

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

Εισαγωγή στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Α. Θεοδουλίδης

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων

- Η Μέθοδος των ΠΣ είναι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων Μηχανικής και άλλων τομέων της Μαθηματικής Φυσικής
- Είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε προβλήματα με:
 - Σύνθετη γεωμετρία
 - Πολύπλοκη φόρτιση(-σεις)
 - Σύνθετες μηχανικές ιδιότητες

Επίλυση προβλημάτων Μηχανικής

- Αναλυτική επίλυση προβλημάτων Μηχανικής
 - Απαιτείται δραματική απλοποίηση και ιδεατοποίηση της πραγματικής κατασκευής.
 - Θεωρούμε ότι η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο Κέντρο Βάρους
 - Οι δοκοί απλοποιούνται ως ευθύγραμμα τμήματα
 - Οι παραπάνω παραδοχές μας αναγκάζουν συχνά να χρησιμοποιούμε υπερβολικά μεγάλους συντελεστές ασφαλείας.

Επίλυση προβλημάτων Μηχανικής

- Επίλυση προβλημάτων Μηχανικής με χρήση ΠΣ
 - Επιτρέπεται η προσέγγιση προβλημάτων με σύνθετη γεωμετρία.
 - Η ακρίβεια των υπολογισμών (υπό προϋποθέσεις) είναι μεγάλη.
 - Παρέχεται η δυνατότητα επαναληπτικών υπολογισμών και βελτιστοποίησης της κατασκευής
 - Επιτρέπεται η ανίχνευση επικινδύνων περιοχών.

Ιστορία της Μεθόδου των ΠΣ

- Η πρώτη, παρεμφερής με τη μέθοδο των ΠΣ, επιστημονική προσέγγιση ανάγεται στον Αρχιμήδη και την προσπάθειά του για τον υπολογισμό του αρρήτου αριθμού «π».
- Η πρώτη διατύπωση της μεθόδου αποδίδεται στους Alexander Hrennikoff (1941) and Richard Courant(1942). Στην προσέγγιση του Hrennikoff ένα συνεχές ελαστικό μέσο αναπαρίσταται από ένα πεπερασμένο αριθμό δοκών και ράβδων.
- Το 1950 δόθηκε η δυνατότητα επίλυσης μεγαλύτερων συστημάτων εξισώσεων με χρήση πρωτόγονων υπολογιστικών μηχανών.
- Το 1960 ο Ray W. Clough χρησιμοποίησε σε δημοσίευση του τον όρο «Πεπερασμένα στοιχεία».

Ιστορία της Μεθόδου των ΠΣ

- Το 1965 πραγματοποιήθηκε το πρώτο επιστημονικό συνέδριο με αντικείμενο τα ΠΣ.
- Το 1967 εκδόθηκε το πρώτο βιβλίο πάνω στη μέθοδο από τον Zienkiewicz.
- Τη δεκαετία του 1970 η μέθοδος αρχισε δειλά να χρησιμοποιείται σε κάποια προβλήματα και τα πρώτα σχετικά λογισμικά κάνουν την εμφάνισή τους (ABAQUS, NASTRAN, ANSYS).
- Κατά τη δεκαετία του 80 η μέθοδος διεισδύει και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους (Μηχανική ρευστών, ηλεκρομαγνητισμός, μετάδοση θερμότητας κλπ).

Ιστορία της Μεθόδου των ΠΣ

- Κατά τη δεκαετία το '90, με τη ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων η χρήση της μεθόδου διαδόθηκε ευρέως.
- Σήμερα οι κώδικες ΠΣ δίνουν μεγάλη έμφαση στην φιλικότητα στο χρήστη και στη βελτίωση του σχεδιαστικού περιβάλλοντος.

Εφαρμογή της μεθόδου των ΠΣ

- Σήμερα η μέθοδος χρησιμοποιείται στα κάτωθι επιστημονικά πεδία:
 - Μηχανολογία
 - Στατική ανάλυση κατασκευών
 - Ρευστομηχανική
 - Μετάδοση θερμότητας
 - Ηλεκτρομαγνητισμός
 - Εδαφομηχανική
 - Ακουστική
 - Βιο-μηχανική κλπ

Αριθμητικές μέθοδοι στη Μηχανική

- Για την επίλυση προβλημάτων της Μηχανικής χρησιμοποιούνται τρεις κατηγορίες εξισώσεων:
 - Εξισώσεις ισορροπίας
 - Καταστατικές εξισώσεις (συμπεριφορά των υλικών)
 - Συμβιβαστό των παραμορφώσεων.
- Η προσέγγιση των προβλημάτων της Μηχανικής δυνητικά μπορεί να γίνει με χρήση της Αναλυτικής ή της Αριθμητικής προσέγγισης.
- Στα περισσότερα προβλήματα η αναλυτική προσέγγιση (επίτευξη λύσης σε κλειστή μορφή) επιτυγχάνεται σε προβλήματα με απλή γεωμετρία, απλή συμπεριφορά του υλικού και απλή φόρτιση της κατασκευής.
- Στον πραγματικό κόσμο η «απλούστευση» που απαιτείται για την εφαρμογή της αναλυτικής προσέγγισης σπανίζει και γι' αυτό αναγκαστικά καταφεύγουμε στη χρήση των Αριθμητικών Μεθόδων.

Αριθμητικές μέθοδοι στη Μηχανική

- Οι πιο συνηθισμένες αριθμητικές μέθοδοι είναι:
 - Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών
 - Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων
 - Η μέθοδος των συνοριακών εξισώσεων
 - Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των Πεπερασμένων διαφορών

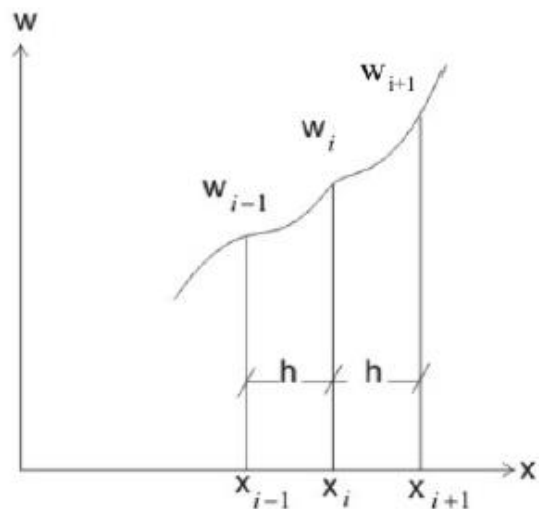
- Στην προσέγγιση αυτή η διαφορική εξίσωση του προβλήματος και οι οριακές συνθήκες αντικαθίστανται με κατάλληλες αλγεβρικές εξισώσεις. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το βέλος κάμψης $w=f(x)$ σε καμπτόμενη δοκό:

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (\text{θεωρούμε σταθερό φορτίο } q)$$

Γράφεται ως εξής:

Η μέθοδος των Πεπερασμένων διαφορών

$$\Delta w = f(x + \Delta x) - f(x)$$



$$\frac{dw}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{h} (w_{i+1} - w_i)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{h} (w_{i+1} - w_i) \right] = \frac{1}{h^2} (w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i)$$

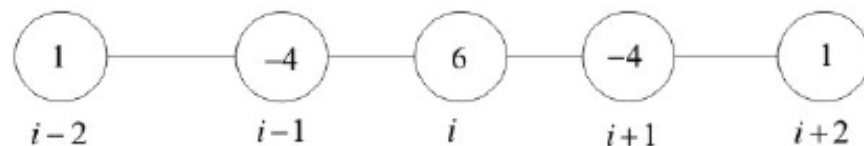
$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{1}{h^3} (w_{i+3} - 3w_{i+2} + 3w_{i+1} - w_i)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{h^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2})$$

Επομένως, η αρχική εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$(w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) = \frac{q}{EI} h^4$$

Η μέθοδος των Πεπερασμένων διαφορών



Απο την εφαρμογή της τελευταίας εξίσωσης σε διακριτά σημεία/κόμβους, και με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών, προκύπτουν οι άγνωστες τιμές του βέλους κάμψης w_i

Διαπιστώνουμε ότι στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται η έννοια του κόμβου (node). Το πεδίο επίλυσης προσεγγίζεται μέσω ενός πλέγματος κόμβων (pointwise approximation).

Βασικές Αρχές της Μεθόδου των ΠΣ

- Η μέθοδος των ΠΣ είναι **αριθμητική** μέθοδος που χρησιμοποιείται για την **προσεγγιστική** επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών.
- Τα **προβλήματα συνοριακών τιμών** καλούνται επίσης και πεδιακά προβλήματα, καθόσον αναζητείται μια άγνωστη συνάρτηση σε όλη την έκταση του πεδίου. **Πεδίο** είναι το χωρίο στο οποίο ενδιαφερόμαστε να λύσουμε το πρόβλημα (στερεό σώμα, ρευστό κλπ).
- Οι **πεδιακές μεταβλητές** είναι εξαρτημένες μεταβλητές που υπεισέρχονται στις προς επίλυση εξισώσεις.
- Οι **οριακές συνθήκες** είναι μαθηματικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι πεδιακές μεταβλητές στα σύνορα του πεδίου.

