



ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Δομική Σχεδίαση Πλοίου –
Ελαστικός λυγισμός πρισματικών φορέων

Α. Θεοδουλίδης

Λυγισμός πρισματικών φορέων

- Η χρήση κολονών (υποστυλωμάτων) είναι πολύ διαδεδομένη στα πλοία καθ' όσον χρησιμοποιούνται για την μείωση του ανυποστήρικτου μήκους δοκών και για τη μεταφορά/διανομή κατακόρυφων φορτίων.
- Τα υποστυλώματα δέχονται θλιπτικά φορτία και πρέπει να ελέγχονται για λυγισμό (ειδικά αυτά που έχουν μεγάλο μήκος).
- Αντικείμενο της παρούσας ενότητας είναι ο έλεγχος έναντι λυγισμού, πρισματικών φορέων που δέχονται θλιπτικά φορτία.
- Ο λυγισμός εξαρτάται κυρίως από τις γεωμετρικές ιδιότητες της διατομής του φορέα, παρά από τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένος.

Λυγισμός πρισματικών φορέων

- ▶ Λυγισμός ονομάζεται η ασταθής κατάρρευση ενός πρισματικού φορέα υπό την επίδραση θλιπτικών φορτίων που υπερβαίνουν κάποια τιμή.
- ▶ Ο λυγισμός μπορεί να ξεκινήσει λόγω μικρής εκκεντρότητας του φορτίου ή λόγω κατασκευαστικών ατελειών/ανομοιομορφιών των πρισματικών φορέων.
- ▶ Η μαθηματική προσέγγιση στο πρόβλημα ξεκίνησε τον 18ο αιώνα από τον Euler, ο οποίος πρότεινε μια σχέση για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου ελαστικού λυγισμού.
- ▶ Ως κρίσιμο φορτίο P_{cr} λυγισμού ορίζεται το ελάχιστο θλιπτικό φορτίο το οποίο μπορεί να προκαλέσει λυγισμό του φορέα.

Λυγισμός πρισματικών φορέων

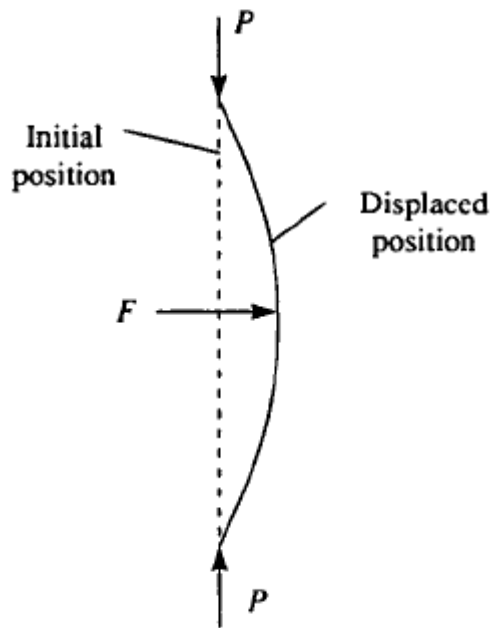
Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού κατά Euler δίδεται από τη σχέση:
Όπου:

$$P_{cr} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

- P_{cr} το κρίσιμο φορτίο λυγισμού,
- E το μέτρο ελαστικότητας,
- I η ροπή αδράνειας της εγκάρσιας διατομής περί τον άξονα κάμψης,
- L το μήκος του φορέα,
- K σταθερά εξαρτώμενη από τον τρόπο στήριξης του φορέα.

Η ανωτέρω σχέση δίνει ορθότερα αποτελέσματα στην περίπτωση που έχουμε μεγάλο μήκος. Για μικρότερα μήκη η σχέση του Euler υπερεκτιμά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Λυγισμός πρισματικών φορέων



Έστω ότι ο φορέας του διπλανού σχήματος είναι τέλειος (perfect column) και ότι το ασκούμενο θλιπτικό φορτίο P είναι απόλυτα κεντραρισμένο.

