ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 1

Ενότητα # 4: Μαθηματική εξομοίωση συστημάτων στο επίπεδο της συχνότητας – Μετασχηματισμός Laplace και εφαρμογές σε ηλεκτρικά συστήματα

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Πεδίο χρόνου και πεδίο συχνότητας: Έννοιες

- (Αρμονική) Συνάρτηση Μεταφοράς συστήματος

- Μετασχηματισμός (και πεδίο) Laplace: Χρήση στην αναπαράσταση συστημάτων;

Περιεχόμενα ενότητας

- Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο συχνότητας
- Τυπική συμπεριφορά ηλεκτρικών στοιχείων σε ημιτονοειδή είσοδο $i(t)=\sin(\omega\cdot t)$
- Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος
- Συμπεράσματα
- Παρατηρήσεις

Περιεχόμενα ενότητας

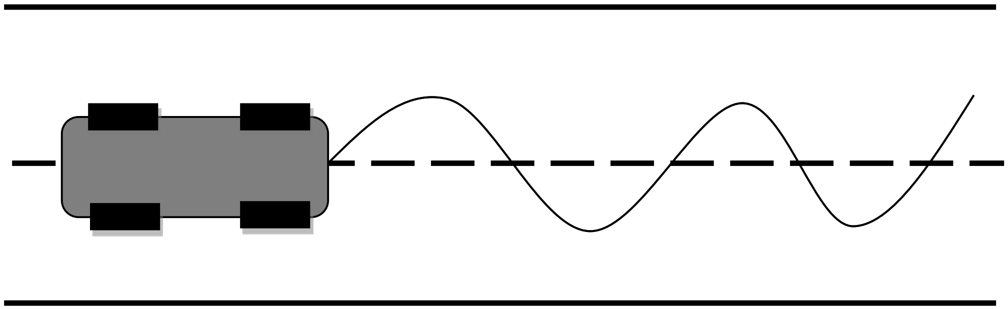
- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace
- Μετασχηματισμοί Laplace βασικών Συναρτήσεων
- Συμπεράσματα
- Εφαρμογή σε ηλεκτρικά συστήματα

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο συχνότητας

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο συχνότητας (1)

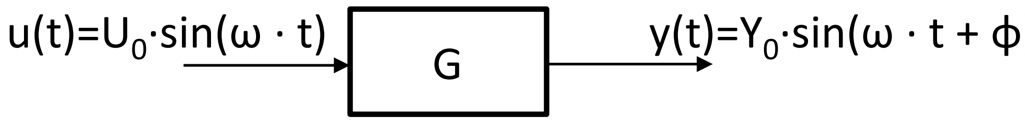
- Αντιστοιχεί σε σειρά πειραμάτων ημιτονοειδών εισόδων σε σύστημα
- Βολική μαθηματική περιγραφή της σχέσης **εισόδου-εξόδου** συστήματος
- Παράδειγμα συμπεριφοράς που αντιστοιχεί στη σειρά πειραμάτων με ημιτονοειδείς εισόδους:

Σλάλομ με όχημα, κρατώντας σταθερή την ταχύτητα κίνηση και στρίβοντας δεξιά-αριστερά όλο και πιο απότομα



Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο συχνότητας (2)

- Έστω σύστημα G, όπως παρακάτω, περιγραφόμενο από γραμμική Δ.Ε.

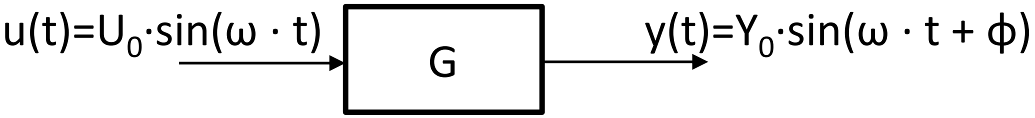


- Τροφοδοτείται με είσοδο $u(t)=U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (με κάποια κυκλική συχνότητα ω)

- Τότε η απόκριση αυτού $y(t)=Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t+ \phi)$ όπου τόσο το πλάτος Y_0 όσο και η φάση φ έχουν μέγεθος που εξαρτάται από το ω.