Βασικές Αρχές της Μεθόδου των ΠΣ

- Στη μέθοδο των ΠΣ το πεδίο διακριτοποιείται σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων και η πεδιακή συνάρτηση εκφράζεται συναρτήσει των κομβικών τιμών των στοιχείων.
- Τα πεπερασμένα στοιχεία δεν πρέπει να συγχέονται με διαφορικά στοιχεία ($dx \times dy \times dz$).
- Οι κόμβοι είναι ειδικά σημεία του στοιχείου στα οποία υπολογίζεται η πεδιακή μεταβλητή.

Συναρτήσεις σχήματος (Shape functions)

- Στη μέθοδο των ΠΣ οι τιμές των πεδιακών μεταβλητών υπολογίζονται στους κόμβους. Αυτές οι τιμές χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό των πεδιακών μεταβλητών στα μη κομβικά σημεία του πεδίου (στο εσωτερικό του στοιχείου).
- Για παράδειγμα στην περίπτωση του τριγωνικού στοιχείου (τρεις κόμβοι) ισχύει η ακόλουθη αναπαράσταση:

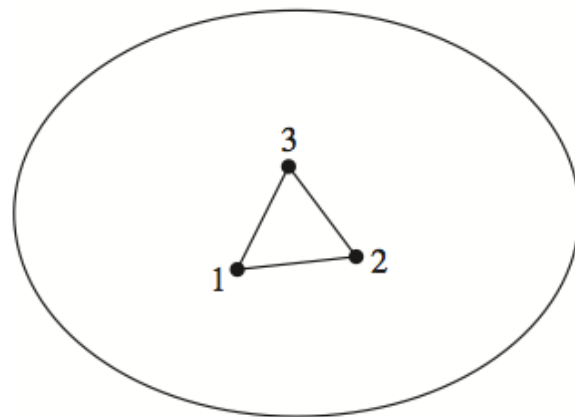
$$\varphi(x, y) = N_1(x, y)\varphi_1 + N_2(x, y)\varphi_2 + N_3(x, y)\varphi_3$$

φ_1 , φ_2 και φ_3 είναι οι τιμές της πεδιακής μεταβλητής στους κόμβους και N_1 , N_2 και N_3 είναι κατάλληλες συναρτήσεις παρεμβολής γνωστές ως συναρτήσεις σχήματος (shape functions).

Συναρτήσεις σχήματος (Shape functions)

- Στη μέθοδο των ΠΣ οι κομβικές τιμές είναι οι άγνωστοι του προβλήματος. Οι συναρτήσεις σχήματος συννήθως είναι πολυώνυμα των αναξάρτητων πεδιακών μεταβλητών, τα οποία έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να χρησιμοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες στους κόμβους.
- Η μορφή των συναρτήσεων σχήματος είναι προεπιλεγμένη.
- Οι συναρτήσεις σχήματος περιγράφουν την κατανομή της πεδιακής μεταβλητής σε κάθε εσωτερικό σημείο του στοιχείου.

Βαθμοί ελευθερίας



$$\varphi(x, y) = N_1(x, y)\varphi_1 + N_2(x, y)\varphi_2 + N_3(x, y)\varphi_3$$

Οι βαθμοί ελευθερίας ενός στοιχείου είναι το γινόμενο του αριθμού των κόμβων του επί των αριθμό των τιμών που μπορεί να λάβει η πεδιακή μεταβλητή (και ενδεχομένως οι παράγωγοί της) σε κάθε κόμβο.

Εφαρμογή της μεθόδου των ΠΣ

- Η εφαρμογή της μεθόδου των ΠΣ περιλαμβάνει τρία διακριτά στάδια:
- Τη διακριτοποίηση του πεδίου, δηλ την προσέγγιση του πεδίου με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.
- Την κατάστρωση και επίλυση του συστήματος των εξισώσεων με αγνώστους τις κομβικές τιμές του άγνωστου πεδιακού μεγέθους
- Την επεξεργασία των αποτελεσμάτων και των υπολογισμό διαφόρων μεγεθών, παράγωγων της βασικής πεδιακής μεταβλητής.