Μετρήσεις – Αβεβαιότητες Μετρήσεων

1. Σκοπός

Σκοπός του μαθήματος είναι να εξοικειωθούν οι σπουδαστές με τις βασικές έννοιες που σχετίζονται με τη θεωρία Σφαλμάτων, όπως το σφάλμα, την αβεβαιότητα της μέτρησης και τα σημαντικά ψηφία, ώστε να κατανοήσουν τους περιορισμούς κάτω από τους οποίους εκτελείται μια μέτρηση, τη σημασία του τρόπου παρουσίασης του αποτελέσματος μιας μέτρησης και τέλος να αναπτύξουν την ικανότητα να αξιολογούν τις μετρήσεις τους και να ερμηνεύουν τα δεδομένα τους.

2. Γενικά

Οι εργαστηριακές ασκήσεις Φυσικής αποσκοπούν στο να διδαχθεί ο σπουδαστής τις μεθόδους και τις πιο βασικές τεχνικές της πειραματικής φυσικής. Να εξοικειωθεί με τις συσκευές μετρήσεων και να καταλάβει τη χρήση τους. Να μάθει να παίρνει και να επεξεργάζεται μετρήσεις ώστε να επαληθεύσει μόνος του πειραματικά ένα μέρος της ύλης που διδάχθηκε θεωρητικά και γενικά να αποκτήσει αυτοπεποίθηση σχετικά με την ικανότητά του να μετρήσει και να συσχετίσει φυσικά μεγέθη.

Η θεωρία σφαλμάτων είναι συνδεδεμένη με τη διαδικασία λήψης και επεξεργασίας των μετρήσεων. Η γνώση βασικών εννοιών και υπολογισμών που σχετίζονται με τη θεωρία σφαλμάτων είναι απαραίτητο εργαλείο που βοηθά στον τρόπο λήψης αξιόπιστων μετρήσεων, στην αξιολόγηση και την επεξεργασία των μετρήσεων, αλλά και τη σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Ειδικότερα, η θεωρία σφαλμάτων εκτός από τη χρήση της για τους σκοπούς του εργαστηρίου φυσικής, συμβάλλει γενικότερα στην εκπαίδευση ενός τεχνολόγου μηχανικού, ο οποίος θα κληθεί να εκτελέσει μετρήσεις που αφορούν στη:

- διάγνωση της λειτουργίας ενός συστήματος.
- σύγκριση και ταξινόμηση μεγεθών.
- πιστοποίηση και τον έλεγχο ποιότητας.
- λήψη αποφάσεων από ένα σύστημα και ανάδραση σε ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου.

3. Σύντομο θεωρητικό μέρος

3.1 Αβεβαιότητες μέτρησης

Η ακρίβεια κάθε μέτρησης περιορίζεται από διάφορους παράγοντες όπως οι ατέλειες και η πεπερασμένη ικανότητα των οργάνων μέτρησης, η πεπερασμένη ικανότητα του πειραματιστή και οι απρόβλεπτες μεταβολές των συνθηκών μέτρησης.

Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης είναι μόνο μια προσέγγιση ή εκτίμηση της τιμής της φυσικής ποσότητας που υπόκειται σε μέτρηση. Το αποτέλεσμα είναι πλήρες μόνο όταν συνοδεύεται από μια ποσοτική έκφραση της αβεβαιότητάς του.

Ως σφάλμα ορίζεται η διαφορά μεταξύ μετρούμενης και «αληθούς» ή πραγματικής αλλά άγνωστης τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους

$$\textbf{Σφάλμα} = \left| \textit{μετρούμενη τιμή} - \textit{πραγματική τιμή} \right|$$

Ως **αβεβαιότητα** ορίζεται η ποσοτική έκφραση της «αμφιβολίας» που υπάρχει σχετικά με το αποτέλεσμα της μέτρησης. Είναι δηλαδή ένα μέτρο της αξιοπιστίας της μέτρησης.

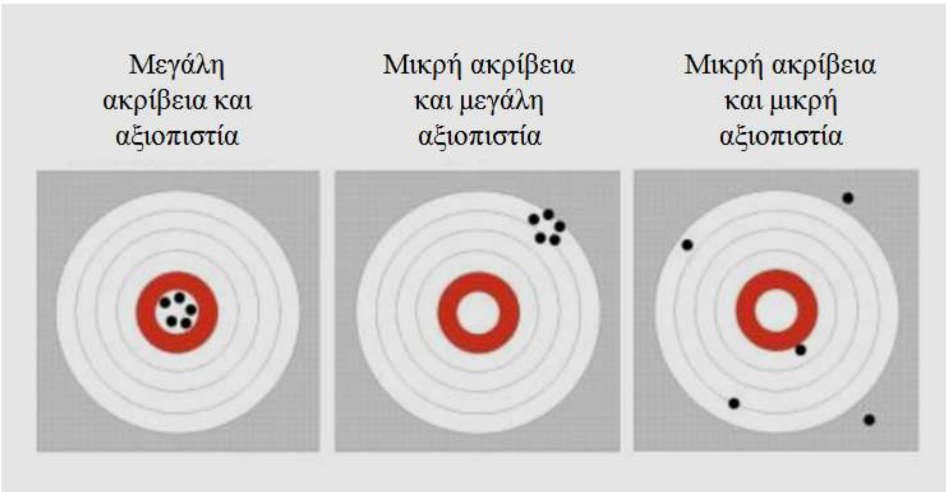
Σημειώνεται ότι σε πολλά συγγράμματα, η αβεβαιότητα των μετρήσεων αναφέρεται ως "σφάλμα" (error). Στην πραγματικότητα δεν είναι σφάλμα ή λάθος με την κοινή έννοια του όρου γιατί είναι κάτι που δεν μπορεί να αποφευχθεί. Στις σημειώσεις αυτές γίνεται προσπάθεια το σφάλμα και η αβεβαιότητα να χρησιμοποιούνται με τον τρόπο που έχει οριστεί διεθνώς στον οδηγό ISO-GUM (Guide for the Uncertainty of Measurement).

Οι αβεβαιότητες στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης προέρχονται από διάφορους παράγοντες και χωρίζονται σε δύο τύπους ανάλογα με τον τρόπο που υπολογίζονται.

- **Τύπου Α**. Οφείλονται σε τυχαία μεταβολή παραγόντων και υπολογίζονται με στατιστικές μεθόδους (Γνωστά και ως **Τυχαία Σφάλματα)**
- **Τύπου Β**. Υπολογισμός αβεβαιότητας με άλλους τρόπους. Στην κατηγορία αυτή υπάγονται τα λεγόμενα **Συστηματικά σφάλματα, η αβεβαιότητα έμμεσης μέτρησης και η σύνθετη αβεβαιότητα.**

Τις περισσότερες φορές η αβεβαιότητα είναι σύνθετη έχει δηλαδή συνιστώσα που οφείλεται σε τυχαίους παράγοντες και συνιστώσα που οφείλεται σε συστηματικά φαινόμενα.

Πριν αναφερθούμε πιο αναλυτικά στους τύπους αβεβαιότητας και τον τρόπο υπολογισμού τους, θα πρέπει να δούμε κάποια χαρακτηριστικά που σχετίζονται με την αξιοπιστία της μέτρησης.



Σχήμα 1: Ακρίβεια και αξιοπιστία

Η αξιοπιστία της μέτρησης σχετίζεται με το πόσο λεπτομερής είναι η μέτρηση και πόση επαναληπτικότητα έχει όταν γίνουν επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ιδίου μεγέθους κάτω από ίδιες συνθήκες μέτρησης. Για την κατανόηση της διαφοράς μεταξύ ακρίβειας και αξιοπιστίας, χρησιμοποιείται συχνά το παράδειγμα με τους στόχους σκοποβολής και τα ίχνη των βελών. Τα ίχνη των βελών αντιστοιχούν στις τιμές ενός μεγέθους που λαμβάνονται με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις κάτω από ίδιες συνθήκες. Στο σχήμα 1 φαίνεται η αντιστοιχία των θέσεων των ιχνών με την ακρίβεια και την αξιοπιστία της μέτρησης.

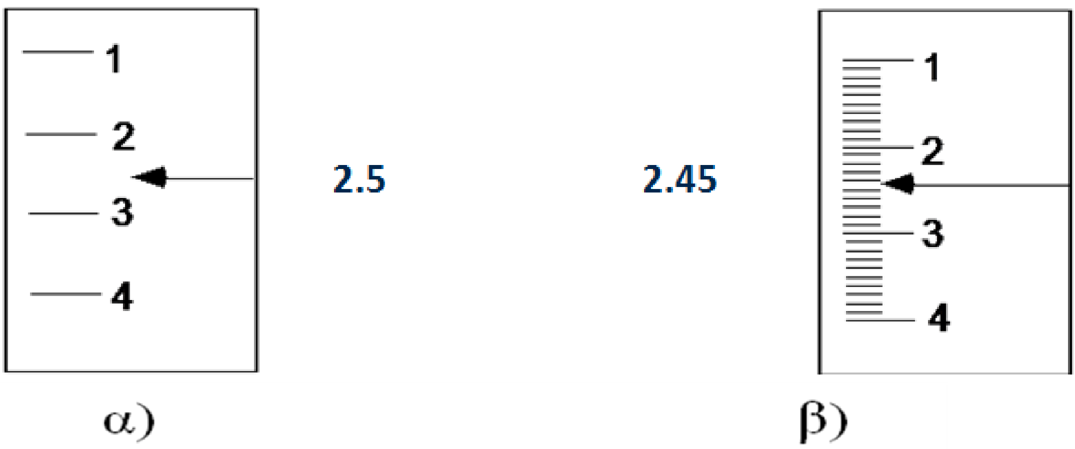
3.2 Σημαντικά ψηφία και ακρίβεια οργάνων

Όλα τα όργανα έχουν όριο στις μετρητικές τους δυνατότητες. Έχουν πάντα μια ελάχιστη ποσότητα μέχρι την οποία μπορούν να μετρήσουν.

Σημαντικά ψηφία μιας μέτρησης θεωρούνται όλα τα ψηφία που μπορούμε να διαβάσουμε με απόλυτη βεβαιότητα συν ένα και **μόνο ένα**, το τελευταίο, που είναι από εκτίμηση και επομένως είναι αβέβαιο.

Η αξιοπιστία μιας μέτρησης συνδέεται με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που περιέχει. Μια μέτρηση ενός μεγέθους είναι περισσότερο αξιόπιστη από μια άλλη εάν είναι πιο λεπτομερής, δηλαδή αν περιέχει περισσότερα σημαντικά ψηφία. Για παράδειγμα έστω ότι μετρήθηκε η διάμετρος ενός σύρματος με ένα διαστημόμετρο και βρέθηκε να είναι 2.3 mm. Το ίδιο σύρμα μετρήθηκε με ένα μικρόμετρο το οποίο έδωσε αποτέλεσμα 2.285 mm. Στο παράδειγμά μας η μέτρηση με το μικρόμετρο έχει 4 σημαντικά ψηφία και είναι περισσότερο αξιόπιστη από τη μέτρηση με το διαστημόμετρο που έχει 2 σημαντικά ψηφία.

Στο σχήμα 2 φαίνονται δύο χάρακες υποδιαιρεμένοι με διαφορετικό τρόπο. Το αποτέλεσμα με τον χάρακα α) είναι 2.5 δεδομένου ότι ο δείκτης είναι μεταξύ 2 και 3. Το 2 το γνωρίζουμε με απόλυτη βεβαιότητα ενώ το 5 προέρχεται από υποκειμενική εκτίμηση, άρα φέρει αβεβαιότητα. Δεν έχει νόημα επομένως να πούμε ότι η μέτρηση είναι 2,56 αφού ακόμα και το 5 είναι αβέβαιο. Με τον χάρακα αυτό μπορούμε να μετρήσουμε διαφοροποιήσεις του μεγέθους που βρίσκονται μεταξύ 2.0 και 3.0. Η μέτρηση αυτή έχει 2 σημαντικά ψηφία.



Σχήμα 2: Καταγραφή σημαντικών ψηφίων

Το αποτέλεσμα με τον χάρακα β) είναι περισσότερο λεπτομερές γιατί έχει περισσότερες υποδιαιρέσεις. Δεδομένου ότι ο δείκτης είναι μεταξύ 2.4 και 2.5, το αποτέλεσμα εκτιμάται ότι είναι 2.45. Το 2.4 το γνωρίζουμε με απόλυτη βεβαιότητα ενώ το 5 προέρχεται από υποκειμενική εκτίμηση, άρα φέρει αβεβαιότητα. Με τον χάρακα αυτό μπορούμε να μετρήσουμε διαφοροποιήσεις του μεγέθους που βρίσκονται μεταξύ 2.40 και 2.50, κάτι που δεν μπορούμε να κάνουμε με τον χάρακα α). Στην περίπτωση αυτή η μέτρηση έχει 3 σημαντικά ψηφία.

3.2.1 Σημασία του τρόπου γραφής του αποτελέσματος μιας μέτρησης

Πραγματοποιώντας μια μόνο μέτρηση με ένα όργανο που φέρει υποδιαιρέσεις, η αβεβαιότητα της μέτρησης μπορεί να είναι η μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου ή άλλο κλάσμα της (συνήθως μισή υποδιαίρεση). Στην περίπτωση ψηφιακών οργάνων, δίδεται από τον κατασκευαστή. Ο τρόπος με τον οποίο γράφουμε το αποτέλεσμά μας, πρέπει να δείχνει την αξιοπιστία με την οποία μετρήθηκε. Γενικά το τελευταίο ψηφίο μιας μέτρησης είναι πάντα αβέβαιο.

Για παράδειγμα αν το αποτέλεσμα μιας μέτρησης μήκους δοθεί με την μορφή α) 52 mm, θεωρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο, είναι το ψηφίο που φέρει αβεβαιότητα και επομένως η αληθής τιμή μπορεί να βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα στο διάστημα μεταξύ 51 έως 53 mm, (52±1), θεωρώντας ότι η καλλίτερη εκτίμηση που μπορώ να κάνω είναι με ±1 ελάχιστη υποδιαίρεση. Αν όμως δοθεί με την μορφή β) 52.0, η αβεβαιότητα βρίσκεται στο τρίτο σημαντικό ψηφίο και η αληθής τιμή μπορεί να βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα στο διάστημα μεταξύ 51.9 έως 52.1 mm, (52.0 ± 0.1).

3.2.2 Κανόνες καθορισμού σημαντικών ψηφίων

Όταν στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης υπάρχει υποδιαστολή, ως σημαντικά ψηφία (συντομογραφία σψ) μετράνε όλα τα ψηφία από το πρώτο μη μηδενικό και δεξιά π.χ 2.3 (2 σψ), 2.30 (3 σψ) ,0.2 (1 σψ), 0.02 (1 σψ) 0.020 (2 σψ).

Όταν δεν υπάρχει υποδιαστολή ως σημαντικά μετράνε όλα τα ψηφία από το πρώτο αριστερά ψηφίο μέχρι το τελευταίο μη μηδενικό.
π.χ 15 (2 σψ),15000 (2 σψ), 15050 (4 σψ)

Οι δυνάμεις του 10 δεν αξιολογούνται ως σημαντικά ψηφία. $2,1*10^{-3}$ (2 σψ), 0.0021 (2 σψ). Γενικά είναι πιο εύχρηστο και κομψό να εκφράζουμε τα αποτελέσματά μας με τάξεις μεγέθους όπως $5.6*10^{-3}$αντι 0.0056.

Επειδή πολλές φορές ένα μέγεθος υπολογίζεται έμμεσα (για παράδειγμα η ταχύτητα ενός κινητού) χρησιμοποιώντας μετρήσεις άλλων μεγεθών (την απόσταση Χ που διάνυσε το κινητό και το χρόνο t) που λήφθηκαν με διαφορετική αξιοπιστία, πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει από πρόσθεση αφαίρεση πολλαπλασιασμό ή διαίρεση αριθμών, περιορίζεται πάντα από τον αριθμό με τη μικρότερη αξιοπιστία.

- Όταν προσθέτουμε η αφαιρούμε δυο αριθμούς κρατάμε στο αποτέλεσμα όσα ΔΕΚΑΔΙΚΑ έχει ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά. Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 2.37 \\ +1.2 \\ \hline 3.57 \end{array} \qquad 2.37+1.2 = 3.6 \text{ και όχι } 3.57$$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε η διαιρούμε δυο αριθμούς κρατάμε στο αποτέλεσμα όσα ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ψηφία έχει ο αριθμός με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία. Παράδειγμα:

$$\begin{array}{r} 3.21 \\ \times 0.02 \\ \hline 0.0642 \end{array} \qquad 3.21*0.02=0.06 \text{ και όχι } 0.0642$$

(όπου με κόκκινο φαίνονται τα αβέβαια ψηφία)

Πολλές φορές πρέπει να κάνουμε στρογγυλοποίηση του αποτελέσματός μας. Ο κανόνας που ακολουθούμε είναι:

Εάν το τελευταίο ψηφίο που θα κρατήσουμε ακολουθείται από ψηφίο που είναι μικρότερο από 5, μένει ως έχει. Εάν το ψηφίο που ακολουθεί είναι μεγαλύτερο από 5 τότε το ψηφίο που θα κρατήσουμε αυξάνεται κατά μια μονάδα. Με αυτό τον τρόπο έχουν στρογγυλοποιηθεί τα παραπάνω αποτελέσματα υπολογισμών.

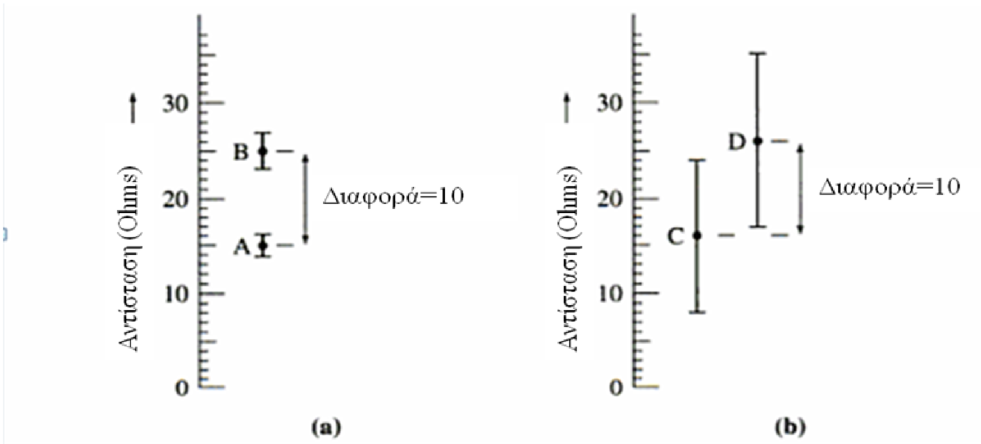
Για την περίπτωση που το τελευταίο ψηφίο που θα κρατήσουμε ακολουθείται από το ψηφίο 5, στο εργαστήριο Φυσικής συμφωνούμε τα εξής: εάν το ψηφίο είναι άρτιο μένει ως έχει (π.χ το 6.45 γίνεται 6.4) ενώ αν είναι περιττό αυξάνεται κατά μια μονάδα (π.χ το 6.75 γίνεται 6.8) .

3.3 Σύγκριση Μετρήσεων

Γενικά αν δεν ξέρουμε ποια είναι η αβεβαιότητα (σφάλμα) μιας μέτρησης, **δεν** μπορούμε να αποφασίσουμε:

- αν υπάρχει διακριτή διαφορά μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών του ίδιου μεγέθους (βλ. παράδειγμα 1).
- αν η μετρούμενη τιμή χαρακτηρίζει πχ το α ή β υλικό (βλ. παράδειγμα 2).
- αν η απόκλιση της μέτρησης ενός μεγέθους ως προς τη θεωρητική του τιμή είναι αποδεκτή μέσα στα πλαίσια της αβεβαιότητας (βλ. παράδειγμα 3).

Παράδειγμα 1: Στο σχήμα 3 φαίνεται η σύγκριση δύο μετρήσεων της ίδιας αντίστασης. Κάθε μέτρηση περιλαμβάνει μια βέλτιστη εκτίμηση, που συμβολίζεται με μια τελεία και ένα εύρος πιθανών τιμών, που συμβολίζεται με μια κατακόρυφη γραμμή.



Σχήμα 3 : Δύο μετρήσεις της ίδιας αντίστασης.

Στην περίπτωση α) υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο μετρήσεων, ενώ στην περίπτωση β) δεν υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο τιμών διότι υπάρχει επικάλυψη του εύρους των πιθανών τιμών (μη διακριτές μετρήσεις).

Παράδειγμα 2: Έστω ότι υπολογίσαμε την πυκνότητα ενός μετάλλου και βρήκαμε 7.9 g/cm^3

Από τη βιβλιογραφία, η πυκνότητα του σιδήρου είναι 7.25 g/cm^3 και του χαλκού 8.22 g/cm^3.

Αν δεν ξέρουμε την αβεβαιότητα που συνοδεύει τη μέτρησή μας, δεν μπορούμε να απαντήσουμε ποιο είναι το υλικό που μετρήσαμε. Αν ξέρουμε ότι η αβεβαιότητα είναι πχ 0.4 g/cm^3 τότε μπορούμε να πούμε ότι είναι ο χαλκός

Αν όμως το σφάλμα είναι 0.8 g/cm^3 δεν μπορούμε να απαντήσουμε, και σε αυτή την περίπτωση πρέπει να βρούμε τρόπο να βελτιώσουμε την αξιοπιστία του πειράματός μας.

Παράδειγμα 3: Έστω ότι σε ένα πείραμα υπολογίσαμε την επιτάχυνση της βαρύτητας και βρήκαμε 10.24 m/s^2. Αν δεν υπολογίσουμε την αβεβαιότητα στη μέτρηση δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η διαφορά σε σχέση με την θεωρητική τιμή 9.81 m/s^2 οφείλεται στην αβεβαιότητα ή αν πρέπει να αναζητήσουμε κάποια συστηματική αβεβαιότητα.

3.4 Αβεβαιότητες Τύπου Α (στατιστικού χαρακτήρα)

Οφείλονται σε τυχαίους παράγοντες που σχετίζονται με την επίδραση του περιβάλλοντος (θόρυβος, μεταβολή θερμοκρασίας, παρεμβολές), τις ατέλειες οργάνων, την αλληλεπίδραση οργάνου-μετρούμενου μεγέθους καθώς και σε υποκειμενικούς παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα των μετρήσεων.

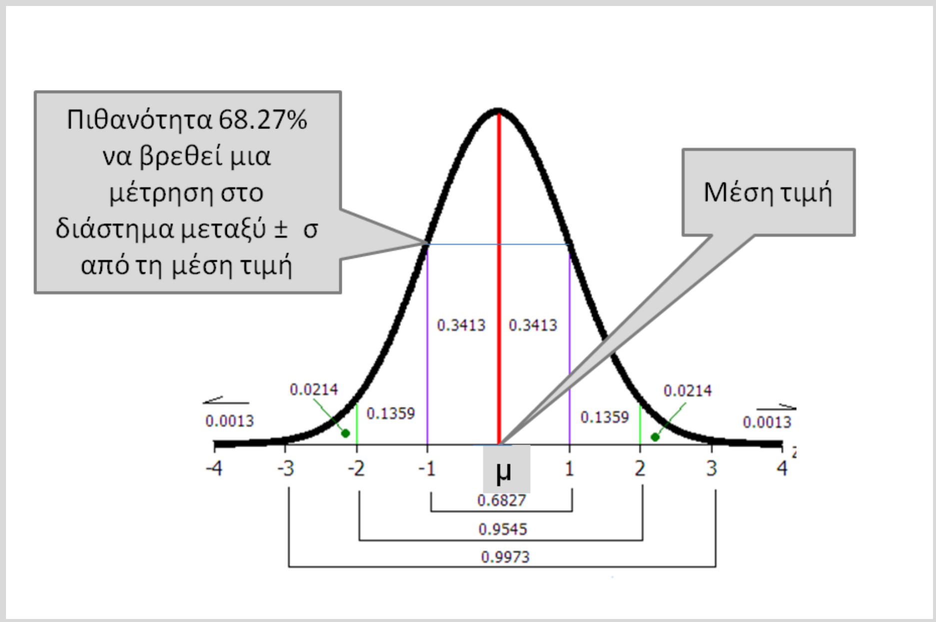
Με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του φυσικού μεγέθους με το ίδιο όργανο κάτω από ίδιες συνθήκες, περιορίζουμε την επίδραση των αβεβαιοτήτων που οφείλονται σε τυχαίους παράγοντες.

Εάν Χ το μέγεθος το οποίο μετρήθηκε Ν φορές και Χι το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης, η μέση τιμή του δίδεται από τη σχέση:

$$\overline{X} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{1}^{\mathrm{N}} X_I \qquad (1)$$

Έτσι, θεωρούμε ότι η "Καλύτερη" τιμή για τη μέτρηση είναι ο μέσος όρος που προέκυψε από το σύνολο των μετρήσεων.

Θεωρώντας ότι η διαφοροποίηση στις μετρήσεις οφείλεται σε τυχαίους παράγοντες, οι μετρήσεις περιγράφονται από μια κανονική κατανομή πιθανοτήτων. Στην κανονική κατανομή η μέση τιμή είναι η τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης. Όταν το πλάτος της κατανομής είναι μικρό σε σύγκριση με την μέση τιμή, ο μέσος όρος αντιπροσωπεύει, σχετικά καλά, ένα μεγάλο ποσοστό των μετρήσεων ενώ όταν το πλάτος της κατανομής είναι μεγάλο σε σύγκριση με την μέση τιμή, ο μέσος όρος δεν αντιπροσωπεύει καλά το σύνολο των μετρήσεων. Έτσι, το πλάτος της κατανομής των μετρήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο της αβεβαιότητας των μετρήσεών μας.



Σχήμα 4: Κανονική κατανομή – Τυπική απόκλιση

Η αβεβαιότητα που προκύπτει από τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους, μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους. Στο εργαστήριο φυσικής χρησιμοποιούμε ως μέτρο της αβεβαιότητας, **τη λεγόμενη τυπική αβεβαιότητα της μέσης τιμής** που συνδέεται με την τυπική απόκλιση της κανονικής κατανομής και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma(\bar{\chi}) = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{N}\left(\bar{\chi}-\chi_i\right)^2}{N(N-1)}} \qquad (2)$$

όπου $\bar{\chi}$ η μέση τιμή, N το πλήθος των μετρήσεων και χ_i το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης.

Αναγράφοντας το αποτέλεσμά μας με την μορφή:

$$\bar{\chi} \pm \sigma(\bar{\chi})$$

ορίζεται ένα διάστημα $\sigma(\bar{\chi})$ γύρω από τη μέση τιμή, στο οποίο περιμένουμε να βρούμε ένα μεγάλο μέρος των μετρήσεων του μεγέθους Χ με μια πιθανότητα ~68% .

Ή διαφορετικά, σημαίνει ότι η πιθανότητα που έχει μια νέα σειρά μετρήσεων του ιδίου μεγέθους να έχει μέση τιμή μέσα στο εύρος τιμών $\pm\ \sigma(\bar{\chi})$ γύρω από τη μέση τιμή είναι 68%.

Ένα αποτέλεσμα μέτρησης θεωρείται επιστημονικά αποδεκτό, μόνο εάν αναφέρεται μαζί με το διάστημα αβεβαιότητας που καλύπτει την «πραγματική τιμή» του μετρούμενου μεγέθους με μια δεδομένη πιθανότητα.

Για να συγκρίνουμε την στατιστική αβεβαιότητα του αποτελέσματός μας, με την «αποδεκτή» τιμή, χρησιμοποιούμε τη σχετική αβεβαιότητα (γνωστή ως σχετικό σφάλμα) :

$$\sigma_{\sigma\chi}\% = \frac{\sigma(\bar{\chi})}{\bar{\chi}} * 100 \qquad (3)$$

Σημειώνεται ότι αν κάνουμε μόνο μια μέτρηση τότε την αβεβαιότητα την εκτιμούμε με βάση την μικρότερη υποδιαίρεση του οργάνου και την συγκρίνουμε με την τιμή του μεγέθους που μετρήσαμε. Η σχετική αβεβαιότητα είναι πολύ χρήσιμη για την σύγκριση της ποιότητας δύο διαφορετικών μετρήσεων. Για παράδειγμα έστω ότι μετρήθηκε το πλάτος ενός βιβλίου με μία μετροταινία και βρέθηκε 16.8 cm, αν εκτιμούμε ότι η αβεβαιότητα είναι ± 0.1 cm, το σχετικό σφάλμα είναι $\sigma\sigma\chi\% = 0.1*100/168=0.6\%$. Με την ίδια μετροταινία μετρήθηκε το ύψος μιας πόρτας και βρέθηκε 215.7 cm. Θεωρητικά η αβεβαιότητα της δεύτερης μέτρησης είναι επίσης ± 0.1 cm. Το σχετικό σφάλμα όμως στην περίπτωση αυτή είναι 0.05% που είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με την μέτρηση του βιβλίου. Γενικά για δοσμένη αβεβαιότητα, η μέτρηση με την μικρότερη σχετική αβεβαιότητα είναι περισσότερο αξιόπιστη.

Παράδειγμα υπολογισμού αβεβαιότητας μέσης τιμής.

Στον παρακάτω πίνακα έχουν καταγραφεί 10 τιμές που προέκυψαν κατά τη μέτρηση του πάχους ενός πλακιδίου. Υπολογίστηκε η μέση τιμή, $\bar{X} = 8.260\ mm$, οι αποκλίσεις από την μέση τιμή και τα τετράγωνά τους. Τέλος ο υπολογισμός της αβεβαιότητας της μέσης τιμής (σφάλμα μέσης τιμής) έδωσε αποτέλεσμα: $\sigma(\bar{\chi})=0.004216$ mm.

χ_i mm	$\bar{x}$ mm	$(\bar{x}-x_i)$ mm	$(\bar{x}-x_i)^2$ mm^2
8,26	8,260	0	0,0000
8,27		0,01	0,0001
8,26		0	0,0000
8,28		0,02	0,0004
8,23		-0,03	0,0009
8,26		0	0,0000
8,27		0,01	0,0001
8,26		0	0,0000
8,25		-0,01	0,0001
8,26		0	0,0000
		$\sum_i^N (\bar{x}-x_i)^2=$	0,0016

Πίνακας 1: Τρόπος υπολογισμού της αβεβαιότητας στατιστικού τύπου

Παρατηρούμε ότι στη μέση τιμή κρατήθηκε ένα παραπάνω ψηφίο (3 δεκαδικά) σε σχέση με αυτά που προκύπτουν από την άθροιση των μετρήσεών μας. Γενικά όταν χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα για συνεχόμενους υπολογισμούς όπως είναι οι αποκλίσεις από την μέση τιμή, κρατάμε ένα ψηφίο παραπάνω και κάνουμε τη στρογγυλοποίηση στο τέλος για να μην αλλοιωθεί το αποτέλεσμά μας από συνεχόμενες στρογγυλοποιήσεις. Επίσης το τελικό αποτέλεσμα της αβεβαιότητας πρέπει να στρογγυλοποιηθεί με βάσει την αξιοπιστία με την οποία έγιναν οι μετρήσεις. Για αριθμό μετρήσεων μικρότερο από 20 μπορούμε να κρατήσουμε στην αβεβαιότητα ΜΟΝΟ ΕΝΑ σημαντικό ψηφίο. Επειδή στο εργαστήριο Φυσικής ο αριθμός των μετρήσεων που λαμβάνουμε είναι συνήθως κάτω από 10 (λόγω χρονικών περιορισμών), πάντα στρογγυλοποιούμε την αβεβαιότητα στο πρώτο μη μηδενικό ψηφίο.

Ο επιστημονικά σωστός τρόπος παρουσίασης της μέσης τιμής μαζί με την αβεβαιότητά της είναι: όσα δεκαδικά ψηφία έχει η αβεβαιότητα, τόσα να έχει και η μέση τιμή.

Έτσι το αποτέλεσμα που προκύπτει από τις 10 επαναλήψεις της μέτρησης του πάχους του πλακιδίου (Πίνακας 1), είναι:

$$\overline{\chi} \pm \sigma(\overline{\chi}) = (8.260 \pm 0.004)\ \mathrm{mm}$$

Μετά την στρογγυλοποίηση της αβεβαιότητας στο πρώτο σημαντικό ψηφίο $\sigma(\chi)=0.004$ mm η αβεβαιότητα έχει τρία δεκαδικά ψηφία, έτσι και η μέση τιμή διατηρεί τα τρία δεκαδικά ψηφία.

Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι με πιθανότητα 68% η πραγματική μας τιμή βρίσκεται στο διάστημα από 8.256 mm έως 8.264 mm.

3.5 Αβεβαιότητες Τύπου Β

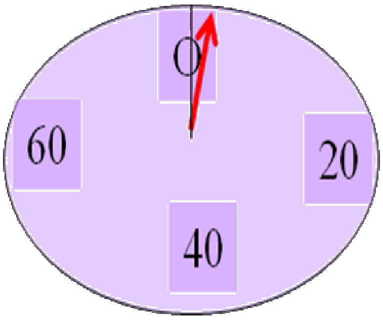
3.5.1 Συστηματικές αβεβαιότητες

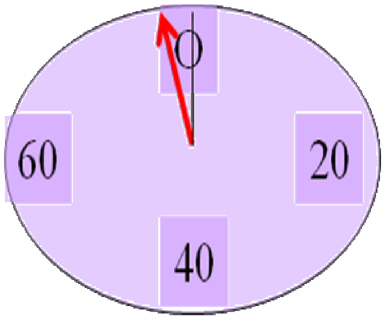
Οι συστηματικές αβεβαιότητες (σε πολλά βιβλία αναφέρονται ως συστηματικά σφάλματα) είναι αβεβαιότητες που μπορούν να εντοπισθούν και να αποφευχθούν ή να διορθωθούν. Οφείλονται συνήθως σε μη ικανοποιητική ή λανθασμένη βαθμονόμηση οργάνων, σε λανθασμένες ενέργειες του πειραματιστή, της μεθόδου ανάλυσης κλπ.

Οι συστηματικές αβεβαιότητες δίνουν σταθερά μεγαλύτερες ή σταθερά μικρότερες τιμές από τις «πραγματικές». Εντοπίζονται δε συγκρίνοντας τις τιμές του μεγέθους που μας ενδιαφέρει με τιμές που λαμβάνονται με διαφορετική τεχνική, με άλλο πειραματιστή κλπ.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα συστηματικής αβεβαιότητας είναι η περίπτωση μιας ζυγαριάς της οποίας η βελόνα πριν τη μέτρηση είναι δεξιότερα ή αριστερότερα του μηδενός (Σχήμα 5). Αυτό είναι ένα σφάλμα που παρουσιάζεται σε πολλά όργανα στρεπτής βελόνας και ονομάζεται μετατόπιση του μηδενός. Στα περισσότερα όργανα υπάρχει τρόπος επαναφοράς της βελόνας στο μηδέν. Εάν δεν διορθώνεται άμεσα τότε πρέπει να υπολογιστεί η διαφορά (σφάλμα μετατόπισης μηδενός) και να προστεθεί ή να αφαιρεθεί από το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Εάν η βελόνα είναι αρχικά δεξιά του μηδενός, η ζυγαριά θα δείχνει μεγαλύτερη τιμή από την πραγματική, άρα θα πρέπει να εκτιμήσουμε τη μετατόπιση του μηδενός και να το αφαιρούμε από τις μετρήσεις μας. Εάν η βελόνα είναι αρχικά αριστερά του μηδενός, η ζυγαριά θα δείχνει μικρότερη τιμή από την πραγματική, άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε τη μετατόπιση μηδενός και να την προσθέτουμε στις μετρήσεις μας.





Σχήμα 5: Συστηματική αβεβαιότητα - μετατόπιση μηδενός

3.5.2 Διάδοση αβεβαιότητας – Αβεβαιότητα έμμεσης μέτρησης

Οι μετρήσεις που γίνονται στο εργαστήριο συχνά δεν μετρούν άμεσα τη φυσική ποσότητα που μας ενδιαφέρει, αλλά χρησιμοποιούνται για τον έμμεσο υπολογισμό της. Στην περίπτωση αυτή η μέτρηση ονομάζεται "έμμεση". Για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας στις έμμεσες μετρήσεις, χρησιμοποιούνται οι αβεβαιότητες των άμεσα μετρουμένων ποσοτήτων, όπως εξηγείται στη συνέχεια.

Έστω το φυσικό μέγεθος που μας ενδιαφέρει περιγράφεται από μια συνάρτηση f (x,y,w) και τα μετρούμενα μεγέθη είναι τα x, y, w των οποίων οι αβεβαιότητες είναι δx, δy και δw. Η κάθε αβεβαιότητα συνεισφέρει στην συνολική αβεβαιότητα του μεγέθους που υπολογίζεται έμμεσα. Η συνεισφορά της κάθε μιας καθορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις που προκύπτουν από το γινόμενο της μερικής παραγώγου της συνάρτησης ως προς την κάθε μεταβλητή, επί την επιμέρους αβεβαιότητα της μεταβλητής.

$$\delta fx = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x \qquad \delta fy = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y \qquad \delta fw = \frac{\partial f}{\partial w}\delta w$$

Η αβεβαιότητα του έμμεσα μετρούμενου μεγέθους δίδεται από την σχέση :

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\delta w\right)^2} \qquad (4)$$

Παράδειγμα υπολογισμού αβεβαιότητας έμμεσης μέτρησης.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας ωμικής αντίστασης R(V,I), εφαρμόζοντας στα άκρα της μια τάση V και μετρώντας το ρεύμα I που τη διαρρέει. Η τιμή της αντίστασης υπολογίζεται με τον νόμο του OHM R=V/I. Έστω ότι η αβεβαιότητα στην μέτρηση της τάσης είναι δV και η αβεβαιότητα στην μέτρηση του ρεύματος είναι δI. Θεωρώντας ότι δεν έχουμε κάποιο συστηματικό σφάλμα στις μετρήσεις μας, η αβεβαιότητα που οφείλεται στην μέτρηση της τάσης (μερική αβεβαιότητα τάσης) προκύπτει από τη σχέση:

$$\delta Rv = \frac{\partial R}{\partial V}\delta V = \frac{\delta V}{I} \qquad (5)$$

Η αβεβαιότητα που οφείλεται στην μέτρηση του ρεύματος (μερική αβεβαιότητα ρεύματος) προκύπτει από τη σχέση:

$$\delta R_I = \frac{\partial R}{\partial I}\delta I = -\frac{V}{I^2}\delta I \qquad (6)$$

Η αβεβαιότητα στην τιμή της ωμικής αντίστασης δίδεται από την σχέση:

$$\delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\delta I\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta V}{I}\right)^2 + \left(-\frac{V}{I^2}\delta I\right)^2} \qquad (7)$$

και το αποτέλεσμα δίδεται με την μορφή R±δR.

Τις περισσότερες φορές **η αβεβαιότητα είναι σύνθετη**, γιατί μπορεί να οφείλεται σε ένα συνδυασμό από τυχαίους παράγοντες, συστηματικά σφάλματα, αβεβαιότητες κλίμακας οργάνων που δίδονται από τον κατασκευαστή κλπ.

Κύρια σημεία περιληπτικά

- Η ακρίβεια μιας μέτρησης μας λέει πόσο κοντά στην τιμή που θεωρούμε «πραγματική» βρίσκεται η μέτρησή μας.
- Κάθε μέτρηση φέρει πάντα μια αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα ορίζεται ως η ποσοτική έκφραση της «αμφιβολίας» που υπάρχει σχετικά με το αποτέλεσμα της μέτρησης.
- Λαμβάνοντας πολλές μετρήσεις του ιδίου μεγέθους για να υπολογίσουμε μέση τιμή, μειώνουμε την αβεβαιότητα τύπου Α.
- Αλλάζοντας την τεχνική μέτρησης μπορεί να περιοριστεί ή να εκμηδενιστούν αβεβαιότητες τύπου Β.
- Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης γράφεται πάντα μαζί με την αβεβαιότητα που τη συνοδεύει και τις μονάδες της.

$$\overline{\chi} \pm \sigma(\bar{\chi}) = (8.260 \pm 0.004)\, mm$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σημαίνει ότι η πραγματική τιμή βρίσκεται στο διάστημα από 8.256 mm έως 8.264 mm με πιθανότητα 68%.

(Υπενθύμιση: Δεν μπορούμε ποτέ να μάθουμε την πραγματική τιμή του μεγέθους Χ)

** Οι σημειώσεις αυτές καλύπτουν μόνο τις πλέον γενικές περιπτώσεις υπολογισμού αβεβαιότητας που θα συναντήσει κάποιος σε ένα εργαστήριο γενικής φυσικής. Αν συναντήσετε κάποια περίπτωση που χρήζει περεταίρω διευκρίνησης, συζητήστε την με τον καθηγητή σας.*

4. Ερωτήσεις

1. Πόσα σημαντικά ψηφία έχουν οι αριθμοί 13600, 0.120, 0.0045;
2. Τι διακρίνει ένα «τυχαίο σφάλμα» από ένα συστηματικό σφάλμα;
3. Για τον προσδιορισμό της διαμέτρου d διαφόρων δοκιμίων έγιναν 10 μετρήσεις σε κάθε δοκίμιο με σκοπό τον υπολογισμό της μέσης τιμής της διαμέτρου $\bar{d}$, καθώς και της αντίστοιχης αβεβαιότητας σ($\bar{d}$). Να διορθωθούν οι πιο κάτω εκφράσεις του τελικού αποτελέσματος κάθε δοκιμίου ώστε να πάρουν την επιστημονικά αποδεκτή μορφή.

$\bar{d}\pm\sigma(\bar{d})$= (15.619 ± 0. 43) mm
$\bar{d}\pm\sigma(\bar{d})$= (16.623 ± 0.004) mm
$\bar{d}\pm\sigma(\bar{d})$= (16.632 ± 0.99) mm
$\bar{d}\pm\sigma(\bar{d})$= (14.615 ± 0.043) mm

Βιβλιογραφία

1. John R. Taylor, «An Introduction to Error Analysis : The Study of Uncertainties in Physical Measurements», 2nd ed. (Univ. Science Books, 1997)
2. B.N. Taylor and C.E. Kuyatt, *«Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results»* (NIST Technical Note 1297, 1994)
3. «Σφάλματα Μετρήσεων» από το βιβλίο , “Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής ” Ομάδα Φυσικών ΤΕΙ Πειραιά, (Μακεδονικές Εκδόσεις).
4. «Θεωρία Σφαλμάτων» από το βιβλίο “Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής Ι” Ομάδα Φυσικών ΤΕΙ Αθήνας, (Μακεδονικές Εκδόσεις).
5. Young H., “University Physics”, Addison-Wesley (Εκδόσεις Παπαζήση 1990).
6. www.mathman.gr
7. **http://www.batesville.k12.in.us/physics/apphynet/Measurement/Measurement_Intro.html**