Εργαστηριακή άσκηση: Υπολογισμός πειραματικής αβεβαιότητας

Σκοπός της άσκησης

Σκοπός αυτής της άσκησης είναι η εξοικείωση των σπουδαστών με τα σφάλματα που εμφανίζονται κατά την πειραματική διαδικασία. Για το σκοπό αυτό, δίνεται στους σπουδαστές μια σειρά από πειραματικές μετρήσεις και καλούνται να προσδιορίσουν και να υπολογίσουν όλα τα πιθανά σφάλματα των μετρούμενων μεγεθών.

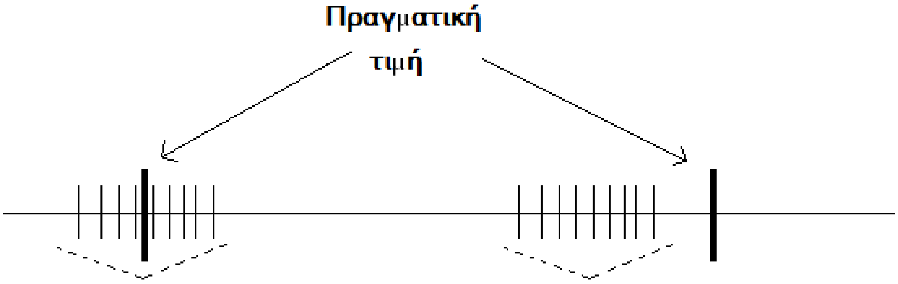
1ο Μέρος

Η μέτρηση είναι το βασικό συστατικό μιας πειραματικής διαδικασίας. Κατά τη μέτρηση ενός μεγέθους ή ακόμα και κατά τον υπολογισμό του, όταν αυτό παράγεται από μετρούμενα-πειραματικά δεδομένα, εμφανίζονται διάφορα σφάλματα. Με τον όρο "*σφάλμα*" ορίζεται η αναπόφευκτη, αριθμητικά εκφρασμένη, έλλειψη ακρίβειας που υπάρχει στη μέτρηση ενός μεγέθους σ' όλα τα πειράματα καθώς και τις τυχόν ατέλειες ή ελαττωματικότητας των οργάνων και των μεθόδων που ακολουθούνται κατά τη διάρκεια μιας πειραματικής διαδικασίας.

Ορισμένα από τα σφάλματα που εμφανίζονται είναι συστηματικά και ορισμένα τυχαία. Κατά τη διεξαγωγή μιας πειραματικής διαδικασίας, τα *τυχαία* σφάλματα δημιουργούνται εξαιτίας του γεγονότος ότι είναι αντικειμενικά αδύνατο να έχουμε κάθε φορά, δηλαδή σε κάθε μέτρηση, όλες τις συνθήκες ακριβώς ίδιες. Για παράδειγμα, όταν ένας σπουδαστής καταγράφει με ένα χρονόμετρο το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μετρήσεων ενός μεγέθους, είναι σίγουρο ότι δεν θα έχει πάντα τον ίδιο χρόνο απόκρισης. Άλλοτε θα σταματάει ή θα ξεκινάει το χρονόμετρο πιο γρήγορα και άλλοτε πιο αργά. Έτσι, στη μέτρηση του χρόνου θα δημιουργούνται τυχαία σφάλματα που είναι σαφώς αναπόφευκτα.

Υπάρχει όμως και η περίπτωση, το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε να μη λειτουργεί κανονικά και να «τρέχει» ή να πηγαίνει πιο αργά. Τότε, στη μέτρηση του χρονικού διαστήματος που μεσολαβεί μεταξύ των δυο διαδοχικών μετρήσεων του μεγέθους, του παραπάνω παραδείγματος, εμφανίζονται *συστηματικά* σφάλματα.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό από τα παραπάνω, ότι τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα και υπάρχουν πάντα σε μια πειραματική διαδικασία, σε αντίθεση με τα συστηματικά, τα οποία άλλοτε υπάρχουν και άλλοτε όχι. Τα συστηματικά σφάλματα μένουν σχεδόν πάντα σταθερά σ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Τα τυχαία σφάλματα μεταβάλλονται και μπορεί να είναι και θετικά ή και αρνητικά Αν δεν έχουμε συστηματικά σφάλματα οι μετρήσεις μας βρίσκονται γύρω από την πραγματική τιμή (Σχήμα 1α). Στην περίπτωση ύπαρξης μόνο συστηματικών σφαλμάτων, οι μετρήσεις είναι όλες μετατοπισμένες και διασκορπισμένες προς μια κατεύθυνση, θετική ή αρνητική σε σχέση με την "πραγματική τιμή" (Σχήμα 1β).



Σχήμα 1. Σχηματική απεικόνιση τυχαίου και συστηματικού λάθους.

Από τη φύση τους τα συστηματικά σφάλματα δεν είναι πάντα πολύ εύκολο να αναγνωριστούν και να αντιμετωπιστούν. Εφόσον δεν υπάρχει άλλος τρόπος, πρέπει πάντα να προσπαθούμε να τα ανακαλύπτουμε και να απαλλασσόμαστε από αυτά.
Για την εξάλειψή τους απαιτείται:

α) Η σωστή μελέτη των συνθηκών κάτω από τις οποίες θα διεξαχθεί το πείραμα πειραματικών συνθηκών καθώς επίσης και των απαιτήσεων που θέτει η αντίστοιχη θεωρία.

β) Η βεβαιότητα ότι τα όργανά μας λειτουργούν σωστά. Αυτή μπορούμε να την αποκτήσουμε αν συγκρίνουμε τα όργανα του πειράματος με ακριβέστερα "πρότυπα" όργανα (πράγμα που στην πράξη είναι φυσικά πολύ δύσκολο, ιδιαίτερα στις συνθήκες του εκπαιδευτικού εργαστηρίου) και

γ) η προσεκτική εκτέλεση του πειράματος.

Γενικά απαιτείται ιδιαίτερη εμπειρία και γνώση των νόμων της φυσικής. Πάντως πρέπει να σημειωθεί ότι τα συστηματικά σφάλματα είναι τα πιο "επικίνδυνα" στον προσδιορισμό ενός μεγέθους κατά τη διάρκεια ενός πειράματος.
Σε αντίθεση με τα συστηματικά σφάλματα, τα τυχαία σφάλματα παρουσιάζονται για παράδειγμα όταν μετράμε πολλές φορές την ίδια ποσότητα, αλλά και από τα όργανα που χρησιμοποιούμε και μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια στατιστικών μεθόδων, που έχουν τη βάση τους στη θεωρία των πιθανοτήτων. Για τον υπολογισμό των τυχαίων σφαλμάτων ακολουθούμε γενικά την παρακάτω διαδικασία:

1. **Μέση τιμή-Απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής.**

Έστω λοιπόν ότι σε μια πειραματική διαδικασία καταγράφουμε (ν) το πλήθος μετρήσεις για το ίδιο πάντα μέγεθος. Έστω ότι $x_1,x_2,x_3,...,x_\nu$ οι μετρήσεις που καταγράφηκαν. Τότε, θεωρούμε ότι η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην "πραγματική" τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι η μέση τιμή των (ν) μετρήσεων, η οποία υπολογίζεται με την εξίσωση:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

Ακόμα όμως και σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι το αποτέλεσμά μας συμπίπτει με την "πραγματική" τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το σφάλμα, δηλαδή μια περιοχή-εύρος τιμών του μετρούμενου μεγέθους (x) μέσα στην οποία βρίσκεται αυτή η πραγματική τιμή. Στην περίπτωση πληθυσμών τυχαίων σφαλμάτων θεωρείται ως η επικρατέστερη και πλέον πιθανή κατανομή, η κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss. Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία σφαλμάτων προκύπτει ότι αν θέλουμε με βεβαιότητα 68.26% η πραγματική τιμή να βρίσκεται μέσα στο παραπάνω διάστημα-εύρος τιμών τότε:

$$x = \bar{x} \pm \delta x$$

Όπου (δx) το σφάλμα που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}{\nu(\nu-1)}}$$

Αν επιθυμούμε μια βεβαιότητα της τάξης του 95.46% τότε $x = \bar{x} \pm 2\delta x$, αν επιθυμούμαι μια βεβαιότητα της τάξης του 99.74% τότε $x = \bar{x} \pm 3\delta x$ κοκ. Το σφάλμα (δx) όπως ορίστηκε, είναι γνωστό ως και απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής.

2. Σχετικό σφάλμα.

Πολλές φορές μετά τον υπολογισμό του απόλυτου σφάλματος ενός μεγέθους στη διάρκεια μιας πειραματικής διαδικασίας, τίθεται το ερώτημα αν αυτό το σφάλμα είναι αποδεκτό ή είναι πολύ μεγάλο και ως εκ τούτου μη αποδεκτό. Το ερώτημα αυτό δεν είναι σωστό σε όλη του την έκταση, αν σκεφτεί κανείς ότι το σφάλμα που προκύπτει σε μια πειραματική διαδικασία μπορεί ή όχι να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των πειραματικών στόχων. Έτσι, υπάρχει η περίπτωση ένα μεγάλο σφάλμα να είναι αποδεκτό γιατί ανταποκρίνεται στους στόχους του πειράματος που είχαν τεθεί εξ αρχής, ενώ ένα μικρό σφάλμα να μην είναι αποδεκτό γιατί απαιτείται από την πειραματική διαδικασία ένα ακόμα μικρότερο σφάλμα. Ένα καλό κριτήριο για το αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο μας δίνει το επί τοις εκατό σχετικό σφάλμα που ορίζεται ως εξής:

$$\eta = \frac{\delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Το σχετικό σφάλμα είναι καθαρός αριθμός και εκφράζεται σε ποσοστά επί τοις εκατό. Έτσι, σε γενικές γραμμές ένα σφάλμα θεωρείται μικρό αν $\eta \leq 5\%$ ενώ μεγάλο αν $\eta > 10\%$. Φυσικά αυτά το όρια ισχύουν με την προϋπόθεση ότι έχουν τεθεί οι πειραματικοί στόχοι, οι οποίοι κυμαίνονται μέσα σε αυτό το εύρος σφάλματος. Συνήθως, αν το σχετικό σφάλμα είναι αρκετά μεγάλο, προσπαθούμε να το μειώσουμε, βελτιώνοντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες πραγματοποιείται το πείραμα και οι μετρήσεις μας (βελτίωση και διόρθωση πειραματικών συσκευών και διατάξεων, βελτίωση της πειραματικής διαδικασίας, βελτίωση της πειραματικής μεθοδολογίας, βελτίωση της αποτελεσματικότητας του παρατηρητή-πειραματιστή κλπ). Πάντως, στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ακόμα και ένα σχετικό σφάλμα της τάξης του 100% ή ακόμα και μεγαλύτερο, μπορεί να είναι αποδεκτό και να μην προκαλεί ανησυχία στον ερευνητή-πειραματιστή, γιατί εκπληρώνει τους στόχους του πειράματος, στόχοι που έχουν τεθεί από την αρχή με βάση το μετρούμενο μέγεθος και τη θεωρία.

Τέλος, στα πλαίσια της εκπαιδευτικής διαδικασίας και κατά την εκτέλεση μιας εργαστηριακής-πειραματικής άσκησης, το πρόβλημα δεν είναι να έχουμε όσο γίνεται μικρότερα σφάλματα, αλλά να μπορούμε να αντιληφθούμε κατά πόσο το σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο, αποδεκτό ή μη αποδεκτό και να μπορούμε κυρίως να ερμηνεύσουμε και να εξηγήσουμε τις αιτίες που προκαλούν αυτό το σφάλμα.

3. Διάδοση σφαλμάτων.

Πολλά φυσικά μεγέθη έχουν οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύπτουν με τη χρήση και το συνδυασμό άλλων μεγεθών. Πολλές φορές, σε μια εργαστηριακή άσκηση ή ακόμα και σε μια πειραματική διαδικασία, η άμεση μέτρηση κάποιων μεγεθών μας χρησιμεύει για τον έμμεσο υπολογισμό κάποιων άλλων με τη χρήση γνωστών τύπων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι το σφάλμα που δημιουργείται στον υπολογισμό του παράγωγου μεγέθους, έχει προφανώς άμεση σχέση με τα σφάλματα που έχουν δημιουργηθεί κατά τη μέτρηση των «θεμελιωδών» μεγεθών. Με άλλα λόγια, δημιουργείται μια διάδοση των σφαλμάτων των «θεμελιωδών» μεγεθών που μετρήθηκαν κατά την πειραματική διαδικασία, με αποτέλεσμα τη δημιουργία του σφάλματος του παράγωγου-υπολογιζόμενου μέσω τύπων-εξισώσεων μεγέθους.

Έστω λοιπόν ότι ένα μέγεθος (α) που θέλουμε να υπολογίσουμε εξαρτάται από τις τιμές άλλων μεγεθών $x, y, z, \ldots$, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots)$$

όπου $x,y,z,\ldots$ τα μεγέθη που μετρήθηκαν κατά την πειραματική διαδικασία με σφάλματα $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$, αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή, το σφάλμα του υπολογιζόμενου-παραγόμενου μεγέθους δίνεται από τη σχέση:

$$\delta a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\delta z\right)^2 + \ldots}$$

Μετά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων, για την αντικατάσταση των μεγεθών και τον υπολογισμό του σφάλματος (δa) χρησιμοποιούμε τις μέσες τιμές των μεγεθών.

4. **Αποδοχή ή απόρριψη αποτελεσμάτων-μετρήσεων.**

Πολλές φορές κατά τη διάρκεια μιας πειραματικής διαδικασίας, ένα μέγεθος καταγράφεται πολλές και διαδοχικές φορές. Έτσι, υπάρχει η περίπτωση όταν μετράμε επανειλημμένα το ίδιο μέγεθος, κάποια από τις μετρήσεις να διαφέρει αρκετά από τις υπόλοιπες και να θεωρείται «ύποπτη». Όταν αυτό συμβαίνει ο πειραματιστής πρέπει να αποφασίσει αν αυτό είναι συνέπεια κάποιων λαθών στη διαδικασία της μέτρησης, οπότε πρέπει να αγνοηθεί, ή είναι νομοτελειακό αποτέλεσμα που πρέπει να εξεταστεί μαζί μ’ όλα τα άλλα, δηλαδή πρέπει να γίνει αποδεκτή ως μέτρηση του μεγέθους.
Αφού λοιπόν είμαστε σίγουροι και βεβαιωθούμε για την ορθότητα της πειραματικής διαδικασίας, πρέπει στη συνέχεια να πάρουμε την τελική απόφαση για τον αν είναι ή όχι αποδεκτή αυτή η «ύποπτη» τιμή. Η απόφαση όμως αυτή δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη, γιατί θα επιδράσει σημαντικά στο αποτέλεσμα Ένας τρόπος για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Chauvenet. Για την εφαρμογή το κριτηρίου Chauvenet, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Χρησιμοποιούμε όλες τις πειραματικές τιμές-καταγραφές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa, \ldots, x_\nu$ συμπεριλαμβανομένης και της «ύποπτης» τιμής (x_κ) και υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του μετρούμενου μεγέθους.
2. Υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση (σ) από τον τύπο:
3.

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(\bar{x} - x_i\right)^2}{\nu - 1}}}$$

4. Υπολογίζουμε το πηλίκο (μ) της απόλυτης τιμής της διαφοράς της μέσης τιμής από την «ύποπτη» τιμή προς την τυπική απόκλιση:

$$\mu = \frac{\left|\bar{x} - x_\kappa\right|}{\sigma}$$

4. Από τον Πίνακα 3, του κριτηρίου Chauvenet (επισυνάπτεται στο τέλος της εργαστηριακής άσκησης), βρίσκουμε την πιθανότητα $P(<\mu\sigma)$ να έχουμε μέτρηση που απέχει από τη μέση τιμή λιγότερο από την «ύποπτη» που εξετάζουμε.
5. Υπολογίζουμε την πιθανότητα $P(\geq\mu\sigma)$ να έχουμε τιμή που να απέχει από τη μέση τιμή τουλάχιστον όσο απέχει η «ύποπτη» τιμή, με βάση τη σχέση:
6.

$$P(\geq\mu\sigma) = 1 - P(<\mu\sigma)$$

6. Πολλαπλασιάζουμε την προκύπτουσα τιμή $P(\geq\mu\sigma)$ με τον αριθμό των μετρήσεων (ν) και βρίσκουμε το αποτέλεσμα (u). Έτσι:

α) Αν u<0.5 απορρίπτουμε την «ύποπτη» τιμή ($x_κ$) και υπολογίζουμε τη νέα μέση τιμή (από τις υπόλοιπες $ν-1$ μετρήσεις) καθώς επίσης και το σφάλμα της.

β) Αν u≥0.5 κάνουμε αποδεκτή την «ύποπτη» τιμή ($x_κ$) και συνεχίζουμε με όλες τις μετρήσεις υπολογίζοντας το σφάλμα για τη μέση τιμή που έχουμε ήδη υπολογίσει.

2ο Μέρος
Αποδοχή ή απόρριψη πειραματικής τιμής

Για τον υπολογισμό της θερμικής άνεσης-δυσφορίας του πληθυσμού κατά τη διάρκεια της θερμής περιόδου του έτους, έχει προταθεί η ακόλουθη σχέση του δείκτη θερμικής άνεσης-δυσφορίας (*DI*):

$$DI = T - (0.55 - 0.0055 \times RH) \times (T - 14.5) \quad \text{σε } ^{o}C$$

όπου (T) η θερμοκρασία του αέρα σε ^{o}C και (RH) η σχετική υγρασία (%) του ατμοσφαιρικού αέρα. Σε μια πειραματική διαδικασία προσδιορισμού της θερμικής άνεσης-δυσφορίας του πληθυσμού με τη χρήση του δείκτη (*DI*), μετρήθηκαν με κατάλληλα όργανα η θερμοκρασία του αέρα και η σχετική υγρασία στη διάρκεια μιας ώρας, με χρονικό βήμα μέτρησης τα 10 λεπτά (μια μέτρηση ανά 10 minutes). Οι πειραματικές τιμές δίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1. Πειραματικές τιμές θερμοκρασίας και υγρασίας του αέρα.

Α/Α	Ώρα	Θερμοκρασία T(^{o}C)	Σχετική υγρασία RH(%)
1η	13:10	32.3	42.0
2η	13:20	32.7	44.0
3η	13:30	32.5	41.0
4η	13:40	32.8	62.0
5η	13:50	33.1	44.0
6η	14:00	33.1	41.0

Να εξετασθεί αν η 4η μετρούμενη τιμή της σχετικής υγρασίας (62.0%) είναι αποδεκτή ή αν πρέπει να απορριφθεί.

3ο Μέρος
Υπολογισμός μέσης τιμής και απόλυτου σφάλματος

Με βάση τις πειραματικές τιμές του Πίνακα 1, να υπολογιστεί η μέση τιμή και το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής, τόσο για τη θερμοκρασία (T) του αέρα όσο και για τη σχετική υγρασία (RH), για το χρονικό διάστημα μεταξύ 13:10 με 14:00 μμ (μέση ωριαία τιμή).

4ο Μέρος
Διάδοση σφάλματος

1. Να συμπληρωθεί η τελευταία στήλη του Πίνακα 2 με τις τιμές που προκύπτουν από τις δεκάλεπτες μετρήσεις, για το δείκτη θερμικής άνεσης-δυσφορίας (*DI*).

Πίνακας 2. Πειραματικές τιμές του δείκτη θερμικής άνεσης-δυσφορίας (*DI*).

Α/Α	Ώρα	Θερμοκρασία	Σχετική υγρασία	*DI*(^{o}C)

		T(ºC)	RH(%)	
1η	13:10	32.3	42.0	
2η	13:20	32.7	44.0	
3η	13:30	32.5	41.0	
4η	13:40	32.8	62.0	
5η	13:50	33.1	44.0	
6η	14:00	33.1	41.0	

2. Να υπολογισθεί η μέση τιμή ($\overline{\boldsymbol{DI}}$) του δείκτη θερμικής άνεσης-δυσφορίας, για το χρονικό διάστημα μεταξύ 13:10 με 14:00 μμ (μέση ωριαία τιμή).

3. Να υπολογιστεί το σφάλμα ($\boldsymbol{\delta DI}$)της υπολογιζόμενης-παραγόμενης τιμής του δείκτη θερμικής άνεσης-δυσφορίας (DI).

Πίνακας 3. Τιμές της πιθανότητας P(<$\mu\sigma$)

μ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	23.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.57	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73									
3.5	99.95									
4.0	99.994									
4.5	99.9993									
5.0	99.99994									

**Οι τιμές του πίνακα είναι οι τιμές του ολοκληρώματος* $I = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\mu\sigma}^{\mu\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}dx$ *, το οποίο δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά.*