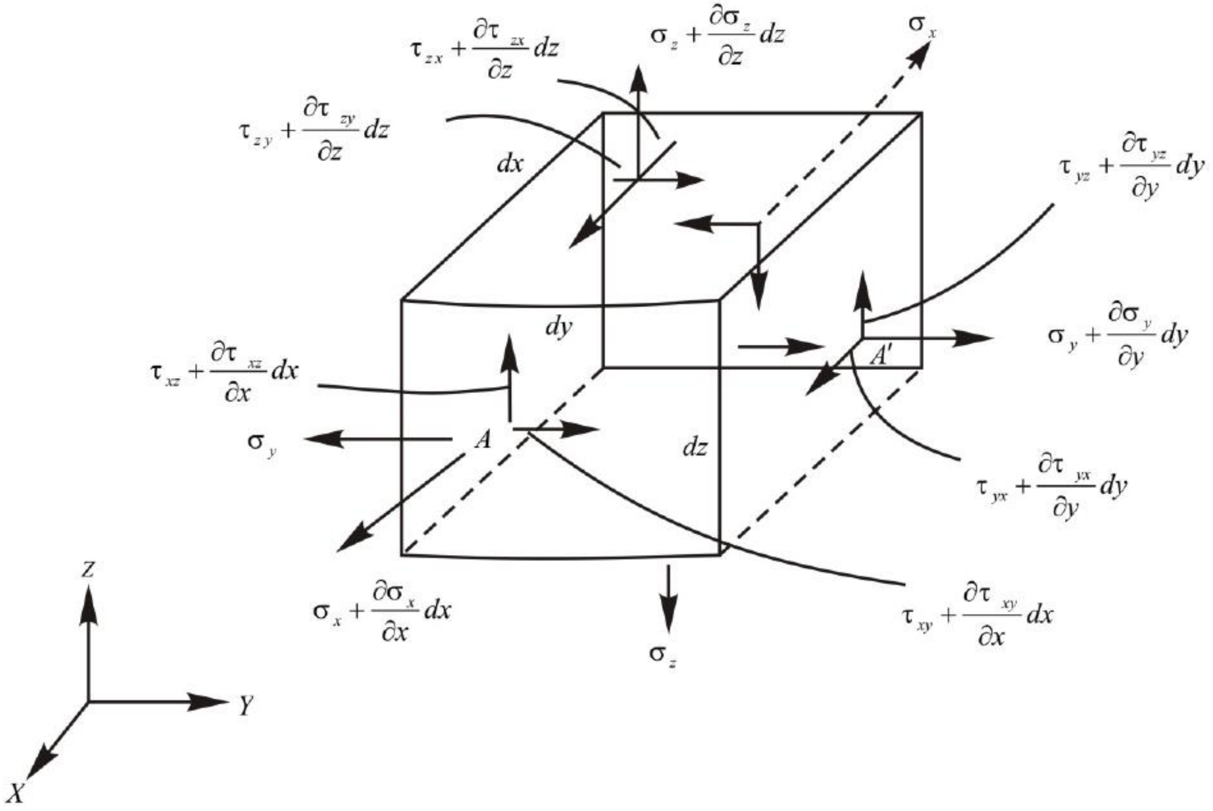
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ

Εισαγωγή στην ελαστικότητα

Α. Θεοδουλίδης

Εξισώσεις ισορροπίας διαφορικού στοιχείου



$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x, & \sigma_y, & \sigma_z, & \tau_{xy}, & \tau_{yz}, & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dxdydz + F_{\Omega x} dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= -F_{\Omega x} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= -F_{\Omega y} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -F_{\Omega z} \end{aligned} \right\} \qquad (1)$$

Εξισώσεις ισορροπίας

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0 \ \ and \ \sum M_z = 0; \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (2)$$

Με την βοήθεια των (2) οι εξισώσεις (1) γράφονται στη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -F_{\Omega x} \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -F_{\Omega y} \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -F_{\Omega z} \end{array} \right\}$$

(Εξισώσεις ισορροπίας)

Παραμορφώσεις-Μετατοπίσεις

Θεωρούμε σώμα το οποίο παραμορφώνεται λόγω της άσκησης σε αυτό διαφόρων φορτίσεων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα σημειο P(x,y,z) να μετατοπισθεί στη θέση P’(x’,y’,z’) για την οποία ισχύει:

x’ = x + u
y’ = y + v
z’ = z + w

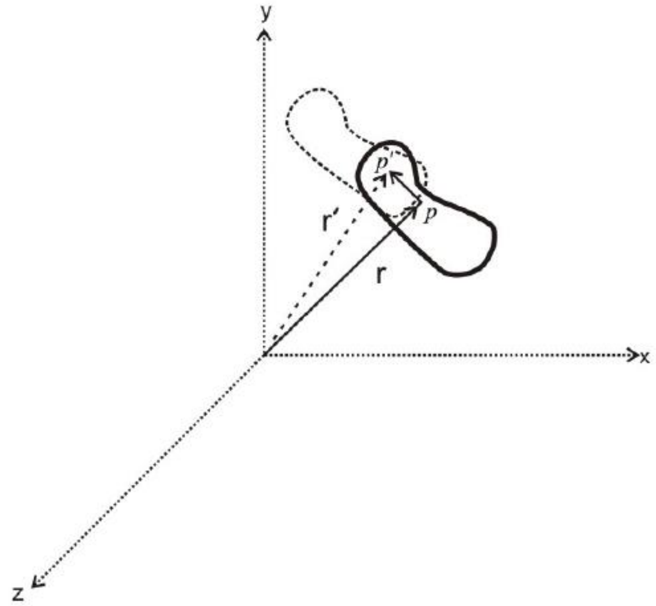
Το διάνυσμα **d**(u, v, w) είνα το διάνυσμα της γραμμικής μετατόπισης (displacement).

Οι αντίστοιχες παραμορφώσεις (strains) ορίζονται ως:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

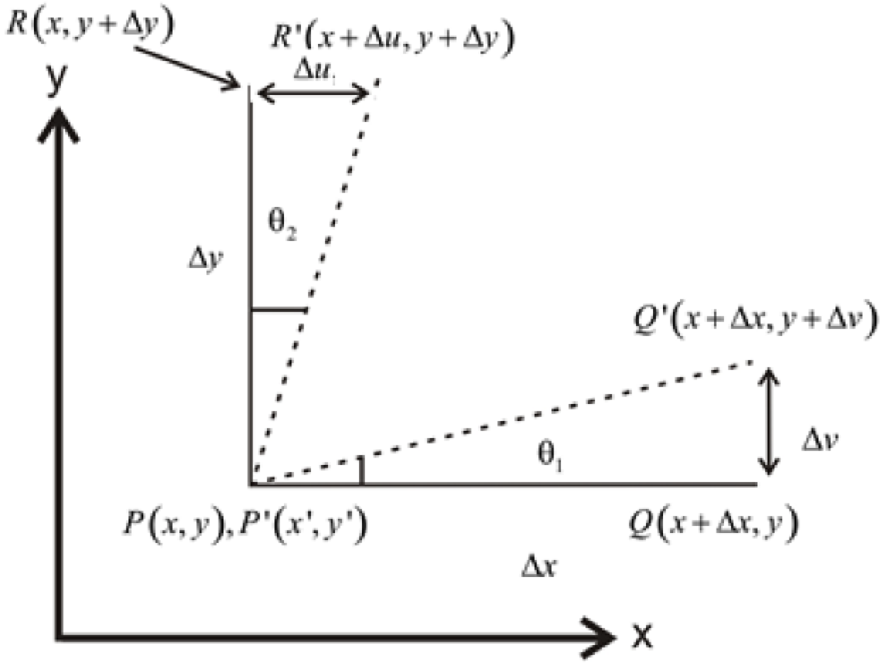
$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y}$$

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$



Παραμορφώσεις-Μετατοπίσεις

Στο ίδιο σώμα θεωρούμε τα σημεία P, Q και R τα οποία μετά την παραμόρφωση μετατοπίζονται στις θέσεις P’, Q’ και R’ αντίστοιχα (θεωρούμε μικρές μετατοπίσεις).



$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \theta_2 &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ομοίως προκύπτει:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

(Διατμητικές παραμορφώσεις)

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Παραμορφώσεις-Μετατοπίσεις

Στην περίπτωση **μεγάλων** μετατοπίσεων οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται στη μορφή:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

(Εξισώσεις Green-Lagrange)

Το διάνυσμα των παραμορφώσεων εκφράζεται ως:

$$\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \left[\varepsilon_{\mathbf{x}} \quad \varepsilon_{\mathbf{y}} \quad \varepsilon_{\mathbf{z}} \quad \gamma_{\mathbf{xy}} \quad \gamma_{\mathbf{yz}} \quad \gamma_{\mathbf{zx}}\right]$$

Παραμορφώσεις-Μετατοπίσεις

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Γραμμικές καταστατικές εξισώσεις

Σύμφωνα με τον νόμο του Hooke οι τάσεις για την περίπτωση ενός γραμμικού, ελαστικού, ανισότροπου και ομογενούς υλικού συσχετίζονται με τις παραμορφώσεις μέσω των σχέσεων:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & . & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & . & . & . & C_{26} \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ C_{61} & C_{62} & . & . & . & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

ή ισοδύναμα: $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$

Γραμμικές καταστατικές εξισώσεις

Στην περίπτωση ορθροτοπικού υλικού οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ & & & C_{44} & 0 & 0\\ & Symmetry & & & C_{55} & 0\\ & & & & & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}$$

ή ισοδύναμα: $\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}$

Γραμμικές καταστατικές εξισώσεις

Στην περίπτωση ισοτροπικού υλικού οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \overline{E} \begin{bmatrix} (1-\mu) & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\mu) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dfrac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & Symmetry & & & \dfrac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \dfrac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

όπου: μ ο λόγος Poisson και $$\overline{E} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

Γραμμικές καταστατικές εξισώσεις

Στην περίπτωση ισοτροπικού υλικού οι ανωτέρω σχέσεις γράφονται και αντιστρόφως:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ & & \mathit{Symmetry} & & 2(1+\mu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

όπου: μ ο λόγος Poisson και E το μέτρο ελαστικότητας

Το πρόβλημα της επίπεδης τάσης (plain stress)

Τα προβλήματα που εντάσσονται σ' αυτή την κατηγορία έχουν τη μια διάσταση πολύ μικρότερη από τις άλλες δύο (έστω την Oz) (π.χ. Έλασμα). Στην περίπτωση αυτή οι συνιστώσες των τάσεων σ_z, τ_{zx}, τ_{zy} μηδενίζονται και οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων γράφονται στη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ή αντίστροφα:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι:

$$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{1-\mu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right) \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain)

Στην περίπτωση επιμήκων σωμάτων στα οποία η μιά διάσταση (εστω Oz) είναι πολύ μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες τότε ισχύει $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$

Οι σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων για ισότροπο υλικό στην περίπτωση αυτή γράφονται:

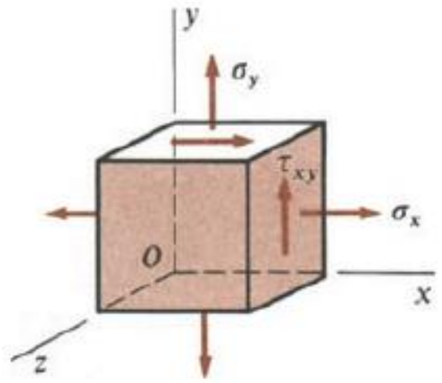
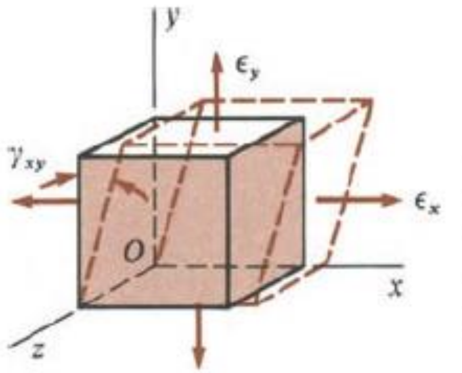
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

ή αντίστροφα:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\mu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\mu) & -\mu & 0 \\ -\mu & (1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι: $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

Επίπεδη τάση και επίπεδη παραμόρφωση

	Plane stress	Plane strain
		
Stresses	$\boxed{\sigma_z = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0}$ σ_x, σ_y, and τ_{xy} may have nonzero values	$\tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{yz} = 0$ σ_x, σ_y, σ_z, and τ_{xy} may have nonzero values
Strains	$\gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0$ ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, and γ_{xy} may have nonzero values	$\boxed{\epsilon_z = 0 \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0}$ ϵ_x, ϵ_y, and γ_{xy} may have nonzero values