ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 1

Ενότητα # 8: Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace – Εφαρμογή σε απόκριση συστήματος: Σύστημα 1ης τάξης

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Υπολογισμός απόκρισης σε τυπικές εισόδους με χρήση μετασχηματισμού Laplace: ΚΑΝΟΝΕΣ.

- Η συνάρτηση μεταφοράς και η σχέση της με τα είδη αποκρίσεων.

- Τυπικές αποκρίσεις συστημάτων 1ου βαθμού.

Περιεχόμενα ενότητας

- Υπολογισμός της απόκρισης

- Ανάλυση σε στοιχειώδεις αποκρίσεις ανάλογα με το είδος πόλων:
  - Πόλοι πραγματικοί
  - Πόλοι πραγματικοί, αλλά κάποιος πολλαπλός
  - Παράδειγμα
  - Πόλοι μιγαδικοί σε ζεύγη
  - Παράδειγμα

Περιεχόμενα ενότητας

- Παρατηρήσεις

- Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού

Υπολογισμός της απόκρισης

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

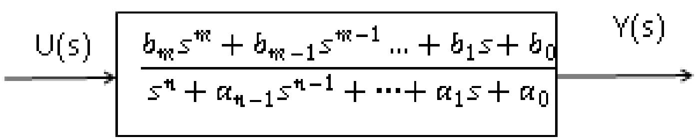
Υπολογισμός της απόκρισης: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

- Μετασχηματισμός Laplace: Μια διαφορική εξίσωση γίνεται αλγεβρική.

Υπολογισμός της απόκρισης: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

- Μετασχηματισμός Laplace: Μια διαφορική εξίσωση γίνεται αλγεβρική.

- Αν αρχικές συνθήκες μηδενικές: Συνάρτηση Μεταφοράς του συστήματος. Δηλαδή σταθερή σχέση εισόδου - εξόδου του συστήματος εξαρτώμενης των δομικών χαρακτηριστικών του συστήματος.

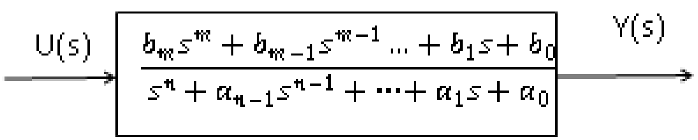


$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Υπολογισμός της απόκρισης: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

- Μετασχηματισμός Laplace: Μια διαφορική εξίσωση γίνεται αλγεβρική.

- Αν αρχικές συνθήκες μηδενικές: Συνάρτηση Μεταφοράς του συστήματος. Δηλαδή σταθερή σχέση εισόδου - εξόδου του συστήματος εξαρτώμενης των δομικών χαρακτηριστικών του συστήματος.



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \dots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0}$$

- Αν είσοδος U(s), τότε μέσω Σ.Μ. βρίσκεται η απόκριση Y(s) συστήματος στο πεδίο Laplace και με αντίστροφο μετ/μο Laplace η y(t) στο πεδίο χρόνου.

Όμως… Χρήση αντιστρόφου Laplace με συγκεκριμένο τρόπο:

- Η απόκριση Y(s) ανάγεται σε στοιχειώδεις $Y_1(s)$, $Y_2(s)$,…,$Y_k(s)$ για τις οποίες ο αντίστροφος Laplace είναι γνωστός, και δίδεται σε πίνακες.

- Άρα υπολογίζονται $y_1(t)$, $y_2(t)$,…, $y_k(t)$, και…

- … χωρίς να εκτελέσουμε περίπλοκους υπολογισμούς, λαμβάνουμε

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)+ \ldots +y_k(t)$$

Ανάλυση σε στοιχειώδεις αποκρίσεις ανάλογα με το είδος πόλων

I. Πόλοι πραγματικοί

Πως γίνεται

- Έστω απόκριση Y(s) από τη συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

$$Y(s) = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0} \cdot U(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \cdot \ldots \cdot (s-p_n)}$$

με $p_1,\ldots,p_n$ τους πόλους του συστήματος.

- Η παραπάνω Y(s) αναλύεται σε στοιχειώδεις αποκρίσεις ανάλογα με το είδος των πόλων ως εξής:

I. Πόλοι πραγματικοί και $\mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2 \neq \cdots \neq \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \cdots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= R_1(s)|_{s=p_1} \\ A_2 &= R_2(s)|_{s=p_2} \\ &\vdots \\ A_n &= R_n(s)|_{s=p_n} \end{aligned}\right\Vert$$

όπου: $R_i(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdot\cdots\cdot(s-p_n)} \cdot (s - p_i)$

υπόλοιπο (residue)

Ανάλυση σε στοιχειώδεις αποκρίσεις ανάλογα με το είδος πόλων

ΙΙ. Πόλοι πραγματικοί, αλλά κάποιος πολλαπλός

II. Πόλοι πραγματικοί, αλλά κάποιος πολλαπλός $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \cdots = \mathrm{p}_\mathrm{r} = \mathrm{p}$ (από τους n)

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s-p_1)^r} + \frac{A_2}{(s-p_2)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_r}{(s-p)} + \frac{A_{r+1}}{(s-p_{r+1})} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow}$$

$$y(t) = \left\{A_1 \cdot \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + A_2 \cdot \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \cdots + A_{r-i} \cdot t + A_r\right\} \cdot e^{p \cdot t} + A_{r+1} \cdot e^{p_n \cdot t}$$

- Τα $A_{r+1,\ldots,} A_n$ όπως στην προηγούμενη περίπτωση
- Τα $A_1, \ldots, A_r$ ως εξής:

$$A_1 = R(s)|_{s=p}$$

$$A_2 = \left.\frac{dR(s)}{ds}\right|_{s=p}$$

$$A_3 = \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2R(s)}{ds^2}\right|_{s=p}$$

$$\vdots$$

$$A_r = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}R(s)\Big|_{s=p}$$

Όπου το υπόλοιπο $R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot (s-p)^r$

Παράδειγμα

Παραδείγμα

Έστω $Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3 \cdot (s+2)}$. Σύμφωνα με όσα είπαμε:

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)} + \frac{A_4}{(s+2)}$$

- Υπόλοιπα για πολλαπλούς πόλους $R(s) = \frac{1}{\cancel{(s+1)}^3 \cdot (s+2)} \cdot \cancel{(s+1)}^3 = \frac{1}{s+2}$

$$A_1 = R(s)|_{s=-1} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

$$A_2 = \left.\frac{dR(s)}{ds}\right|_{s=-1} = -\left.\frac{1}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$A_3 = \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2R(s)}{ds^2}\right|_{s=-1} = 1$$

- Υπόλοιπο για πόλο *s*=-2 $R(s) = \frac{1}{(s+1)^3\cancel{(s+2)}}\cancel{(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^3}$

$$A_4 = R(s)|_{s=-2} = \frac{1}{(-2+1)^3} = -1$$

Τελικά λοιπόν:

$$y(t) = (\frac{1 \cdot t^2}{2!} + \frac{(-1) \cdot t}{1!} + 1 \cdot t^0) \cdot e^{-t} + (-1) \cdot e^{-2t} = \left[\frac{1}{2} \cdot t^2 - t + 1\right] \cdot e^{-t} - e^{-2t}$$

Σκίτσο Απόκρισης;;

Ανάλυση σε στοιχειώδεις αποκρίσεις ανάλογα με το είδος πόλων

III. Πόλοι μιγαδικοί σε ζεύγη

III. <u>Πόλοι μιγαδικοί σε ζεύγη</u> $\mathrm{p}_{1,2} = \sigma \pm \mathrm{j} \cdot \omega$

Αν $Y(s) = \frac{A_1 \cdot \omega + A_2 \cdot (s-\sigma)}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow}$ από πίνακες

$$y(t) = \{A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cdot \cos(\omega t)\} \cdot e^{\sigma \cdot t} = M \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot e^{\sigma \cdot t}$$

Ο υπολογισμός των A_1, A_2 και M, φ γίνεται ως εξής:

- Το υπόλοιπο των μιγαδικών πόλων $R_\mu(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot [(s-\sigma)^2 + \omega^2]$
- Σχηματίζουμε $\mathcal{A} = \frac{1}{\omega} R_\mu(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = A_1 + j \cdot A_2 = M \cdot e^{j \cdot \varphi}$

όπου $A_1 = Re[\mathcal{A}]$, $A_2 = Im[\mathcal{A}]$, $M = |\mathcal{A}|$, $\varphi = \tan^{-1} \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_1}$

Παράδειγματα

Παράδειγμα (1)

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+2s+5)(s+3)}$. Σύμφωνα με όσα είπαμε:

Πόλοι $p_{1,2} = -1 \pm j2$ και $p_3 = -3$. Θα έχουμε για τους $p_{1,2}$: σ=-1, ω=2

$$Y(s) = \frac{2 \cdot A_1 + A_2 \cdot (s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$R_\mu(s) = \frac{1}{(s^2+2s+5)\cdot(s+3)} \cdot (s^2+2s+5) = \frac{1}{s+3}$$

Αφού $(s+1)^2 + 2^2 = (s-\sigma)^2 + \omega^2 = s^2 + 2s + 5$!

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\Big|_{s=-1+2j} = \frac{1}{4+4j} = \frac{1}{8} - j \cdot \frac{1}{8}$$ άρα και $$A_1 = \frac{1}{8}, \quad A_2 = -\frac{1}{8}$$

$$M = \sqrt{(\frac{1}{8})^2 + (-\frac{1}{8})^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \varphi = tan^{-1}\frac{\frac{-1}{8}}{\frac{1}{8}} = -45\ ^{\circ}$$

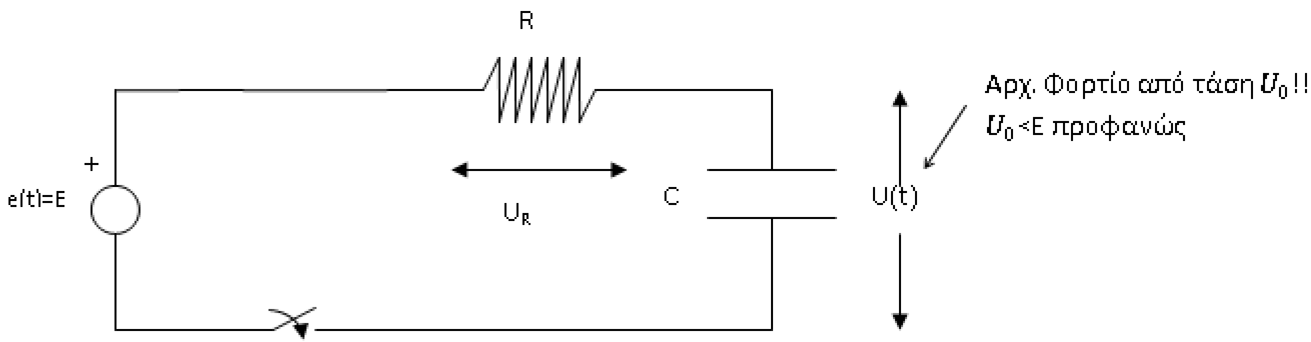
$$A_3 = R(s)|_{s=-3} = \frac{1}{(s^2+2s+5)(s+3)}(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{9-6+5} = \frac{1}{8}$$

Y(t)= $[\frac{1}{8} \cdot \sin(2 \cdot t) - \frac{1}{8} \cdot \cos(2 \cdot t)] \cdot e^{-t} + \frac{1}{8} \cdot e^{-3t} = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \sin\left(2 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{-t} + \frac{1}{8} \cdot e^{-3 \cdot t}$

Σκίτσο απόκρισης;;

Παράδειγμα (2)

Υπολογισμός (στον πίνακα!) απόκρισης κυκλώματος RC για είσοδο E Volts.



- Ποια εξίσωση αναπαριστά τη λειτουργία του κυκλώματος;

$$e(t)=i(\mathrm{t})\cdot R+u(t),\ u(0)=U_0$$

ή

$$e(t)=R\cdot C\cdot\frac{d}{dt}u(t)+u(t),\ \ u(0)=U_0$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πώς προχωρούμε:
  - Laplace,
  - χρήση βηματικής εισόδου $\mathrm{E}(s) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{s}}$,
  - χωρισμός σε απλά κλάσματα, μέθοδος υπολοίπων και
  - αντίστροφος Laplace

Οπότε…

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πώς προχωρούμε:
  - Laplace,
  - χρήση βηματικής εισόδου $\mathrm{E}(s) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{s}}$,
  - χωρισμός σε απλά κλάσματα, μέθοδος υπολοίπων και
  - αντίστροφος Laplace

Οπότε…

$$u(t) = E - (E - U_0) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Πώς προχωρούμε:
  - Laplace,
  - χρήση βηματικής εισόδου $\mathrm{E}(s) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{s}}$,
  - χωρισμός σε απλά κλάσματα, και
  - αντίστροφος Laplace

Οπότε…

$$u(t) = E - (E - U_0) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} = U_0 \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + E \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{R \cdot C}}\right)$$

Εξετάσατε τις περιπτώσεις $\mathrm{t} \rightarrow \infty, \mathrm{U}_0 = 0$. Ποιά η ελεύθερη και ποιά η εξαναγκασμένη απόκριση;

Παρατηρήσεις

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Η ελεύθερη απόκριση εξαρτάται μόνο απο τις αρχ. συνθήκες:
  - άρα τελικά, αν δεν μεσολαβεί συνεχώς διέγερση, για $t \to \infty$ $u(t) \to 0$, αν η απόκριση του συστήματος συγκλίνει [όχι π.χ. $\sin(\omega \cdot t)$!!!]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Η ελεύθερη απόκριση εξαρτάται μόνο απο τις αρχ. συνθήκες:
  - άρα τελικά, αν δεν μεσολαβεί συνεχώς διέγερση, για t → ∞ u(t) →0, αν η απόκριση του συστήματος συγκλίνει [όχι π.χ. sin(ω·t)!!!]

- Η (λόγω διέγερσης) εξαναγκασμένη απόκριση u(t)≠0 για t → ∞.
  - Συνεπώς, από τη συνάρτηση μεταφοράς (=με μηδενικές αρχικές συνθήκες) υπολογίζεται , με $\mathcal{L}^{-1}$ η μόνιμη τιμή της απόκρισης (αν υπάρχει!) για t → ∞.

- Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της μόνιμης κατάστασης σήματος $y(t)$ για $t \rightarrow \infty$, αν το $y(t)$ υπάρχει:

Θεώρημα τελικής τιμής: Αν η συνάρτηση $y(t)$ έχει όριο, τότε αυτό θα είναι

$$y_\infty = y(t)|_{t\rightarrow\infty} = \lim_{s\rightarrow 0} s \cdot Y(s)$$

Π.χ. για το κύκλωμα RC: $U(s) = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \cdot E(s)$

$$u_\infty = \lim_{s\rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \cdot \frac{E}{s} = 1 \cdot E = E$$

- Για είσοδο u(t), η εξαναγκασμένη απόκριση y(t) δίδεται στο πεδίο του χρόνου από το ολοκλήρωμα της ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (convolution):

$$y_{\varepsilon\xi.}(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(t)d\tau$$

με $g(t)$ τη βαρυτική συνάρτηση (ορισμός).

- Για είσοδο u(t), η εξαναγκασμένη απόκριση y(t) δίδεται στο πεδίο του χρόνου από το ολοκλήρωμα της ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (convolution):

$$y_{\varepsilon\xi.}(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(t)d\tau$$

με $g(t)$ τη βαρυτική συνάρτηση (ορισμός).

- Αλλά η εξαναγκασμένη απόκριση δίδεται από τη Σ.Μ. στο πεδίο Laplace:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- Για είσοδο u(t), η εξαναγκασμένη απόκριση y(t) δίδεται στο πεδίο του χρόνου από το ολοκλήρωμα της ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (convolution):

$$y_{\varepsilon\xi.}(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

με $g(t)$ τη βαρυτική συνάρτηση (ορισμός).

- Αλλά η εξαναγκασμένη απόκριση δίδεται από τη Σ.Μ. στο πεδίο Laplace:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

ΑΡΑ

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \qquad \text{ή} \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)\ \text{για}\ U(s) = 1]$$

«Η $g(t)$ είναι ο $\mathcal{L}^{-1}$ της απόκρισης του συστήματος σε κρουστική δ(t)»

Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους

Σύστημα 1ου βαθμού

Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού

Δ.Ε.: $$\frac{d}{dt}y(t) + a \cdot y(t) = b \cdot u(t) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{b}{\alpha} \cdot u(t),$$

Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού

Δ.Ε.: $$\frac{d}{dt}y(t) + a \cdot y(t) = b \cdot u(t) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{b}{\alpha} \cdot u(t),$$

$$\left.\begin{array}{c} T = \dfrac{1}{\alpha} : \text{σταθερά χρόνου}, \qquad A = \dfrac{b}{a} : \text{ενισχυση} \\ \omega_n = \dfrac{1}{T} : \ \text{φυσ. συχνότητα} \end{array}\right\}$$

ή

$$T \cdot \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = A \cdot u(t) \qquad (2)$$

<u>Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1^{ου} βαθμού</u>

- Απόκριση σε βηματική είσοδο $u(t) = U_0$ για <u>μηδενικές αρχικές συνθήκες</u>:

$$(2) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad T \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = A \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{A}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{U_0}{s} = \frac{A \cdot U_0}{s} - \frac{A \cdot U_0}{s + \frac{1}{T}} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t) = A \cdot U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

<u>Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού</u>

- Απόκριση σε βηματική είσοδο $u(t) = U_0$ για <u>μηδενικές αρχικές συνθήκες</u>:

$$(2) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad T \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = A \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{A}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{U_0}{s} = \frac{A \cdot U_0}{s} - \frac{A \cdot U_0}{s + \frac{1}{T}} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t) = A \cdot U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

- Υπολογίζεται ότι για $t = \mathrm{T}$ (δηλαδή χρόνο μιας χρονικής σταθεράς)

$$y(\mathrm{T}) = 0.632 \cdot y_\infty = 0.632 \cdot A \cdot U_0$$

Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1^{ου} βαθμού

- Απόκριση σε βηματική είσοδο $u(t) = U_0$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$(2) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad T \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = A \cdot U(s)$$

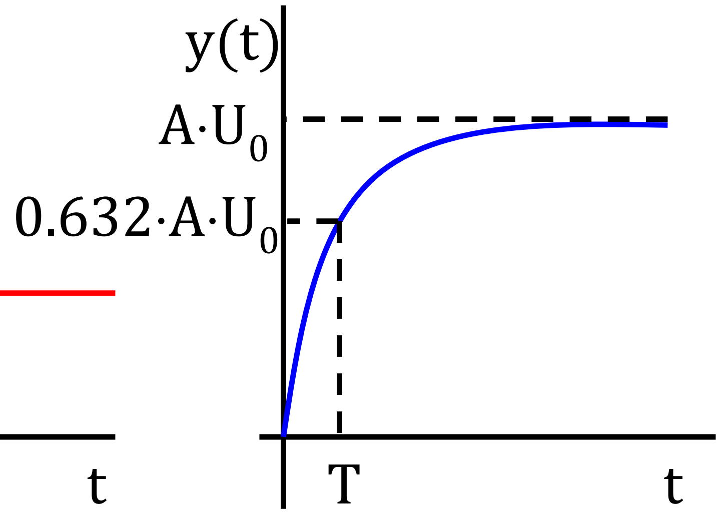
$$Y(s) = \frac{A}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{U_0}{s} = \frac{A \cdot U_0}{s} - \frac{A \cdot U_0}{s + \frac{1}{T}} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t) = A \cdot U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

- Υπολογίζεται ότι για t=T (δηλαδή χρόνο μιας χρονικής σταθεράς)

$$y(\mathrm{T}) = 0.632 \cdot y_\infty = 0.632 \cdot A \cdot U_0 \ !$$

- Επίσης για t=4·T θα είναι $y(4\cdot\mathrm{T}) = 0.98 \cdot y_\infty = 0.98 \cdot A \cdot U_0$!

Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού



Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού

- Απόκριση σε είσοδο ράμπας $u(t)=\alpha \cdot t$ για μηδενικές αρχικές συνθήκες:

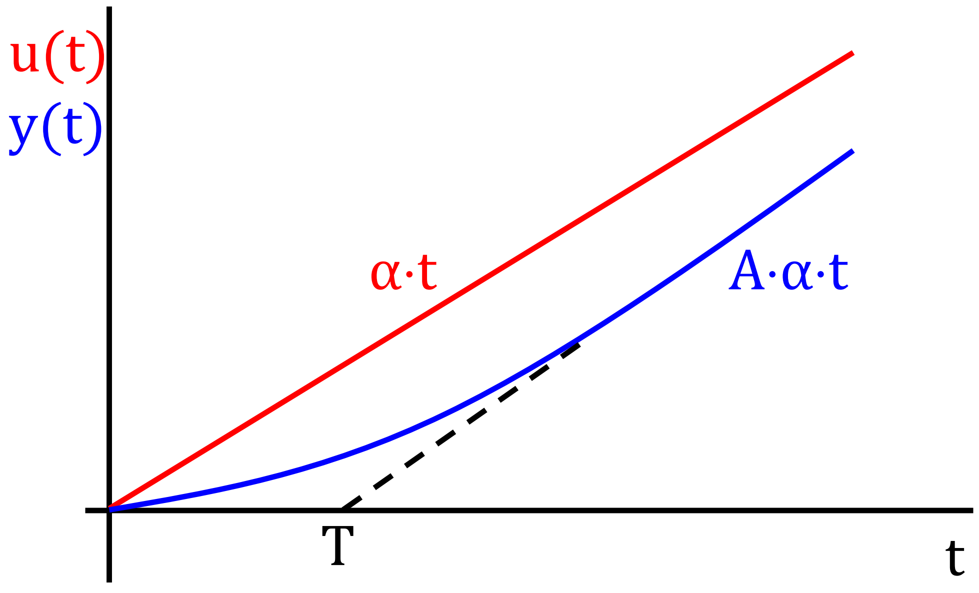
$$(2) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad T \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = A \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \frac{A}{T \cdot s + 1} \cdot \frac{\alpha}{s^2} = \frac{A \cdot \alpha}{s^2} - \frac{A \cdot \alpha \cdot T}{s} + \frac{A \cdot \alpha \cdot T}{s + \frac{1}{T}} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow}$$

$$y(t) = A \cdot \alpha \cdot [t - T + T \cdot e^{\frac{-t}{T}}] = A \cdot \alpha \cdot [t - T \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})]$$

Αποκρίσεις συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 1ου βαθμού

Δηλαδή



Άσκηση για το σπίτι: Κάνατε υπολογισμό της απόκρισης συστήματος RL!

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης