ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ & ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ Ι – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΑΞΗΣ

Αν. Καθ.: Δ. ΔΗΜΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ
Επικ. Καθ.: Σ. ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΟΥ

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι

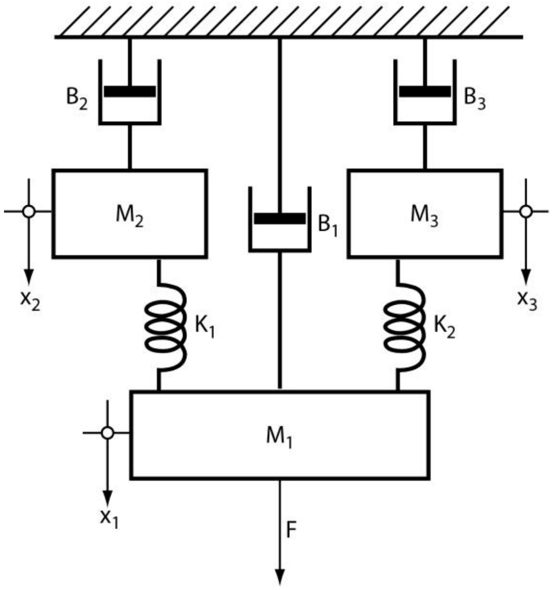
Ασκήσεις Πράξης - Τεστ

Χειμερινό εξάμηνο 2018/19

Τεστ 1

Μαθηματική εξομοίωση – Ανάλογα συστήματα – Αναλογικό διάγραμμα

ΟΜΑΔΑ Α: Δίνεται μηχανικό σύστημα.



α) Θεωρώντας ως είσοδο τη δύναμη $F(t)$ και εξόδους τις μετατοπίσεις x_1, x_2, x_3 σημειώστε τις δυνάμεις στα σώματα και γράψτε τις εξισώσεις του συστήματος.

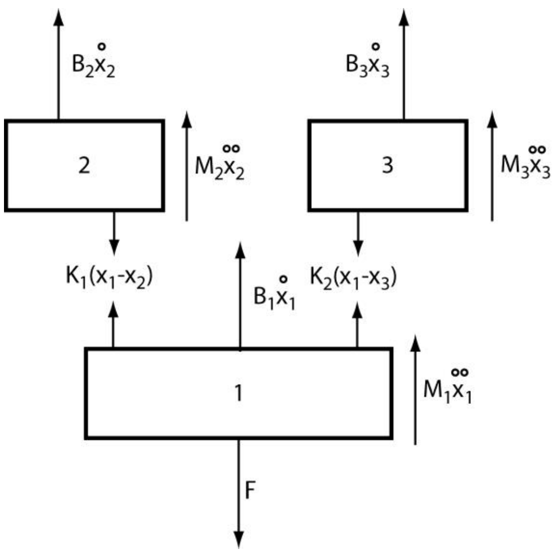
Έστω $x_1 > x_2 > x_3$.

β) Σχεδιάστε το ηλεκτρικό ανάλογο τάσης σημειώνοντας αναλογίες μεγεθών και στοιχείων.

γ) Σχεδιάστε το αναλογικό διάγραμμα του συστήματος .

Λύση

α) Σημειώνουμε τις δυνάμεις:



Εφαρμόζοντας το νόμο $\sum F = 0$ σε κάθε σώμα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

Σώμα 1: $M_1 \ddot{x}_1 + B_1 \dot{x}_1 + K_1(x_1 - x_2) + K_2(x_1 - x_3) = F$

ή
$$\ddot{x}_1 = -\frac{B_1}{M_1}\dot{x}_1 - \frac{(K_1 + K_2)}{M_1}x_1 + \frac{K_1}{M_1}x_2 + \frac{K_2}{M_1}x_3 + \frac{1}{M_1}F \qquad (1)$$

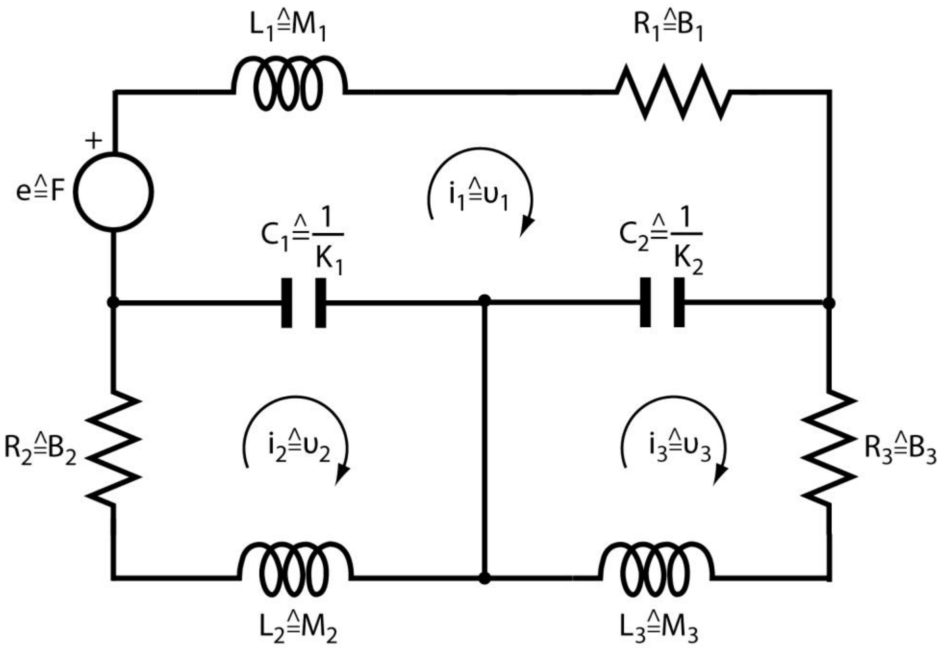
Σώμα 2: $M_2 \ddot{x}_2 + B_2 \dot{x}_2 = K_1(x_1 - x_2)$

ή
$$\ddot{x}_2 = -\frac{B_2}{M_2}\dot{x}_2 + \frac{K_1}{M_2}x_1 - \frac{K_1}{M_2}x_2 \qquad (2)$$

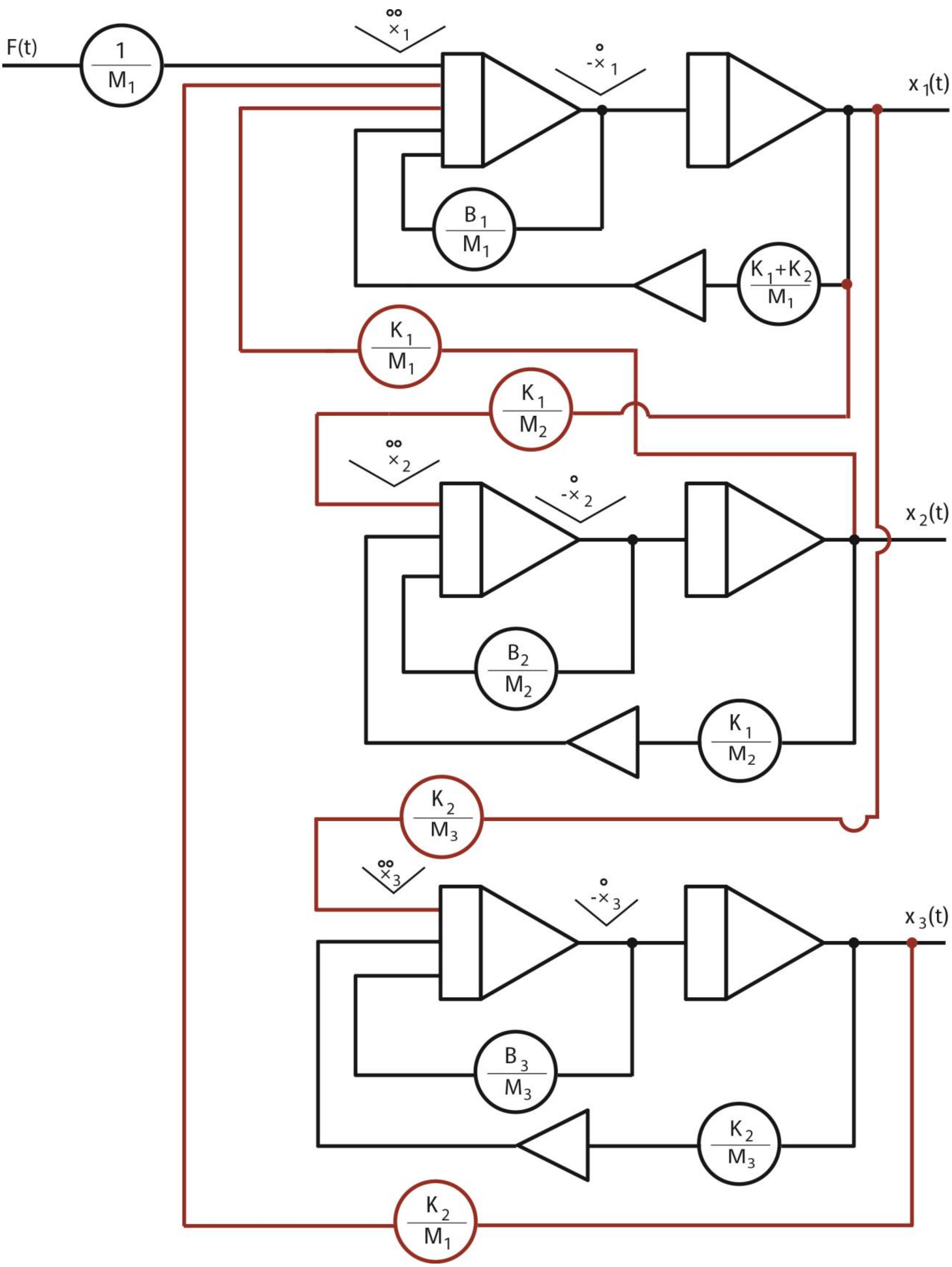
Σώμα 3: $M_3 \ddot{x}_3 + B_3 \dot{x}_3 = K_2(x_1 - x_3)$

ή
$$\ddot{x}_3 = -\frac{B_3}{M_3}\dot{x}_3 + \frac{K_2}{M_3}x_1 - \frac{K_2}{M_3}x_3 \qquad (3)$$

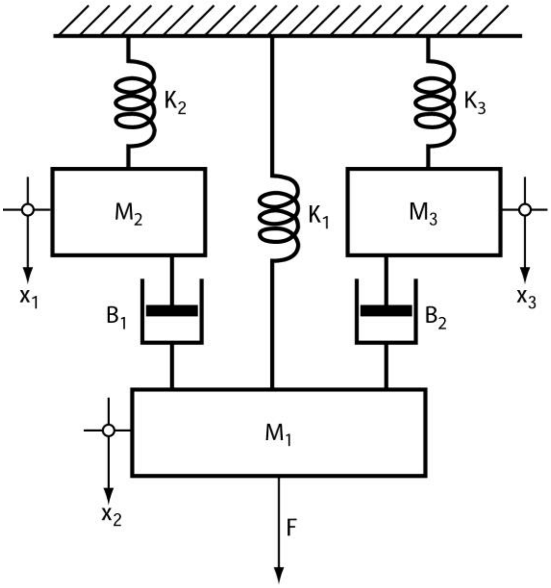
β) Ηλεκτρικό ανάλογο τάσης



γ) Αναλογικό διάγραμμα


F(t)
1/M1
x1(t)
B1/M1
(K1+K2)/M1
K1/M1
K1/M2
x2(t)
B2/M2
K1/M2
K2/M3
x3(t)
B3/M3
K2/M3
K2/M1

ΟΜΑΔΑ Β: Δίνεται μηχανικό σύστημα.



α) Θεωρώντας ως είσοδο τη δύναμη $F(t)$ και εξόδους τις μετατοπίσεις x_1, x_2, x_3 σημειώστε τις δυνάμεις στα σώματα και γράψτε τις εξισώσεις του συστήματος.

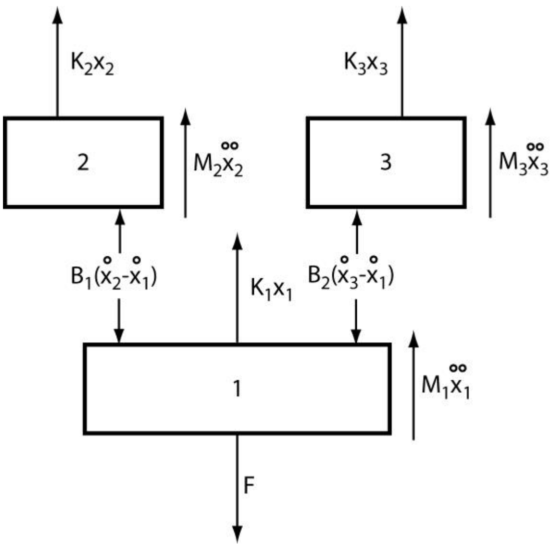
Έστω $x_1 < x_2 < x_3$.

β) Σχεδιάστε το ηλεκτρικό ανάλογο τάσης σημειώνοντας αναλογίες μεγεθών και στοιχείων.

γ) Σχεδιάστε το αναλογικό διάγραμμα του συστήματος .

Λύση

α) Σημειώνουμε τις δυνάμεις:



Εφαρμόζοντας το νόμο $\sum F = 0$ σε κάθε σώμα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

Σώμα 1: $M_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 - B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - B_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) = F$

ή $$\ddot{x}_1 = -\frac{K_1}{M_1} x_1 - \frac{(B_1 + B_2)}{M_1} \dot{x}_1 + \frac{B_1}{M_1} \dot{x}_2 + \frac{B_2}{M_1} \dot{x}_3 + \frac{1}{M_1} F \qquad (1)$$

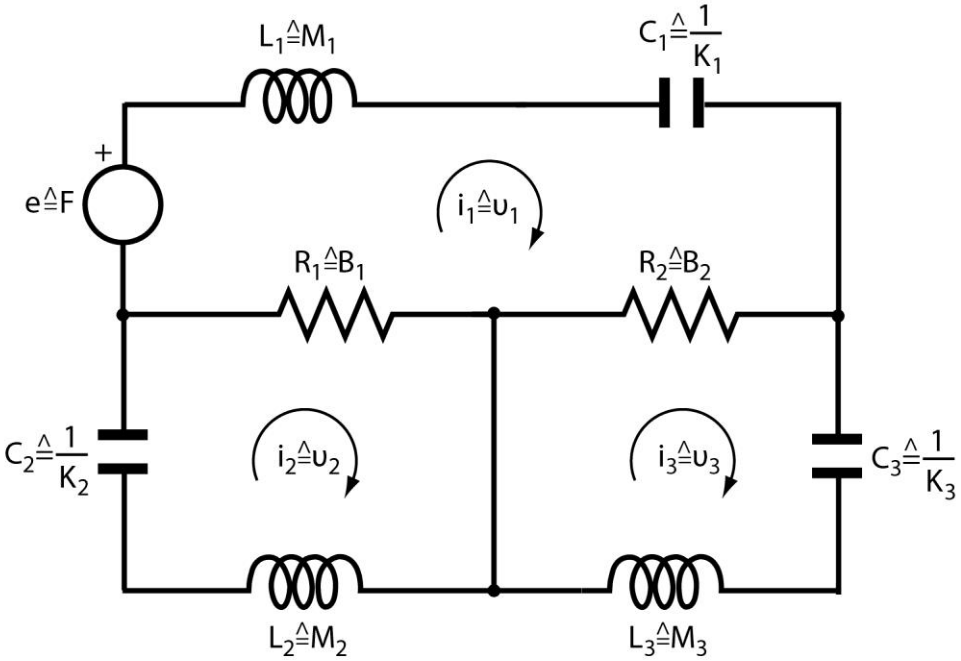
Σώμα 2: $M_2 \ddot{x}_2 + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_2 x_2 = 0$

ή $$\ddot{x}_2 = -\frac{B_1}{M_2} \dot{x}_2 + \frac{B_1}{M_2} \dot{x}_1 - \frac{K_2}{M_2} x_2 \qquad (2)$$

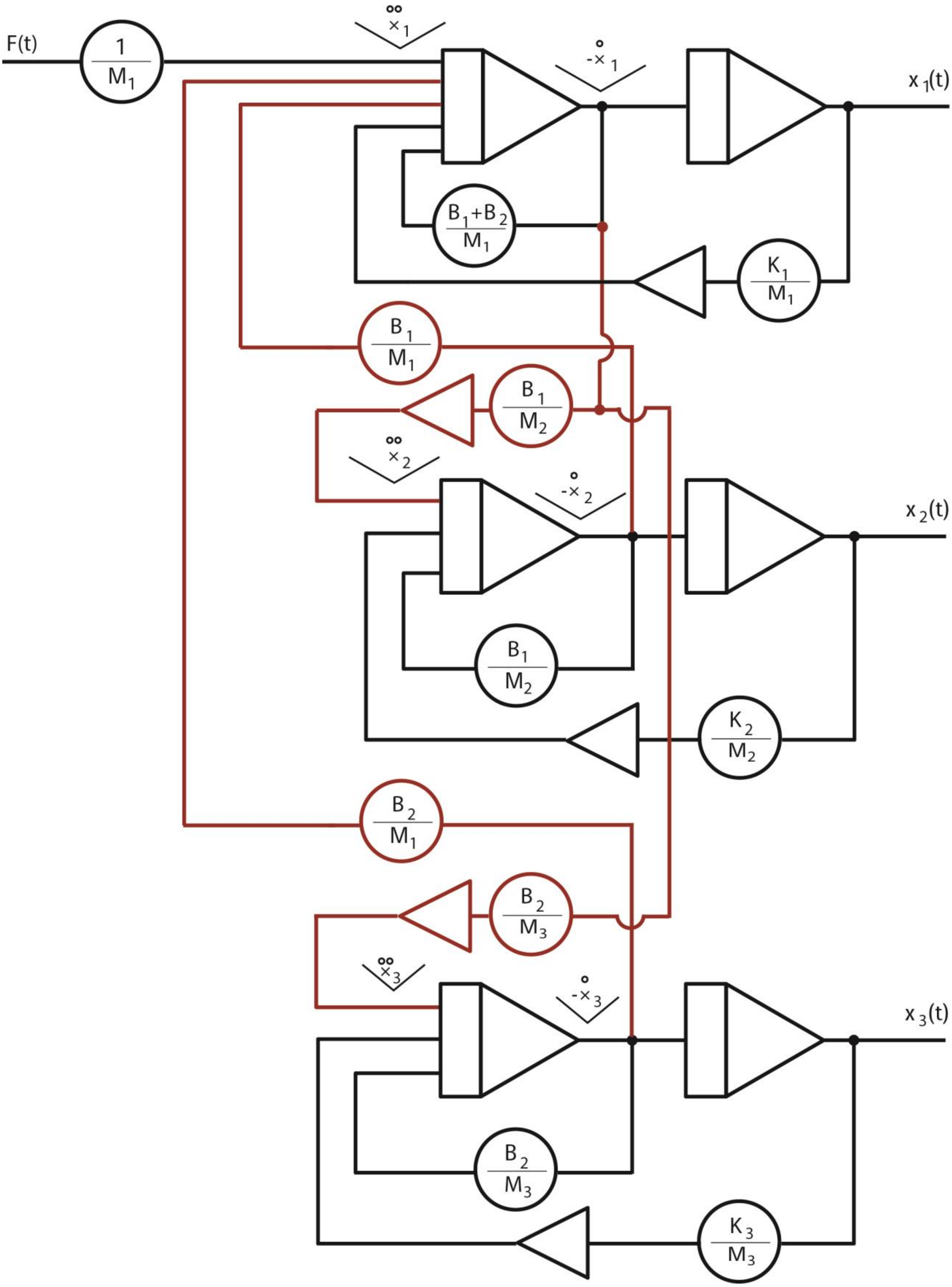
Σώμα 3: $M_3 \ddot{x}_3 + B_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + K_3 x_3 = 0$

ή $$\ddot{x}_3 = -\frac{B_2}{M_3} \dot{x}_3 + \frac{B_2}{M_3} \dot{x}_1 - \frac{K_3}{M_3} x_3 \qquad (3)$$

β) Ηλεκτρικό ανάλογο τάσης



γ) Αναλογικό διάγραμμα

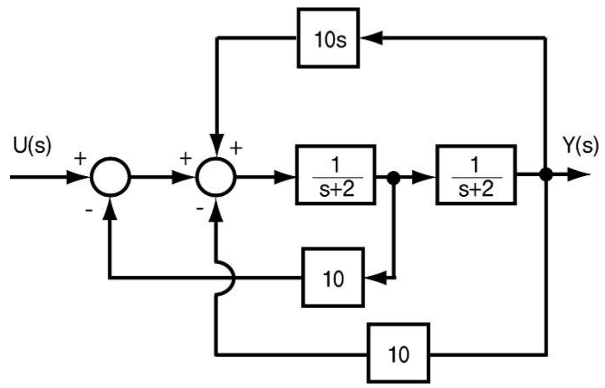


F(t)
1/M1
x1(t)
(B1+B2)/M1
K1/M1
B1/M1
B1/M2
x2(t)
B1/M2
K2/M2
B2/M1
B2/M3
x3(t)
B2/M3
K3/M3

Τεστ 2

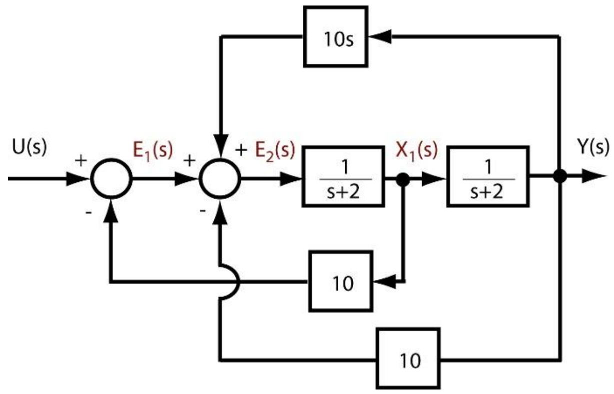
Άλγεβρα βαθμίδων – Συνάρτηση μεταφοράς

Δίνεται διάγραμμα βαθμίδων. Ορίστε τις κατάλληλες εσωτερικές μεταβλητές και υπολογίστε την ολική συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$.



Λύση

Ορίζουμε τις εσωτερικές μεταβλητές $E_1(s), E_2(s), X_1(s)$ και γράφουμε τις εξισώσεις:



(1) $E_1(s)=U(s)-10X_1(s)$

(2) $E_2(s)=E_1(s)+10sY(s)-10Y(s)$

(3) $X_1(s)=\dfrac{1}{s+2}E_2(s)$ ή $E_2(s)=(s+2)\cdot X_1(s)$

(4) $Y(s)=\dfrac{1}{s+2}X_1(s)$ ή $X_1(s)=(s+2)\cdot Y(s)$

(1) & (4): $E_1(s)=U(s)-10\cdot(s+2)\cdot Y(s)$

(2), (3) & (4):
$$(s+2)\cdot X_1(s)=E_1(s)+(10s-10)Y(s)\Rightarrow$$
$$(s+2)\cdot(s+2)\cdot Y(s)=U(s)-10(s+2)Y(s)+(10s-10)Y(s)\Rightarrow$$
$$(s+2)^2Y(s)+10(s+2)Y(s)-(10s-10)Y(s)=U(s)$$

Άρα η ολική συνάρτηση μεταφοράς είναι: $G_0(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2+4s+34}$.

Τεστ 3

Χρονική απόκριση συστημάτων

ΟΜΑΔΑ Α: Δίνεται σύστημα: $G(s)=\dfrac{K}{s^2+4s+K}$. Βρείτε και σχεδιάστε τη βηματική χρονική απόκριση $y(t)$ για $K=3$, $K=4$, $K=5$.

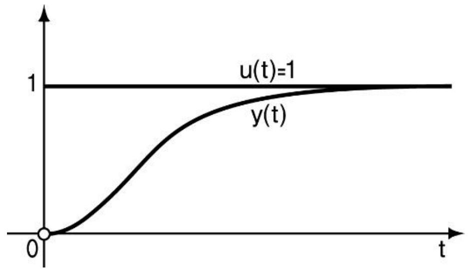
Λύση

α) $K=3$, $G(s)=\dfrac{3}{s^2+4s+3}=\dfrac{3}{(s+1)(s+3)}$

$u(t)=1$, $U(s)=\dfrac{1}{s}$, $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{3}{s(s+1)(s+3)}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{s+1}+\dfrac{A_3}{s+3}$

Είναι: $A_1=\left.\dfrac{3}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=1$, $A_2=\left.\dfrac{3}{s(s+3)}\right|_{s=-1}=-\dfrac{3}{2}$, $A_3=\left.\dfrac{3}{s(s+1)}\right|_{s=-3}=\dfrac{3}{6}$,

άρα η χρονική απόκριση: $y(t)=1-\dfrac{3}{2}e^{-t}+\dfrac{3}{6}e^{-3t}$ με $y(0)=0$ και $y(\infty)\to 1$.

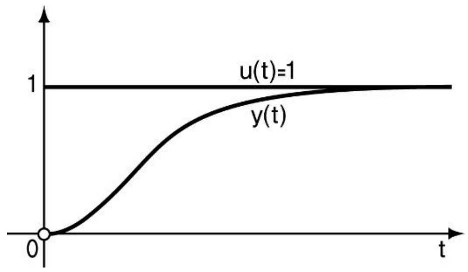


β) $K=4$, $G(s)=\dfrac{4}{s^2+4s+4}=\dfrac{4}{(s+2)^2}$

$u(t)=1$, $U(s)=\dfrac{1}{s}$, $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{4}{s(s+2)^2}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{(s+2)^2}+\dfrac{A_3}{s+2}$

Είναι: $A_1=\left.\dfrac{4}{(s+2)^2}\right|_{s=0}=1$, $A_2=\left.\dfrac{4}{s}\right|_{s=-2}=-2$, $A_3=\left.\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{4}{s}\right)\right|_{s=-2}=-1$,

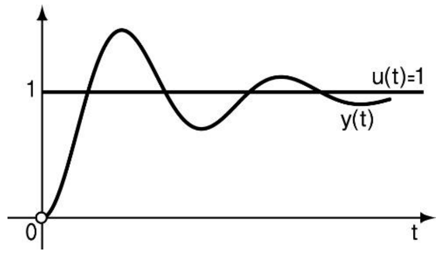
άρα η χρονική απόκριση: $y(t)=1-2te^{-2t}-e^{-2t}$ με $y(0)=0$ και $y(\infty)\to 1$.



γ) $K=5$, $G(s)=\dfrac{5}{s^2+4s+5}=\dfrac{5}{(s+2)^2+1}$

$u(t)=1$, $U(s)=\dfrac{1}{s}$, $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{5}{s\left[(s+2)^2+1\right]}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2\cdot 1+A_3\cdot(s+2)}{(s+2)^2+1}$

Είναι: $A_1=\left.\dfrac{5}{(s+2)^2+1}\right|_{s=0}=1$, $A=A_2+jA_3=\left.\dfrac{5}{s}\right|_{s=-2+j}=-2-j$, $A_2=-2$ και $A_3=-1$, άρα η χρονική απόκριση: $y(t)=1-2e^{-t}\eta\mu t-e^{-t}\sigma\upsilon\nu t$.



ΟΜΑΔΑ Β: Δίνονται συστήματα:

α) $G(s)=\dfrac{4}{s^2+4s+3}$, β) $G(s)=\dfrac{3.6}{s^2+6s+9}$, γ) $G(s)=\dfrac{4}{s^2+6s+13}$.

Βρείτε και σχεδιάστε τη βηματική χρονική απόκριση $y(t)$.

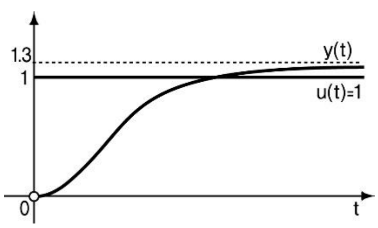
Λύση

α) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $G(s)=\dfrac{4}{s^2+4s+3}=\dfrac{4}{(s+1)(s+3)}$, ($\Delta=4>0$ και $s_1=-1$, $s_2=-3$).

$u(t)=1$, $U(s)=\dfrac{1}{s}$, $Y(s)=G(s)\cdot U(s)=\dfrac{4}{s(s+1)(s+3)}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{(s+1)}+\dfrac{A_3}{(s+3)}$

όπου: $A_1=\left.\dfrac{4}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=\dfrac{4}{3}$, $A_2=\left.\dfrac{4}{s(s+3)}\right|_{s=-1}=-2$ και $A_3=\left.\dfrac{4}{s(s+1)}\right|_{s=-3}=\dfrac{2}{3}$

Οπότε: $y(t)=\dfrac{4}{3}-2e^{-t}+\dfrac{2}{3}e^{-3t}$. Για $t=0$: $y(0)=0$ και για $t=\infty$: $y(\infty)=\dfrac{4}{3}=1.3$.

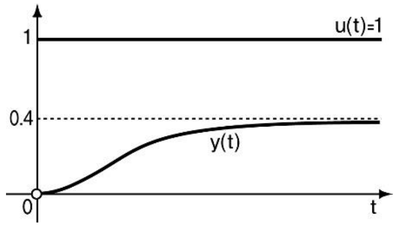


β) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $G(s)=\dfrac{3.6}{s^2+6s+9}=\dfrac{3.6}{(s+3)^2}$, ($\Delta=0$ και $s_{1,2}=-3$).

$u(t)=1$, $U(s)=\dfrac{1}{s}$, $Y(s)=G(s)\cdot U(s)=\dfrac{4}{s(s+3)^2}=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{(s+3)^2}+\dfrac{A_3}{s+3}$

όπου: $A_1 = \left.\dfrac{3.6}{(s+3)^2}\right|_{s=0} = 0.4$, $A_2 = \left.\dfrac{3.6}{s}\right|_{s=-3} = -1.2$ και $A_3 = \left.\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{3.6}{s}\right)\right|_{s=-3} = -\left.\dfrac{3.6}{s^2}\right|_{s=-3} = -0.4$

Οπότε: $y(t) = 0.4 - 1.2te^{-3t} - 0.4e^{-3t}$. Για $t=0$: $y(0)=0$, για $t=\infty$: $y(\infty)=0.4$.



γ) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $G(s) = \dfrac{4}{s^2+6s+13} = \dfrac{4}{(s+3)^2+2^2}$, ($\Delta = -16 < 0$ και $s_{1,2} = -3 \pm 2j$).

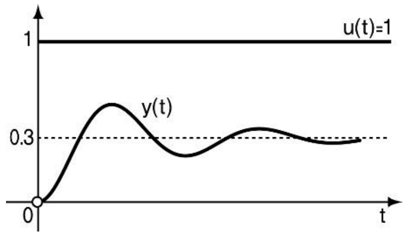
$u(t)=1$, $U(s)=\dfrac{1}{s}$, $Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \dfrac{4}{s\left[(s+3)^2+2^2\right]} = \dfrac{A_1}{s} + \dfrac{A_2\cdot 2 + A_3\cdot(s+2)}{(s+3)^2+2^2}$

όπου: $A_1 = \left.\dfrac{4}{s^2+6s+13}\right|_{s=0} = \dfrac{4}{13}$ και

$A = A_2 + jA_3 = \dfrac{1}{2}\cdot\left.\dfrac{4}{s}\right|_{s=-3+2j} = \dfrac{2(-3-2j)}{(-3+2j)(-3-2j)} = \dfrac{-6-4j}{13}$,

άρα $A_2 = \dfrac{-6}{13}$ και $A_3 = \dfrac{-4}{13}$

Οπότε: $y(t) = \dfrac{4}{13} - \dfrac{6}{13}e^{-3t}\eta\mu 2t - \dfrac{4}{13}e^{-3t}\sigma\upsilon\nu 2t$. Για $t=0$: $y(0)=0$ και $t=\infty$: $y(\infty) = 4/13 = 0.3$.



Τεστ 4

Αρμονικά διαγράμματα Bode

Δίνεται σύστημα: $G(s) = \dfrac{10(s+2)(s+4)}{8s(s+10)}$

α) Σχεδιάστε τα διαγράμματα Bode μέτρου και φάσης

β) Βρείτε την αρμονική απόκριση για $\omega = 6$.

Λύση

α) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γράφεται:

$$G_1(s) = A_1 \frac{10(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{4}+1)}{8s(\frac{s}{10}+1)},$$

όπου $A_1 = \dfrac{10 \cdot 2 \cdot 4}{8 \cdot 10} = 1$ και $A_{1dB} = 20\log 1 = 0dB$

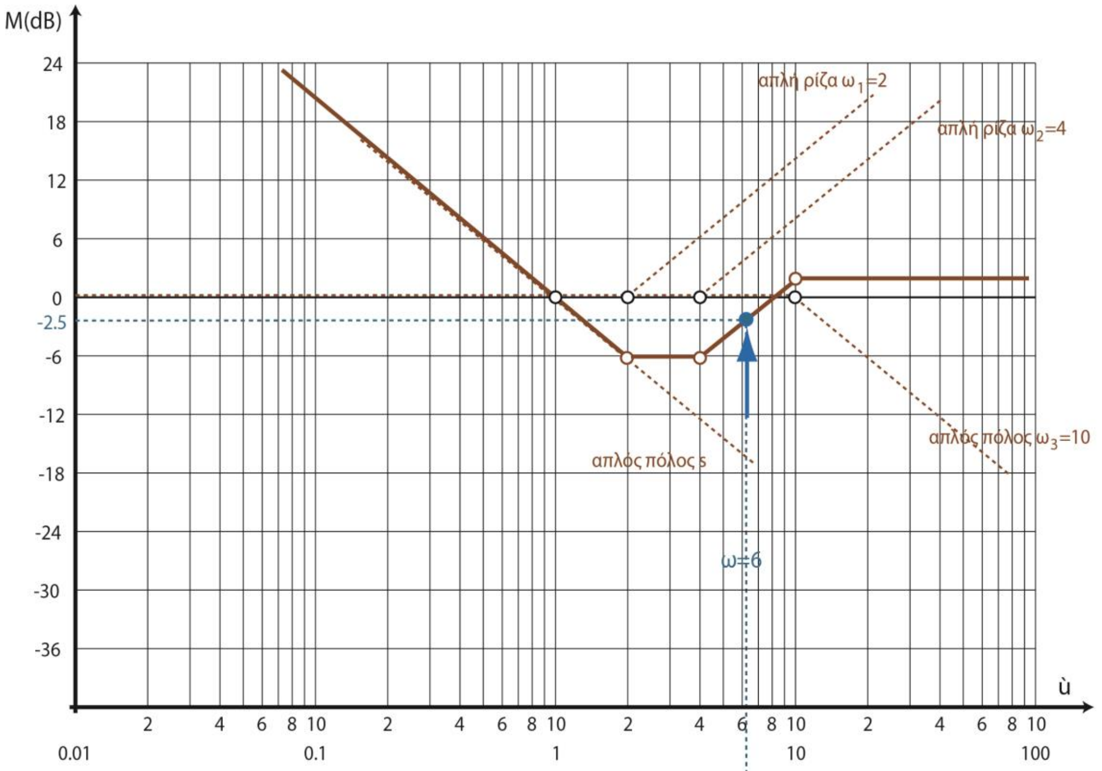
Το σύστημα διαθέτει:

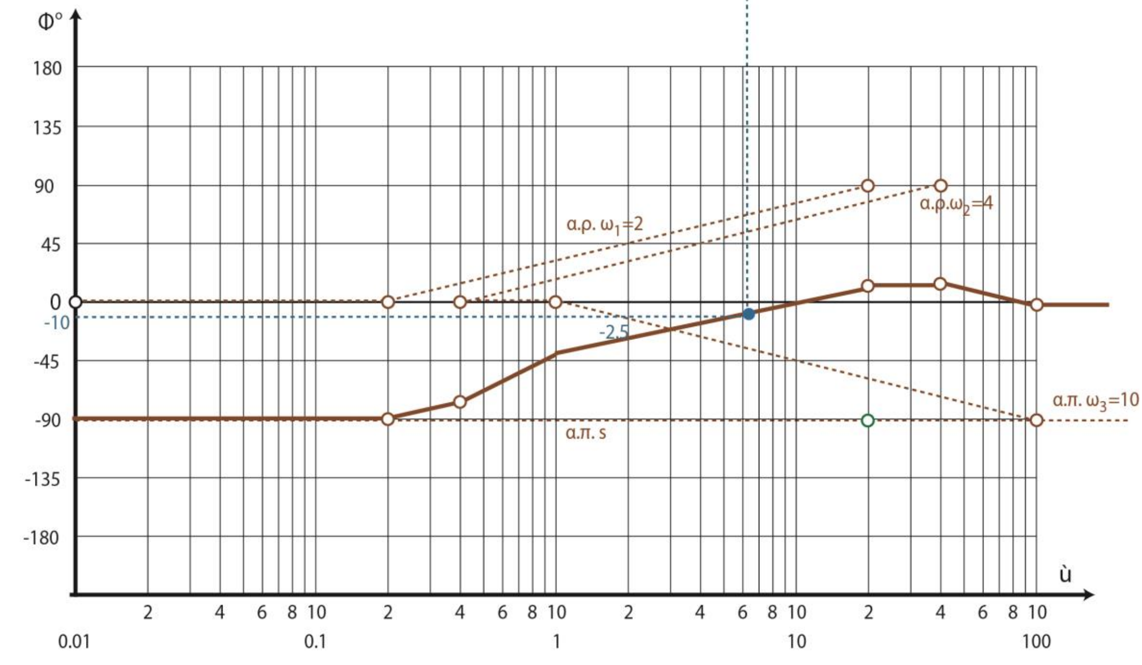
πόλο s , απλή ρίζα: $\omega_1 = 2$, απλή ρίζα: $\omega_2 = 4$ και απλό πόλο: $\omega_3 = 10$.

Οι αναλυτικοί πίνακες και τα διαγράμματα λογαριθμικού μέτρου και φάσης είναι:

	M_{dB} 1 2 4 10				
$A_1 = 1$	$0dB$	$0dB$	$0dB$	$0dB$	$0dB$
πόλος s	$-6dB/oct$	$-6dB/oct$	$-6dB/oct$	$-6dB/oct$	$-6dB/oct$
α.ρ. $\omega_1 = 2$	$0dB$	$0dB$	$6dB/oct$	$6dB/oct$	$6dB/oct$
α.ρ. $\omega_2 = 4$	$0dB$	$0dB$	$0dB$	$6dB/oct$	$6dB/oct$
α.π. $\omega_3 = 10$	$0dB$	$0dB$	$0dB$	$0dB$	$-6dB/oct$
Σύνολο	$-6dB/oct$	$-6dB/oct$	$0dB/oct$	$6dB/oct$	$0dB/oct$

	Φ^o 0.2 0.4 1 20 40 100						
$A_1 = 1$	0^o	0^o	0^o	0^o	0^o	0^o	0^o
πόλος s	-90^o	-90^o	-90^o	-90^o	-90^o	-90^o	-90^o
α.ρ. $\omega_1 = 2$	0^o	$\frac{45^o}{dec}$	$\frac{45^o}{dec}$	$\frac{45^o}{dec}$	90^o	90^o	90^o
α.ρ. $\omega_2 = 4$	0^o	0^o	$\frac{45^o}{dec}$	$\frac{45^o}{dec}$	$\frac{45^o}{dec}$	90^o	90^o
α.π. $\omega_3 = 10$	0^o	0^o	0^o	$-\frac{45^o}{dec}$	$-\frac{45^o}{dec}$	$-\frac{45^o}{dec}$	-90^o
Σύνολο	-90^o	$\frac{45^o}{dec}$	$\frac{90^o}{dec}$	$\frac{45^o}{dec}$	$0^o/d$	$-\frac{45^o}{dec}$	0^o





β) Από τα διαγράμματα προκύπτει:

για $\omega_2 = 6$, $M_{dB} = -2.5dB$,

$$M = 10^{-2,5/20} = 0.75$$

$$\Phi = -10^o$$

Αρμονική απόκριση: $y(t) = 0.75\eta\mu(t - 10^o)$