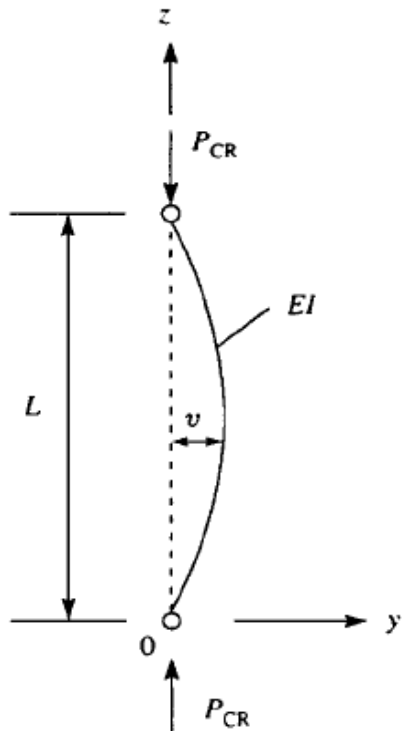
Αν το P συνεχώς αυξάνει το μήκος του φορέα θα μικραίνει χωρίς ο φορέας να κάμπτεται. Όταν η θλιπτικές τάσεις υπερβούν την τάση διαρροής θα επέλθει κατάρρευση του φορέα.

Αν ταυτόχρονα με το φορτίο P ασκηθεί και ένα οριζόντιο φορτίο F τότε θα συμβούν τα ακόλουθα:

$P < P_{cr}$	$P = P_{cr}$	$P > P_{cr}$
Μετά την απομάκρυνση του φορτίου F ο φορέας θα επανέλθει στην αρχική του κατάσταση.	Μετά την απομάκρυνση του φορτίου F ο φορέας θα παραμείνει στη θέση που πήρε λόγω του F .	Ο Φορέας θα καταρρεύσει λόγω λυγισμού.

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Αμφιέρειστη δοκός



$$M = P_{CR}u$$
$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{P_{CR}}{EI}u \quad \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI}u = 0$$

Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$u = C_1 \cos \mu z + C_2 \sin \mu z$$

Όπου C_1 και C_2 αυθαίρετες σταθερές και $\mu^2 = P_{cr}/EI$

Από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στα άκρα προκύπτει:

$$C_1 = 0 \quad 0 = C_2 \sin \mu L$$

Για να πάρω τη μη τετριμμένη λύση θα πρέπει να ισχύει:

$$\sin \mu L = 0 \quad \text{ή} \quad \mu L = n\pi, \quad \text{όπου } n=1,2,3,\dots$$

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Αμφιέρειστη δοκός

Επομένως: $\frac{P_{CR}}{EI} L^2 = n^2 \pi^2$ ή $P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$

Η μικρότερη τιμή για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού προκύπτει αν θεωρήσω $n=1$.

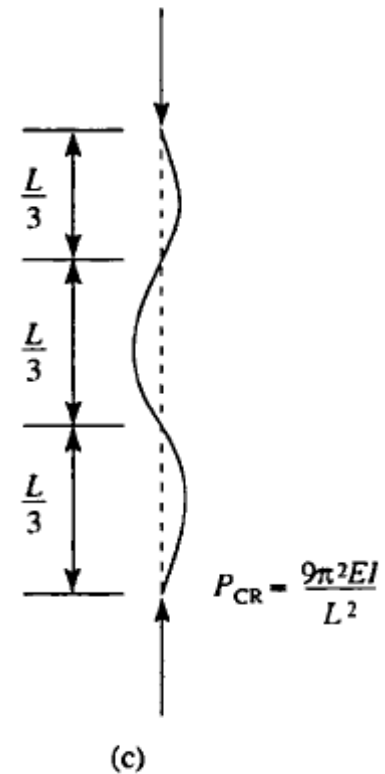
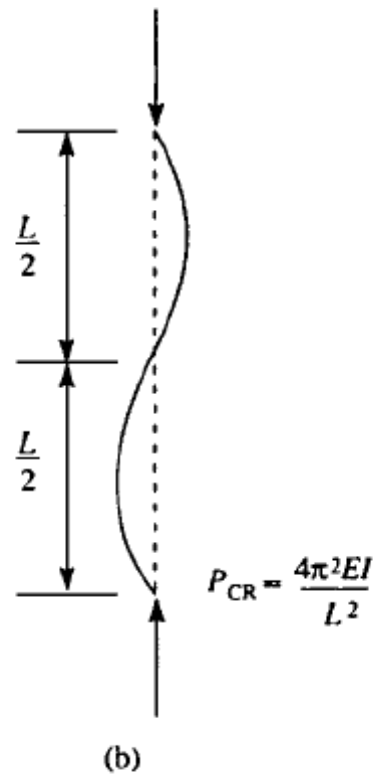
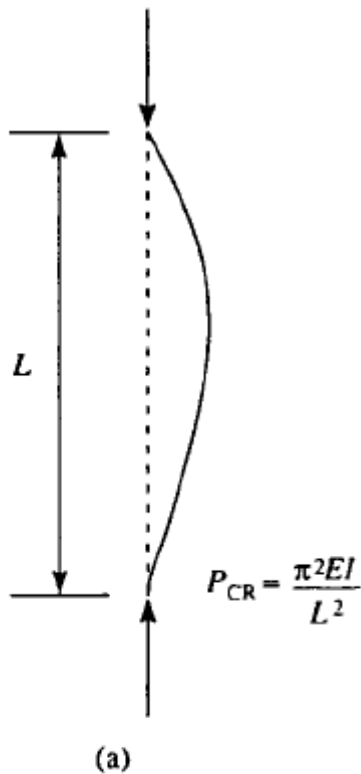
Επομένως: $P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$

