

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ
ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ

ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Α. Θεοδουλίδης

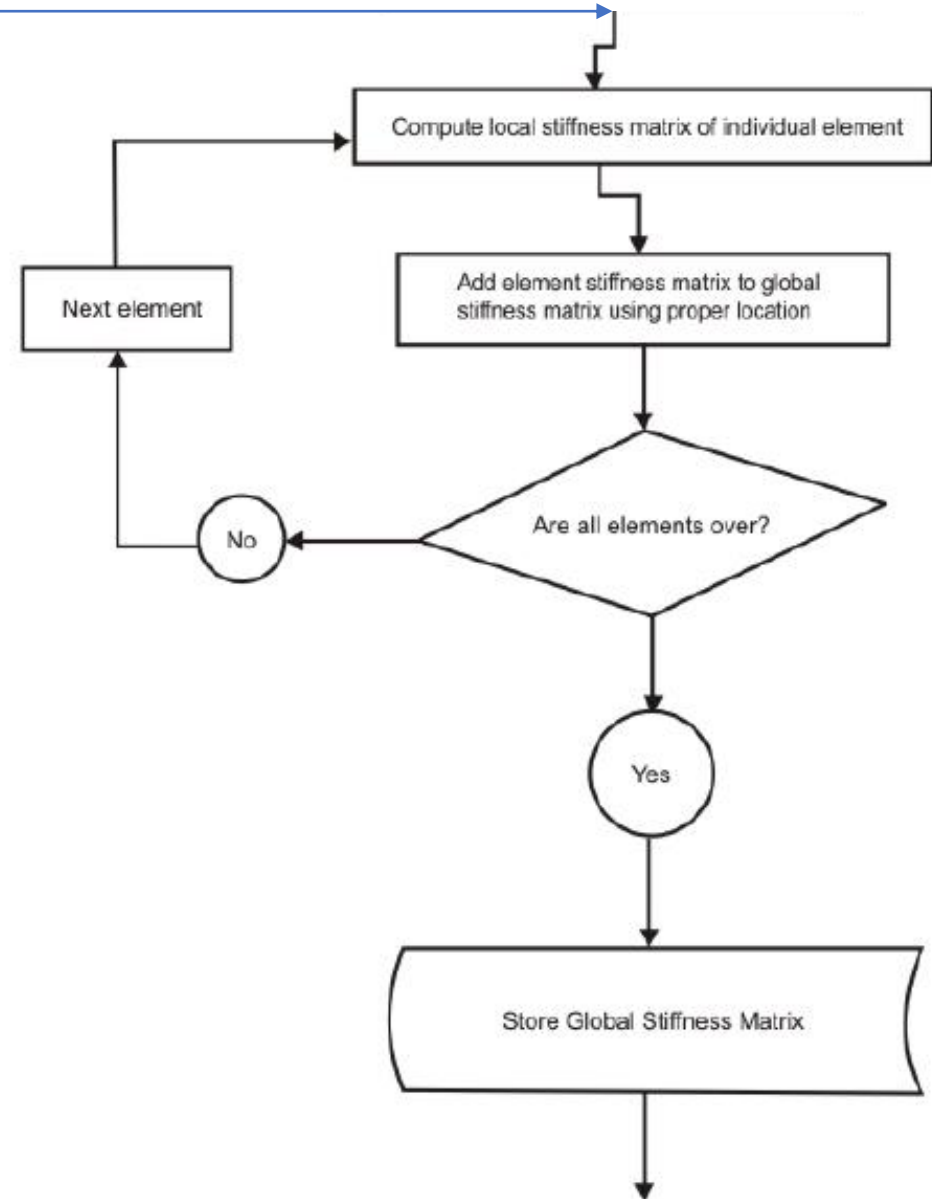
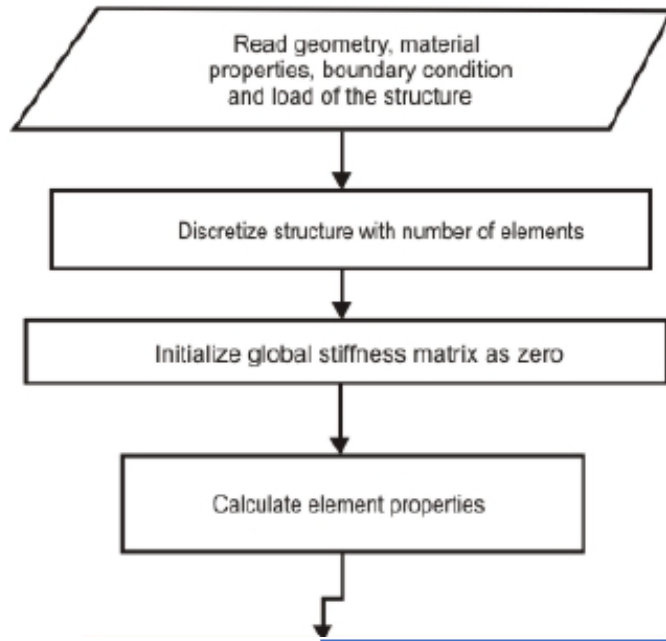
Μητρώο ακαμψίας

- Το μητρώο ακαμψίας μιας κατασκευής μπορεί να κατασκευασθεί με τη χρήση διαφόρων μεθόδων όπως:
 - Θεωρήματα Μεταβολών (Variational Principles)
 - Μέθοδος Gallerkin
 - Μέθοδος Ritz
- Αρχικά κατασκευάζεται το μητρώο του κάθε στοιχείου ως προς τοπικό σύστημα αξόνων και στη συνέχεια από τα επιμέρους μητρώα συντίθεται το συνολικό μητρώο ακαμψίας.
- Το μητρώο ακαμψίας στοιχείου ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
 - Είναι τετραγωνικό και συμμετρικό
 - Όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι θετικά
 - Είναι θετικά ορισμένο
 - (Ένας συμμετρικός πίνακας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ λέγεται θετικά ορισμένος αν ο αριθμός $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z}$ είναι θετικός για κάθε διάνυσμα \mathbf{z} με \mathbf{n} στοιχεία).

Συνολικό Μητρώο ακαμψίας

- Συντίθεται από τα επιμέρους μητρώα ακαμψίας του κάθε στοιχείου.
- Η ακαμψία ενός κόμβου προκύπτει από την υπέρθεση των επιμέρους ακαμψιών στο συγκεκριμένο κόμβο, όλων των στοιχείων που συμβάλουν σε αυτόν.
- Ακολουθείται η ακόλουθη διαδικασία:
 - Αριθμούνται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας της κατασκευής από 1 έως n .
 - Δημιουργείται ως αρχική μορφή του ΜΑ τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με μηδενικά στοιχεία
 - Υπολογίζονται τα μητρώα ακαμψίας $[k]$ όλων των στοιχείων.
 - Προστίθενται ανα κόμβο τα μητρώα $[k]$ των στοιχείων.

Συνολικό Μητρώο ακαμψίας



Οριακές συνθήκες

- Το Μητρώο ακαμψίας που προκύπτει με την ανωτέρω διαδικασία είναι ιδιόμορφο και δεν αντιστρέφεται. Προκειμένου να αντιστραφεί, θα πρέπει να εισαχθούν κατάλληλες οριακές συνθήκες στήριξης της κατασκευής δηλ. να προσδιορισθούν κάποιοι από τους βαθμούς ελευθερίας, έστω $\{d_\beta\}$.
- Στη συνέχεια πραγματοποιείται εσωτερική αναδιάταξη του πίνακα με συγκέντρωση των γνωστών και αγνώστων βαθμών ελευθερίας:

$$\{F\} = [K]\{d\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \{F_\alpha\} \\ \{F_\beta\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{\alpha\alpha}] & [K_{\alpha\beta}] \\ [K_{\beta\alpha}] & [K_{\beta\beta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_\alpha\} \\ \{d_\beta\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]\{d_\alpha\} + [K_{\alpha\beta}]\{d_\beta\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \{d_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \left\{ \{F_\alpha\} - [K_{\alpha\beta}]\{d_\beta\} \right\}$$

- Στην περίπτωση που οι οριακές συνθήκες μηδενίζουν κάποιους βαθμούς ελευθερίας, η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$\{d_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F_\alpha\}$$

Οριακές συνθήκες

- Στην περίπτωση που κάποιο από τους βαθμούς ελευθερίας μηδενίζονται ενώ κάποιοι άλλοι προσλαμβάνουν δεδομένες τιμές, το μητρώο ακαμψίας μπορεί να αποσυντεθεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \{F_\alpha\} \\ \{F_\beta\} \\ \{F_\gamma\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{\alpha\alpha}] & [K_{\alpha\beta}] & [K_{\alpha\gamma}] \\ [K_{\beta\alpha}] & [K_{\beta\beta}] & [K_{\beta\gamma}] \\ [K_{\gamma\alpha}] & [K_{\gamma\beta}] & [K_{\gamma\gamma}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_\alpha\} \\ \{d_\beta\} \\ \{d_\gamma\} \end{Bmatrix}$$

δείκτης α : άγνωστοι βαθμοί ελευθερίας
δείκτης β : γνωστοί, μη μηδενικοί βαθμοί ελευθερίας
δείκτης γ : μηδενικοί βαθμοί ελευθερίας

$$\rightarrow \{F_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]\{d_\alpha\} + [K_{\alpha\beta}]\{d_\beta\} + [K_{\alpha\gamma}]\{d_\gamma\} \rightarrow \{d_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \left\{ \{F_\alpha\} - [K_{\alpha\beta}]\{d_\beta\} \right\}$$

Στα διάφορα λογισμικά χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές για την ενσωμάτωση των οριακών συνθηκών στο μητρώο ακαμψίας.

Οριακές συνθήκες

- Οι επιβαλλόμενες οριακές συνθήκες ανάλογα με τον τύπο τους διακρίνονται σε ουσιώδεις και φυσικές.
- Ως **ουσιώδεις οριακές συνθήκες** χαρακτηρίζονται αυτές που επηρεάζουν απ' ευθείας τους βαθμούς ελευθερίας, και επηρεάζουν το μητρώο ακαμψίας. Για παράδειγμα η επιβολή συγκεκριμένων μετατοπίσεων/περιστροφών σε δεδομένους κόμβους αποτελεί ουσιώδη συνθήκη.
- Ως **φυσικές οριακές συνθήκες** χαρακτηρίζονται αυτές που δεν επιδρούν άμεσα στους βαθμούς ελευθερίας και επιβάλλονται στο δεξιό μέλος (forcing) του συνολικού συστήματος εξισώσεων. Στη μαθηματική τους αναπαράσταση δεν υπεισέρχονται οι βαθμοί ελευθερίας