

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ  
ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ  
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ

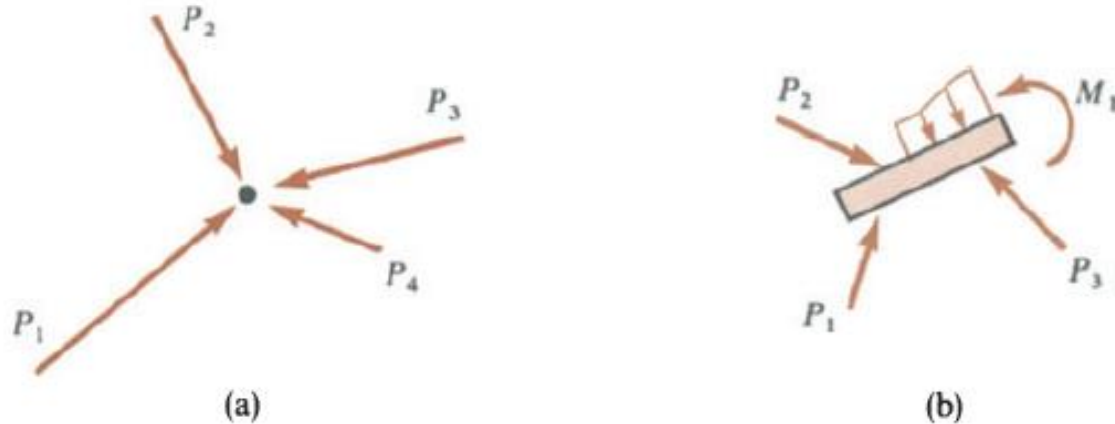
ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Α. Θεοδουλίδης

# Αρχή των Δυνατών Έργων

- Η ΑΔΕ είναι ένα πολυτιμο εργαλείο της Μηχανικής για την επίλυση προβλημάτων στατικής. Μεταξύ άλλων **χρησιμοποιείται και για την παραγωγή των βασικών εξισώσεων στη μέθοδο των ΠΣ.**
- Ο όρος «δυνατό έργο» σημαίνει το έργο που παράγουν πραγματικές δυνάμεις κατά την πραγματοποίηση υποτιθέμενων (δυνατών) μετατοπίσεων οι οποίες θα πρέπει να είναι συμβατές με τις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες.
- Όταν σε ένα σημειακό σώμα ασκούνται διάφορες δυνάμεις και το σώμα ισοροπεί, τότε **το συνολικό έργο των δυνάμεων αυτών κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε υποθετικής (δυνατής) μετατόπισης είναι μηδενικό, εφ' όσον το σώμα ισοροπεί.**
- Αυτή η φαινομενικά απλή διατύπωση, αποτελεί την **Αρχή των Δυνατών Έργων**, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτική προσέγγιση στις εξισώσεις ισορροπίας.

# Αρχή των Δυνατών Έργων



Η ΑΔΕ στην περίπτωση σημειακού και στην περίπτωση απαραμόρφωτου στερεού σώματος

Η ΑΔΕ εφαρμόζεται και στην περίπτωση σπαραμόρφωτων στερεών σωμάτων (rigid bodies), όπου οι ασκούμενες φορτίσεις μπορεί να είναι δυνάμεις, ροπές ή κατανεμημένες φορτίσεις. Στην περίπτωση αυτή οι δυνατές μετατοπίσεις μπορεί να είναι συνδυασμός μεταφορικών φορτίσεων και περιστροφών.

Σε όλες τις περιπτώσεις το δυνατό έργο θα πρέπει να είναι μηδενικό εφ' όσον το σώμα βρίσκεται σε ισοροπία.

Οι θεωρούμενες μετατοπίσεις θα πρέπει να είναι αρκούντως μικρές έτσι ώστε να μην αλλάζει η κατεύθυνση δράσης των ασκούμενων φορτίσεων.

# Αρχή των Δυνατών Έργων

- Στην περίπτωση παραμορφώσιμων στερεών η ΑΔΕ ισχύει εφ' όσον όμως ληφθεί υπ' όψη και το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, δηλ. των συνιστωσών των αναπτυσσομένων τάσεων
- Ως δυνατή μετατόπιση μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε μετατόπιση η οποία θα μπορούσε να συμβεί δυνητικά, ικανοποιώντας όμως τις επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες.
- Η ΑΔΕ διατυπώνεται ως εξής:

Αν σε ένα παραμορφώσιμο στερεό το οποίο ισορροπεί υπό την επίδραση δεδομένου συστήματος φορτίσεων, θεωρηθεί μια δυνατή μετατόπιση, τότε το δυνατό έργο των εξωτερικών φορτίσεων ισούται με το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων (συνιστωσών των τάσεων)

# Αρχή των Δυνατών Έργων

- Η ΑΔΕ ισχύει ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά του υλικού (γραμμική, μη-γραμμική, ελαστική ή μη ελαστική).

