

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ  
ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ  
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Α. Θεοδουλίδης

# Η συνάρτηση μετατόπισης

- Ως συνάρτηση μετατόπισης ορίζουμε την συνάρτηση που εκφράζει την μετατόπιση των σημείων ενός στοιχείου.
- Η επιλογή της συνάρτησης μετατόπισης είναι καθοριστική για την ακρίβεια και την ορθότητα των υπολογισμών.
- Η συνάρτηση μετατόπισης μας δίνει την μετατόπιση σε κάθε σημείο ενός στοιχείου συναρτήσει των μετατοπίσεων των κόμβων.
- Η χρήση πολυωνυμικών συναρτήσεων σαν συνάρτηση μετατόπισης είναι μια βολική και κατάλληλη επιλογή.

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots + \alpha_n x^n$$

# Η συνάρτηση μετατόπισης

- Η συνάρτηση μετατόπισης θα πρέπει να ικανοποιεί τα κάτωθι κριτήρια:
  - Θα πρέπει να είναι μια συνεχής συνάρτηση.
  - Θα πρέπει να επιτρέπει την μετατόπιση στερεού σώματος για κάθε στοιχείο.
  - Θα πρέπει να μπορεί να προσομειώσει την κατάσταση σταθερής παραμόρφωσης σε όλο το στοιχείο, όταν το μέγεθος του στοιχείου είναι πολύ μικρό.
  - Η μετατόπιση στο σύνορο δύο στοιχείων θα πρέπει να είναι συνεχής και να μην επιτρέπει «κενά» ή επικαλύψεις μεταξύ των στοιχείων. Σε πολλά προβλήματα απαιτείται και συνέχεια της πρώτης παραγώγου στα σύνορα μεταξύ των στοιχείων.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις πληρούν τις ανωτέρω συνθήκες και αποτελούν μια βολική λύση.

# Συναρτήσεις σχήματος (ή παρεμβολής)

- Συνάρτηση μετατόπισης:  $u = \sum_i N_i u_i$  όπου  $N_i$  = συναρτήσεις σχήματος,  $u_i$  = κομβικές τιμές

Οι συναρτήσεις σχήματος είναι συνήθως πολυωνυμικές συναρτήσεις  $n$  βαθμού (μιας, δύο ή τριών μεταβλητών ανάλογα με το πρόβλημα). Στην περίπτωση γραμμικής παρεμβολής τα πολυώνυμα είναι πρώτου βαθμού, ενώ στην περίπτωση τετραγωνικής παρεμβολής δευτέρου.

Γενικά χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα είδη παρεμβολής:

- **Παρεμβολή Lagrange:** Οι συναρτήσεις παρεμβολής Lagrange χρησιμοποιούνται συχνότερα και εξασφαλίζουν το γεγονός ότι η συνάρτηση παρεμβολής λαμβάνει ίδιες τιμές με την αρχική συνάρτηση σε συγκεκριμένα σημεία.
- **Παρεμβολή Hermite:** Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις παρεμβολής, αλλά και οι παράγωγοί τους, λαμβάνουν ίδιες τιμές με την αρχική συνάρτηση σε συγκεκριμένα σημεία.

Η μορφή των συναρτήσεων παρεμβολής εξασφαλίζει την ομαλή μορφή της μετατόπισης εντός του κάθε στοιχείου, δεν είναι όμως αυτονόητη η ομαλότητα της μετατόπισης σε συνολικό επίπεδο, εφόσον δεν εξυπακούεται η συνέχεια της (ή των) παραγώγων στα σύνορα μεταξύ των στοιχείων.

Για παράδειγμα στην προσομείωση κάμψης δοκών ή ελασμάτων απαιτείται συνέχεια και της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης μετατόπισης μεταξύ των στοιχείων.

# Ισοπαραμετρικά στοιχεία

- Αν οι συναρτήσεις σχήματος  $\{N_i\}$  που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της μεταβολής της γεωμετρίας του στοιχείου είναι ίδιες με τις συναρτήσεις σχήματος  $\{N'_i\}$  που χρησιμοποιούνται για την μεταβολή της μετατόπισης, τα αντίστοιχα στοιχεία καλούνται **ισοπαραμετρικά**.

$$\mathbf{x} = N_i \mathbf{x}_i$$

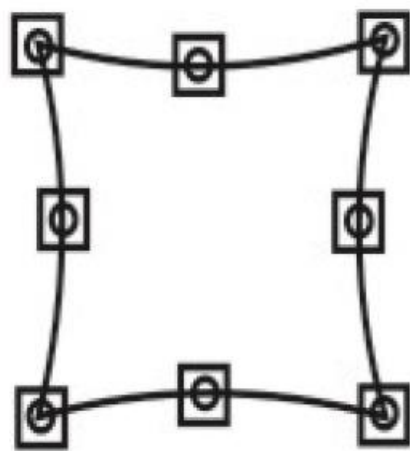
$$\mathbf{u} = N'_i \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{y} = N_i \mathbf{y}_i$$

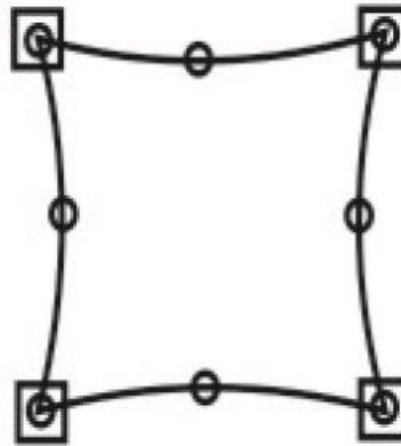
$$\mathbf{v} = N'_i \mathbf{v}_i$$

- Αν η γεωμετρία του στοιχείου ορίζεται από συναρτήσεις ανώτερης τάξης σε σχέση με αυτές που χρησιμοποιούνται για τις μετατοπίσεις, τα αντίστοιχα στοιχεία καλούνται **υπέρπαραμετρικά**.
- Αν η γεωμετρία του στοιχείου ορίζεται από συναρτήσεις χαμηλότερης τάξης σε σχέση με αυτές που χρησιμοποιούνται για τις μετατοπίσεις, τα αντίστοιχα στοιχεία καλούνται **υπόπαραμετρικά**.

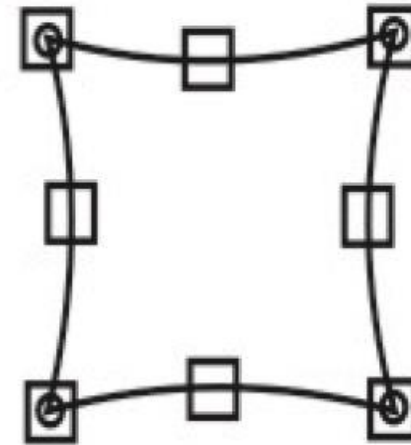
# Ισο-Υπέρ-Υπό-παραμετρικά στοιχεία



(a) Isoparametric



(b) Superparametric



(c) Subparametric

○-points defining geometry

□- points defining displacement

# Επιλογή της τάξης των πολυωνύμων παραμβολής

- Η επιλογή της τάξης των χρησιμοποιούμενων συναρτήσεων σχήματος εξαρτάται από τον τύπο των στοιχείων.
- Για παράδειγμα σε ένα μονοδιάστατο (γραμμικό) στοιχείο, του οποίου ο κάθε ένας από τους δύο κόμβους έχει έναν βαθμό ελευθερίας χρησιμοποιείται η συνάρτηση μετατόπισης:

$$u = a_0 + a_1x$$

- Αν όμως για το ίδιο στοιχείο θεωρήσουμε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κόμβους έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, τότε πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση μετατόπισης:

$$u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

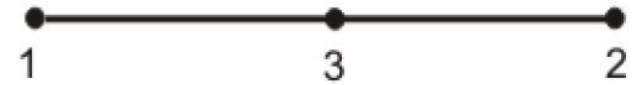
(Οι άγνωστοι συντελεστές θα πρέπει να είναι ισάριθμοι με τους βαθμούς ελευθερίας του στοιχείου)

# Διάφοροι τύποι στοιχείων

## A. Μονοδιάστατα στοιχεία



(a) 2 node element

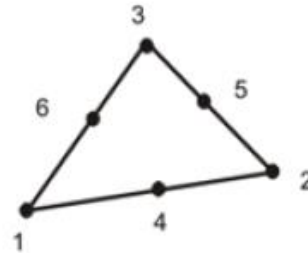


(b) 3 node element

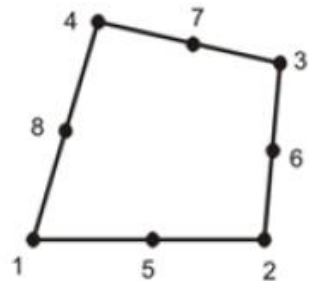
## B. Διδιάστατα στοιχεία



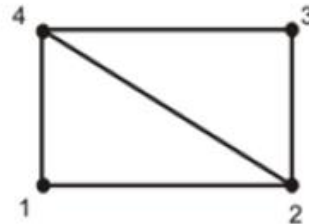
(a) 4 node rectangular element



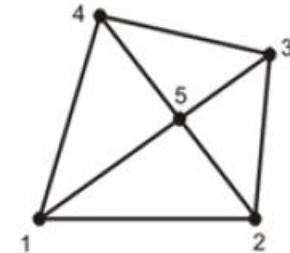
(b) 6 node triangular element



(c) 8 node Quadrilateral element



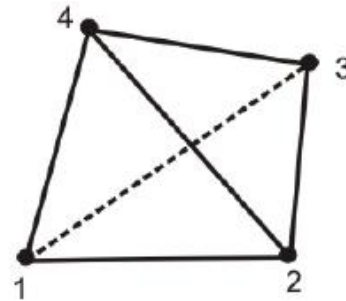
(d) Quadrilateral formed by two triangles



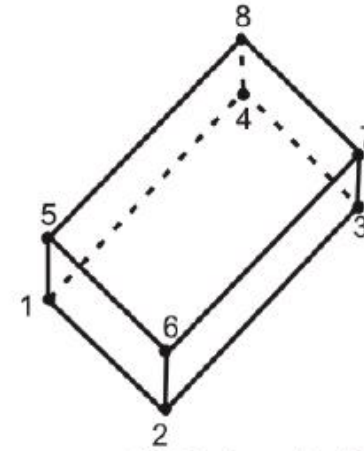
(e) Quadrilateral formed by four triangular elements

# Διάφοροι τύποι στοιχείων

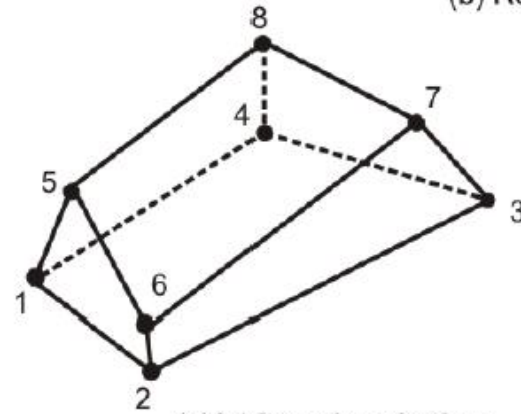
Γ. Τριδιάστατα στοιχεία



(a) Tetrahedron



(b) Rectangular Brick



(c) Arbitrary hexahedron