Εργαστηριακή άσκηση: Εκροή νερού από στόμιο δεξαμενής

Σκοπός της άσκησης

Σκοπός της άσκησης είναι να μελετηθεί η φυσική εκροή του νερού από στόμιο στο πυθμένα δεξαμενής και να υπολογισθούν οι διάφοροι συντελεστές εκροής.

Το πείραμα εκτελείται σε δύο μέρη.

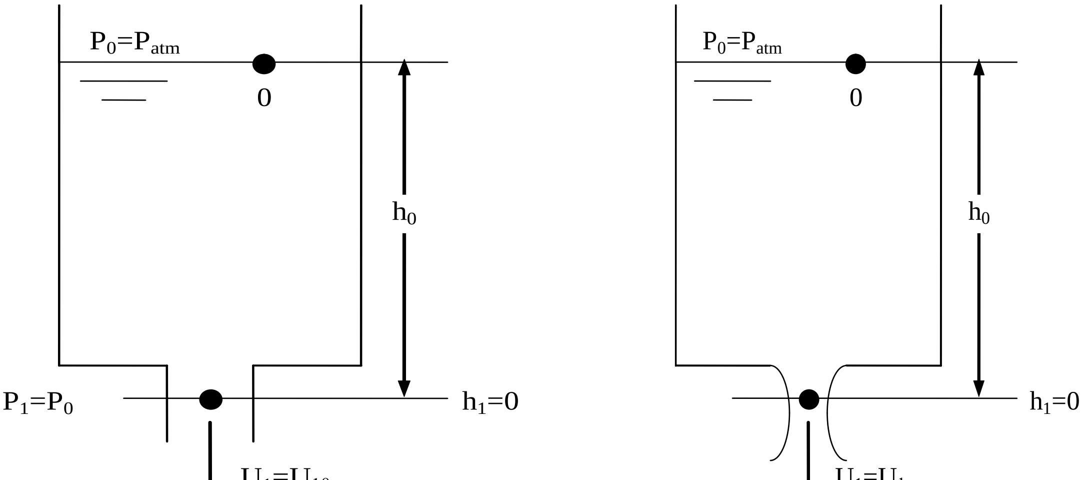
Στο πρώτο μέρος υπολογίζονται ο συντελεστής ταχύτητας στομίου $C_τ$, ο συντελεστής στένωσης του στομίου $C_σ$, και ο συντελεστής παροχής στομίου C_d, κάτω από το μέγιστο σταθερό ύψος στάθμης H_o.

Στο δεύτερο μέρος μετριέται η παροχή του στομίου, για διάφορα ύψη στάθμης του νερού στη δεξαμενή της συσκευής και υπολογίζεται ο μέσος συντελεστής παροχής C_d.

Λίγη θεωρία...

Συντελεστής στένωσης στομίου $C_σ$

Στην πειραματική διάταξη το στόμιο βρίσκεται στο πυθμένα κυλινδρικής δεξαμενής ώστε ο άξονάς του να είναι κατακόρυφος. Αυτό γίνεται για μεγαλύτερη ευχέρεια χειρισμών. Θα μπορούσε ο άξονας του στομίου να ήταν οριζόντιος, χωρίς τίποτα να αλλάξει ως προς τα εξαγόμενα μεγέθη.



Σχήμα 1. Θεωρητική ροή (α) και πραγματική ροή (β).

Θεωρητικά, η ροή στο στόμιο θα μπορούσε να βγαίνει τελείως παράλληλη προς τον άξονά του και η εξερχόμενη δέσμη να έχει σταθερή διατομή A, όση και η διατομή του στομίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1α. Όμως, στην πραγματικότητα (Σχήμα 2β) καθώς το υγρό προχωρεί προς το στόμιο ακολουθεί συγκλίνουσες γραμμές ροής. Ενώ κοντά στα εσωτερικά τοιχώματα της δεξαμενής, οι γραμμές αυτές είναι τελείως κάθετες στον άξονα του στομίου. Εξ αιτίας της αδράνειας των στοιχειωδών σωματιδίων του ρευστού, οι πορείες αυτών των στοιχείων δεν μπορούν να στραφούν απότομα κατά 90^0 και να γίνουν παράλληλες προς τον άξονα του στομίου, αλλά εκτρέπονται κατά γωνία $θ<90^0$. Η δέσμη συγκλίνει και στενεύει σε κάποια απόσταση έξω από το στόμιο. Στη στένωση οι γραμμές ροής γίνονται παράλληλες και σχηματίζεται η ελάχιστη διατομή $A_Φ$ της δέσμης (φλέβας).

Το πηλίκο $\boldsymbol{C_\sigma = \frac{A_\varphi}{A_o}}$ (1) ορίζεται ως **συντελεστής στένωσης** του στομίου και γενικά είναι τόσο μικρότερο της μονάδας, όσο πιο απότομη είναι η στροφή που τα στοιχεία του ρευστού υποχρεώνονται να κάνουν για να βγουν από το στόμιο. Έτσι, αν d_φ η διάμετρος της στένωσης της φλέβας και d_o η θεωρητική διάμετρος που θα έπρεπε να έχει η φλέβα, ή με άλλα λόγια η διάμετρος της οπής-στομίου τότε από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι:

$$C_\sigma = \frac{A_\varphi}{A_o} \rightarrow C_\sigma = \frac{\frac{\pi d_\varphi^2}{4}}{\frac{\pi d_o^2}{4}} \rightarrow \boldsymbol{C_\sigma = \left(\frac{d_\varphi}{d_o}\right)^2} \tag{2}$$

Συντελεστής ταχύτητας $C_τ$

Γενικά, όταν δέσμη υγρού εξέρχεται φυσικά στην ατμόσφαιρα, η πίεση του υγρού στη θέση εξόδου είναι ίση με την ατμοσφαιρική, διαφορετικά η δέσμη δεν θα μπορούσε να μείνει ακέραιη (συμπαγής). Αυτό συμβαίνει γιατί οποιαδήποτε πρόσθετη πίεση που πιθανόν υπάρχει στο ρευστό πριν από το στόμιο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια.

Στην θεωρητική περίπτωση του Σχήματος 1, αν δεν υπήρχαν υδραυλικές απώλειες στο στόμιο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση Bernoulli από τη θέση (0) ως τη θέση (1):

$$h_o + \frac{P_o}{\rho g} + \frac{u_o^2}{2g} = h_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_{1\theta}^2}{2g} \tag{3}$$

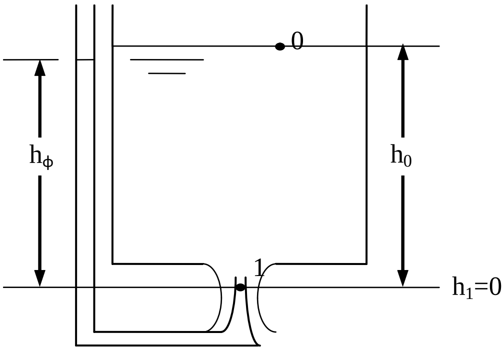
Γνωρίζουμε όμως ότι P_o=P_1=1 atm, h_1=0, και u_0=0 (αφού η διατομή της δεξαμενής είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διατομή του στομίου). Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$h_o = \frac{u_{1\theta}^2}{2g} \rightarrow u_{1\theta} = \sqrt{2gh_o} \tag{4}$$

Στην πραγματικότητα (Σχήμα 1β) και θεωρώντας ότι το αρχικό ύψος (h_0) του νερού μέσα στη δεξαμενή είναι το ίδιο, πρέπει να ληφθεί υπ’ όψη και ένα ύψος απωλειών ενέργειας μεταξύ των θέσεων (0) και (1) ίσο, έστω με h_f<h_o.
Έτσι, η πραγματική ταχύτητα στη θέση (1) είναι :

$$u_{1\pi} = \sqrt{2gh_f} \tag{5}$$

Το ύψος h_f μπορεί να καταγραφεί πειραματικά με τη βοήθεια ενός σωλήνα Pitot που καταλήγει σε κατακόρυφο διαφανή σωλήνα. Τοποθετούμε το στόμιο του σωλήνα Pitot στο μέσο της δέσμης του νερού που εκρέει από το στόμιο και καταγράφουμε το ύψος του νερού (h_f) μέσα στον κατακόρυφο διαφανή σωλήνα που συνδέεται με το σωλήνα Pitot, όπως δείχνει το Σχήμα 2. Ο σωλήνας Pitot μάλιστα, είναι διατεταγμένος ακριβώς όπως στο πείραμά μας.



Σχήμα 2. Χρήση σωλήνα Pitot για μέτρηση του ύψους απωλειών και της ταχύτητας.

Ορίζεται ως συντελεστής ταχύτητας (*$C_τ$*) το πηλίκο της πραγματικής προς τη θεωρητική ταχύτητα, δηλαδή:

$$\boldsymbol{C_τ = \frac{u_π}{u_θ}} \tag{6}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4), (5) και (6), προκύπτει ότι:

$$C_τ = \frac{u_π}{u_θ} \rightarrow C_τ = \frac{\sqrt{2gh_f}}{\sqrt{2gh_o}} \rightarrow \boldsymbol{C_τ = \sqrt{\frac{h_f}{h_o}}} \tag{7}$$

Συντελεστής παροχής στομίου C_d

Αν η ροή ήταν χωρίς υδραυλικές απώλειες, όπως στο Σχήμα 1α, η παροχή θα ήταν ίση με το γινόμενο της διατομής του στομίου A_0, επί την (θεωρητική) ταχύτητα $υ_θ$ του νερού στην έξοδο του στομίου. Στην πραγματικότητα, το νερό αναγκάζεται να σχηματίσει μια μικρότερη διατομή $A_φ$ ($A_φ<A_0$) με πραγματική και περίπου ομοιόμορφη ταχύτητα $υ_1$ και εμφανίζει πραγματική παροχή μικρότερη της αναμενόμενης θεωρητικής παροχής ($Q_π<Q_θ$).

Ορίζεται ως συντελεστής παροχής (*C_d*) το πηλίκο της πραγματικής προς τη θεωρητική παροχή. Προφανώς, εξ ορισμού, ο συντελεστής παροχής είναι μικρότερος της μονάδας. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{C_d = \frac{Q_π}{Q_θ}} \tag{8}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (6), προκύπτει ότι:

$$C_d = \frac{Q_π}{Q_θ} \rightarrow C_d = \frac{u_π\, A_φ}{u_θ A_o} \rightarrow \boldsymbol{C_d = C_τ \cdot C_σ} \tag{10}$$

Πειραματικό μέρος...

Η συσκευή του πειράματος αποτελείται από μια μικρή διαφανή κυλινδρική δεξαμενή με ένα στόμιο προσαρμοσμένο στο πυθμένα και ένα σωλήνα Pitot. Το νερό μπαίνει στη δεξαμενή αυτή από τη κορυφή μέσα από ένα κατακόρυφο σωλήνα, που έχει στο τέλος του ένα διασκορπιστή ροής. Επίσης υπάρχει ένας άλλος κατακόρυφος σωλήνας για να συγκεντρώνει το νερό κατά την υπερχείλιση. Η δεξαμενή τοποθετείται πάνω στο υδραυλικό τραπέζι έτσι, ώστε το νερό της δέσμης που βγαίνει από το στόμιο του πυθμένα της να πηγαίνει στη ζυγαριά του.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

Στη διαδικασία αυτή αφήνουμε το νερό να φθάσει στο ύψος του άκρου του αγωγού υπερχείλισης κανονίζοντας το διακόπτη παροχής νερού στην υδραυλική τράπεζα έτσι ώστε η παροχή στον αγωγό υπερχείλισης να διατηρείται σχετικά χαμηλή αλλά σταθερή.
Κατ' αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται η σταθερότητα του ύψους της στάθμης κατά τη διάρκεια των μετρήσεων.
Ο συντελεστής στένωσης $\boldsymbol{C_\sigma}$ υπολογίζεται αφού πρώτα μετρηθεί η διάμετρος της στένωσης της ροής με τη βοήθεια της αιχμηρής ακμής (λάμα ξυραφιού) που υπάρχει δίπλα στην άκρη του σωλήνα Pitot. Αυτό επιτυγχάνεται φέρνοντας την άκρη της ακμής σ' επαφή με τον πίδακα στη στένωση, σε δυο εκ διαμέτρου αντίθετα σημεία της φλέβας νερού και κάθε φορά σημειώνουμε την ένδειξη του βερνιέρου.
Υπολογίζουμε τον συντελεστή ταχύτητας $\mathbf{C_\tau}$, μετρώντας το μέγιστο ύψος της ελεύθερης στάθμης του νερού h_o, και μετρώντας το δυναμικό ύψος h_f, της πίεσης της φλέβας εκροής με τη βοήθεια του σωλήνα Pitot. Ο σωλήνας αυτός τοποθετείται στο μέσο του πίδακα εκροής, στην έξοδο του από την κάτω επιφάνεια της συσκευής και σημειώνεται η ένδειξη του ύψους του σωλήνα h_f όπως επίσης και του ύψους h_o.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

Στο δεύτερο μέρος οι μετρήσεις λαμβάνονται με ύψος στάθμης $h<h_o$ και με συνεχώς μειούμενη τη παροχή της αντλίας του νερού στη συσκευή.
Κάθε φορά που μειώνεται η τιμή της παροχής της αντλίας, σημειώνουμε την τιμή h του ύψους της ελεύθερης στάθμης του νερού στη δεξαμενή (για μικρά ύψη στάθμης $h \approx h_f$) ενώ με τη βοήθεια της πλάστιγγας της δεξαμενής μετράμε την παροχή του στομίου.

Παρουσίαση μετρήσεων και αποτελεσμάτων

1ο Μέρος (*όπου $h=h_o$*)

Να υπολογισθούν οι συντελεστές C_σ , C_τ, και C_d από τις μετρήσεις των h_f, h_o, και της διαμέτρου d_φ στη στένωση της εξερχόμενης από το στόμιο φλέβας νερού.

2ο Μέρος (*όπου $h<h_o$*)

Στο δεύτερο μέρος οι μετρήσεις λαμβάνονται με ύψος στάθμης h μικρότερο από το αρχικό και με μειωμένη την παροχή της αντλίας. Συμπληρώνεται κατάλληλα ο Πίνακας 1 που ακολουθεί:

Πίνακας 1. Πειραματικές μετρήσεις.

α/α	**M (kg)**	**t (sec)**	**Q_π 10^{-4} (m^3/sec)**	***h* (m)**	**$\sqrt{h}$ ($\sqrt{m}$)**	**$C_{d\,(\pi\varepsilon\iota\rho)}$**
1	7.5					
2	7.5					
3	7.5					
4	7.5					
5	7.5					
6	7.5					
					Μ.Ο.=	

Να γίνει η γραφική παράσταση: $\boldsymbol{Q = f(\sqrt{h})}$.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, και θέτοντας στη γραφική παράσταση το ζεύγος τιμών (0,0), προκύπτει η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων: $y = ax$.

Από την τιμή του συντελεστή (α) υπολογίζεται ο μέσος συντελεστής παροχής C_d.

Να συγκριθούν οι τιμές του συντελεστή παροχής C_d, όπως αυτές προέκυψαν τόσο από τη σχέση (10) όσο και από τη γραφική παράσταση $Q = f(\sqrt{h})$.

Γενικά στοιχεία συσκευής

Διάμετρος οπής στομίου	d_o = 13 mm
Εμβαδό διατομής οπής στομίου	A_o = 0.0001332 m^2
Μέγιστο ύψος στάθμης συσκευής	h_o = ... mm
Ένδειξη ύψους στο σωλήνα Pitot	h_f = ... mm
Μετρούμενη διάμετρος φλέβας	$d_φ$ = ... mm
Εμβαδό διατομής φλέβας	$A_φ$ = ...m^2