Μαθηματική εξομοίωση στο πεδίο συχνότητας (2)

- Έστω σύστημα G, όπως παρακάτω, περιγραφόμενο από γραμμική Δ.Ε.



- Τροφοδοτείται με είσοδο $u(t)=U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (με κάποια κυκλική συχνότητα ω)

- Τότε η απόκριση αυτού $y(t)=Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t+ \phi)$ όπου τόσο το πλάτος Y_0 όσο και η φάση φ έχουν μέγεθος που εξαρτάται από το ω.

- <u>Ερώτηση</u>: Πώς αντιλαμβάνεστε την εξάρτηση του πλάτους Y_o και (γωνίας) φάσης φ από την κυκλική συχνότητα της ημιτονοειδούς εισόδου ω;

Τυπική συμπεριφορά ηλεκτρικών στοιχείων σε ημιτονοειδή είσοδο $i(t)=\sin(\omega \cdot t)$

Τυπική συμπεριφορά ηλεκτρικών στοιχείων σε ημιτονοειδή είσοδο i(t)=sin(ωt)

$G \equiv R$ $$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot sin(\omega \cdot t)$$

$G \equiv L$ $$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \omega \cdot L \cdot cos(\omega \cdot t) = \omega \cdot L \cdot sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

$G \equiv C$ $$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int idt = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

- Μπορούμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ αντί των $\cos(\omega \cdot t)$ και $\sin(\omega \cdot t)$;

(ΓΙΑΤΙ; Δοκιμάστε να υπολογίσετε παραγώγους των $\cos(\omega \cdot t)$ και $\sin(\omega \cdot t)$ και κατόπιν αυτή του $e^{j \cdot \omega \cdot t}$. Η τελευταία «δουλεύεται» πιο εύκολα!)

- Έστω λοιπόν $i(t) = I_0 \sin(\omega \cdot t)$ ή $I(j\omega) = I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ (Δηλαδή;)

TOTE

- $u_R(t) = R \cdot i(t) => \mathrm{U}_R(j\omega) = R \cdot I(j\omega) = R \cdot I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} =$

$$= R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \boxed{R \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

- Έστω λοιπόν $i(t) = I_0 \sin(\omega \cdot t)$ ή $I(j\omega) = I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ (Δηλαδή;)

ΤΟΤΕ

- $u_R(t) = R \cdot i(t) => \mathrm{U}_R(j\omega) = R \cdot I(j\omega) = R \cdot I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} =$

$$= R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \boxed{R \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

- $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) => \mathrm{U}_L(j\omega) = L \cdot \frac{d}{dt} I(j\omega) = j \cdot \omega \cdot L \cdot I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} =$

$$= -\omega \cdot L \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) + j \cdot \omega \cdot L \cdot I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\boxed{\omega \cdot L \cdot I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})}$$

- Έστω λοιπόν $i(t)=I_0 \, sin(\omega \cdot t)$ ή $I(j\omega)=I_0 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$ (Δηλαδή;)

TOTE

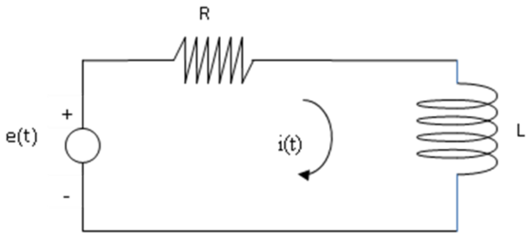
- $$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i dt => U_c(j\omega) = \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}\cdot I_0 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C} I(j\omega) =$$
$$= \frac{I_0}{\omega\cdot C}\sin(\omega\cdot t) - j\boxed{\frac{I_0}{\omega\cdot C}\cdot\cos(\omega\cdot t)}$$
$$\frac{I_0}{\omega\cdot C} sin(\omega\cdot t - \frac{\pi}{2})$$

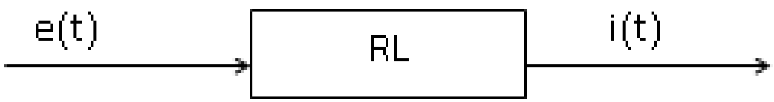
Άρα:

Με χρήση (jω) επιτυγχάνεται η ίδια συμπεριφορά στα στοιχεία που εξετάσαμε!

Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος

Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος (1)



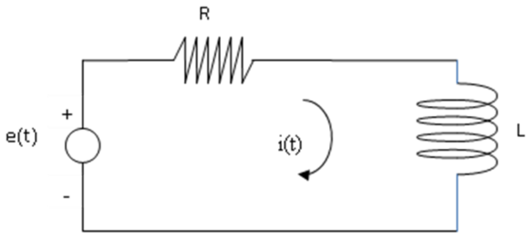


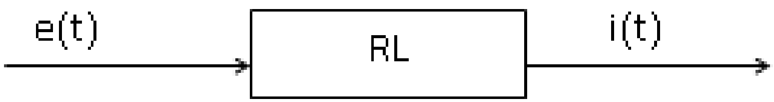
Έστω το κύκλωμα RL με διαφορική εξίσωση $R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = e(t)$

και $e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ή $E(j\omega) = E_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$

Έστω ότι λαμβάνουμε $I(j\omega) = I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ (δεν ξέρουμε κάτι για το I_0!)

Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος (2)





Από Δ.Ε. => $R \cdot I(j\omega) + L \cdot \frac{d}{dt} I(j\omega) = E(j\omega)$ =>

$$R \cdot I_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} + j \cdot I_0 \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} = E_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} =>$$

$$R \cdot I_0 + j \cdot I_0 \cdot \omega \cdot L = E_0 \qquad (1)$$

Άρα:

Με χρήση (jω) (=αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο) η Δ.Ε. έγινε αλγεβρική!

Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος (3)

Από (1) =>

$$I_0 = \frac{E_0}{R+j\cdot\omega L}\frac{\cdot(R-j\cdot\omega\cdot L)}{\cdot(R-j\cdot\omega\cdot L)}\frac{E_0}{R^2+\omega^2\cdot L^2}[R-j\cdot\omega\cdot L]$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}}e^{j\cdot\varphi},\ \ \varphi = -\tan^{-1}(\frac{\omega\cdot L}{R})$$

Δηλαδή το I_0, που ήταν άγνωστο, καταλήγει ως μέγεθος με πλάτος

$\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}}\sim\omega$ και με φάση $\varphi = -tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\sim\omega$

Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος (4)

Έτσι:

$$I(j\omega) = I_0 e^{j\cdot\omega\cdot t} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}} e^{j(\omega\cdot t+\varphi)}$$

Οπότε και το παραγόμενο

$$i(t) = \mathrm{Im}[\mathrm{I}(\mathrm{j}\omega)] = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Όπως και (άλλωστε) περιμέναμε αφού «το κύκλωμα RL οδηγούμενο από ημιτονοειδή συνάρτηση θα δίνει ημιτονοειδή απόκριση με πλάτος και φάση που εξαρτώνται από τη συχνότητα διέγερσης ω»

Παράδειγμα ηλεκτρικού συστήματος (5)

Παρατηρήσατε επίσης ότι:

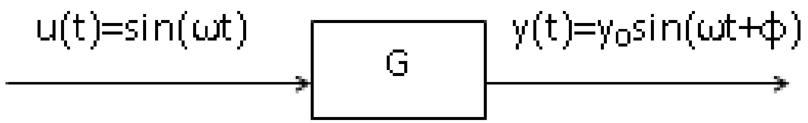
$$I(j\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}} e^{j\cdot\omega\cdot t} \cdot e^{j\cdot\varphi} = \frac{E(j\omega)}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}} \cdot e^{j\cdot\varphi} =>$$

$$=> \frac{Έξοδος}{Εισοδος} = \frac{I(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2\cdot L^2}} \cdot e^{j\cdot\varphi} = \left|\frac{1}{R+j\cdot\omega\cdot L}\right| \cdot e^{j\cdot\varphi}$$

- Δηλαδή: Η σχέση εξόδου προς είσοδο εξαρτάται μόνο από τα δομικά συστατικά του κυκλώματος L και R (και βέβαια τη συχνότητα διέγερσης).
- Η σχέση εξόδου προς είσοδο όπως προκύπτει κατόπιν της εφαρμογής ημιτονοειδών σημάτων ονομάζεται <u>αρμονική συνάρτηση μεταφοράς</u>.

Γενικά:

Προφανώς η αρμονική συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να ληφθεί για Δ.Ε. οποιασδήποτε τάξεως (όχι μόνο $1^{ης}$, όπως στην περίπτωση του RL). Αν G σύστημα με Δ.Ε. n-οστής τάξης τότε



Δ.Ε. n-οστής τάξης:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+\alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+\alpha_1\frac{d}{dt}y(t)+\alpha_0 y(t)=b_0u(t)+b_1\frac{d}{dt}u(t)+\cdots+b_m\frac{d^m}{dt^m}u(t)$$

και U(jω)=$e^{j\cdot\omega\cdot t}$ άρα Y(jω)= $Y_0\cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}$

$$\frac{d}{dt}y(t) = j \cdot \omega \cdot Y(j\omega)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = (j \cdot \omega)^2 \cdot Y(j\omega)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) = (j \cdot \omega)^n \cdot Y(j\omega)$$

και

$$\frac{d}{dt}u(t) = j \cdot \omega \cdot U(j\omega)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^m}{dt^m}u(t) = (j \cdot \omega)^m \cdot U(j\omega)$$

Άρα με εφαρμογή στην Δ.Ε.:

$$[(j \cdot \omega)^n + \alpha_{n-1} \cdot (j \cdot \omega)^{n-1} + \cdots + \alpha_0] \cdot Y(j\omega) = [b_m \cdot (j \cdot \omega)^m + \cdots + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + b_0] \cdot U(j\omega)$$

και:

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m \cdot (j \cdot \omega)^m + b_{m-1} \cdot (j \cdot \omega)^{m-1} \ldots + b_1 \cdot (j \cdot \omega) + b_0}{(j \cdot \omega)^n + \alpha_{n-1}(j \cdot \omega)^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot (j \cdot \omega) + \alpha_0} = G(j\omega) \qquad (2)$$

όμως αφού $Y(j\omega)=Y_0 \cdot \mathrm{e}^{\,j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}$ και $U(j\omega)=e^{\,j\cdot\omega\cdot t}$ τότε

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = Y_0 \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi-\omega\cdot t)} = Y_0 \cdot e^{j\cdot\varphi} \qquad (3)$$

Συγκρίνοντας (2) και (3) => $Y_0=|G(j\omega)|$ και $\varphi=<G(j\omega)$

Άρα: Απλός τρόπος να ληφθεί η $G(j\omega)$ από την Δ.Ε.?

Συμπεράσματα

Συμπεράσματα

- Όταν ένα γραμμικό σύστημα (δηλαδή σύστημα περιγραφόμενο από γραμμική Δ.Ε) διεγερθεί με ημιτονοειδές σήμα συγκεκριμένης συχνότητας ω, αποκρίνεται με επίσης ημιτονοειδές σήμα ίδιας συχνότητας ω, αλλά πλάτους και φάσης που εξαρτάται από τη συχνότητα αυτή.

<u>Συμπεράσματα</u>

- Όταν ένα γραμμικό σύστημα (δηλαδή σύστημα περιγραφόμενο από γραμμική Δ.Ε) διεγερθεί με ημιτονοειδές σήμα συγκεκριμένης συχνότητας ω, αποκρίνεται με επίσης ημιτονοειδές σήμα ίδιας συχνότητας ω, αλλά πλάτους και φάσης που εξαρτάται από τη συχνότητα αυτή.
- Στις περιπτώσεις ημιτονοειδούς διέγερσης συστήματος, μπορούμε μέσω της χρήσης των σημάτων (jω) [δηλαδή το μετασχηματισμό/ απεικόνιση τους στο μιγαδικό επίπεδο] να σχηματίσουμε τη σχέση εξόδου προς είσοδο που εξαρτάται <u>μόνο</u> από τα δομικά χαρακτηριστικά του συστήματος (και τη συχνότητα διέγερσης ω). Η σχέση αυτή ονομάζεται αρμονική συνάρτηση μεταφοράς.

<u>Συμπεράσματα</u>

- Όταν ένα γραμμικό σύστημα (δηλαδή σύστημα περιγραφόμενο από γραμμική Δ.Ε) διεγερθεί με ημιτονοειδές σήμα συγκεκριμένης συχνότητας ω, αποκρίνεται με επίσης ημιτονοειδές σήμα ίδιας συχνότητας ω, αλλά πλάτους και φάσης που εξαρτάται από τη συχνότητα αυτή
- Στις περιπτώσεις ημιτονοειδούς διέγερσης συστήματος, μπορούμε μέσω της χρήσης των σημάτων (jω) [δηλαδή το μετασχηματισμό/ απεικόνιση τους στο μιγαδικό επίπεδο] να σχηματίσουμε τη σχέση εξόδου προς είσοδο που εξαρτάται <u>μόνο</u> από τα δομικά χαρακτηριστικά του συστήματος (και τη συχνότητα διέγερσης ω). Η σχέση αυτή ονομάζεται αρμονική συνάρτηση μεταφοράς.
- Όπως δείξαμε, η αρμονική συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται αν αντί της κάθε παραγώγου κ-τάξης, αντικαταστήσουμε στην Δ.Ε. τον παράγοντα $(j\omega)^{\kappa}$ και λύσουμε ως προς $\dfrac{Έξοδο}{Είσοδο}$.

Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 1

Παρατήρηση 1

Αν αντί ημιτόνου έχουμε ως είσοδο μια <u>οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση?</u>

<u>Παρατήρηση 1</u>

Αν αντί ημιτόνου έχουμε ως είσοδο μια <u>οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση?</u>

- Έστω, λοιπόν ότι η είσοδος f(t)=f(t+T) $\left\{ \begin{matrix} \text{δηλ. επαναληψιμότητα καθε T} \\ \text{και αρα } \omega = \frac{1}{T} \end{matrix} \right\}$

Παρατήρηση 1

Αν αντί ημιτόνου έχουμε ως είσοδο μια <u>οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση?</u>

- Έστω, λοιπόν ότι η είσοδος f(t)=f(t+T) $\left\{\begin{matrix} \text{δηλ. επαναληψιμότητα καθε T} \\ \text{και αρα } \omega = \frac{1}{\mathrm{T}} \end{matrix}\right\}$

- Κατά Fourier, η συνάρτηση καταλήγει να αναλύεται σε βασικές ημιτονοειδείς ω, 2ω,...όπως φαίνεται στην ακολουθία (εκθετικής μορφής)

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{j\cdot\omega\cdot t} + F_2 e^{2\cdot j\cdot\omega\cdot t} + \cdots + F_{-1} e^{-j\cdot\omega\cdot t} + F_{-2} e^{-2\cdot j\cdot\omega\cdot t} + \cdots$$

όπου $F_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t) e^{-j\cdot n\cdot\omega\cdot t} d(\omega \cdot t)$

Παρατήρηση 1

<u>Οπότε σχηματικά τι θα κάναμε;</u>

- Εργαζόμαστε για <u>κάθε ένα</u> ημιτονικό σήμα εισόδου συχνότητας ω, 2ω,...,

- σχηματίζουμε την αρμονική συνάρτηση μεταφοράς,

- και τελικά υπολογίζουμε την απόκριση που αντιστοιχεί σε αυτή τη συχνότητα.

- Η ολική απόκριση λαμβάνεται, κατόπιν, ως αποτέλεσμα επαλληλίας.

Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 2

Παρατήρηση 2

Αν, αντί περιοδικής, έχουμε ως είσοδο οποιαδήποτε συνάρτηση $f(t)$;

- Έστω μια συνάρτηση εισόδου όχι απαραίτητα περιοδική.

  Όπως στο μετασχηματισμό Fourier που αναλύει την περιοδική συνάρτηση εισόδου συχνότητας ω σε βασικά ημιτονοειδή με συχνότητες ω, 2ω, … χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό Laplace για την $f(t)$:

$$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-s\cdot t}dt$$

Όπου τώρα αντί για $\omega\cdot t \rightarrow s\cdot t$ με $s=\sigma+j\cdot\omega$ μιγαδικό αριθμό.

Παρατηρήσατε την ομοιότητα της έκφρασης του μετ/μού Laplace με αυτόν του Fourier;

Πριν με Fourier

Βάση: $e^{j\cdot\omega\cdot t} = \cos(\omega\cdot t) + j\cdot\sin(\omega\cdot t)$

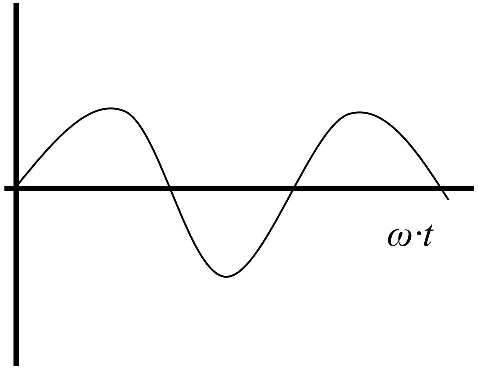
Τώρα με Laplace

Βάση: $e^{-s\cdot t} = e^{-(\sigma+j\cdot\omega)\cdot t}$ $=e^{-\sigma\cdot t}(\cos(\omega\cdot t) + j\cdot sin(\omega\cdot t))$

Παρατηρήσατε την ομοιότητα της έκφρασης του μετ/μού Laplace με αυτόν του Fourier;

Πριν με Fourier

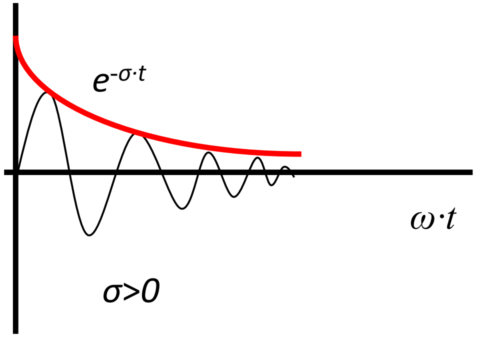
Βάση: $e^{j \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)$



Τώρα με Laplace

Βάση: $e^{-s \cdot t} = e^{-(\sigma + j \cdot \omega) \cdot t}$

$=e^{-\sigma \cdot t}(\cos(\omega \cdot t) + j \cdot sin(\omega \cdot t))$



- Για να επανέρθουμε στο επίπεδο του χρόνου:

Αντίστροφος Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) \cdot e^{st} ds$$

Γενικά όμως έχουμε ΠΙΝΑΚΕΣ που δίνουν τη μετάβαση $f(t) \leftrightarrow F(s)$

Για πολλές βασικές και χρήσιμες συναρτήσεις.

Μετασχηματισμος Laplace

Ιδιότητες μετασχηματισμού

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Επίπεδο t $\xrightarrow{\mathscr{L}}$	Επίπεδο s
Σταθερός συντελεστής	$ay(t)$	$aY(s)$
Άθροισμα	$y_1(t)+y_2(t)$	$Y_1(s)+Y_2(s)$
Πρώτη παράγωγος	$\frac{dy}{dt}=y(t)$	$sY(s)-y(0)$
Δεύτερη παράγωγος	$\frac{d^2y}{dt^2}=y(t)$	$s^2Y(s)-sy(0)-\mathring{y}(0)$
n-οστή παράγωγος	$\frac{d^ny}{dt^n}=y^{(n)}(t)$	$s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$
Ολοκλήρωμα	$\int_0^t y(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}Y(s)$
Κλιμάκωση χρόνου	$y(\omega t)$	$\frac{1}{\omega}Y(\frac{s}{\omega})$
Καθυστέρηση χρόνου	$y(t-T)$	$e^{-sT}Y(s)$
Εκθετική απόσβεση	$e^{-\sigma t}y(t)$	$Y(s+\sigma)$
Συνέλιξη	$\int_0^t y(t-\tau)x(\tau)d\tau$	$Y(s)X(s)$
Αρχική τιμή	$y(0)=\lim_{t\to 0}y(t)$ $=$	$\lim_{s\to\infty}sY(s)$
Τελική τιμή	$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)$ $=$	$\lim_{s\to 0}sY(s)$

Μετασχηματισμός Laplace

Μετασχηματισμοί Laplace βασικών Συναρτήσεων

Μετασχηματισμοί Laplace βασικών Συναρτήσεων

Επίπεδο t $\xrightarrow{\mathscr{L}}$	Επίπεδο s
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\sigma t}$	$\frac{1}{s+\sigma}$
$te^{-\sigma t}$	$\frac{1}{(s+\sigma)^2}$
$\eta\mu\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\eta\mu(\omega t+\phi)$	$\frac{s\,\eta\mu\phi+\omega\sigma\upsilon\nu\phi}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\sigma t}\eta\mu\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$
$e^{-\sigma t}\sigma\upsilon\nu\omega t$	$\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$

Συμπεράσματα

Συμπεράσματα

- Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται για συνάρτηση εισόδου γενικής μορφής και υπολογίζεται είτε από το ολοκλήρωμα (σπάνια) είτε από τους ΠΙΝΑΚΕΣ μετατροπών (συχνότατα).

Συμπεράσματα

- Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται για συνάρτηση εισόδου γενικής μορφής και υπολογίζεται είτε από το ολοκλήρωμα (σπάνια) είτε από τους ΠΙΝΑΚΕΣ μετατροπών (συχνότατα).

- Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι k-τάξης σήματος $x(t)$ σε μια γραμμική Δ.Ε. μετατρέπονται σε $s^k \cdot X(s)$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες όπου $X(s)$ το σήμα στο πεδίο Laplace.

Ακριβώς όπως για ημιτονοειδή διέγερση, όπου η παράγωγος $\frac{d^k}{dt^k}x(t) \rightarrow (j \cdot \omega)^k \cdot x(j\omega)$

Συμπεράσματα

- Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται για συνάρτηση εισόδου γενικής μορφής και υπολογίζεται είτε από το ολοκλήρωμα (σπάνια) είτε από τους ΠΙΝΑΚΕΣ μετατροπών (συχνότατα).

- Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace παρατηρούμε ότι οι παράγωγοι k-τάξης σήματος $x(t)$ σε μια γραμμική Δ.Ε. μετατρέπονται σε $s^k \cdot X(s)$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες όπου $X(s)$ το σήμα στο πεδίο Laplace.

  Ακριβώς όπως για ημιτονοειδή διέγερση, όπου η παράγωγος $\frac{d^k}{dt^k}x(t) \to (j \cdot \omega)^k \cdot x(j\omega)$

- <u>Άρα με χρήση μετασχηματισμού Laplace μια Δ.Ε. γίνεται αλγεβρική σχέση (στο πεδίο Laplace), όπως ακριβώς συμβαίνει όταν χρησιμοποιούμε την περιγραφή $X(j\omega)$ για το $x(t)$ στην περίπτωση περιοδικών συναρτήσεων.</u>

Εφαρμογή σε ηλεκτρικά κυκλώματα

- Ηλεκτρικό Στοιχείο G με είσοδο ρεύμα $i(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} I(s)$

  $G \triangleq R => U_R(t) = R \cdot i(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U_R(s) = R \cdot I(s)$

  $G \triangleq L => U_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U_L(s) = L \cdot s \cdot I(s), \qquad \text{για } i(0) = 0$

  $G \triangleq C => U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int idt => U_C(s) = \frac{1}{C \cdot S} \cdot I(s), \qquad \text{για } i(0) = 0$

Εφαρμογή σε ηλεκτρικά κυκλώματα

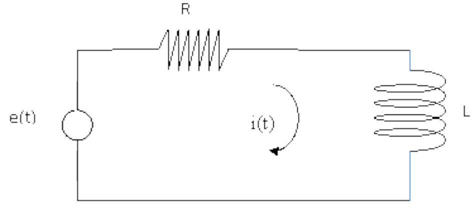
- Ηλεκτρικό Στοιχείο G με είσοδο ρεύμα $i(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} I(s)$

  $G \triangleq R => U_R(t) = R \cdot i(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U_R(s) = R \cdot I(s)$

  $G \triangleq L => U_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} U_L(s) = L \cdot s \cdot I(s),$ για $i(0) = 0$

  $G \triangleq C => U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int idt => U_C(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s),$ για $i(0) = 0$

- και για το κύκλωμα RL



$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = e(t) => \ R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) = E(s)$$

$$=> I(s) = \frac{1}{R + s \cdot L} \cdot E(s) => i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)]$$

Συγκρίνατε με την αντίστοιχη σχέση για ημιτονοειδή e(t)

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης