ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 1

Ενότητα # 6: Έννοια της συνάρτησης μεταφοράς – Παραδείγματα εφαρμογής σε φυσικά συστήματα

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Μελέτη σχέσης εισόδου – εξόδου ή αλλιώς Συνάρτησης Μεταφοράς συστήματος.

- Χαρακτηριστικά μεγέθη Συνάρτησης Μεταφοράς και σημασία τους.

- Παραδείγματα Συναρτήσεων Μεταφοράς συστημάτων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Συνάρτηση Μεταφοράς
- Συνάρτηση μεταφοράς – Παράδειγμα σε κύκλωμα RLC
- Χαρακτηριστικές Ιδιότητες Συνάρτησης Μεταφοράς
- Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος – Μέθοδος τάσεων κόμβων

Περιεχόμενα ενότητας

- Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος – Μέθοδος εντάσεων βρόχων

- Συνάρτηση μεταφοράς – Συμπέρασμα

- Παράδειγμα 2: Παραδείγματα εφαρμογής σε φυσικά συστήματα

- Ερωτήσεις

Συνάρτηση Μεταφοράς

Συνάρτηση Μεταφοράς

- Με χρήση του μετ/μού Laplace γενικεύεται η έννοια της αρμονικής συνάρτησης μεταφοράς για εισόδους όχι αποκλειστικά ημιτονοειδείς.

Συνάρτηση Μεταφοράς

- Με χρήση του μετ/μού Laplace γενικεύεται η έννοια της αρμονικής συνάρτησης μεταφοράς για εισόδους όχι αποκλειστικά ημιτονοειδείς.

- Έστω σύστημα G περιγραφόμενο από τη Δ.Ε.:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \alpha_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + \alpha_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + \alpha_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{d}{dt}u(t) + \cdots + b_m \cdot \frac{d^m}{dt^m}u(t)$$

με u(t) είσοδο, y(t) έξοδο και $m \leq n$.

Συνάρτηση Μεταφοράς

- Με χρήση του μετ/μού Laplace γενικεύεται η έννοια της αρμονικής συνάρτησης μεταφοράς για εισόδους όχι αποκλειστικά ημιτονοειδείς.

- Έστω σύστημα G περιγραφόμενο από τη Δ.Ε.:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \alpha_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + \alpha_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + \alpha_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{d}{dt}u(t) + \cdots + b_m \cdot \frac{d^m}{dt^m}u(t)$$

με u(t) είσοδο, y(t) έξοδο και $m \leq n$.

- Αν αρχικές συνθήκες μηδενικές, και επειδή $s^k \cdot x(s) \triangleq \frac{d^k}{dt^k}x(t)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0}$$

[τσεκάρετε χιαστί!]

Συνάρτηση Μεταφοράς

- Αν αρχικές συνθήκες μηδενικές, και επειδή $s^k \cdot x(s) \triangleq \frac{d^k}{dt^k} x(t)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0}$$

[τσεκάρετε χιαστί!]

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

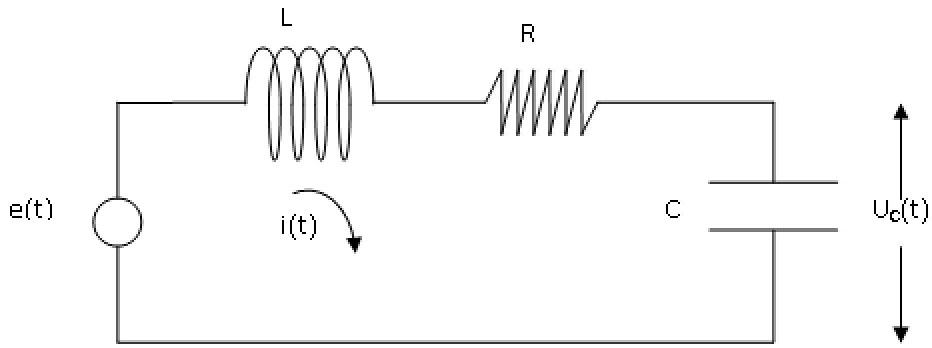
- Παρατηρήσατε ότι η σχέση αυτή αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση μεταβολής της εξόδου σε σχέση με την είσοδο.

- Παρατηρήσατε ότι η σχέση αυτή εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος που αντιστοιχούν στους συντελεστές α_i και b_j.

Συνάρτηση μεταφοράς

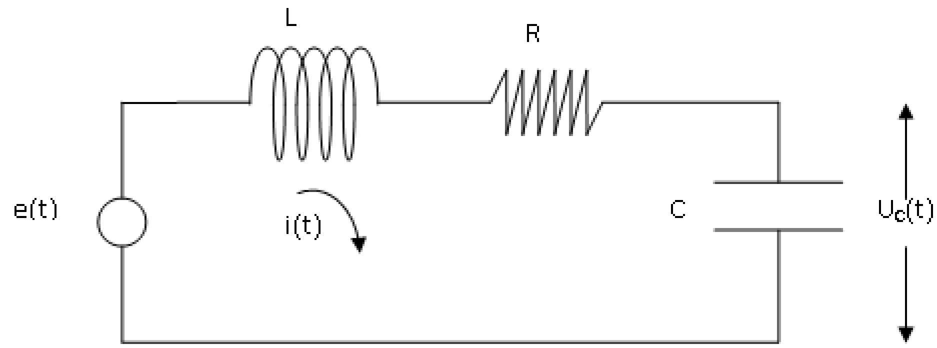
Παράδειγμα σε κύκλωμα RLC

Συνάρτηση μεταφοράς – Παράδειγμα με RLC



Διαφορική εξίσωση κυκλώματος $$\underbrace{\frac{1}{C}\cdot\int i(t)}_{u_C(t)} + \underbrace{R\cdot i(t)}_{u_R(t)} + \underbrace{L\cdot\frac{di(t)}{dt}}_{u_L(t)} = e(t) \quad (1)$$

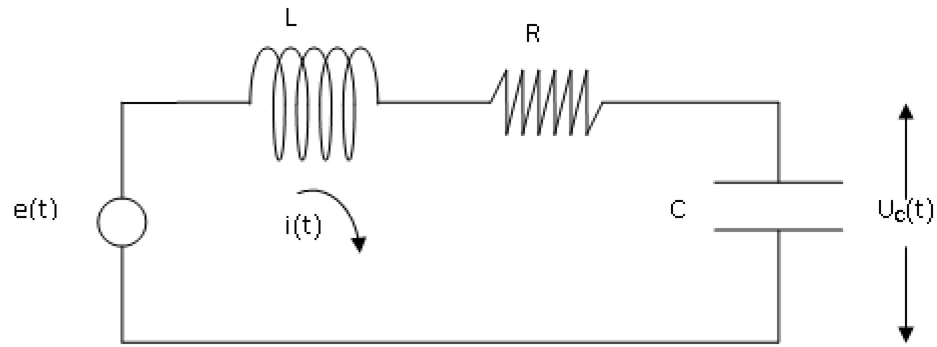
Συνάρτηση μεταφοράς – Παράδειγμα με RLC



Διαφορική εξίσωση κυκλώματος $\underbrace{\frac{1}{C}\cdot\int i(t)}_{u_c(t)} + \underbrace{R\cdot i(t)}_{u_R(t)} + \underbrace{L\cdot\frac{di(t)}{dt}}_{u_L(t)} = e(t)$ (1)

Έστω $e(t) = E_0\sin(\omega t) => E(j\omega) = E_0 e^{j\omega t}$ οπότε προκύπτει $I(j\omega) = I_0 e^{j\omega t}$

Συνάρτηση μεταφοράς – Παράδειγμα με RLC



Διαφορική εξίσωση κυκλώματος $\underbrace{\frac{1}{C} \cdot \int i(t)}_{u_c(t)} + \underbrace{R \cdot i(t)}_{u_R(t)} + \underbrace{L \cdot \frac{di(t)}{dt}}_{u_L(t)} = e(t)$ (1)

Έστω $e(t) = E_0 \sin(\omega t) => E(j\omega) = E_0 e^{j\omega t}$ οπότε προκύπτει $I(j\omega) = I_0 e^{j\omega t}$

$$(1) => \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} I(j\omega) + R \cdot I(j\omega) + j \cdot \omega \cdot L \cdot I(j\omega) = E(j\omega)$$

$$=> \frac{I(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + R + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{(j \cdot \omega) \cdot C}{L \cdot C \cdot (j \cdot \omega)^2 + R \cdot C \cdot (j \cdot \omega) + 1}$$

Συνάρτηση μεταφοράς – Παράδειγμα με RLC (2)

Όμως $u_c(j\omega) = \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C} \cdot I(j\omega)$ για τον πυκνωτή άρα

(2) => $$\frac{I(j\omega)/j\cdot\omega\cdot C}{E(j\omega)} = \frac{1}{L\cdot C\cdot(j\cdot\omega)^2 + R\cdot C\cdot(j\cdot\omega) + 1}$$ (3)

Στην περίπτωση όχι απαραίτητα ημιτονοειδούς διέγερσης, για μηδενικές αρχικές συνθήκες ο μετασχηματισμός Laplace της Δ.Ε. (1) θα δίνει:

(1) $\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}$ $$\frac{1}{s\cdot C} \cdot I(s) + R \cdot I(s) + s \cdot L \cdot I(s) = E(s) =>$$

=> $$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{C\cdot s}{L\cdot C\cdot s^2 + R\cdot C\cdot s + 1}$$ (4)

Συνάρτηση μεταφοράς – Παράδειγμα με RLC (3)

Αλλά $U_C(s) = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$, το οποίο σε συνδυασμό με την (4):

(4)=> $$\frac{I(s)/C \cdot s}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad (5)$$

Από (3) και (5): Η (3) είναι η (5) για την ειδική περίπτωση s=j·ω (αντί s=σ+jω).

Θυμηθείτε το μετασχηματισμό Fourier ημιτονοειδούς σήματος, και τη μορφή του εκθετικού παράγοντα εκεί!

Συγκρίνατε με τον αντίστοιχο μετ/μο Laplace.

Συνάρτηση Μεταφοράς

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες Συνάρτησης Μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} = G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$\mathrm{U(s)}$: είσοδος, Y(s): έξοδος

- Q(s): χαρακτηριστικό πολυώνυμο
- Q(s)=0 → οι λύσεις $\mathrm{s = p_1, s = p_2, \ldots, s = p_n}$

  με $\mathrm{p_1}$, ...,$\mathrm{p_n}$ πραγματικούς ή ζεύγη μιγαδικών αριθμών.

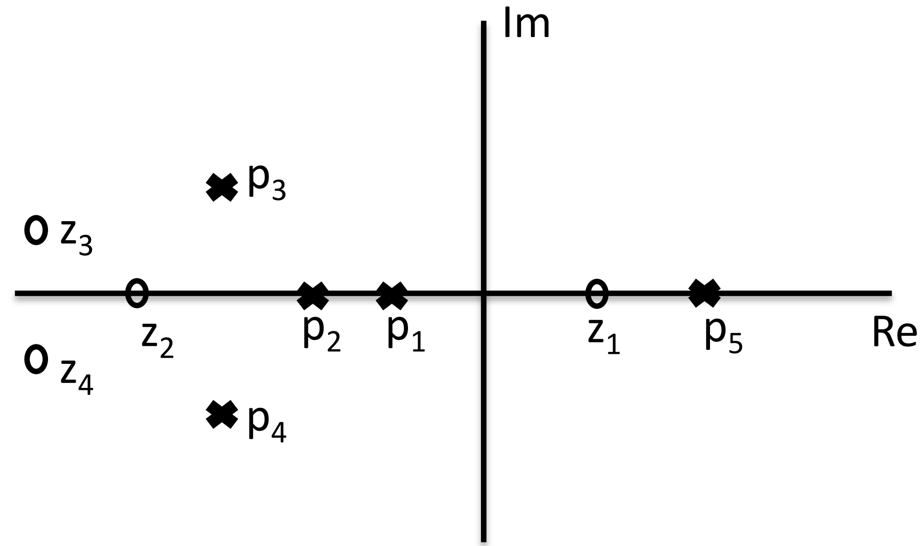
Οι $\mathrm{p_1}$, ...,$\mathrm{p_n}$ είναι οι πόλοι του συστήματος: Το βασικότερο μέγεθος για τον καθορισμό της συμπεριφοράς της απόκρισης του σε κάποια διέγερση.

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες Συνάρτησης Μεταφοράς (2)

- $P(s)=0 \rightarrow m$ λύσεις $s=z_1$, $s= z_2$, …, $s=z_m$ που ονομάζονται μηδενιστές ή ρίζες του συστήματος
- «n-οστή τάξη Δ.Ε. ⬄ n πόλοι ⬄ σύστημα $n^{ου}$ βαθμού(ή τάξης)»
- Απεικόνιση πόλων και μηδενιστών στο μιγαδικό επίπεδο (ή Im-Re επίπεδο)

p_3, p_4 συζυγείς μιγαδικοί πόλοι,

z_3, z_4 συζυγείς μιγαδικοί μηδενιστές



Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος

Μέθοδος τάσεων κόμβων

Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος

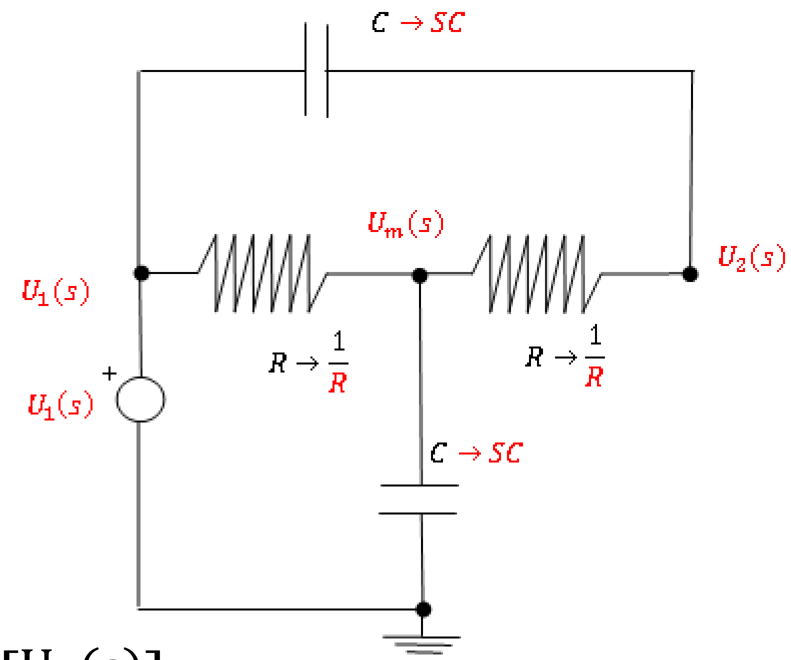
Λύση με

- A) Μέθοδο τάσεων κόμβων
- B) Μέθοδο εντάσεων βρόχων

A) Πηγή Τάσης χωρίς αντίσταση εν σειρά.

Μέθοδος τάσεων κόμβων:

ΠΡΟΣΟΧΗ στη μητρωϊκή εξίσωση!



- $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R} & \frac{2}{R} + s \cdot C & -\frac{1}{R} \\ -s \cdot C & -\frac{1}{R} & s \cdot C + \frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{\underline{G}(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_M(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}}_{\underline{U}(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{I}(s)}$$

Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος (2)

- Κάνοντας πολ/σμό μητρώων και διανυσμάτων:

$$-\frac{1}{R}\cdot U_1\,(s)+\left(\frac{2}{R}+C\cdot s\right)\cdot U_m\,(s)-\frac{1}{R}\cdot U_2(s)=0$$

$$-C\cdot s\cdot U_1(s)-\frac{1}{R}\cdot U_m\,(s)+(C\cdot s+\frac{1}{R})\cdot U_2\,(s)=0$$

- Απαλείφοντας το $U_m(s)$:

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{(R\cdot C)^2\cdot s^2+2\cdot R\cdot C\cdot s+1}{(R\cdot C)^2\cdot s^2+3\cdot R\cdot C\cdot s+1}=\frac{s^2+\frac{2}{R\cdot C}\cdot s+\frac{1}{(R\cdot C)^2}}{s^2+\frac{3}{R\cdot C}s+\frac{1}{(R\cdot C)^2}}$$

Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος (2)

- Κάνοντας πολ/σμό μητρώων και διανυσμάτων:

$$-\frac{1}{R}\cdot U_1\,(s)+\left(\frac{2}{R}+C\cdot s\right)\cdot U_m\,(s)-\frac{1}{R}\cdot U_2(s)=0$$

$$-C\cdot s\cdot U_1(s)-\frac{1}{R}\cdot U_m\,(s)+(C\cdot s+\frac{1}{R})\cdot U_2\,(s)=0$$

- Απαλείφοντας το $U_m(s)$:

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{(R\cdot C)^2\cdot s^2+2\cdot R\cdot C\cdot s+1}{(R\cdot C)^2\cdot s^2+3\cdot R\cdot C\cdot s+1}=\frac{s^2+\frac{2}{R\cdot C}\cdot s+\frac{1}{(R\cdot C)^2}}{s^2+\frac{3}{R\cdot C}s+\frac{1}{(R\cdot C)^2}}$$

Σύστημα δευτέρου βαθμού (χαρ. πολυώνυμο $s^2+\frac{3}{R\cdot C}\cdot s+\frac{1}{(R\cdot C)^2}$), άρα 2 πόλοι.

Επίσης 2 μηδενιστές από το $s^2+\frac{2}{R\cdot C}\cdot s+\frac{1}{(R\cdot C)^2}$=0

<u>Παράδειγμα 1</u>: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος

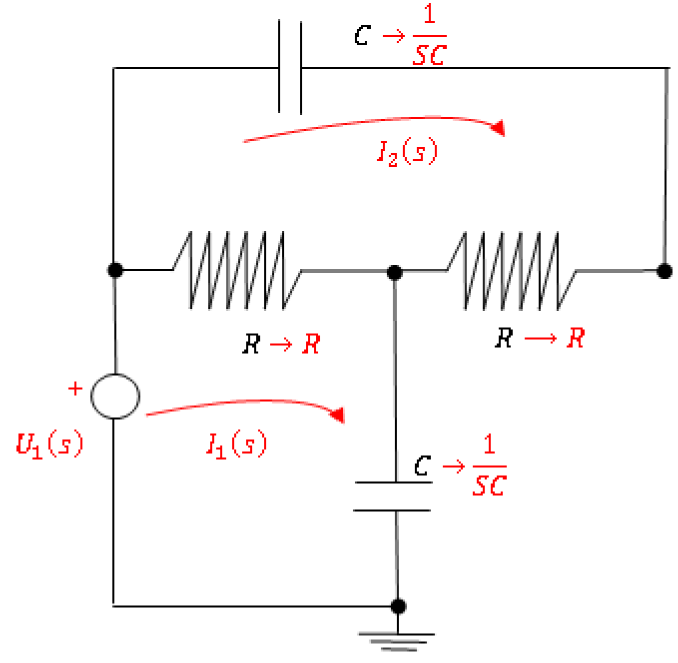
Μέθοδος εντάσεων βρόχων

<u>Παράδειγμα 1</u>: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος (3)

- B) Πηγή τάσης χωρίς εν σειρά αντίσταση και μέθοδος εντάσεων βρόχων. ΚΑΝΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$$\begin{bmatrix} R + \dfrac{1}{C \cdot s} & -R \\ -R & 2 \cdot R + \dfrac{1}{C \cdot s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}(s) \qquad \underline{I}(s) = \underline{U}(s)$$



<u>Παράδειγμα 1</u>: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος (4)

Κάνοντας πράξεις:

$$\mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{I}_1(\mathrm{s}) + \mathrm{I}_1(\mathrm{s}) - \mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{I}_2(\mathrm{s}) = \mathrm{C} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{U}_1(\mathrm{s})$$

$$-\mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{I}_1\,(\mathrm{s}) + (2 \cdot \mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{s} + 1)\mathrm{I}_2(\mathrm{s}) = 0$$

Από τις δύο εξισώσεις με 2 αγνώστους:

$$\mathrm{I}_1(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{U}_1(\mathrm{s})}{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}+1-\frac{\mathrm{R}^2\cdot\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{s}^2}{2\cdot\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}+1}} \quad \text{και} \quad \mathrm{I}_2(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{U}_1(\mathrm{s})}{(2\cdot\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}+1)\cdot(\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}\cdot\mathrm{s}+1)-\mathrm{R}^2\cdot\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{s}^2}$$

Παράδειγμα 1: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς ηλεκτρικού συστήματος (5)

Και τελικά:

$$U_2(s) = I_2(s) \cdot R + I_1(s) \cdot \frac{1}{C \cdot s}$$

$$= \frac{R^2 \cdot C^2 \cdot s^2 \cdot U_1\ (s)}{(2 \cdot R \cdot C \cdot s + 1) \cdot (R \cdot C \cdot s + 1) - R^2 \cdot C^2 \cdot s^2} + \frac{U_1(s)}{R \cdot C \cdot s + 1 - \frac{R^2 \cdot C^2 \cdot s^2}{2 \cdot R \cdot C \cdot s + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R^2 \cdot C^2 \cdot s^2 + 2 \cdot R \cdot C \cdot s + 1}{R^2 \cdot C^2 \cdot s^2 + 3 \cdot R \cdot C \cdot s + 1} = \frac{s^2 + \frac{2}{R \cdot C} \cdot s + \frac{1}{(R \cdot C)^2}}{s^2 + \frac{3}{R \cdot C} \cdot s + \frac{1}{(R \cdot C)^2}}$$

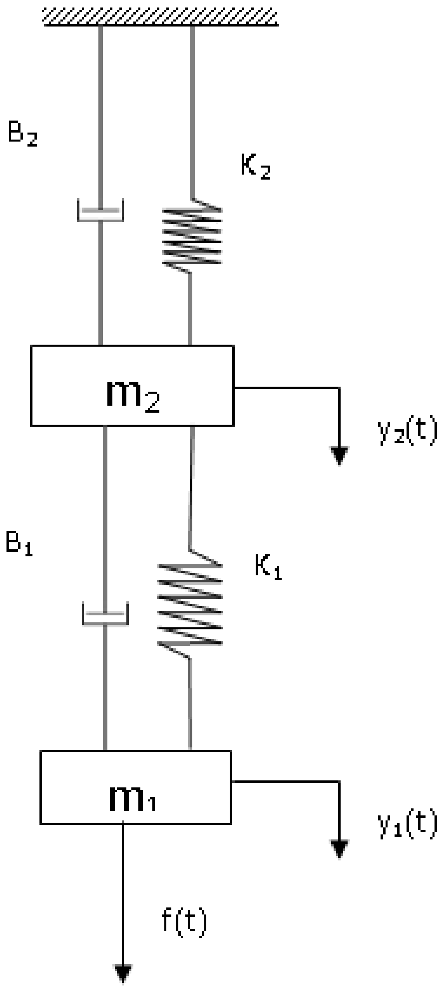
Συμπέρασμα

- Η σχέση μεταξύ $U_1(s)$ και $U_2(s)$, ή συνάρτηση μεταφοράς $\frac{U_2(s),}{U_1(s)}$ εξαρτάται <u>μόνο</u> από τα χαρακτηριστικά του κυκλώματος.

- Άρα είναι προφανές ότι θα είναι μια σχέση δεδομένη και ίδια ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο λύνουμε το κύκλωμα.

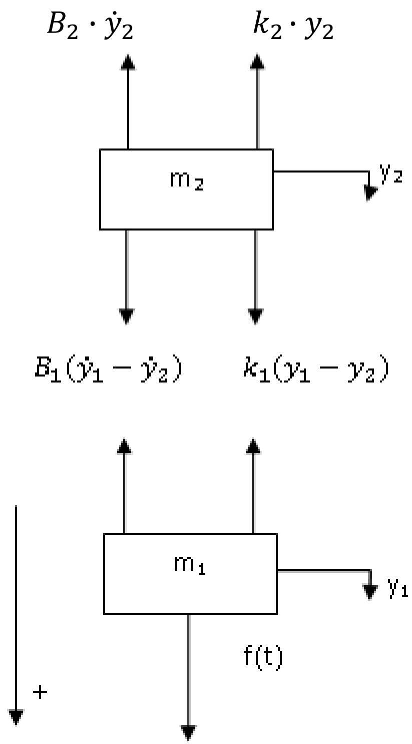
Παράδειγμα 2: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς μηχανικού συστήματος

Παράδειγμα 2: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς μηχανικού συστήματος



$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = ??$$

Παράδειγμα 2: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς μηχανικού συστήματος (2)



$$B_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_1 \cdot (y_1 - y_2) - k_2 \cdot y_2 - B_2 \cdot \dot{y}_2 = m_2 \cdot \ddot{y}_2 \quad (1)$$

$$-B_1 \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_1 \cdot (y_1 - y_2) + f = m_1 \cdot \ddot{y}_1 \quad (2)$$

Όπου $y_1 > y_2, \dot{y}_1 > \dot{y}_2$, ενώ το (t) παραλείπεται για οικονομία!

Παράδειγμα 2: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς μηχανικού συστήματος (3)

- Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στις (1), (2) με μηδενικές αρχικές συνθήκες

(1)=> $B_1 \cdot s \cdot [Y_1(s) - Y_2(s)] + k_1 \cdot [Y_1(s) - Y_2(s)] - k_2 \cdot Y_2\,(s)$

$-B_2 \cdot s \cdot Y_2\,(s) = m_2 \cdot s^2 \cdot Y_2\,(s)$ (3)

(2)=> $-B_1 \cdot s \cdot [Y_1(s) - Y_2(s)] - k_1 \cdot [Y_1(s) - Y_2(s)] + F(s) = m_1 \cdot s^2 \cdot Y_1\,(s)$ (4)

Παράδειγμα 2: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς μηχανικού συστήματος (4)

Επιλύουμε (4) ως προς $\mathrm{Y}_1(\mathrm{s})$ και αντικαθιστούμε στην (3) οπότε:

$$\mathrm{Y}_1(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{F(s)+B_1 \cdot s \cdot Y_2(s)+k_1 \cdot Y_2(s)}}{\mathrm{m_1 \cdot s^2+B_1 \cdot s+k_1}}$$

και

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{B_1 s + k_1}{m_1 m_2 s^4 + [m_1 B_1 + m_1 B_2 + m_2 B_1] s^3 + [m_1 k_1 + m_1 k_2 + m_2 k_1 + B_1 B_2] s^2 + [B_1 k_2 + B_2 k_1] s + [k_1 k_2]} \quad (5)$$

Ερωτήσεις

- Θυμηθείτε το μετασχηματισμό $\mathrm{D} \cdot \mathrm{x}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{x}(\mathrm{t})$, που χρησιμοποιήσαμε πριν λίγο καιρό. Τι παρατηρείτε;

- Έστω ότι θέλουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $\frac{\mathrm{Y}_1(\mathrm{s})}{\mathrm{F}(\mathrm{s})}$.

  Να δείξετε ότι η συνάρτηση μεταφοράς αυτή θα είναι επίσης $4^{ου}$ βαθμού όπως και η $\frac{\mathrm{Y}_2(\mathrm{s})}{\mathrm{F}(\mathrm{s})}$.

- Τί σχέση έχουν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των $\frac{\mathrm{Y}_1(\mathrm{s})}{\mathrm{F}(\mathrm{s})}$ και $\frac{\mathrm{Y}_2(\mathrm{s})}{\mathrm{F}(\mathrm{s})}$;

Τέλος Ενότητας