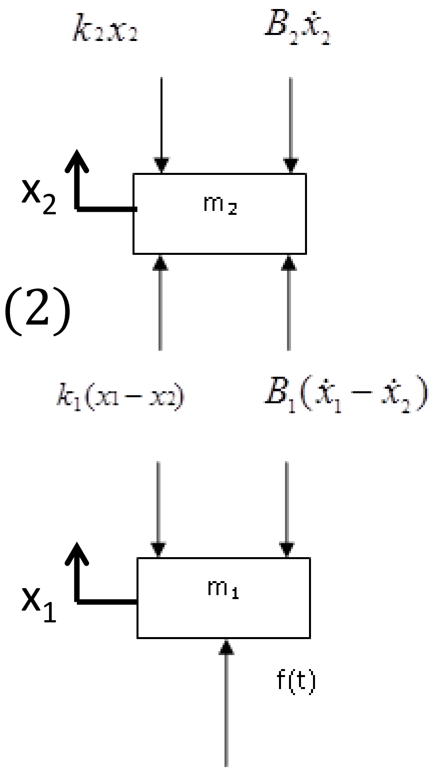
Άρα:

Η προσέγγιση αυτή θεωρεί μικρές μετατοπίσεις (μόνο κίνηση τροχού, το αμάξωμα σχεδόν ακίνητο).

2) Κομμάτι ανάρτησης βαρέως οχήματος (συνέχεια)

<u>Προσοχή</u>: $\mathrm{x}_1(\mathrm{t}), \mathrm{x}_2(\mathrm{t})$ από τη θέση ισορροπίας!

$$m_1: -B_1(\dot{x_1} - \dot{x_2}) - k_1(x_1 - x_2) + f = m_1\ddot{x_1} \ (1)$$



$$m_2: B_1(\dot{x_1} - \dot{x_2}) + k_1(x_1 - x_2) - k_2x_2 - B_2\dot{x_2} = m_2\ddot{x_2} \ (2)$$

Το όρισμα (t) παραλείπεται για συντομία!

Κομμάτι ανάρτησης βαρέως οχήματος (συνέχεια)

…ταξινομώντας τους όρους στις (1), (2):

$$m_1\ddot{x}_1 + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = F \qquad (3)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + B_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = k_1(x_1 - x_2) + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \qquad (4)$$

Για κάθε σώμα μια Δ.Ε. 2ης τάξης

2) Κομμάτι ανάρτησης βαρέως οχήματος (συνέχεια)

Αν θέλουμε τη σχέση x_2 (μετατόπιση της ζάντας) και F;

- Ορίζω τελεστή D, ώστε $Dx = \frac{d}{dt}x$: Η παράγωγος έγινε γινόμενο!

- Μετατρέπω τις Διαφορικές εξισώσεις (3) και (4) σε αλγεβρικές εξισώσεις!

$(3) => \ m_1 \cdot D^2 \cdot x_1 + B_1 \cdot D \cdot x_1 - B_1 \cdot D \cdot x_2 + k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x_2 = F \quad (5)$

$(4) =>$

$m_2 \cdot D^2 \cdot x_2 + B_2 \cdot D \cdot x_2 + k_2 \cdot x_2 = k_1 \cdot x_1 - k_1 \cdot x_2 + B_1 \cdot D \cdot x_1 - B_1 \cdot D \cdot x_2 \quad (6)$

2) Κομμάτι ανάρτησης βαρέως οχήματος (συνέχεια)

Λύνω την (5) ως προς x_1 και αντικαθιστώ στην (6) οπότε λαμβάνω:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot D^4 \cdot x_2 + (m_1 \cdot B_1 + m_1 \cdot B_2 + m_2 \cdot B_1) \cdot D^3 \cdot x_2 + (m_1 \cdot k_1 + m_1 \cdot k_2 + m_2 \cdot k_1 + B_1 \cdot B_2) \cdot D^2 \cdot x_2 + (B_1 \cdot k_2 + B_2 \cdot k_1) \cdot D \cdot x_2 + k_1 \cdot k_2 \cdot x_2 = B \cdot D \cdot F + k_1 \cdot F$$

με $D \triangleq \frac{d}{dt}$

Άρα:

Ο βαθμός του συστήματος με είσοδο δύναμης F και έξοδο την μετατόπιση x_2 είναι 4 (εφόσον η σχετική Δ.Ε. είναι 4ης τάξης)

Ερώτηση: Τι βαθμού θα είναι το σύστημα με είσοδο F και έξοδο μετατόπιση x1;

Παραδείγματα εύρεσης μοντέλου (ομοιώματος) συστήματος

3) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή τάσης

3) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή τάσης

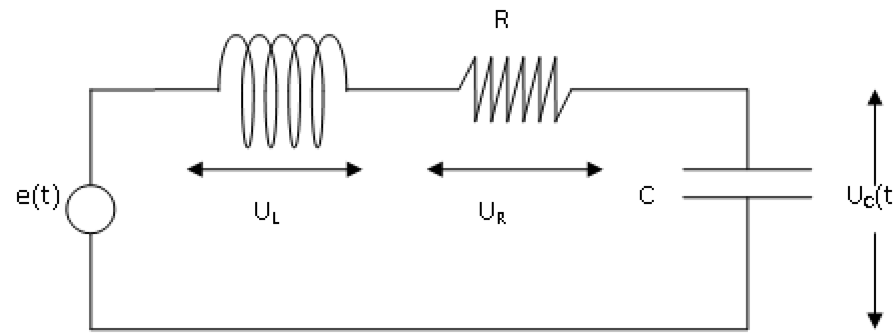
Σύστημα με:

- Είσοδο: e(t)

και

- Έξοδο: Τάση πυκνωτή

$$U_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$



3) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή τάσης (συνέχεια)

2ος Νόμος του Kirchhoff:

$$U_L + U_R + U_C - e(t) = 0 =>$$

$$L\frac{d}{dt}i(t) + i(t)R + \frac{1}{C}\int i(t)dt - e(t) = 0 \qquad (1)$$

- Όμως $U_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt => i(t) = c\frac{d}{dt}U_c(t)$ (2)

- Οπότε μέσω των (1), (2):

$$LC\frac{d^2}{dt^2}U_c(t) + RC\frac{d}{dt}U_c(t) + U_c(t) - e(t) = 0 =>$$
$$LC\ddot{U}_c(t) + RC\dot{U}_c(t) + U_c(t) = e(t)$$

Παραδείγματα εύρεσης μοντέλου (ομοιώματος) συστήματος

4) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή έντασης

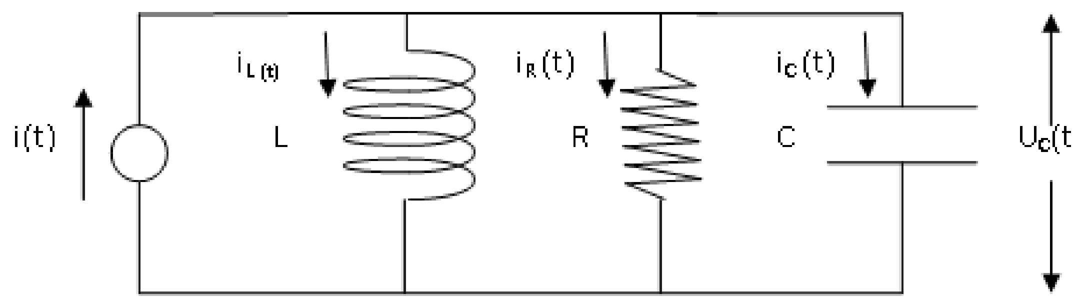
4) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή έντασης

Σύστημα με:

- Είσοδο: $i(\mathrm{t})$

και

- Έξοδο: Τάση πυκνωτή



$$U_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

4) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή έντασης (συνέχεια)

- $U_L(t)=U_R(t)=U_C(t)$ εφόσον πρόκειται για παράλληλους κλάδους
- Πρώτος (1ος) Νόμος του Kirchhoff:

$$i(t) = i_L(t) + i_R(t) + i_c(t) \qquad (1)$$

- $U_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) \qquad => i_L(t) = \frac{1}{L}\int U_L(t)dt = \frac{1}{L}\int U_C(t)dt \qquad (2)$

και

$$U_R(t) = i_R(t) \cdot R => i_R(t) = \frac{U_R(t)}{R} = \frac{U_c(t)}{R} \qquad (3)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)\, dt => i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} Uc(t) \qquad (4)$$

4) Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC με πηγή έντασης (συνέχεια)

Θέτοντας τις (2), (3), (4) στην (1) είναι:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int U_C(t)dt + \frac{U_c(t)}{R} + C\frac{d}{dt}U_c(t) =>$$

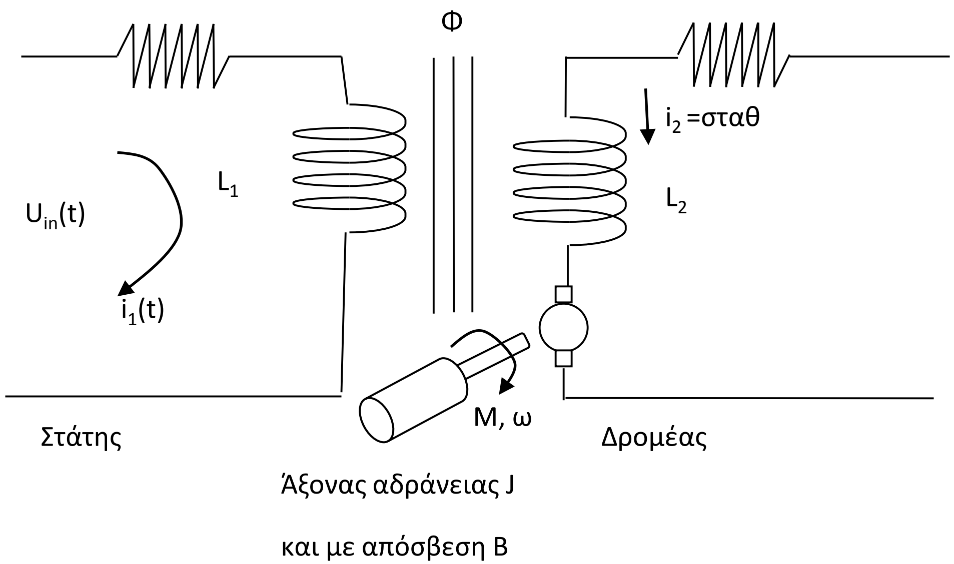
ή

$$C \cdot \frac{d^2}{dt^2}U_C(t) + \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt}U_C(t) + \frac{1}{L} \cdot U_C\ (t) = \frac{d}{dt}i(t)$$

Παραδείγματα εύρεσης μοντέλου (ομοιώματος) συστήματος

5) Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα: Κινητήρας Συνεχούς Ρεύματος

5) Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα: Κινητήρας Συνεχούς Ρεύματος



Σύστημα με:

- Είσοδο: $U_{in}(t)$

και

- Έξοδο: Ταχύτητα $\omega(t)$

<u>Στάτης:</u> $$U_{in}(t) - i_1(t) \cdot R_1 - L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) = 0 \quad (1)$$

<u>Πεδίο:</u> $$M(t) = k \cdot i_1(t) \quad (2)$$ ΓΙΑΤΙ;

<u>Άξονας:</u> $$J \cdot \frac{d}{dt}\omega(t) = -B \cdot \omega(t) + M(t) \quad (3)$$

5) Ηλεκτρομηχανικό Σύστημα: Κινητήρας Συν. Ρεύματος (συνέχεια)

- Χρησιμοποιώ τον τελεστή D ώστε να λύσω την (1) ως προς i_1(t):

$$i_1(t) = \frac{U_{in}(t)}{R_1 + L_1 D} \quad (4)$$

- Αντικαθιστώ τις (4) και (2) στην (3) οπότε:

$$J \cdot L_1 \cdot D^2 \cdot \omega(t) + [R_1 \cdot J + L_1 \cdot B] \cdot D \cdot \omega(t) + B \cdot R_1 \cdot \omega(t) = K \cdot U_{in}\,(t)$$

ή

$$J \cdot L_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\omega(t) + [R_1 \cdot J + L_1 \cdot B] \cdot \frac{d}{dt}\omega(t) + B \cdot R_1 \cdot \omega(t) = K \cdot U_{in}\,(t)$$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης