ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ

Διατύπωση βασικών εξισώσεων

Συνάρτηση μετατόπισης

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_k \mathbf{N}_k \mathbf{a}_k^e = [\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \ldots] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{Bmatrix}^e = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \qquad (1)$$

u : η ακριβής, πραγματική, μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου $\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$

$\hat{\boldsymbol{u}}$: η προσεγγιστική μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου

$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$: οι κομβικές μετατοπίσεις

N=[N_i, N_j , …] : το διάνυσμα των συναρτήσεων παρεμβολής για το οποίο ισχύει:

$$\mathbf{N}_i(x_i, y_i) = \mathbf{I} \qquad \mathbf{N}_i(x_j, y_j) = \mathbf{N}_i(x_m, y_m) = \mathbf{0},$$

Παραμορφώσεις - Μετατοπίσεις

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S}\mathbf{u}$$

u=Na

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2)$$

όπου: **B=SN** (3)

(επίπεδη εντατική κατάσταση)

Τάσεις - Παραμορφώσεις

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y$$

$$\gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

(επίπεδη εντατική κατάσταση)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \qquad (4)$$

όπου:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα κομβικών δυνάμεων: $\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix}$

Όπου: $\mathbf{q}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}^e$

U_i= η δύναμη στον κόμβο **i** κάτα τον άξονα της μετατόπισης u
V_i= η δύναμη στον κόμβο **i** κάτα τον άξονα της μετατόπισης v

Εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων

Δυνατές μετατοπίσεις: $\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\,\delta \mathbf{a}^e$ Επίσης ισχύει: $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\delta \mathbf{a}^e$

Εργο κομβικών δυνάμεων: $\delta \mathbf{a}^{e\mathrm{T}} \mathbf{q}^e$

Έργο εσωτερικών δυνάμεων (τάσεων) και δυνάμεων που ασκούνται σε όλο τον όγκο του στερεού (π.χ. Βαρύτητα) **{b}**: $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}$ ή $\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}} (\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{b})$

Εξισώνοντας το έργο των εξωτερικών δυνάμεων με το έργο των εσωτερικών δυνάμεων και ολοκληρώνοντας σε όλο τον όγκο του σώματος, προκύπτει:

$$\delta \mathbf{a}^{e\mathrm{T}} \mathbf{q}^e = \delta \mathbf{a}^{e\mathrm{T}} \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}(\mathrm{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}\, \mathrm{d}(\mathrm{vol}) \right)$$

Εφόσον η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε δυνατή παραμόρφωση **δa^e**, συμπεραίνεται ότι θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\mathbf{q}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}\, \mathrm{d}(\mathrm{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{b}\, \mathrm{d}(\mathrm{vol})} \qquad (5)$$

Η ανωτέρω σχέση ισχύει για <u>οποιασδήποτε</u> μορφής σχέση τάσεων – παραμορφώσεων.

Εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων

Στην περίπτωση της γραμμικής ελαστικότητας η προηγούμενη σχέση (5) γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e \qquad (6)$$

Όπου:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d(vol)}$$

και

$$\mathbf{f}^e = -\underbrace{\int_{V^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d(vol)}}_{\text{Πεδιακές δυνάμεις ασκούμενες στον όγκο του σώματος}} - \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathrm{d(vol)}}_{\text{Αρχικές παραμορφώσεις}} + \underbrace{\int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d(vol)}}_{\text{Αρχικές τάσεις}}$$

Εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων

Στην περίπτωση που αμεληθούν οι πεδιακές δυνάμεις και οι αρχικές τάσεις και παραμορφώσεις, ο όρος $\mathbf{f^e}$ μηδενίζεται και η προηγούμενη εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{q^e} = \mathbf{K}^e\,\mathbf{a^e} \qquad (7)$$

Όπου:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d(vol)}$$

Υπενθυμίζεται ότι για τα μητρώα **B** και **D** ισχύει:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\,\mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

Από την επίλυση της ανωτέρω εξίσωσης (7) μπορούν να υπολογισθούν οι άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις **a** και στη συνέχεια οι τάσεις και οι παραμορφώσεις.