



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά



Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου

1

Ενότητα # 3: Ανάλογα Συστήματα-Αναλογικά Διαγράμματα

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr

Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σκοποί ενότητας

- Η έννοια της αναλογίας συστημάτων
- Η έννοια της εξομοίωσης συστημάτων
- Τυπικές μέθοδοι εξομοίωσης – Αναλογικά διαγράμματα

Περιεχόμενα ενότητας

Ανάλογα συστήματα – Έννοια και χρήση

Αναλογία συντελεστών

Αναλογίες Νόμων/ Μεγεθών/ Στοιχείων – Μετάβαση από Σύστημα στο Ανάλογο του

Παράδειγμα Μετάβασης από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό Τάσης

Παράδειγμα Μετάβασης από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό Έντασης

Περιεχόμενα ενότητας

Εξομοίωση Συστημάτων

Αναλογικά Διαγράμματα κ Αναλογικός Υπολογιστής

Τυπικά κυκλώματα Εξομοίωσης Συστημάτων 1^{ου}
βαθμού

Τυπικά κυκλώματα Εξομοίωσης Συστημάτων 2^{ου}
βαθμού

Παράδειγμα 1, Παράδειγμα 2, Συμπεράσματα

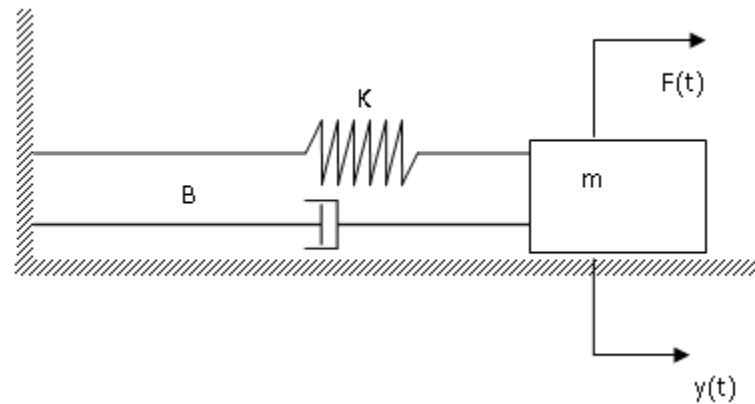
Ανάλογα Συστήματα

Έννοια και χρήση

Ανάλογα συστήματα: Έννοια και χρήση

- Ανάλογα συστήματα → Συστήματα διαφορετικής φύσης (ηλεκτρικά-μηχανικά- υδραυλικά κλπ) που περιγράφονται από ίδιας μορφής Διαφορικές Εξισώσεις (Δ.Ε.) αλλά προφανώς με διαφορετικούς συντελεστές
- Αναλογία Συντελεστών (διότι άλλα φυσικά μεγέθη και άλλα υλικά στοιχεία για συστήματα διαφορετικής φύσης)

Αναλογία συντελεστών (1)



Αναλογία συντελεστών (2)

Ευθύγραμμο Μηχανικό	$m \cdot \ddot{y}(t) +$	$B \cdot \dot{y}(t) +$	$k \cdot y(t) =$	$F(t)$
	↓	↓	↓	↓
Περιστροφικό Μηχανικό	$J \cdot \ddot{\phi}(t)$	$B_{\text{περ}} \cdot \dot{\phi}(t)$	$K_{\text{περ}} \cdot \phi(t)$	$M(t)$
Ηλεκτρικό Τάσης	$L \cdot \ddot{Q}(t)$	$R \cdot \dot{Q}(t)$	$\frac{1}{C} \cdot Q(t)$	$e(t)$
Ηλεκτρικό Έντασης	$C \cdot \ddot{\phi}(t)$	$\frac{1}{R} \cdot \dot{\phi}(t)$	$\frac{1}{L} \cdot \phi(t)$	$i(t)$
$\phi(t)$ Μαγνητική Ροή, $Q(t)$ Ηλεκτρικό φορτίο, $B_{\text{περ}}$ Περιστροφικός αποσβεστήρας, $K_{\text{περ}}$ Περιστροφικό ελατήριο				

Αναλογίες Νόμων/ Μεγεθών/ Στοιχείων

Μετάβαση από Σύστημα στο Ανάλογο του

Αναλογίες Νόμων/ Μεγεθών/ Στοιχείων και Μετάβαση από Σύστημα στο Ανάλογο του

Αναλογίες Νόμων/ Μεγεθών για να «κατασκευάσουμε» ΔΕ ⁽³⁷⁾
ανάλογων συστημάτων: ΕΝΑΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΤΑΡΟΠΑΣ

Μηχανικά Έξω Μετατόπιση: $\Sigma F = 0$
 » » Περίστροφο: $\Sigma M = 0$
 H_2 Κυκλώματα Τάσης: $\Sigma u = 0$ (2^{ος} Kirchhoff)
 H_1 Κυκλώματα Έντασης: $\Sigma i = 0$ (1^{ος} Kirchhoff)

Μάζα ή Αδράνεια \Rightarrow Βρόχος (ανάγρο Τάσης) \Rightarrow Κόμβος (ανάγρο Έντασης)
 $m \quad \downarrow$

Σύνολο σε Μηχανικό Σύστημα \Rightarrow Εξωτερικοί Βρόχοι \Rightarrow Κόμβος Γείωσης
 (σφραγή ή έδαφος) (ανάγρο Τάσης) (ανάγρο Έντασης)
 $\underline{\text{Ταχύτητα} = 0} \quad \underline{u = 0} \quad \underline{v = 0}$

«Εξαρτήματα» που ανήκουν \Rightarrow Εξωτερικοί Κόμβοι \Rightarrow Κόμβοι που ανήκουν
 m ή \downarrow με τα Σύνολα (ανάγρο Τάσης) (ανάγρο Έντασης)
 κυκλώματος και γείωση (ανάγρο Έντασης)

Κοινά εξαρτήματα \Rightarrow H_2 Στοιχεία εν έδαφ \Rightarrow H_1 Στοιχεία που ανήκουν
 μεταξύ σωμάτων όταν κοινός κόςβος μεταξύ δύο βρόχων (ανάγρο Τάσης) όταν κοινός κόςβος μεταξύ δύο βρόχων (ανάγρο Έντασης)

«Ταχύτητα» \Rightarrow «Ένταση βρόχου» \Rightarrow Τέση Κόμβου ως προς ΓΕΙΩΣΗ
 «Δύναμη», «φορτίο» «Πηγή Τάσης» «Πηγή Έντασης»
 (ανάγρο Τάσης) (ανάγρο Έντασης)

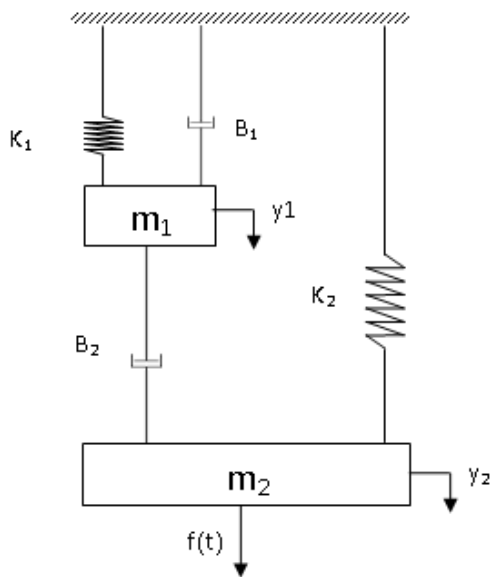
Παράδειγμα Μετάβασης

Από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό τάσης

Παράδειγμα Μετάβασης από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό Τάσης

Αναλογίες Νεύτων / Μεταβολών για να «κατασκευάσουμε» ΔΕ ⁽³⁷⁾
 ανάλογων συστημάτων: ΕΝΑΣ ΚΩΔΙΚΑΣ ΜΕΤΑΤΡΟΠΗΣ

Μηχανικό Σύστημα



Μηχανικά Συστ. Μεταβολών: $\Sigma F = 0$
 >> >> Περαιτέρω: $\Sigma M = 0$
 Η₊ Κυκλώματα Τάσης: $\Sigma u = 0$ (2^{ος} Kirchhoff)
 Η₊ Κυκλώματα Έντασης: $\Sigma i = 0$ (1^{ος} Kirchhoff)

Μάζα ή Αδράνεια \Rightarrow Βρόχος (ανάγω Τάσης) \Rightarrow Κόμβος (ανάγω Έντασης)
 $\underline{m} \Rightarrow \underline{i}$

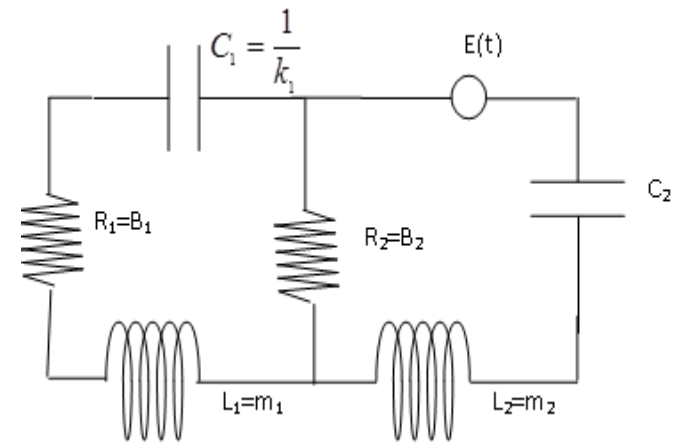
Σύνολο σε Μηχανικό Σύστημα \Rightarrow Εξωτερικοί Βρόχοι \Rightarrow Κόμβος Γείωσης (ανάγω Έντασης)
 (οροφή ή έδαφος) \Rightarrow (ανάγω Τάσης) \Rightarrow (ανάγω Έντασης)
 Ταχύτητα = 0 \Rightarrow $\underline{u} = 0$

«Εξαρτήματα» που ανήκουν \Rightarrow Εξωτερικοί Κόμβοι \Rightarrow Κόμβοι που συνδέουν Κόμβους και γείωση (ανάγω Έντασης)
 $\underline{m} \Rightarrow \underline{i}$ με τα Σύνολα \Rightarrow Κόμβοι που συνδέουν Κόμβους και γείωση (ανάγω Έντασης)

Κοινά εξαρτήματα \Rightarrow Η₊ Στοιχεία εν σειρά στον κοινό κλάδο μεταξύ δύο βρόχων (ανάγω Τάσης) \Rightarrow Η₊ Στοιχεία που συνδέουν Κόμβους στον κοινό κλάδο μεταξύ δύο βρόχων (ανάγω Έντασης)

«Ταχύτητα» \Rightarrow «Ένταση Βρόχου» \Rightarrow Τάση Κόμβου ως προς Γείωση
 «Δύναμη», «Ροπή» \Rightarrow «Πηγή Τάσης» \Rightarrow «Πηγή Έντασης»
 (ανάγω Τάσης) (ανάγω Έντασης)

Ηλεκτρικό Τάσης



Παράδειγμα Μετάβασης από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό Τάσης

Μηχανικό Σύστημα

- α) Δύο μάζες m_1, m_2
- β) Σύνδεση m_1 , με όριο: K_1, B_1
- γ) Σύνδεση m_2 , με όριο: K_2
- δ) Κοινή σύνδεση m_1, m_2 : B_2
- ε) Δύναμη $F(t)$ σε m_2

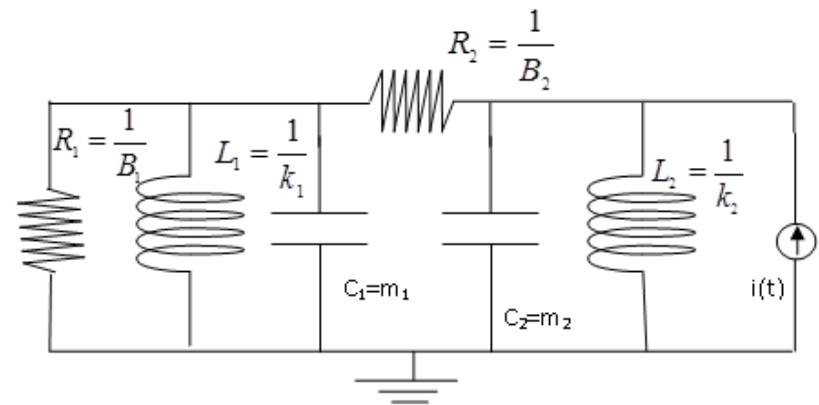
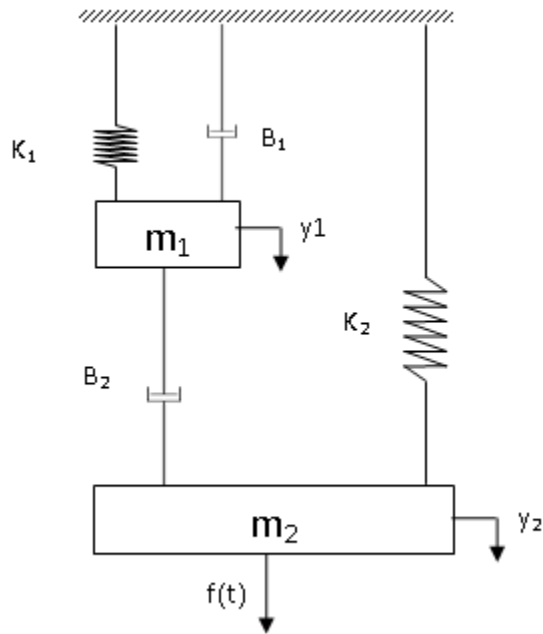
Ηλεκτρικό Τάσης

- Δύο βρόχοι με L_1, L_2
- Σύνδεση L_1 με $C_1 = \frac{1}{K_1}$ & $R_1 = B_1$ σε εξωτερικό κλάδο
- Σύνδεση L_2 με $C_2 = \frac{1}{K_2}$ σε εξωτερικό κλάδο
- Κοινός κλάδος των εξωτερικών (που περιέχουν L_1 και L_2): $R_2 = B_2$
- Τάση $E(t)$ σε κλάδο με L_2

Παράδειγμα Μετάβασης

Από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό Έντασης

Παράδειγμα Μετάβασης από Μηχανικό σε Ηλεκτρικό Έντασης



Αναλογίες Μηχανικού συστήματος με Ηλεκτρικό Έντασης

Μηχανικό Σύστημα

α Δύο μάζες m_1, m_2

β Σύνδεση m_1 , με όριο: k_1, B_1

γ Σύνδεση m_2 , με όριο: k_2

δ Κοινή σύνδεση m_1, m_2 : B_2

ε Δύναμη $F(t)$ σε m_2

Ηλεκτρικό Έντασης

Δύο παράλληλοι κλάδοι με $C_1, C_2 \rightarrow$ γείωση

Παράλληλοι κλάδοι $L_1 = \frac{1}{K_1}$

$R_1 = \frac{1}{B_1} \rightarrow$ γείωση

Παράλληλοι κλάδοι $L_2 = \frac{1}{K_2}$

Κοινό στοιχείο $R_2 = \frac{1}{B_2}$ μεταξύ C_1, C_2

Πηγή έντασης $i(t)$ (δεξιά του C_2)

Παρατηρήσεις

- Άρα ξέροντας την Δ.Ε. που περιγράφει το μηχανικό σύστημα έχουμε άμεσα την Δ.Ε. που περιγράφει το ηλεκτρικό.

- Άσκηση για το σπίτι: Να βρεθούν οι Δ.Ε. του μηχανικού ανά μάζα όπως και η Δ.Ε. του συστήματος με είσοδο $f(t)$ και έξοδο $y_2(t)$

(Απάντηση.....)

Απάντηση:

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + B_1 \dot{y}_1(t) + k_1 y_1(t) = B_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t))$$

και

$$m_2 \ddot{y}_2(t) + B_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 y_2(t) = f(t)$$

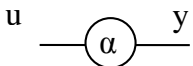
$$m_1 m_2 \frac{d^4}{dt^4} y_2(t) + [m_2 (B_1 + B_2) + m_1 B_2] \frac{d^3}{dt^3} y_2(t) + [m_2 k_1 + B_1 B_2 + k_2 m_1] \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + [k_1 B_2 + k_2 (B_1 + B_2)] \frac{d}{dt} y_2(t) + [k_1 k_2] y_2(t) = m_1 \frac{d^2}{dt^2} f(t) + [B_1 + B_2] \frac{d}{dt} f(t) + k_1 f(t)$$

Εξομοίωση Συστημάτων

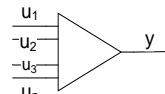
Αναλογικά Διαγράμματα και Αναλογικός
Υπολογιστής

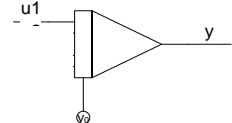
Εξομοίωση Συστημάτων: Αναλογικά Διαγράμματα κ Αναλογικός Υπολογιστής

- Αναλογικός Υπολογιστής: Χρησιμοποιεί ηλεκτρικά κυκλώματα που εκτελούν πράξεις, όπως ακολούθως

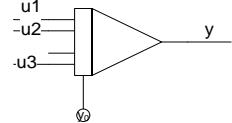
α) Υποπολλαπλασιασμού Ποτενσιόμετρο  $y = \alpha u, \alpha \leq 1$

β) Αναστροφής προσήμου Αναστροφέας  $y = -u$

γ) Άθροισης Άθροιστής  $y = -\sum_{i=1}^n u_i$

δ) Ολοκλήρωσης Ολοκληρωτής  $y = y_0 - \int u dt$

ε) Ενίσχυσης Ενισχυτής  $y = -\alpha u$

στ) Συνδυασμού των παραπάνω  $y = y_0 - \alpha \int u_1 dt - \alpha \int u_2 dt - \alpha \int u_3 dt$
Άθροιση, ολοκλήρωση, ενίσχυση (και αναστροφή!)

Τυπικά κυκλώματα Εξομοίωσης

Συστήματα 1^{ου} βαθμού

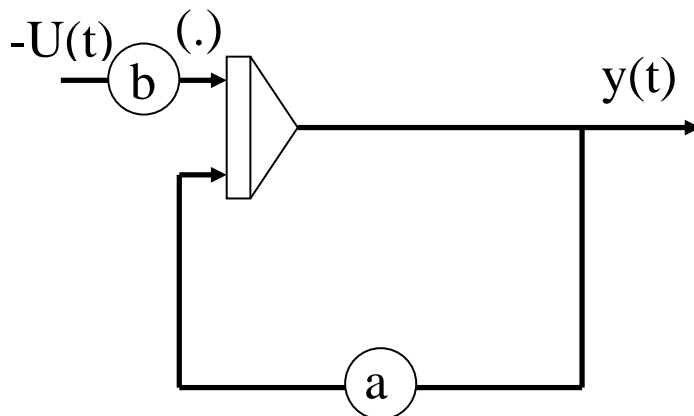
Τυπικά κυκλώματα Εξομοίωσης Συστημάτων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού

- Σύστημα 1^{ου} βαθμού = Δ. Ε. 1^{ης} τάξης

$$\frac{d}{dt}y(t) + \alpha y(t) = bu(t) \text{ λύση ως προς μέγιστη παράγωγο}$$

Άρα: ΜΙΑ ΦΟΡΑ ολοκλήρωση για να βρεθεί το $y(t)$!

ΕΣΤΩ:



(.) → Σημείο ενδιαφέροντος

ΙΣΧΥΕΙ;

Για το σημείο ενδιαφέροντος (.) θα ισχύει:

$\alpha y(t) - bu(t)$ αν ακολουθήσουμε πορεία από αριστερά προς δεξιά \rightarrow

αλλά και

αν ακολουθήσουμε πορεία από δεξιά προς αριστερά \leftarrow

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}y(t) + \alpha y(t) = bu(t) \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) + \alpha y(t) = bu(t)$$

Τυπικά κυκλώματα Εξομοίωσης

Συστήματα 2^{ου} βαθμού

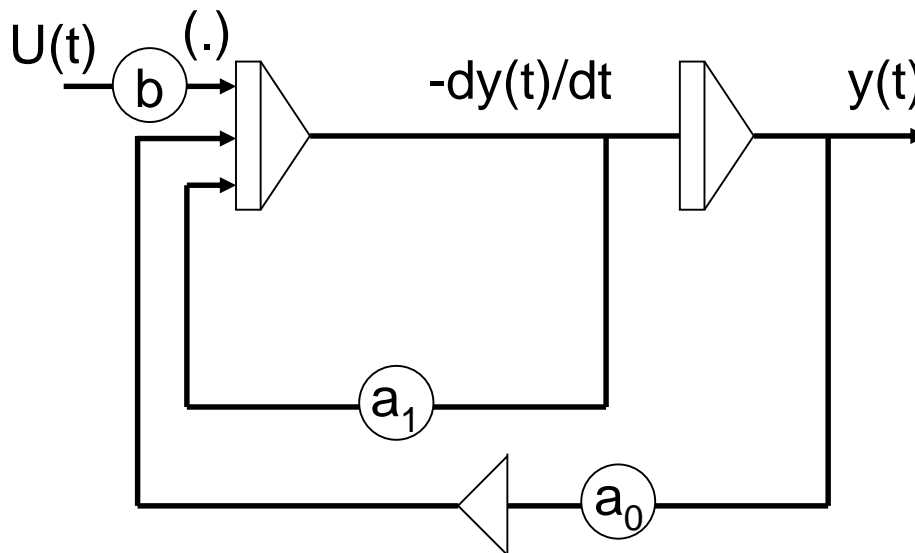
Τυπικά κυκλώματα εξομοίωσης - Σύστημα 2^{ου} βαθμού

Σύστημα 2^{ου} βαθμού = Δ. Ε. 2^{ης} τάξης

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \alpha_1 \frac{d}{dt} y(t) + \alpha_0 y(t) = bu(t) \quad \text{λύση ως προς μέγιστη παράγωγο}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\alpha \frac{d}{dt} y(t) - \alpha_0 y(t) + bu(t)$$

Άρα: ΔΥΟ ΦΟΡΕΣ ολοκλήρωση για να βρεθεί το $y(t)$!



Για το σημείο ενδιαφέροντος (.) θα ισχύει:

$$bu(t) - \alpha_1 \frac{d}{dt} y(t) - \alpha_0 y(t) \quad \text{για πορεία από αριστερά προς δεξιά} \rightarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad \text{για πορεία από δεξιά προς αριστερά} \leftarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} y(t) = bu(t) - \alpha_1 \frac{d}{dt} y(t) - \alpha_0 y(t) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \alpha_1 \frac{d}{dt} y(t) + \alpha_0 y(t) = bu(t)$$

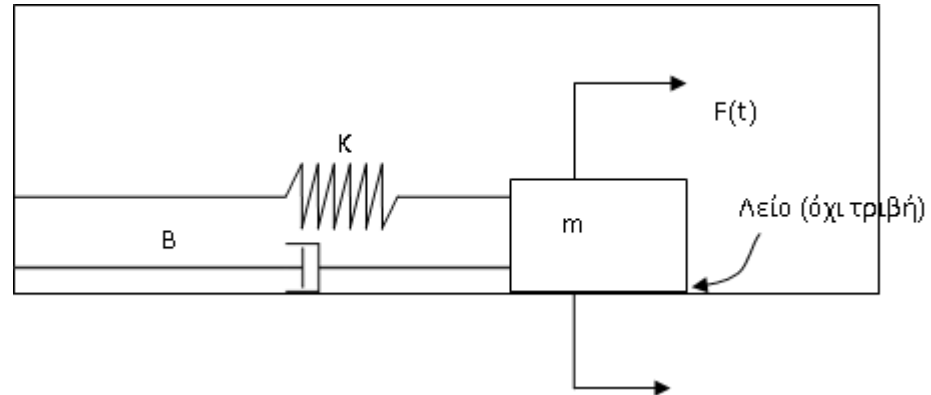
Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1

Ως γνωστόν:

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + B \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = f(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\frac{B}{m} \frac{d}{dt} y(t) - \frac{k}{m} y(t) + \frac{1}{m} f(t)$$

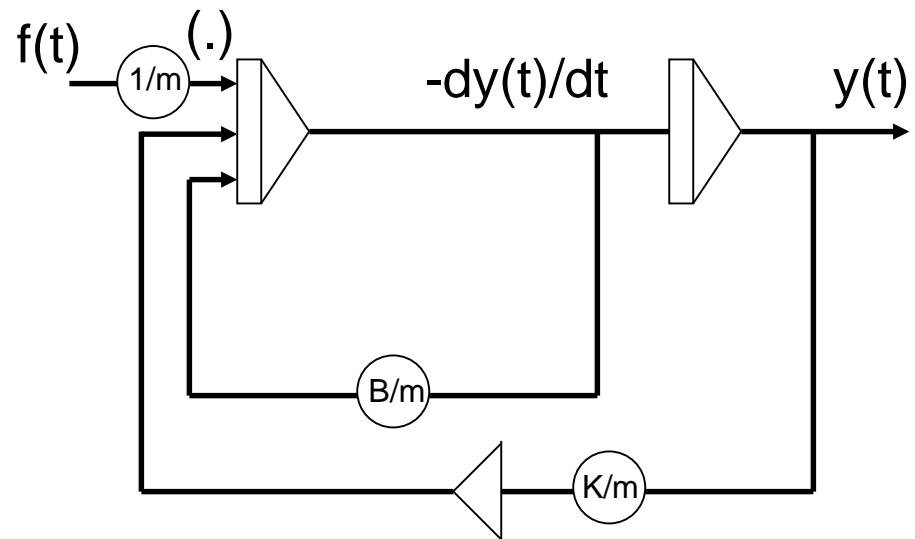


Οπότε 2 ολοκληρωτές:

Ερώτηση:

Και αν B/m ή/και $k/m > 1$;

Πως προχωρούμε;

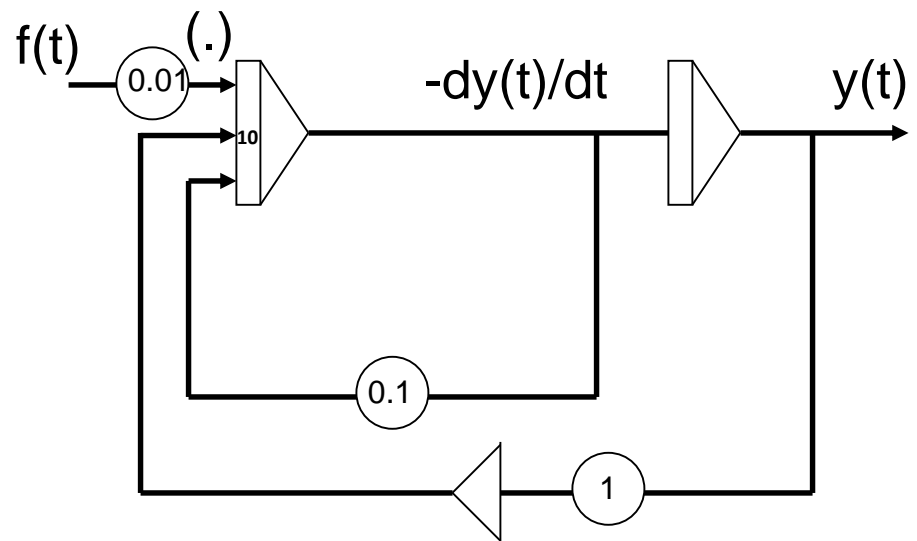


Απάντηση: Ρυθμίζω έτσι
την ενίσχυση του
ολοκληρωτή ώστε να έχω
κέρδη <1 στα
ποτενσιόμετρα!

Δηλαδή:

Έστω $B=10$, $m=10$, $k=100$

$$\frac{1}{10} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\frac{1}{10} \frac{d}{dt} y(t) - \frac{10}{10} y(t) + \frac{0.1}{10} f(t)$$



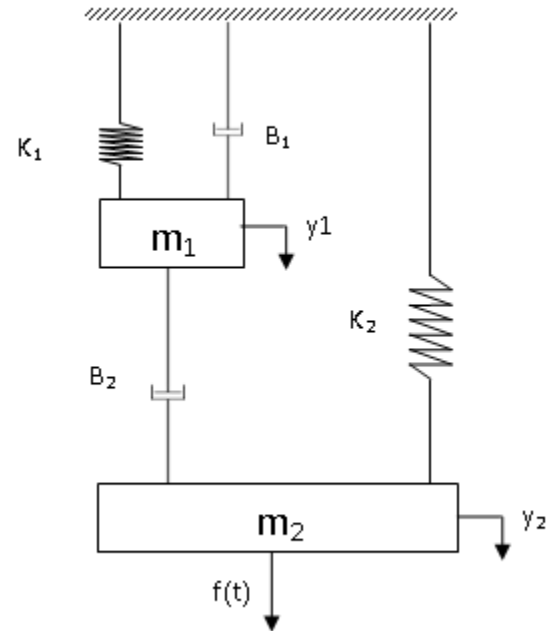
Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2

Το οποίο έχει εξισώσεις
(θυμηθείτε πριν!)

$$m_1 : m_1 \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + B_1 \frac{d}{dt} y_1(t) + k_1 y_1(t) = B \left[\frac{d}{dt} y_2(t) - \frac{d}{dt} y_1(t) \right] \quad (1)$$

$$m_2 : m_2 \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + B_2 \left[\frac{d}{dt} y_2(t) - \frac{d}{dt} y_1(t) \right] + k_2 y_2(t) = f(t) \quad (2)$$



Παράδειγμα 2

Το οποίο έχει εξισώσεις
(θυμηθείτε πριν!)

$$m_1 : m_1 \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + B_1 \frac{d}{dt} y_1(t) + k_1 y_1(t) = B \left[\frac{d}{dt} y_2(t) - \frac{d}{dt} y_1(t) \right] \quad (1)$$

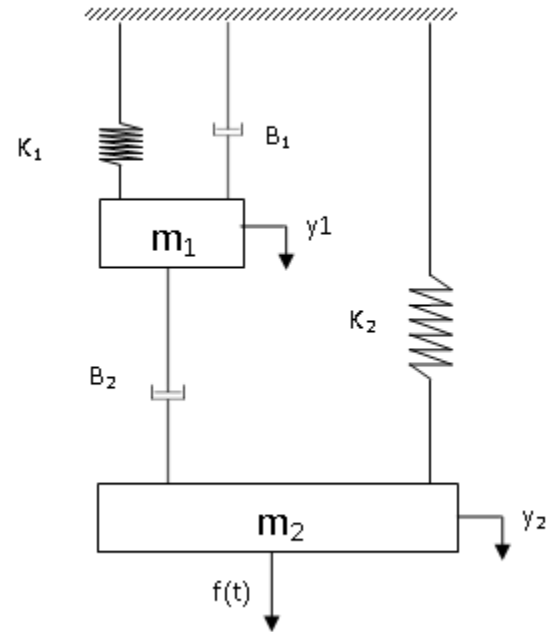
$$m_2 : m_2 \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) + B_2 \left[\frac{d}{dt} y_2(t) - \frac{d}{dt} y_1(t) \right] + k_2 y_2(t) = f(t) \quad (2)$$

Λύνοντας ως προς τις μεγιστοβάθμιες

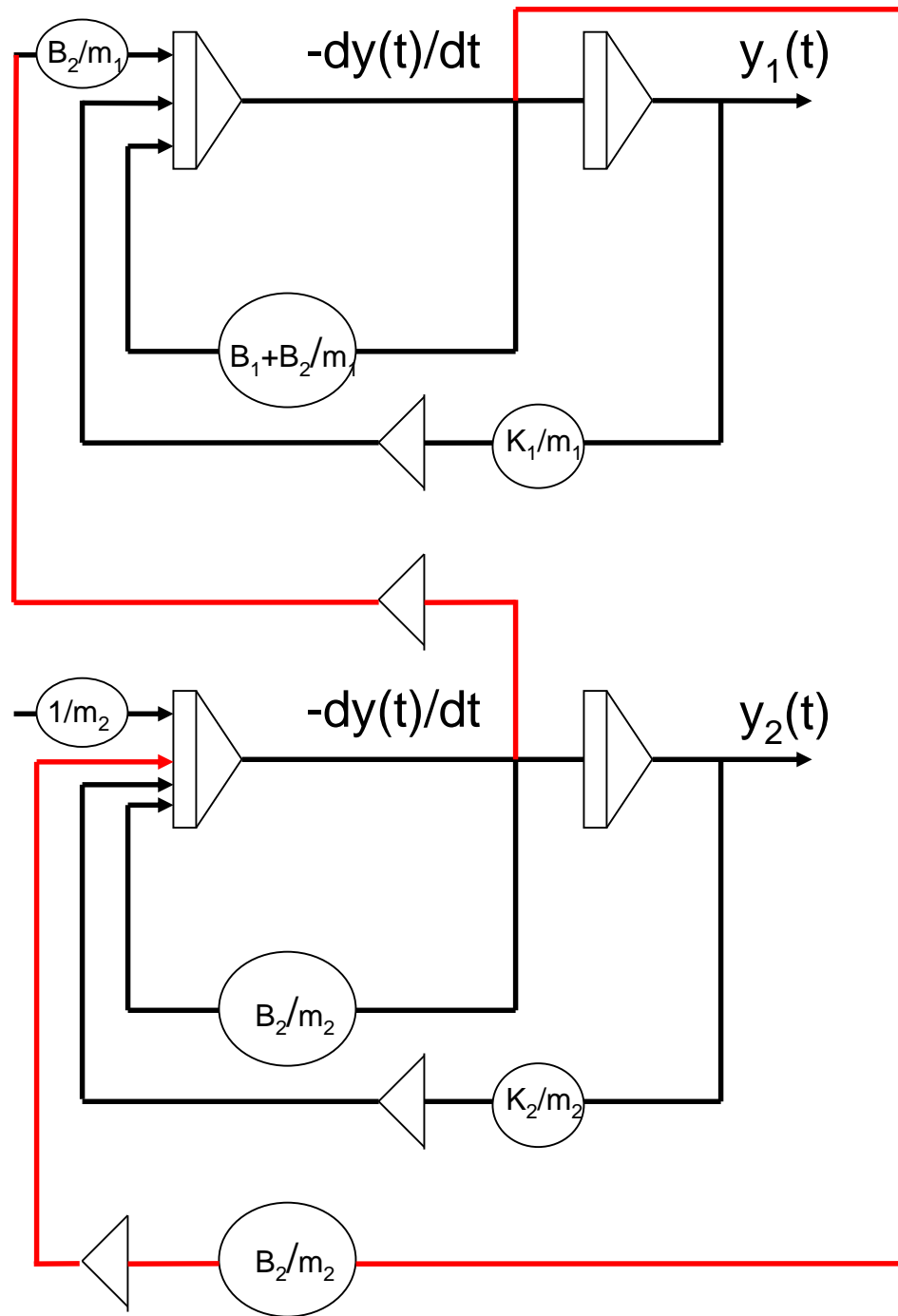
παραγώγους (και αν) $\frac{d}{dt} x(t) \equiv \dot{x}(t)$

$$\ddot{y}_1(t) = -\frac{B_1 + B_2}{m_1} \dot{y}_1(t) - \frac{k_1}{m_1} y_1(t) + \frac{B_2}{m_1} \dot{y}_2(t) \quad (4)$$

$$\ddot{y}_2(t) = -\frac{B_2}{m_2} \dot{y}_2(t) - \frac{k_2}{m_2} y_2(t) + \frac{B_2}{m_2} \dot{y}_1(t) + \frac{1}{m_2} f(t) \quad (5)$$



Με κόκκινο οι είσοδοι που έχουν κόκκινο περίγραμμα στις (4) και (5)



Συμπεράσματα

Συμπεράσματα

- Διαφορετικής φύσης συστήματα υπακούν σε ίδιας δομής διαφορικές εξισώσεις: ΑΝΑΛΟΓΑ συστήματα.
- Χρησιμοποιώντας έναν συνοπτικό οδηγό μπορούμε να βρίσκουμε Δ.Ε άγνωστου συστήματος από **ανάλογό του**.
- Αναλογική εξομοίωση συστημάτων με χρήση στοιχείων όπως αντιστροφείς, ενισχυτές, ολοκληρωτές κλπ.
- Αναλογικά διαγράμματα με τυπική μορφή για 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού συστήματα. **Με υπέρθεση αυτών εξομοιώνουμε συστήματα μεγαλύτερου βαθμού.**

Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης