ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 1

Ενότητα # 5: Χρήση μετασχηματισμού Laplace για επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων – Μέθοδοι εντάσεων βρόχων και τάσεων κόμβων

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Υπολογισμός τάσεων/εντάσεων σε ηλεκτρικά κυκλώματα
- Μετασχηματισμός Laplace ή N. Kirchhoff;
- Μέθοδοι τάσεων κόμβων και εντάσεων βρόχων

Περιεχόμενα ενότητας

- Χρήση μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων
- Μέθοδος εντάσεων βρόχων
- Μέθοδος τάσεων κόμβων
- Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «εντάσεις βρόχων»

Περιεχόμενα ενότητας

- Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «τάσεις κόμβων»

- Ειδικές περιπτώσεις

Χρήση μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Χρήση Μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

- Έστω κύκλωμα με $N_{κλ}$ αριθμό κλάδων και $N_{κομ}$ αριθμό κόμβων.
- Δύο μέθοδοι υπολογισμού ρευμάτων/ τάσεων:
  - Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων
  - Μέθοδος Τάσεων Κόμβων

Χρήση Μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

- Έστω κύκλωμα με $N_{κλ}$ αριθμό κλάδων και $N_{κομ}$ αριθμό κόμβων.
- Δύο μέθοδοι υπολογισμού ρευμάτων/ τάσεων:
    - Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων
    - Μέθοδος Τάσεων Κόμβων

- Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων: Καταλήγει στην έκφραση ρευμάτων που διαρρέουν το κύκλωμα. Έτσι υπολογίζονται και τάσεις σε σημεία του κυκλώματος.

Χρήση Μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

- Έστω κύκλωμα με $N_{κλ}$ αριθμό κλάδων και $N_{κομ}$ Αριθμό κόμβων.
- Δύο μέθοδοι υπολογισμού ρευμάτων/ τάσεων:
  - Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων
  - Μέθοδος Τάσεων Κόμβων

- Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων: Καταλήγει στην έκφραση ρευμάτων που διαρρέουν το κύκλωμα. Έτσι υπολογίζονται και τάσεις σε σημεία του κυκλώματος.
- Μέθοδος Τάσεων Κόμβων: Καταλήγει στην έκφραση τάσεων στους κόμβους του κυκλώματος. Έτσι υπολογίζονται και εντάσεις ρευμάτων στο κύκλωμα.

Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων

Μέθοδος Εντάσεων Βρόχων

59

Τότε:

- Έχω $M = N_{κλαδων} - N_{κομβων} + 1$ ανεξάρτητους ΒΡΟΧΟΥΣ

- Έχω M άγνωστες εντάσεις βρόχων $I_1(s), I_2(s), \dots I_M(s) = \underset{\sim}{I}(s)$

- Ισχύει $\underset{\sim}{E}(s) = \underset{\sim}{R}(s)\, \underset{\sim}{I}(s)$

και $\underset{\sim}{R}(s) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & & \\ R_{21} & R_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{nm} \end{bmatrix}$ Πίνακας Αντιστάσεων

i) R_{ii} ≜ Ιδια μιγαδική αντίσταση του βρόχου $i \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} R_{ik}$

ii) R_{ij} ≜ Αμοιβαία μιγαδική αντίσταση των βρόχων $i,j \Rightarrow$ κοινή μιγαδική αντίσταση των βρόχων $i,j \Rightarrow$

$\Rightarrow >0$ αν $I_i \cdot I_j > 0$

<0 αν $I_i \cdot I_j < 0$

iii) $E_i(s)$: Ισοδύναμη Πηγή Τάσης του βρόχου $i \Rightarrow \sum_{k=1}^{L} u_{ik}$

Θεωρώντας θετική τη φορά του βρόχου.

$$\underset{\sim}{R}(s) = \underset{\sim}{R}(s)^T$$

Μέθοδος Τάσεων Κόμβων

Μέθοδος Τάσεων Κόμβων

Μέθοδος Τάσεων Κόμβων (6α)

— Έστω κύκλωμα με $N_{κομβων}$: $N = N_{κομβων} - 1$

— Άγνωστες Τάσεις $U_1(s) \ldots U_N(s) = \underset{\sim}{U}(s)$

— $\underset{\sim}{G}(s)\,\underset{\sim}{U}(s) = \underset{\sim}{I}(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & & \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

Πίνακας Αγωγιμοτήτων (Αγωγιμότητα $= \frac{1}{\text{Αντίσταση}}$)

•) $G_{ii}(s)$: ίδια μιγαδική αγωγιμότητα κόμβου i ⇒

⇒ $\sum_{k=1}^{L} G_{ik}$ όπου G_{ik} οι μιγαδικές αγωγιμότητες που συνδέονται με τον κόμβο i

••) $G_{ij}(s)$: αμοιβαία μιγαδική αγωγιμότητα κόμβων i,j ⇒

⇒ κοινή μιγαδική αγωγιμότητα που συνδέει τους i,j και πάντα < 0.

∴) $\underset{\sim}{G}(s)^T = \underset{\sim}{G}(s)$

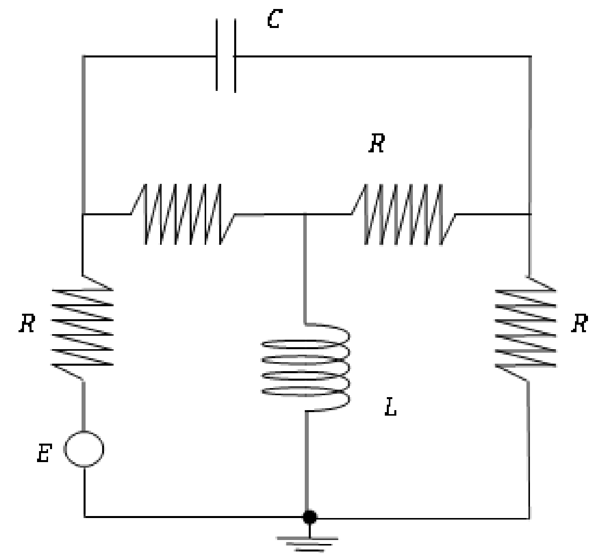
∷) $\underset{\sim}{I}(s)$: $I_i(s)$ Ισοδύναμη πηγή έντασης του κόμβου i,

⇒ Άθροισμα των μιγαδικών πηγών έντασης που συνδέονται με τον κόμβο αυτό, αν >0 η φορά προς κόμβο

Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «Εντάσεις Βρόχων»

Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «Εντάσεις Βρόχων»

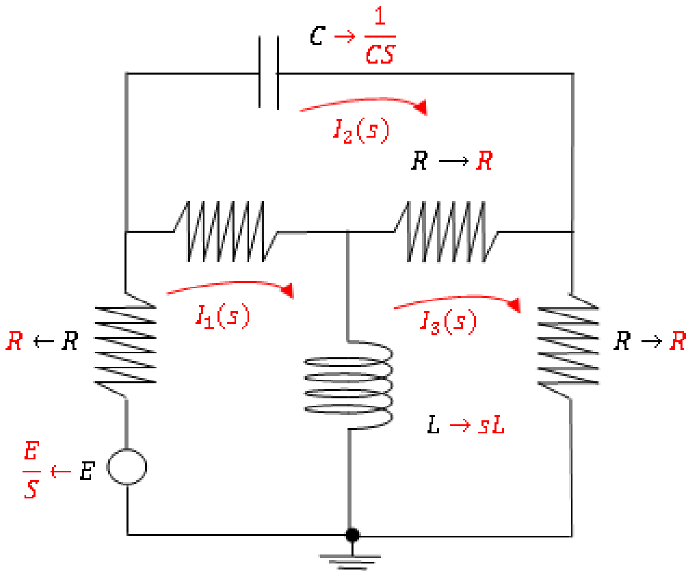
- $N_{κλ}$ = 6, $N_{κομ}$=4, M= $N_{κλ}$- $N_{κομ}$+1=3 εξισώσεις



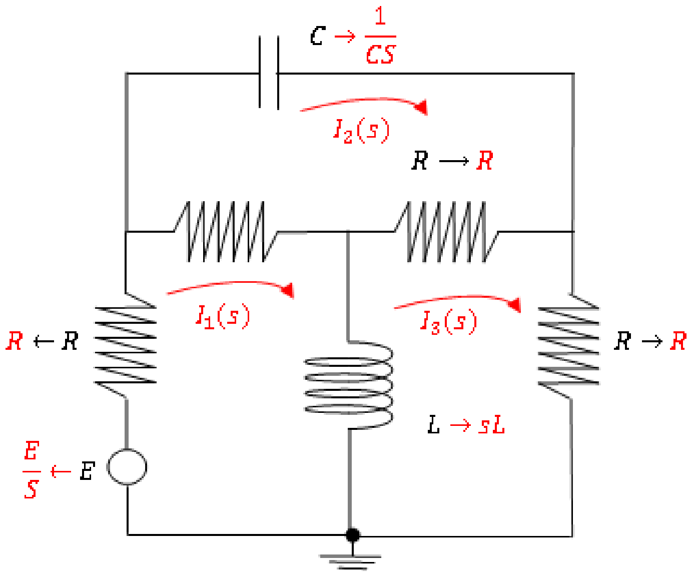
Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «Εντάσεις Βρόχων»

- $N_{κλ}$ = 6, $N_{κομ}$=4, M= $N_{κλ}$- $N_{κομ}$+1=3 εξισώσεις

- Με κόκκινο ορίζω ρεύματα βρόχων και την *<u>αντίσταση</u>* ηλ. στοιχείων στο πεδίο Laplace



Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «Εντάσεις Βρόχων»



- $N_{κλ}$ = 6, $N_{κομ}$=4, M= $N_{κλ}$- $N_{κομ}$+1=3 εξισώσεις

- Με κόκκινο ορίζω ρεύματα βρόχων και την ***αντίσταση*** ηλ. στοιχείων στο πεδίο Laplace

- Σχηματίζω τη μητρωϊκή εξίσωση R(s)·I(s)=E(s)

$$
\underline{R}(s) \cdot \underline{I}(s) = \underline{E}(s)
$$

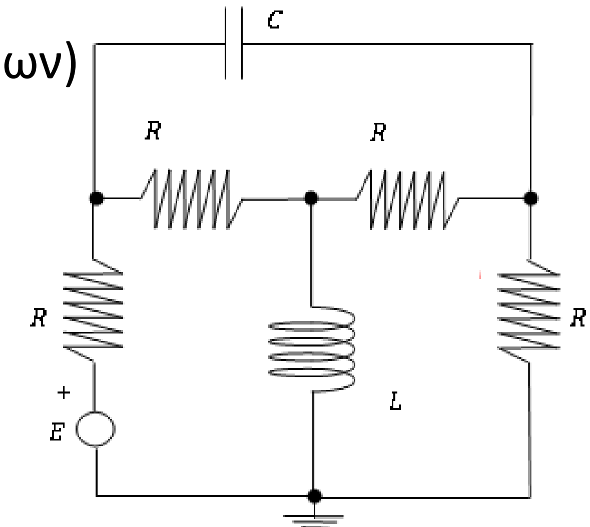
$$
\begin{array}{c}
\beta\rho.1 \\ \beta\rho.2 \\ \beta\rho.3
\end{array}
\begin{bmatrix}
2\cdot R + s\cdot L & -R & -L\cdot s \\
-R & 2\cdot R + \dfrac{1}{C\cdot s} & -R \\
-L\cdot s & -R & 2\cdot R + L\cdot s
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{E}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
=> \underline{I}(s) = \underline{R}^{-1}(s)\cdot \underline{E}(s)
$$

$$
\beta\rho.1 \qquad\qquad \beta\rho.2 \qquad\qquad \beta\rho.3
$$

Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με «Τάσεις Κόμβων»

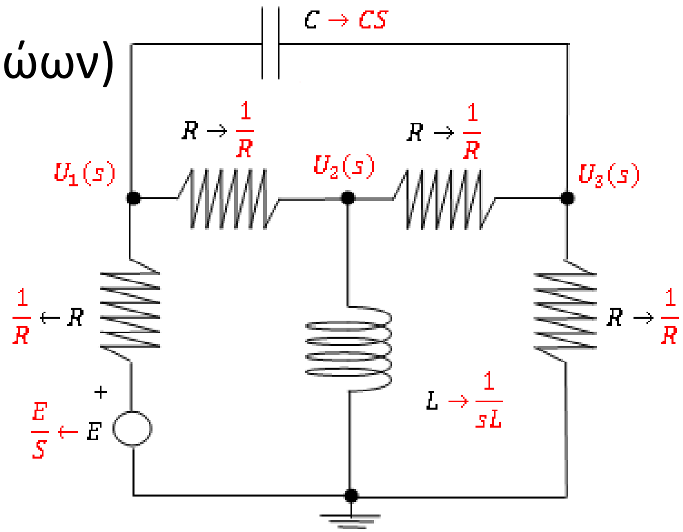
Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με με «Τάσεις Κόμβων»

- $N_{κομ}$=4, M= 4- 1=3 εξισώσεις (και διάσταση μητρώων)



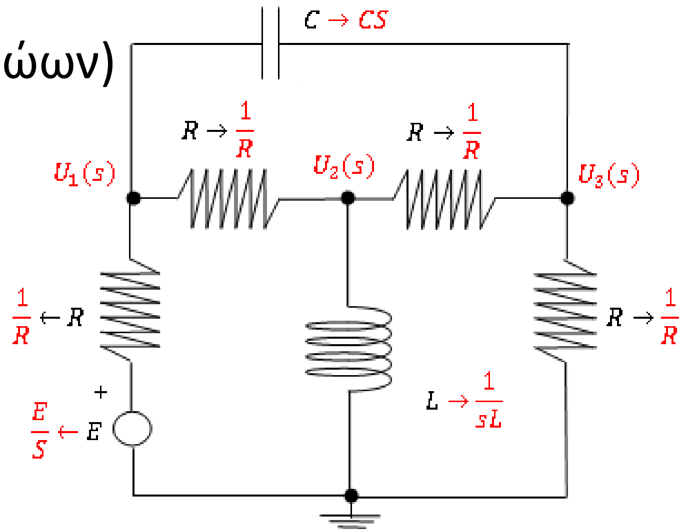
Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με με «Τάσεις Κόμβων»

- $N_{κομ}$=4, M= 4- 1=3 εξισώσεις (και διάσταση μητρώων)
- Με κόκκινο ορίζω τους κόμβους και την *αγωγιμότητα* ηλ. στοιχείων στο πεδίο Laplace



Παράδειγμα: Επίλυση κυκλώματος με με «Τάσεις Κόμβων»

- $N_{κομ}$=4, M= 4- 1=3 εξισώσεις (και διάσταση μητρώων)
- Με κόκκινο ορίζω τους κόμβους και την *αγωγιμότητα* ηλ. στοιχείων στο πεδίο Laplace



- Σχηματίζω τη μητρωϊκή εξίσωση G(s)·U(s)=I(s)

G(s) U(s) = I(s)

$$\begin{array}{c} \kappa.1 \\ \kappa.2 \\ \kappa.3 \end{array} \begin{bmatrix} C\cdot s+2/R & -1/R & -C\cdot s \\ -1/R & 2/R+\dfrac{1}{s\cdot L} & -1/R \\ -C\cdot s & -1/R & C\cdot s+2/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{sR} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\mathrm{U}}(s) = \underline{\mathrm{G}}^{-1}(s)\cdot \underline{\mathrm{I}}(s)$$

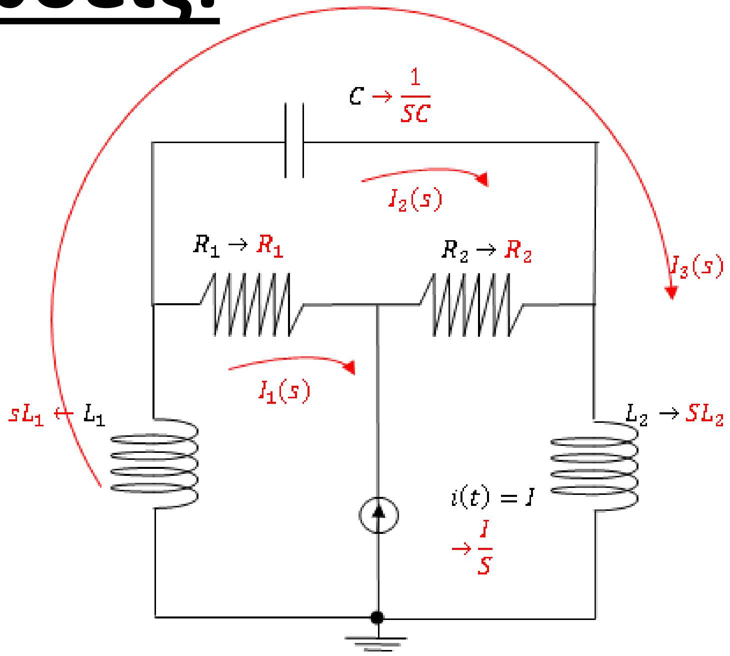
$$\kappa.1 \qquad \kappa.2 \qquad \kappa.3$$

Ειδικές περιπτώσεις

Ειδικές περιπτώσεις:

Πηγή έντασης χωρίς παράλληλη αντίσταση

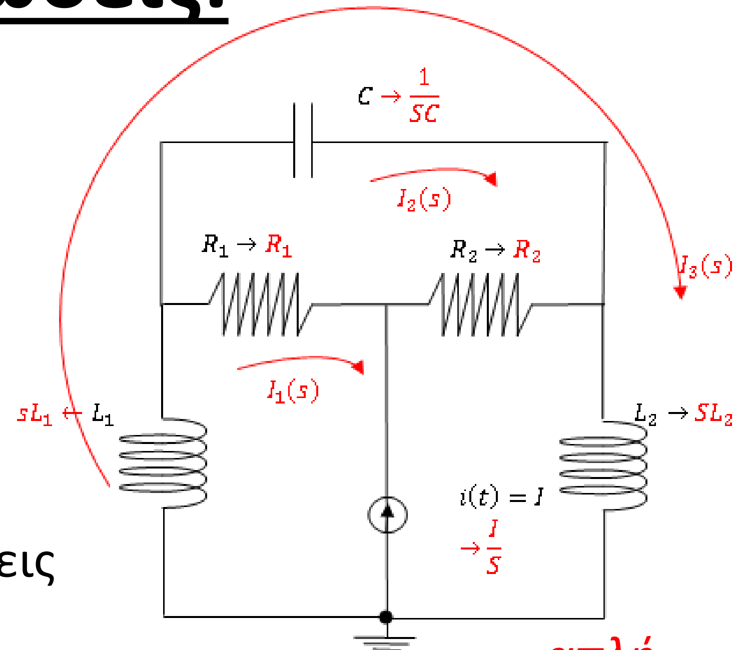
και μέθοδο εντάσεων βρόχων



Ειδικές περιπτώσεις:

Πηγή έντασης χωρίς παράλληλη αντίσταση

και μέθοδο εντάσεων βρόχων



$N_{κλ}$ = 6, $N_{κομ}$=4, M= $N_{κλ}$- $N_{κομ}$+1=6-4+1=3 εξισώσεις

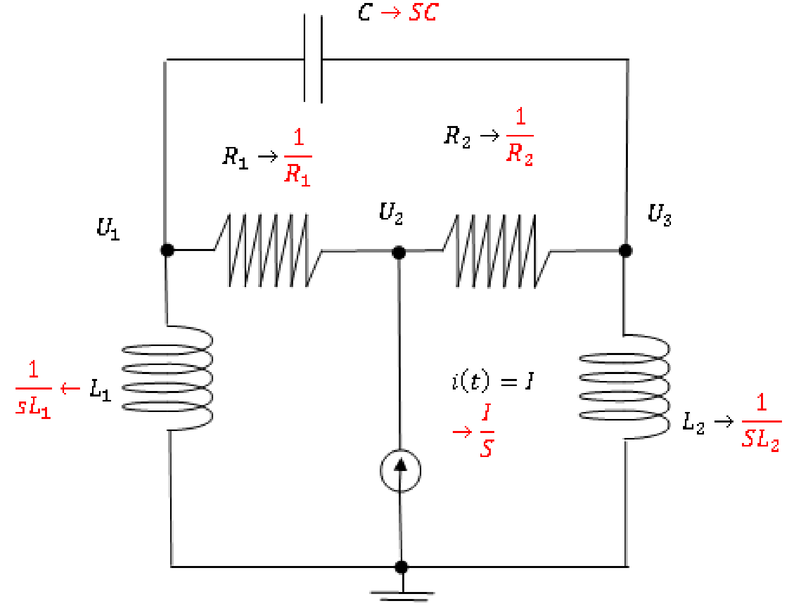
απλή ταυτότητα

$$\begin{bmatrix} \cancel{s \cdot L_1 + R_1}\ 1 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + \dfrac{1}{s \cdot C} & \dfrac{1}{s \cdot C} \\ s \cdot L_1 & \dfrac{1}{s \cdot C} & s \cdot (L_1 + L_2) + \dfrac{1}{s \cdot C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{I}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε μια εξίσωση λιγότερη, διότι η πηγή θα επιβάλει το ρεύμα i(t)=I στους βρόχους που συμμετέχει. Προσέξατε την επιλογή βρόχων!

Το ίδιο κύκλωμα με «Τάσεις Κόμβων»: Καμία ιδιαιτερότητα!

$N_{κλ} = 4 \rightarrow$ M= 4-1=3 εξισώσεις

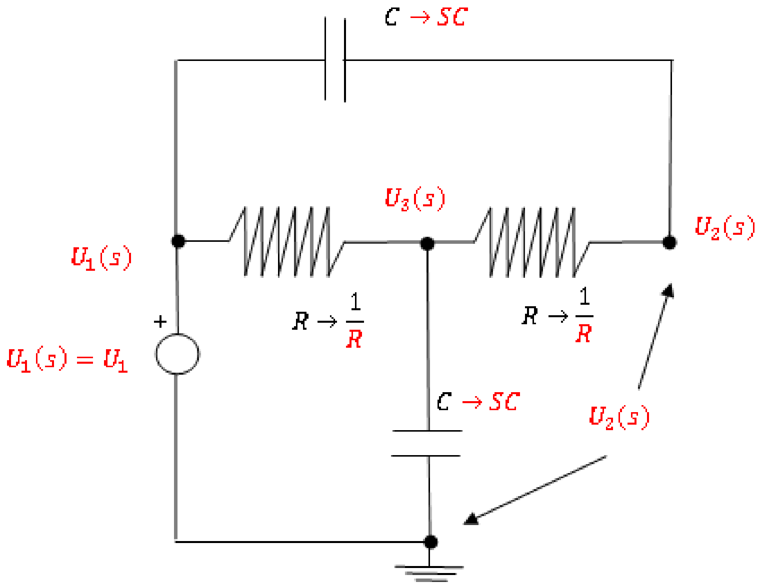


$\underline{G}(s) \quad \underline{U}(s) = \underline{I}(s)$

$$\begin{bmatrix} s\cdot C + \frac{1}{s\cdot L_1} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & -s\cdot C \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -s\cdot C & -\frac{1}{R_2} & s\cdot C + \frac{1}{s\cdot L_2} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I}{s} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}(s) = \underline{G}^{-1}(s) \cdot \underline{I}(s)$$

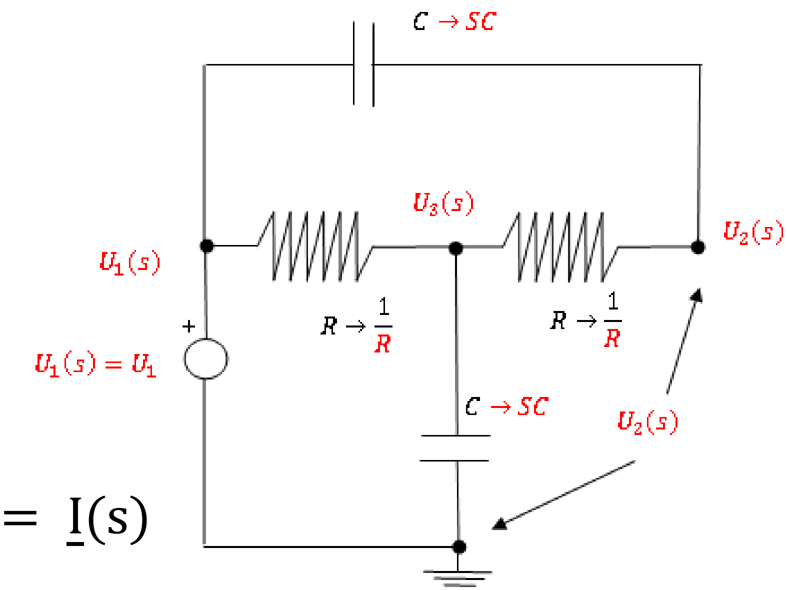
Κύκλωμα με πηγή τάσης χωρίς εν σειρά αντίσταση

- Με μέθοδο Τάσεων Κόμβων
- $N_{κλ} = 4 \rightarrow M = 4-1=3$ εξισώσεις



Κύκλωμα με πηγή τάσης χωρίς εν σειρά αντίσταση

- Με μέθοδο Τάσεων Κόμβων
- $N_{\kappa\lambda} = 4 \rightarrow M = 4-1=3$ εξισώσεις



$$\underline{G}(s) \qquad \underline{U}(s) \quad = \quad \underline{I}(s)$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{2}{R} + s \cdot C & -\frac{1}{R} \\ -s \cdot C & -\frac{1}{R} & s \cdot C + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_M(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ταυτότητα!

=> $\underline{U}(s) = \underline{G}^{-1}(s) \cdot \underline{I}(s)$

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης