ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου 1

Ενότητα # 9: Σύστημα 2ης τάξης: Χρονική απόκριση και χαρακτηριστικά μεγέθη (φυσικοί συντελεστές)

Δ. Δημογιαννόπουλος, dimogian@teipir.gr
Επ. Καθηγητής Τμήματος Μηχανικών Αυτοματισμού Τ.Ε

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

- Χρήση μετ/μού Laplace για υπολογισμό τυπικών αποκρίσεων συστημάτων 2ου βαθμού.

- Χαρακτηριστικά μοναδιαίας βηματικής απόκρισης συστημάτων 2ου βαθμού.

- Σύνδεση χαρακτηριστικών απόκρισης και δομικών ιδιοτήτων συστημάτων 2ου βαθμού.

Περιεχόμενα ενότητας

- Αποκρίσεις Συστημάτων σε τυπικές εισόδους: Σύστημα 2^{ου} βαθμού με βηματική είσοδο
  - Απόκριση συστήματος με συντελεστή απόσβεσης ζ>1
  - Απόκριση συστήματος με συντελεστή απόσβεσης ζ=1
  - Απόκριση συστήματος με συντελεστή απόσβεσης ζ<1
- Χαρακτηριστικά μεγέθη βηματικής απόκρισης συστήματος όταν ζ<1
- Παράδειγμα

Περιεχόμενα ενότητας

- Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων
  - Παράδειγμα 1: Μηχανικό σύστημα
  - Παράδειγμα 2: Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC
  - Παράδειγμα 3: Ηλεκτροκινητήρας Συνεχούς ρεύματος με διέγερση δρομέα

Αποκρίσεις Συστημάτων σε τυπικές Εισόδους

Σύστημα 2ου βαθμού με βηματική είσοδο

Αποκρίσεις Συστημάτων σε τυπικές Εισόδους: Σύστημα 2ου βαθμού με βηματική είσοδο

Δ.Ε. $$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \alpha_1 \frac{d}{dt}y(t) + \alpha_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{{\omega_n}^2}\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = Au(t) \qquad (2)$$

ω_n : Φυσική συχνότητα,

$A = \frac{b_0}{\alpha_0}$: Κέρδος (ενίσχυση),

$\zeta = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0}}$: Συντελεστής απόσβεσης

Αποκρίσεις Συστημάτων σε τυπικές Εισόδους: Σύστημα 2ου βαθμού με βηματική είσοδο

Δ.Ε. $$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \alpha_1 \frac{d}{dt}y(t) + \alpha_0 y(t) = b_0 u(t) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{{\omega_n}^2}\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = Au(t) \qquad (2)$$

ω_n : Φυσική συχνότητα,

$A = \frac{b_0}{\alpha_0}$: Κέρδος (ενίσχυση),

$\zeta = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0}}$: Συντελεστής απόσβεσης

Απόκριση σε βηματική $u(t)=U_0$:

$$(2) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \frac{1}{{\omega_n}^2}s^2 Y(s) + \frac{2\zeta}{\omega_n}sY(s) + Y(s) = AU(s) \Longrightarrow Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\frac{U_0}{s} \quad (3)$$

Η $s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0$ με ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ $\Delta=4{\omega_n}^2(\zeta^2 - 1)$ έχει:

Αποκρίσεις Συστημάτων σε τυπικές Εισόδους: Σύστημα 2^{ου} βαθμού με βηματική είσοδο

Απόκριση σε βηματική u(t)=U_0:

$$(2)\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \frac{1}{{\omega_n}^2} s^2 Y(s) + \frac{2\zeta}{\omega_n} sY(s) + Y(s) = AU(s) \Longrightarrow Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2}\frac{U_0}{s} \quad (3)$$

Η $s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0$ με ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ Δ = $4{\omega_n}^2(\zeta^2 - 1)$ έχει:

I. 2 πόλους πραγματικούς αν Δ > 0 => $\zeta > 1$

II. 2 πόλους ίσους αν Δ = 0 => $\zeta = 1$

III. 2 μιγαδικούς πόλους (συζυγείς) αν Δ < 0 => $\zeta < 1$

Απόκριση συστήματος

Συντελεστής απόσβεσης $\zeta > 1$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ > 1

I. $\zeta > 1$ οπότε $\Delta > 0 \;=>\; s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = (s - \sigma_1)(s - \sigma_2)$

$$\sigma_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$$

Τότε με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}\frac{U_0}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - \sigma_1} + \frac{A_2}{s - \sigma_2}$$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ > 1

I. $\zeta > 1$ οπότε $\Delta > 0 => \; s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = (s - \sigma_1)(s - \sigma_2)$

$$\sigma_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0 \quad \text{και} \quad \sigma_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$$

Τότε με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}\frac{U_0}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - \sigma_1} + \frac{A_2}{s - \sigma_2}$$

$$A_0 = AU_0, \; A_1 = \frac{AU_0}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} < 0, \; A_2 = \frac{AU_0}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} > 0$$

(Παρατηρήσατε ότι, κάνοντας πράξεις, $A_1 + A_2 = -AU_0$)

Συντελεστής Απόσβεσης ζ > 1

Άρα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-\sigma_1} + \frac{A_2}{s-\sigma_2}\right] =$$

$$AU_0 + A_1 e^{-(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + A_2 e^{-(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \xRightarrow{A_1+A_2=-AU_0}$$

$$y(t) = \underbrace{AU_0\left(1 - e^{-\left(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right)} + \underbrace{A_2\left(-e^{-\left(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + e^{-\left(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right)}$$

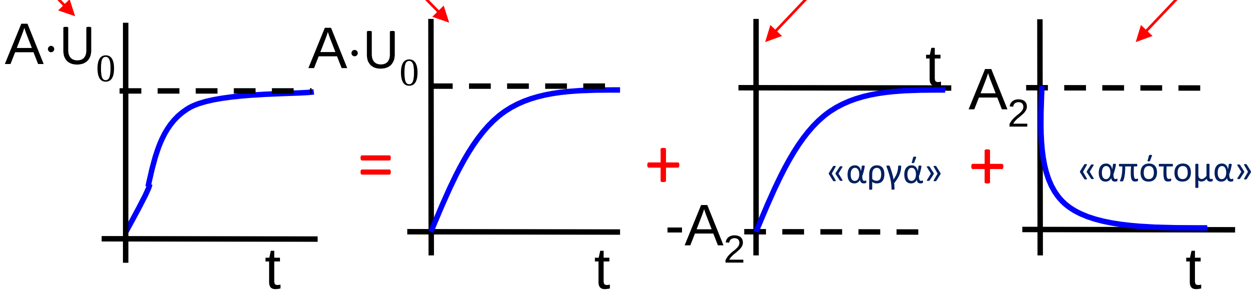
Συντελεστής Απόσβεσης ζ > 1

Άρα

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-\sigma_1} + \frac{A_2}{s-\sigma_2}\right] =$$

$$AU_0 + A_1 e^{-(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + A_2 e^{-(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \xRightarrow{A_1+A_2=-AU_0}$$

$$y(t) = \underbrace{AU_0\left(1 - e^{-\left(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right)} + \underbrace{A_2\left(-e^{-\left(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + e^{-\left(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right)}$$



Απόκριση συστήματος

Συντελεστής απόσβεσης $\zeta = 1$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ = 1

II. ζ=1 οπότε Δ=0 => $s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = (s-\sigma)^2$

$$\sigma = -\zeta\omega_n \overset{\zeta=1}{\Longrightarrow} \sigma = -\omega_n$$

Τότε

$$Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{(s-\sigma)^2}\frac{U_0}{s} \xRightarrow{\text{ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ}} Y(s) = AU_0{\omega_n}^2\left[\frac{A_1}{(s-\sigma)^2} + \frac{A_2}{s-\sigma} + \frac{A_3}{s}\right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{\omega_n},\ A_2 = -\frac{1}{{\omega_n}^2},\ A_3 = \frac{1}{{\omega_n}^2}$$

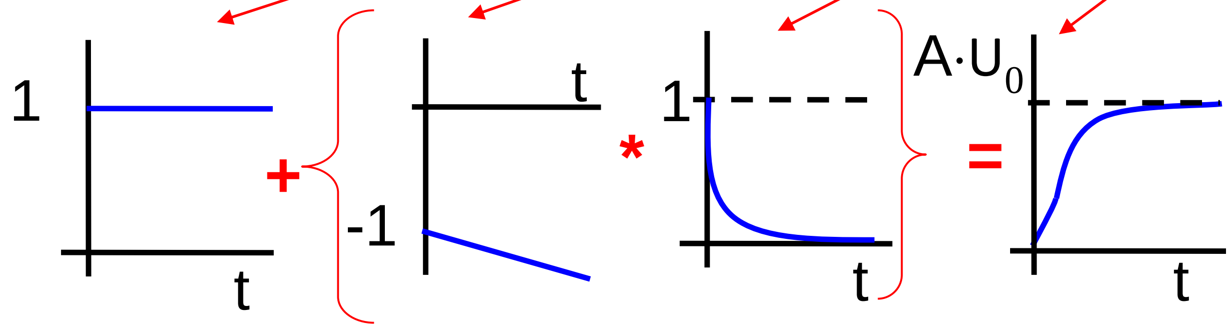
και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$y(t) = AU_0{\omega_n}^2\left[-\frac{t}{\omega_n}e^{-\omega_n t} - \frac{1}{{\omega_n}^2}e^{-\omega_n t} + \frac{1}{{\omega_n}^2}\right] = AU_0[1 + (-1 - t\omega_n)e^{-\omega_n t}]$$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ = 1

…το οποίο και αντιστοιχεί στην ακόλουθη μορφή απόκρισης:

$$AU_0{\omega_n}^2\left[-\frac{t}{\omega_n}e^{-\omega_n t}-\frac{1}{{\omega_n}^2}e^{-\omega_n t}+\frac{1}{{\omega_n}^2}\right]=AU_0\left[1+\boxed{(-1-t\omega_n)}e^{-\omega_n t}\right]=y(t)$$



Απόκριση συστήματος

Συντελεστής απόσβεσης $\zeta < 1$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ < 1

III. $\zeta < 1$ οπότε Δ < 0 => $s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = (s - s_1)(s - s_2)$

$$s_1 = \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} + j\,\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega}, \qquad s_2 = \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} - j\,\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega} \Rightarrow s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

Τότε

$$Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}\frac{U_0}{s} \xRightarrow{\text{ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ}} AU_0{\omega_n}^2\left[\frac{A_1\omega + A_2(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{A_3}{s}\right]$$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ < 1

III. $\zeta < 1$ οπότε Δ < 0 => $s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = (s - s_1)(s - s_2)$

$$s_1 = \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} + j\,\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega}, \qquad s_2 = \underbrace{-\zeta\omega_n}_{\sigma} - j\,\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega} \Rightarrow s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

Τότε

$$Y(s) = \frac{A{\omega_n}^2}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\frac{U_0}{s} \xRightarrow{\text{ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ}} AU_0{\omega_n}^2\left[\frac{A_1\omega + A_2(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{A_3}{s}\right]$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{s}\bigg|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{s}\bigg|_{s=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \underbrace{\frac{-\zeta}{{\omega_n}^2\sqrt{1-\zeta^2}}}_{A_1} + j\underbrace{\frac{-1}{{\omega_n}^2}}_{A_2}$$

$$A_3 = \frac{1}{(s-\sigma)^2+\omega^2}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{{\omega_n}^2}$$

Συντελεστής Απόσβεσης ζ < 1

Με αντίστροφο Laplace λοιπόν:

$$y(t) = AU_0{\omega_n}^2\left[\frac{-\zeta}{{\omega_n}^2\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right]t\right)e^{-\zeta\omega_n t} - \frac{1}{{\omega_n}^2}\cos\left(\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right]t\right)e^{-\zeta\omega_n t} + \frac{1}{{\omega_n}^2}\right] =$$

$$= AU_0{\omega_n}^2\left[\frac{1}{{\omega_n}^2} - M\sin\left(\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right]t+\varphi\right)e^{-\zeta\omega_n t}\right]$$

$$M = |\mathcal{A}| = \frac{1}{{\omega_n}^2\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \varphi = tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

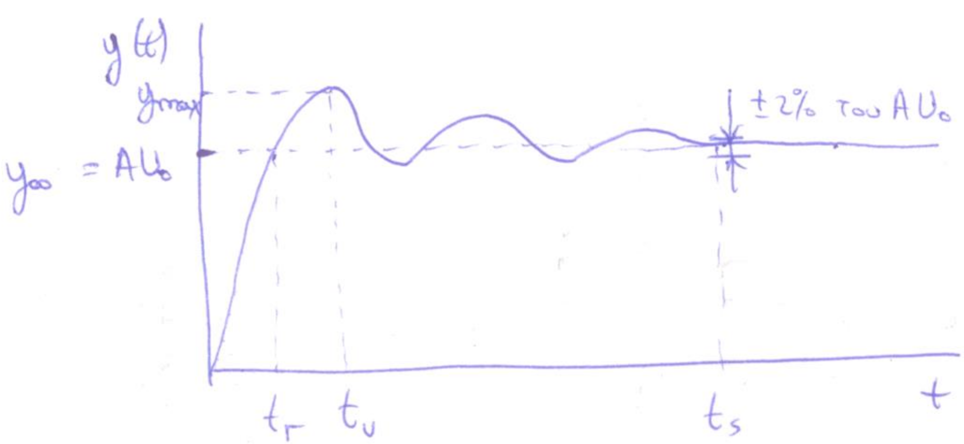
με, όπως πριν,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{s}\bigg|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{s}\bigg|_{s=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \underbrace{\frac{-\zeta}{{\omega_n}^2\sqrt{1-\zeta^2}}}_{A_1} + j\frac{-1}{\underbrace{{\omega_n}^2}_{A_2}}$$

Ποια η φόρμα της απόκρισης αυτής; (σχεδιασμός στον πίνακα!!)

Χαρακτηριστικά μεγέθη βηματικής απόκρισης συστήματος όταν ζ<1

Χαρακτηριστικά μεγέθη βηματικής απόκρισης συστήματος όταν ζ<1



Εύρεση χαρακτηριστικών μεγεθών της παραπάνω βηματικής απόκρισης:

$$y_{\max} \text{ όταν } \frac{d}{dt}y(t) = 0 \Rightarrow$$

$$AU_0\left[-M\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi\right)e^{-\zeta\omega_n t}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}+\zeta\omega_n M\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi\right)e^{-\zeta\omega_n t}\right]=0$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη βηματικής απόκρισης συστήματος όταν ζ<1

$$=> \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t = \pi => t_{\mathrm{v}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

και αντικαθιστώντας στο $y(t)$

$y(t_{\mathrm{v}}) = y_{max} = AU_0(1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}})$. Ορίζουμε την υπερύψωση V (ΓΙΑΤΙ;)

$$V := \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} = \frac{AU_0\left(1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right) - AU_0}{AU_0} = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη βηματικής απόκρισης συστήματος όταν ζ<1

- Ορίζουμε ως χρόνο αποκατάστασης t_s την είσοδο της απόκρισης $y(t)$ σε ζώνη $\pm 2\%$ του y_∞ (ή $\pm 5\%$ του y_∞, σπανιότερα). Από την έκφραση της απόκρισης y(t), εξισώνοντας με την αναμενόμενη τιμή (1.02 AU_0 ή 0.98 AU_0):

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \text{ για } \pm 2\%\, y_\infty \quad \text{ή} \quad t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} \text{ για } \pm 5\%\, y_\infty$$

- Ορίζουμε ως χρόνο ανόδου t_r την πρώτη χρονική στιγμή που $y(t) = y_\infty$. Από την έκφραση y(t), εξισώνοντας με την τιμή y_∞:

$$t_r = \frac{1 + 2.5\zeta}{\omega_n}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος $G(s)$ για $u(t)=1$ και να γίνει προσεγγιστική χάραξη του διαγράμματος $y(t) \sim t$:

$$G(s) = \frac{13}{s^2 + 4s + 13}$$

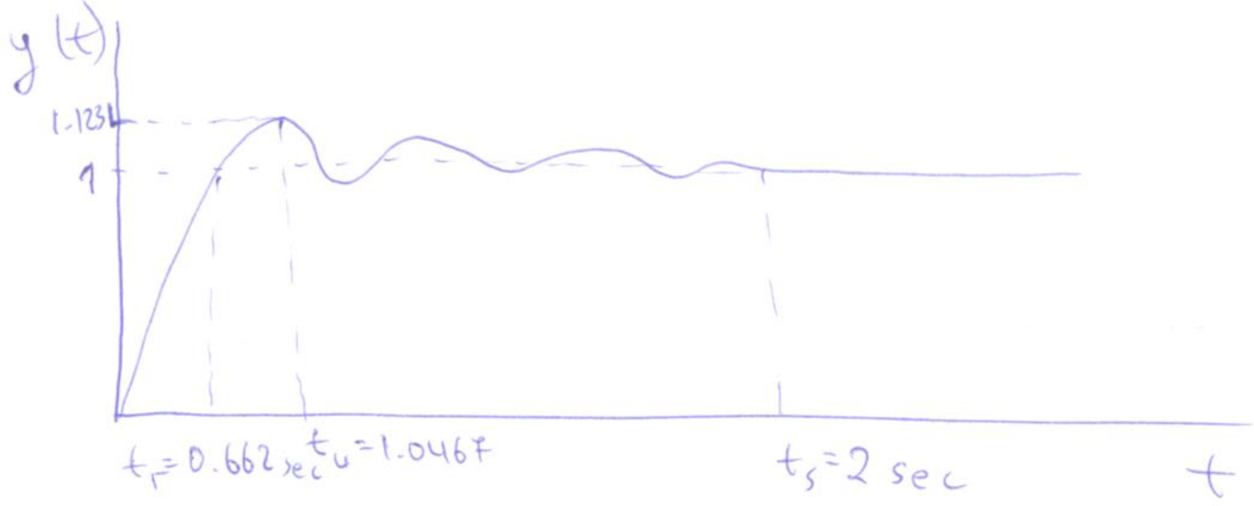
Το παράδειγμα λύνεται στον ΠΙΝΑΚΑ και η απάντηση είναι στην επόμενη διαφάνεια….

Λύση παραδείγματος

Η απάντηση θα είναι:

$$y(t) = 1 - \left[\frac{2}{3}\sin(3t) + \cos(3t)\right]e^{-2t} = 1 - 1.2\sin(3t + 56°)e^{-2t}$$

και



$V = 0.1231$

$$t_{\mathrm{v}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{3}sec = 1.0467sec$$

<u>Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων</u>

Παραδείγματα

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

- Έχοντας υπολογίσει αποκρίσεις για συστήματα 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού, μπορούμε να μελετάμε εφαρμογές χωρίς επανάληψη των υπολογισμών. ΠΩΣ;

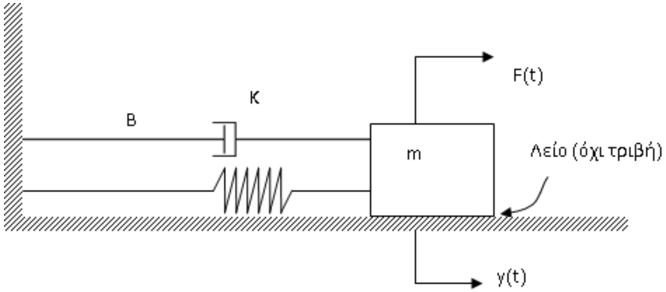
  Γράφοντας την συνάρτηση μεταφοράς τους στην κατάλληλη μορφή (τυπικού πρώτο/δευτεροβάθμιου) και χρησιμοποιώντας τους υπάρχοντες τύπους.

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

- Έχοντας υπολογίσει αποκρίσεις για συστήματα 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού, μπορούμε να μελετάμε εφαρμογές χωρίς επανάληψη των υπολογισμών. ΠΩΣ;

Γράφοντας την συνάρτηση μεταφοράς τους στην κατάλληλη μορφή (τυπικού πρώτο/δευτεροβάθμιου) και χρησιμοποιώντας τους υπάρχοντες τύπους!!

Παράδειγμα 1: Μηχανικό Σύστημα



Δ.Ε.: $m\frac{d^2}{dt^2}y(t) + B\frac{d}{dt}y(t) + ky(t) = f(t)$

$Laplace$: $ms^2Y(s) + BsY(s) + kY(s) = F(s)$

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

Συν. Μεταφοράς:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+Bs+k}$$

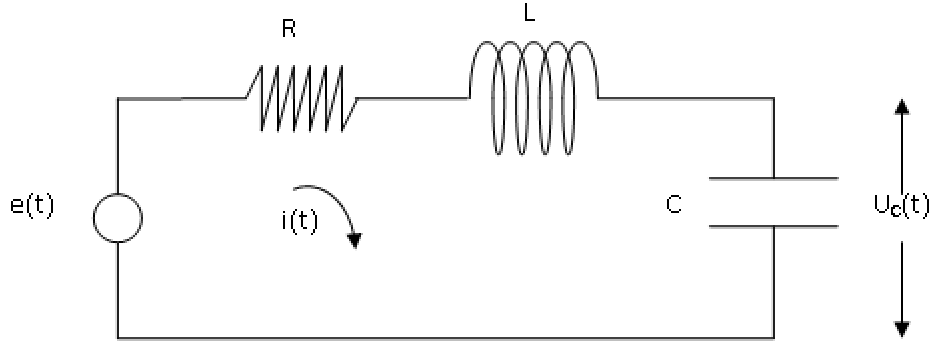
$$\xrightarrow{\text{ΓΡΑΦΗ ΣΕ ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ}}$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\kappa}\frac{\frac{\kappa}{m}}{s^2+\frac{B}{m}s+\frac{k}{m}}$$

Άρα $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $\quad 2\zeta\omega_n = \frac{B}{m} => \zeta = \frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{Km}}, \quad A = \frac{1}{K}$

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

Παράδειγμα 2: Ηλεκτρικό κύκλωμα RLC



Δ.Ε.: $$LC\frac{d^2}{dt^2}u_c(t) + RC\frac{d}{dt}u_c(t) + u_c(t) - e(t) = 0$$

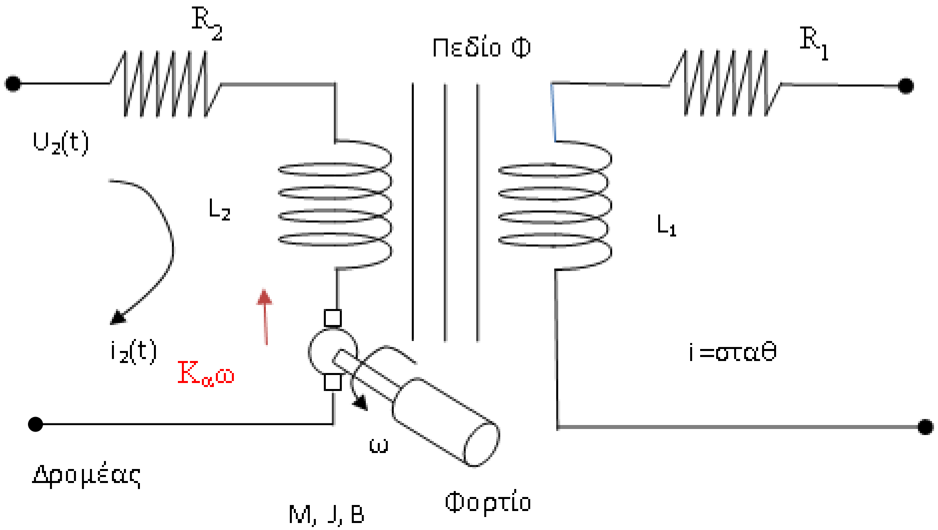
Laplace: $$LCs^2U_c(s) + RCsU_c(s) + U_c(s) = E(s)$$

Συν. Μεταφοράς: $$\frac{U_c(s)}{E(s)} = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} \xRightarrow{\text{ΓΡΑΦΗ ΣΕ ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ}} \frac{U_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

Άρα $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} \Rightarrow \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$, $A = 1$

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

Παράδειγμα 3: Ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος με διέγερση δρομέα



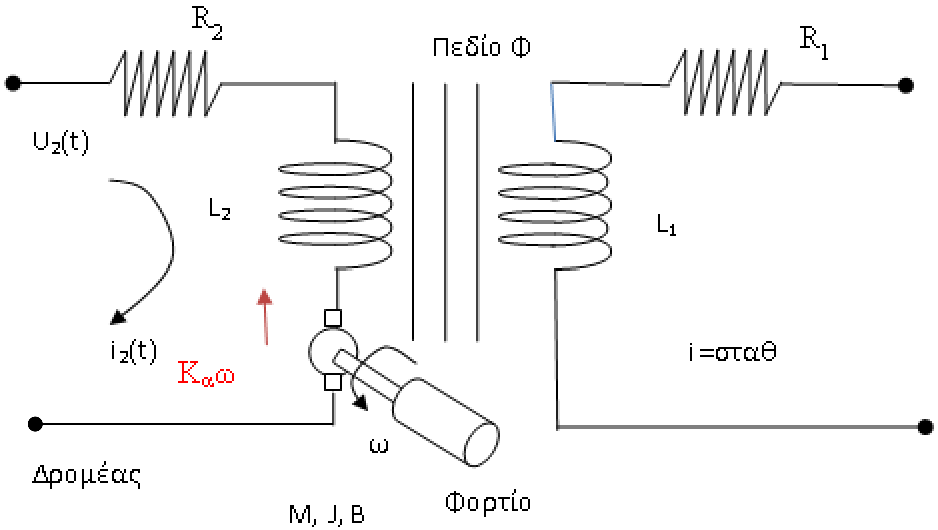
$$Δ.Ε.: u_2(t) - K_\alpha \omega(t) = i_2(t)R_2 + L_2 \frac{d}{dt} i_2(t)$$

$$M(t) = k i_2(t)$$

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) + B\omega(t) = M(t)$$

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

Παράδειγμα 3: Ηλεκτροκινητήρας συνεχούς ρεύματος με διέγερση δρομέα



Laplace: $$U_2(s) - K_a\Omega(s) = I_2(s)R_2 + L_2 s I_2(s)$$

$$M(s) = kI_2(s)$$

$$Js\Omega(s) + B\Omega(s) = M(s)$$

Χρήση των υπολογισμών στην απόκριση συστημάτων για μελέτη συστημάτων

Συν. Μεταφοράς: $\frac{\Omega(s)}{U_2(s)} = \frac{K}{JL_2 s^2 + [BL_2 + R_2 J]s + KK_a + R_2 B} =$

$$\frac{K}{KK_a + R_2 B} \cdot \frac{\frac{KK_a + R_2 B}{JL_2}}{s^2 + \frac{[BL_2 + R_2 J]}{JL_2} s + \frac{KK_a + R_2 B}{JL_2}}$$

Άρα $\omega_n = \sqrt{\frac{KK_a + R_2 B}{JL_2}}$, $2\zeta\omega_n = \frac{BL_2 + R_2 J}{JL_2} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{2\sqrt{JL_2}} \frac{BL_2 + R_2 J}{\sqrt{KK_a + R_2 B}}$, $A = \frac{K}{KK_a + R_2 B}$

Τέλος Ενότητας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης