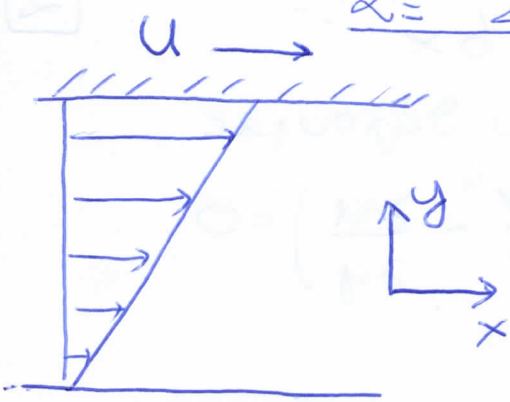
2η Σειρά Ασκήσεων 2018-2019

1η άσκηση



$$u(x,y,z) = U \cdot \frac{y}{b}$$

$$v(x,y,z) = 0$$

$$w(x,y,z) = 0$$

(α) Ρυθμός Ογκομετρικής διαστολής $= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$

Συνεπώς ικανοποιείται η συνθήκη συνέχειας.

(β) Αφού η ροή είναι 2D (επίπεδη) $w=0$, το διάνυσμα της περιστροφής έχει μόνο τη z συνιστώσα (κάθετη στο επίπεδο x-y)

$$\vec{\omega} = \omega_z \cdot \hat{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - U \cdot \frac{1}{b}\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{U}{b}}$$

(γ) Το διάνυσμα του στροβιλισμού είναι το διπλάσιο του διανύσματος περιστροφής

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{U}{b}\right) \cdot \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{\zeta} = -\frac{U}{b}\hat{k}}$$

$\hat{k}$: το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη z διεύθυνση.

Άσκηση 2 $\psi(x,y) = ay^2 - bx$

Για επίπεδη, ασυμπίεστη ροή που θέλουμε να είναι αστρόβιλη: $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$

- Επομένως πρέπει: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$
- Από ορισμό ~~επίπεδης~~ συνάρτησης ροϊκών γραμμών

$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2ay$

$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -(-b) = b$

- Άρα $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = 2a$

Επομένως $\frac{\partial v}{\partial x} \neq \frac{\partial u}{\partial y}$ η ροή δεν είναι αστρόβιλη

(*) Εκτός από την περίπτωση που $a=0$

Άσκηση 3

Επίπεδη ασυμπίεστη ροή $u(x,y) = -4\,m/s$
$v(x,y) = -2\,m/s$

(α) Από ορισμό ροϊκής συνάρτησης

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -4 \xRightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολοκληρώνοντας}} \int d\psi = \int -4\,dy \Rightarrow$

$\psi(x,y) = -4y + f_1(x)$ $\boxed{A}$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -(-2) \xRightarrow[\text{ως προς } x]{\text{ολοκλήρωση}} \int d\psi = \int 2\,dx \Rightarrow$

$\psi(x,y) = 2x + f_2(y)$ $\boxed{B}$

Άρα έχω δύο εκφράσεις της $\psi(x,y)$ (Α, Β) [3]

$$\psi(x,y) = f_1(x) - 4y$$
$$\psi(x,y) = 2x + f_2(y)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= 2x \\ f_2(y) &= -4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\psi(x,y) = 2x - 4y + C_1}$$

(β) Ορισμός συνάρτησης δυναμικού ταχύτητας

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = -4 \xrightarrow[\text{ως προς } x]{\text{ολοκλήρωση}} \int d\phi = \int -4\,dx \Rightarrow$$

$$\phi(x,y) = -4x + f_3(y) \quad \boxed{\Gamma}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = -2 \xrightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολοκλήρωση}} \int d\phi = \int -2\,dy \Rightarrow$$

$$\phi(x,y) = -2y + f_4(x)$$

Άρα έχω δύο εκφράσεις της $\phi(x,y)$ (Γ, Δ)

$$\phi(x,y) = -4x + f_3(y)$$
$$\phi(x,y) = f_4(x) - 2y$$

$$f_3(y) = -2y$$
$$f_4(x) = -4x$$

$$\boxed{\phi(x,y) = -4x - 2y + C_2}$$

(γ) Αφού η ~~ισοδ.~~ ροϊκή γραμμή που περνάει από το Ο $(x=y=0)$ $\psi=0$

$$\psi(x,y) = 2x - 4y + C_1$$
$$0 = 2\cdot 0 - 4\cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

Για $\psi = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$0 = 2x - 4y \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x \quad \psi = 0}$$

$\phi(x,y) = -4x - 2y + C_2$

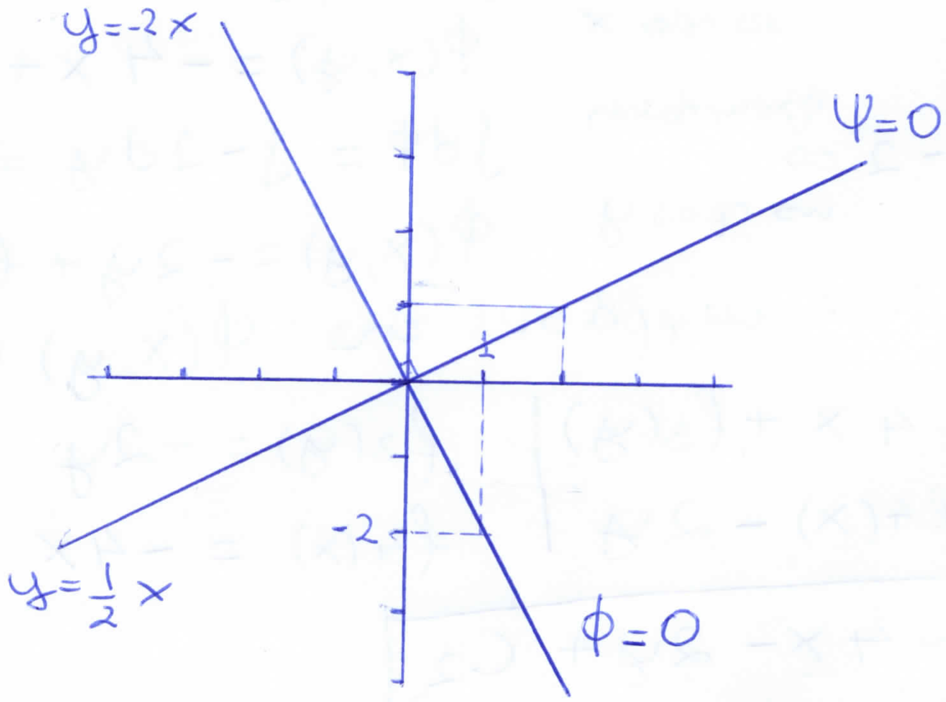
Για $(x=0, y=0)$ $\phi = 0$

$0 = -4\cdot 0 - 2\cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

Για $\phi = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$0 = -4x - 2y \Rightarrow y = -2x$

$\boxed{y = -2x \quad \phi = 0}$



Άσκηση 4

Ασυμπίεστη, μόνιμη, άτριβη, επίπεδη 2D ροή
Το δυναμικό ταχύτητας

$$\phi(x,y) = -(3x^2y - y^3)$$

Ζητείται η διαφορά πίεσης ανάμεσα στα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,2)$

Αφού ορίζεται το δυναμικό ταχύτητας ⇒ η ροή είναι αστρόβιλη ⇒
Μπορώ να εφαρμόσω εξίσωση Bernoulli ανάμεσα σε οποιαδήποτε σημεία του πεδίου άρα και ανάμεσα στα A και B

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B$$

Αφού η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στα A και B αμελητέα $z_A = z_B$

$$\frac{P_A}{\rho g} - \frac{P_B}{\rho g} = \frac{(V_B^2 - V_A^2)}{2g} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_A - P_B = \frac{\rho}{2}(V_B^2 - V_A^2)} \quad \text{I}$$

Επομένως πρέπει να βρω τα V_A, V_B και άρα και τις συνιστώσες τους

Από ορισμό δυναμικού ταχύτητας

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -6xy$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2$$

② Αφού $u(x,y) = -6xy$

$v(x,y) = -3x^2 + 3y^2$

Σημείο $A(1,2)$

$u_A = -6 \cdot 1 \cdot 2 = -12$

$(u_A, v_A) = (-12, 9)$

$v_A = -3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 = -3 + 12 = 9$

$V_A = \sqrt{u_A^2 + v_A^2} = \sqrt{(-12)^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15\ m/s$

$\boxed{V_A = 15\ m/s}$

Σημείο $B(2,2)$

$u_B = -6 \cdot 2 \cdot 2 = -24$

$v_B = -3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 = 0$

$V_B = \sqrt{u_B^2 + v_B^2} = \sqrt{(-24)^2 + 0^2} = 24\ m/s$

$\boxed{V_B = 24\ m/s}$

Αντικαθιστώ τα V_A και V_B στη σχέση (1) ⇒

$P_A - P_B = \frac{996.5}{2}(24^2 - 15^2) =$

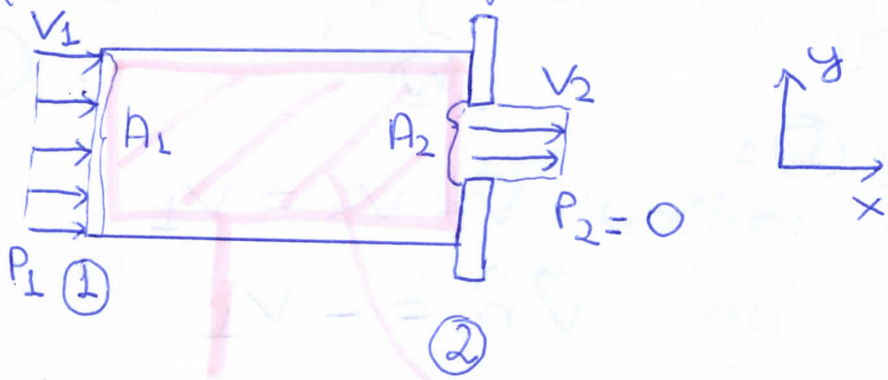
$= 498.25(576 - 225) =$

$= 174.885\ Pa$

$\boxed{P_A - P_B = 174.885\ Pa}$

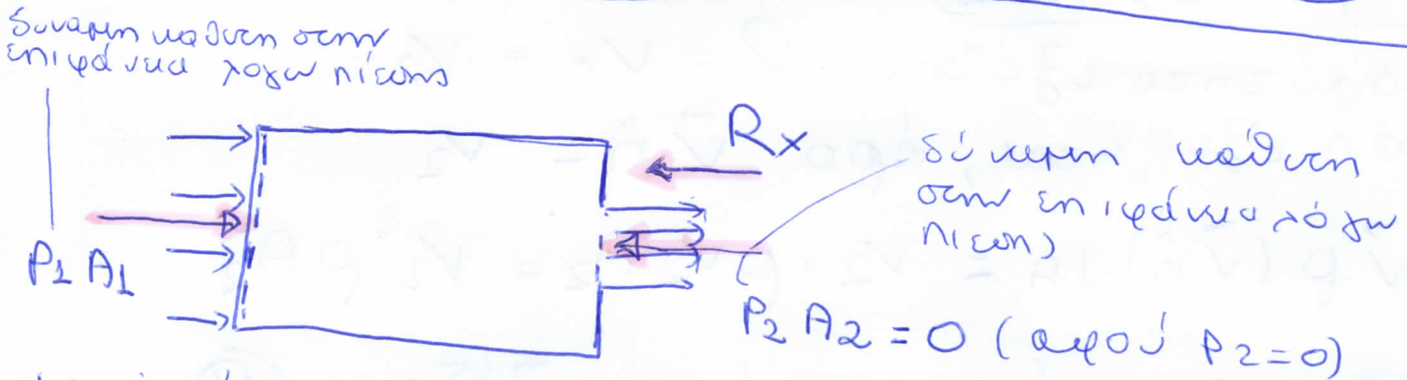
Άσκηση 5

Ορισμός όγκου ελέγχου



Επιφάνεια Ελέγχου
Control Surface (CS)

Περιεχόμενο Επιφάνειας Ελέγχου =
Όγκος Ελέγχου
Control Volume (CV)



Η εξίσωση της ορμής στη x διεύθυνση για όγκο ελέγχου είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \vec{V}(\rho \cdot d\underline{V}) + \int_{cs} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA = \sum \vec{F}_x$$

Επειδή η ροή είναι μόνιμη $\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\vec{V}(\rho d\underline{V}) = 0$

Άρα παίρνει τη μορφή

$$\int_{cs} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA = \sum \vec{F}_x$$

Η control surface CS αποτελείται από:

(α) Διατομή εισόδου (1)

(β) Διατομή εξόδου (2)

(γ) Τα τοιχώματα του αγωγού και την πλάκα εξόδου (w)

Η εξίσωση ορμής παίρνει τη μορφή:

$$\int_{1} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA + \int_{2} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA + \int_{W} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA = \Sigma F_x \quad (\mathrm{I})$$

Διατομή Εισόδου (1):

~~Αφού~~ Η ταχύτητα εισόδου $\vec{V} = V_x = V_1$

Η ροή εισέρχεται, άρα $\vec{V}\hat{n} = -V_1$

Επομένως

$$\int_{1} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA = V_1 \cdot \rho(-V_1) \cdot A_1 = -V_1^2 \rho A_1$$

Διατομή Εξόδου (2):

Η ταχύτητα εξόδου $\vec{V} = V_x = V_2$

Η ροή εξέρχεται, άρα $\vec{V}\hat{n} = V_2$

$$\int_{2} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA = V_2 \cdot \rho V_2 A_2 = V_2^2 \rho A_2$$

Τοίχωμα αγωγού και τμήμα εξόδου: (W)

Δεν υπάρχει είσοδος - έξοδος ρευστού, άρα:

$$\int_{W} \vec{V}\rho(\vec{V}\hat{n})dA = 0$$

Συνισταμένη δυνάμεων στη x διεύθυνση

$$\Sigma F_x = P_1 \cdot A_1 - P_2 \cdot A - R_x$$

$\boxed{R_x: \text{Η ζητούμενη δύναμη Αντίστασης}}$

Επειδή $P_2 = 0$

$$\Sigma F_x = P_1 \cdot A_1 - R_x$$

Αντικαθιστώντας στην (I) έχουμε:

$$-V_1^2 \rho A_1 + V_2^2 \rho A_2 = P_1 A_1 - \boxed{R_x} \Rightarrow$$

$$\boxed{R_x = P_1 A_1 + \rho \left(V_1^2 A_1 - V_2^2 A_2 \right)} \quad (II)$$

Έχω τα V_1, A_1, A_2, ρ

Πρέπει να βρω τα V_2, P_1

Το V_2 θα το βρω από εξίσωση συνέχειας

$$\boxed{A_1 V_1 = A_2 V_2} \Rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{\frac{\pi D_1^2}{4}}{\frac{\pi D_2^2}{4}} V_1 \Rightarrow$$

$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{0.2}{0.1}\right)^2 \cdot 5 = 20 \ m/s$$

$$\boxed{V_2 = 20 \ m/s}$$

Το P_1 θα το βρω εφαρμόζοντας εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής από τη διατομή 1 στη διατομή 2.

Με την υπόθεση άτριβης, μόνιμης ασυμπίεστη ροής καθώς και ότι η διατομές 1 και 2 βρίσκονται στο ίδιο ύψος

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \quad (P_2 = 0) \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \left(V_2^2 - V_1^2 \right) = \frac{1}{2} 999 \left(20^2 - 5^2 \right)$$

$$\boxed{P_1 = 187312 \ Pa}$$

Αντικαθιστώ τα $V_1, V_2, P_1, A_1, A_2, \rho$ στην (I) και έχω

$$R_x = 187311 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.2)^2 +$$

$$+ 999\left(5^2 \cdot \frac{\pi}{4}(0.2)^2 - 20^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0.1)^2\right) =$$

$$= 5884.5 + 999(0.785 - 3.1416) =$$

$$= 5884.5 - 2354 = 3530 \text{ N}$$

$$\boxed{R_x = 3530 \text{ N}}$$