

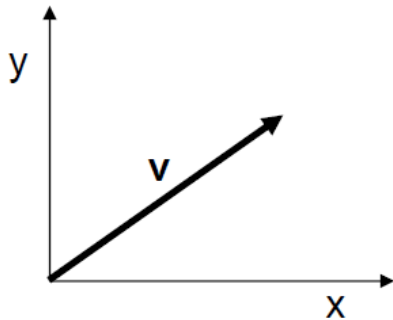
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΤΗ ΝΑΥΠΗΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Α. Θεοδουλίδης

Διάνυσμα

- Το διάνυσμα είναι ένας ειδικός πίνακας διαστάσεων μιας στήλης ή μιας γραμμής.



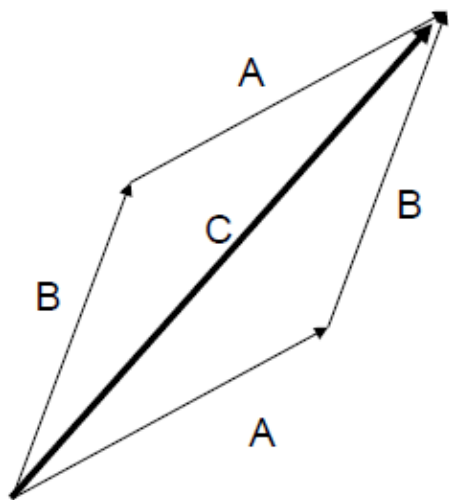
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- Με τη χρήση των διανυσμάτων η γεωμετρία αλγεβρικοποιείται
- Η έννοια του διανύσματος γενικεύεται και στις n-διαστάσεις.

Διάνυσμα γραμμής: $(1 \ 6 \ 3 \ 4)$

Διάνυσμα στήλης: $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Προσθήκη διανυσμάτων

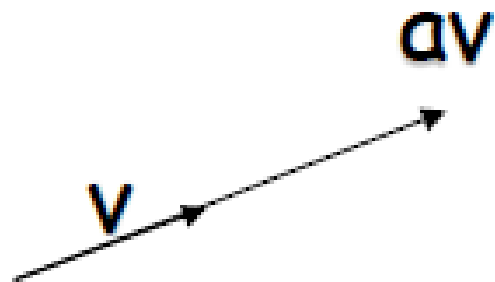


$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Βαθμωτό γινόμενο

$$a\mathbf{v} = a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$



a = πραγματικός αριθμός

Εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$x^T y \in \mathbb{R} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (\text{Αντιστοιχεί με πολλαπλασιασμό πινάκων})$$

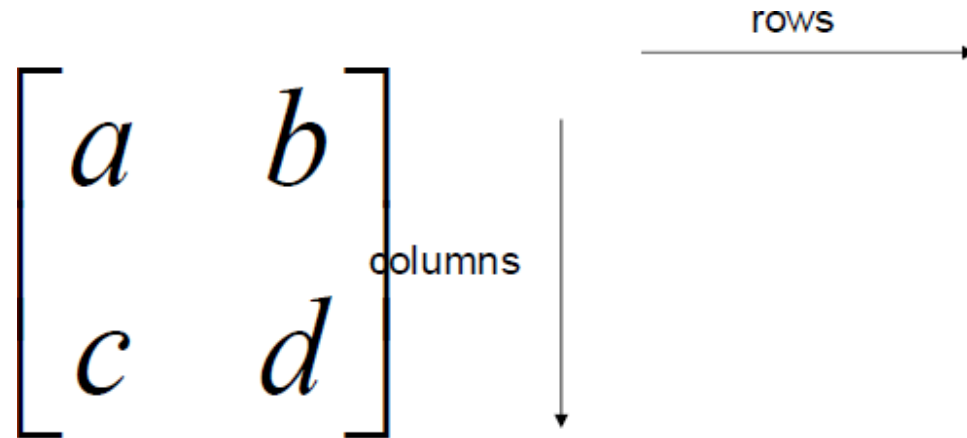
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σχετίζεται επίσης και με την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων:

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos(\theta)$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι ένας αριθμός

Πίνακας

- Πίνακας είναι ένα σύνολο στοιχείων διατεταγμένων σε σειρές και στήλες



Βασικές πράξεις μεταξύ πινάκων

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Πρόσθεση

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$$

Αφαίρεση

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

Πολαπλασιασμός

Πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22} + m_{13}n_{32}$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων - Ιδιότητες

- Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $AB \neq BA$
- Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(AB)C = A(BC)$
- Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $A(B+C) = AB+AC$

Ειδικές μορφές πινάκων

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Διαγώνιος πίνακας

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Άνω τριγωνικός
πίνακας

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 \\ 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \end{pmatrix}$$

Τρι-διαγώνιος πίνακας

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Κάτω τριγωνικός
πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Μοναδιαίος πίνακας

Ανάστροφος πίνακας

- Ανάστροφος πίνακας A^T ενός πίνακα A ονομάζεται ο πίνακας που προκύπτει με αντιμετάθεση σειρών και στηλών.

Παραδείγματα: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T = (a \quad b)$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Μοναδιαίος πίνακας

Είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $(n \times n)$ που ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα για έναν οποιοδήποτε πίνακα A επίσης $(n \times n)$:

$$A \cdot I = A$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος πίνακας

- Αντίστροφος πίνακας A^{-1} ενός τετραγωνικού πίνακα A , ονομάζεται ένας επίσης τετραγωνικός πίνακας ίδιων διαστάσεων με τον A , που ικανοποιεί τη σχέση:

$$A \bullet A^{-1} = I$$

Όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Αντίστροφο πίνακα έχουν μόνο οι τετραγωνικοί πίνακες που δεν είναι ιδιόμορφοι (non singular).

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Ενα διάνυσμα b είναι **γραμμικά εξαρτημένο** από τα διανύσματα $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ αν υπάρχουν συντελεστές k_i τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$b = \sum_{i=1}^n k_i a_i$$

Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το διάνυσμα b είναι **γραμμικώς ανεξάρτητο** των $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

Βαθμός πίνακα – Ίχνος πίνακα

- Βαθμός ενός πίνακα ονομάζεται ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του.
- Ίχνος ενός πίνακα ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του.

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ορίζουσα πίνακα

- 2 x 2 πίνακας

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- 3 x 3 πίνακας

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{11}$$

- n x n πίνακας

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(\mathbf{A}_{1n}) \\ = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j}a_{1j}\det(\mathbf{A}_{1j})$$

Ορίζουσα πίνακα

- Ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός πίνακα με βάση τον ορισμό της απαιτεί την εκτέλεση υπερβολικά μεγάλου αριθμού πράξεων. Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 25×25 απαιτούνται $25! = 1,5 \times 10^{25}$ πολλαπλασιασμοί, το οποίο για έναν σύγχρονο υπολογιστή σημαίνει 500.000 χρόνια υπολογιστικός χρόνος.
- Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται ειδικές τεχνικές (π.χ. Απαλοιφή Gauss) για την τριγωνοποίηση του πίνακα. Στην περίπτωση αυτή η ορίζουσα μπορεί να υπολογισθεί ως ακολούθως:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * \\ 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & d_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n d_i$$

Αντιστροφή πίνακα

Έστω τετραγωνικός πίνακας $A=[a_{ij}]$. Τότε ισχύει:

$$A^{-1} = \frac{C}{\det A}$$

Όπου $C=[A_{ij}]$ και $A_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$

$|A_{ij}|$ Η ελάσσονα ορίζουσα του a_{ij}

Βασικές Ιδιότητες αντιστροφής:

$$(A \cdot B \cdot C \dots Z)^{-1} = Z^{-1} \cdot \dots \cdot C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Ιδιοτιμές πίνακα

Εστω A τετραγωνικός πίνακας τάξης n . Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα διάνυσμα x και ένας αριθμός λ έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$Ax = \lambda x$$

Το διάνυσμα x ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα και ο αριθμός λ ιδιοτιμή.

Οι ιδιοτιμές λ υπολογίζονται από την σχέση:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν n ιδιοτιμές και σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί και ένα ιδιοδιάνυσμα.