# Θεωρήματα Castigliano (1879)

- **Πρώτο Θεώρημα**

- Η πρώτη μερική παράγωγος της συνολικής εσωτερικής ενέργειας (ενέργεια παραμόρφωσης) ενός σώματος/κατασκευής ως προς οποιαδήποτε συνιστώσα της μετατόπισης ενός σημείου ισούται με τη δύναμη που ασκείται στο σημείο αυτό και στην ίδια κατεύθυνση με τη θεωρούμενη μετατόπιση.
- Το Πρώτο Θεώρημα Castigliano ισχύει **σε γραμμικά ή μη γραμμικά ελαστικά σώματα** στα οποία η θερμοκρασία παραμένει σταθερή.

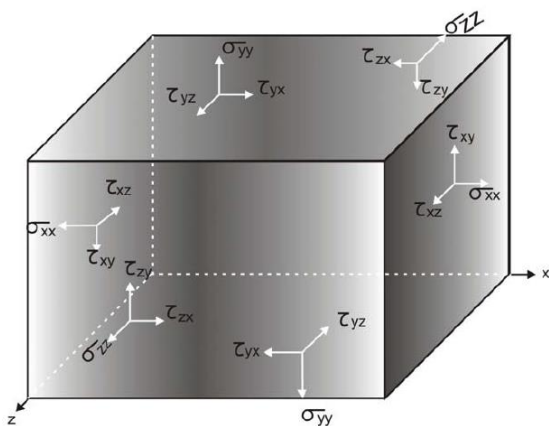
# Θεωρήματα Castigliano (1879)

- **Δεύτερο Θεώρημα**

- Η πρώτη μερική παράγωγος της συνολικής εσωτερικής ενέργειας (ενέργεια παραμόρφωσης) ενός σώματος/κατασκευής, ως προς οποιαδήποτε δύναμη που ασκείται σε κάποιο σημείο ισούται με την μετατόπιση που αναπτύσσεται στο ίδιο σημείο αυτό στην ίδια κατεύθυνση με την ασκούμενη δύναμη.
- Το Δεύτερο Θεώρημα Castigliano εφαρμόζεται σε **γραμμικά ελαστικά** σώματα στα οποία η θερμοκρασία παραμένει σταθερή.
- Στα δύο αυτά θεωρήματα ως δύναμη θεωρείται είτε σημειακή δύναμη, είτε ροπή και ως μετατόπιση τόσο η μεταφορά όσο και η περιστροφή.

# Ενέργεια παραμόρφωσης

- Η ενέργεια παραμόρφωσης (strain energy) ενός σώματος υπό τρισδιάστατη εντατική κατάσταση υπολογίζεται από την ακόλουθη ολοκλήρωση σε όλο τον όγκο  $V$  του σώματος:



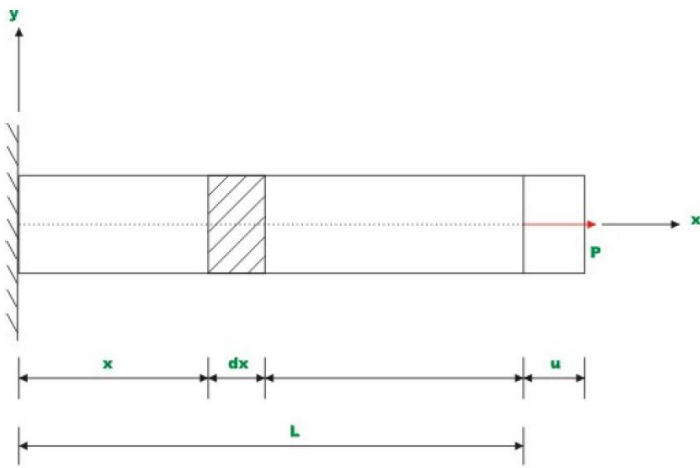
$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad \text{Όπου: } \{\sigma^T\} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$$

$$\{\varepsilon^T\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})$$

Η ενέργεια παραμόρφωσης αντιπροσωπεύει το έργο των εσωτερικών δυνάμεων (δηλ. των συνιστωσών των αναπτυσσομένων τάσεων)

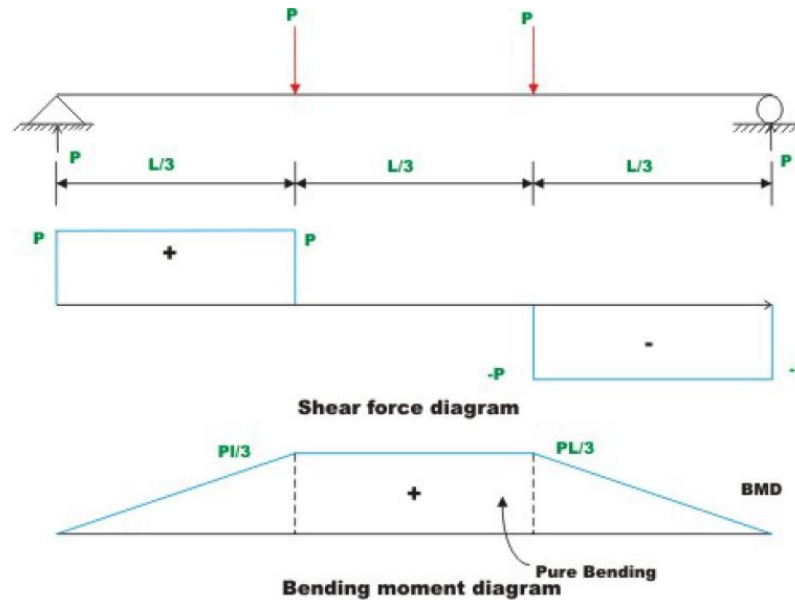
# Ενέργεια παραμόρφωσης σε απλές τυπικές φορτίσεις

- Αξονική φόρτιση



$$U = \frac{1}{2}Pu$$

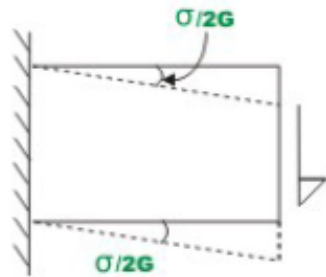
- Κάμψη



$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds$$

# Ενέργεια παραμόρφωσης σε απλές τυπικές φορτίσεις

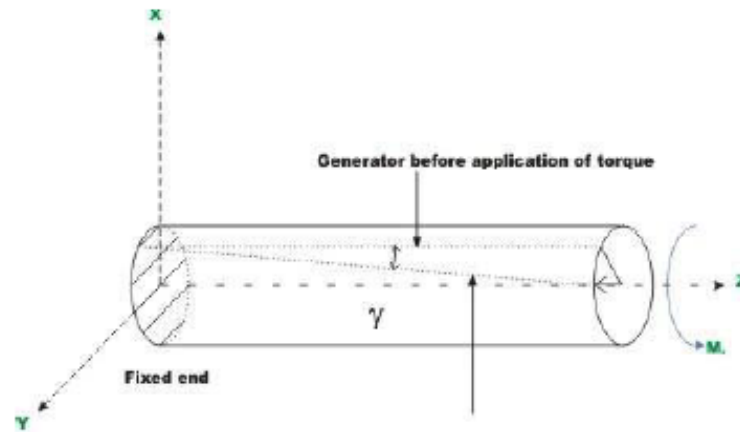
- Διάτμηση



$$U = \int_0^L \frac{kV^2}{2AG} ds$$

k=συντελεστής μορφής  
V=τέμνουσα δύναμη  
A = εμβαδό διατομής  
G= μέτρο διάτμησης

- Στρέψη



$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} ds$$

T=ροπή στρέψης  
J = πολική ροπή αδράνειας  
G= μέτρο διάτμησης

# Το θεώρημα του ελάχιστου έργου (Least work)

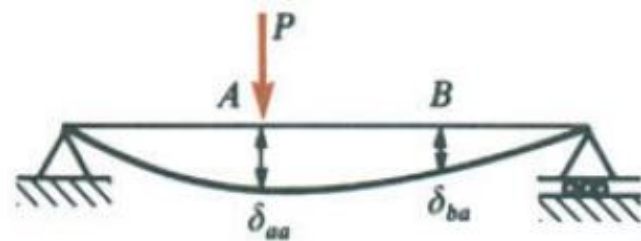
- Η μερική παράγωγος της Ενέργειας Παραμόρφωσης ενός υπερστατικού φορέα ως προς οποιαδήποτε υπερστατική φόρτιση μηδενίζεται.

# Αρχή της Υπέρθεσης

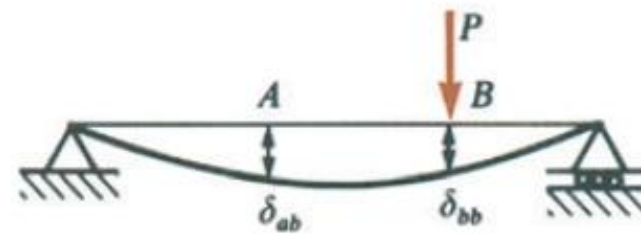
- Η μετατόπιση σε δεδομένο σημείο μιας κατασκευής λόγω της άσκησης περισσότερων της μιας φορτίσεων που ασκούνται μπορεί να υπολογισθεί ως υπέρθεση (άθροισμα) των επιμέρους φορτίσεων που θα αναπτύσσονταν στο ίδιο σημείο του σώματος ως αποτέλεσμα της κάθε μια από τις φορτίσεις ξεχωριστά.
- Η αρχή της υπέρθεσης είναι αποτέλεσμα και συνέπεια της γραμμικότητας του προβλήματος

# Αρχή της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων (Θεώρημα Maxwell)

- Προϋπόθεση για να ισχύει είναι το υλικό να είναι γραμμικά-ελαστικό και κατά συνέπεια να ισχύει η Αρχή της Επαλληλίας.
- Η μετατόπιση σε ένα σημείο A εξ' αιτίας ενός φορτίου που ασκείται στο σημείο B ισούται με την μετατόπιση που θα υφίστατο το σημείο B, αν η ίδια δύναμη ασκείτο στο σημείο A.



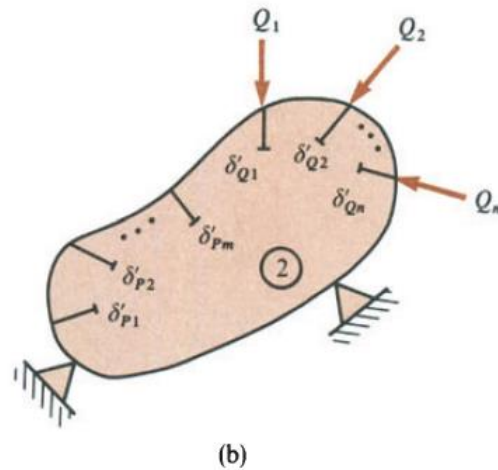
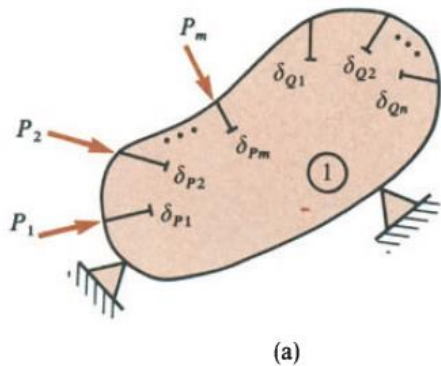
(a)



(b)

# Αρχή της αμοιβαιότητας του Έργου (Θεώρημα Betti-Rayleigh)

- Προύπόθεση για να ισχύει είναι το υλικό να είναι γραμμικά-ελαστικό και κατά συνέπεια να ισχύει η Αρχή της Επαλληλίας.
- Κατάσταση 1: Οι δυνάμεις  $P_i$ ,  $i=1,2,..m$  ασκούνται σε ένα σώμα και προκαλούν τις μετατοπίσεις  $\delta P_i$ ,  $i=1,2,..m$  και  $\delta Q_i$ ,  $i=1,2,..n$  (κατά την κατεύθυνση των δυνάμεων).
- Κατάσταση 2: Οι δυνάμεις  $Q_i$ ,  $i=1,2,..n$  ασκούνται σε ένα σώμα και προκαλούν τις μετατοπίσεις  $\delta' P_i$ ,  $i=1,2,..m$  και  $\delta' Q_i$ ,  $i=1,2,..n$  (κατά την κατεύθυνση των δυνάμεων).
- Αρχή της Αμοιβαιότητας του Έργου: Το Έργο που θα παραγόταν από τις δυνάμεις  $P_i$  αν μετατοπιζόντουσαν κατά τις μετατοπίσεις  $\delta' P_i$  ισούται με το έργο των δυνάμεων  $Q_i$ , αν αυτές μετατοπιζόντουσαν κατά τις μετατοπίσεις  $\delta Q_i$ .



$$\sum_{i=1}^m P_i \delta' P_i = \sum_{j=1}^n Q_j \delta Q_j$$