και το αντίστοιχο βέλος κάμψης παίρνει τη μορφή: $u = C_2 \sin \mu z$

Για $n=2,3,\dots$ Προκύπτουν διαφορετικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, οι οποίες αντιστοιχούν σε άλλες μορφές λυγισμού (βλ επόμενο σχήμα).

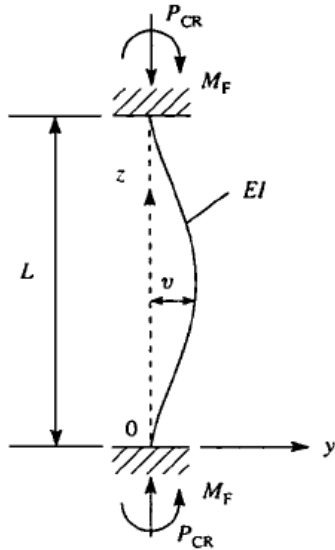
Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Αμφιέρειστη δοκός



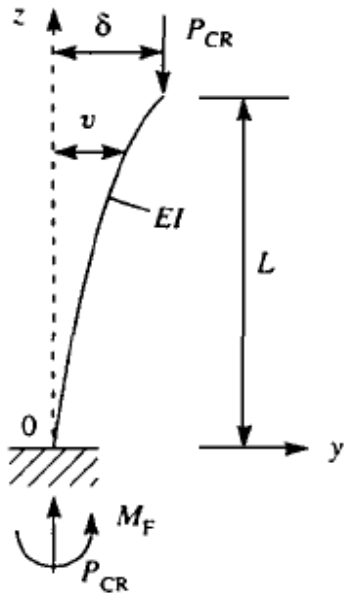
Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Διάφορες περιπτώσεις στήριξης



$$u = -\frac{M_F}{P_{CR}} \left[\cos \mu z + \frac{(1 - \cos \mu L)}{\sin \mu L} \sin \mu z - 1 \right]$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

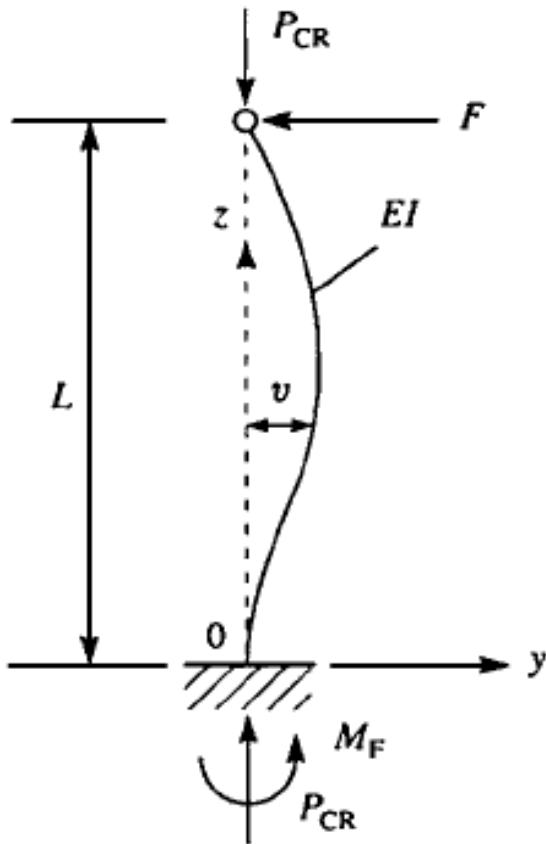


$$u = -\delta \left(\cos \mu z - \frac{\cos \mu L}{\sin \mu L} \sin \mu z - 1 \right)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Διάφορες περιπτώσεις στήριξης



$$P_{cr} = \frac{2 \cdot 05 \pi^2 EI}{L^2}$$

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Διάφορες περιπτώσεις στήριξης

Γενικά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μπορεί να γραφεί στη μορφή:

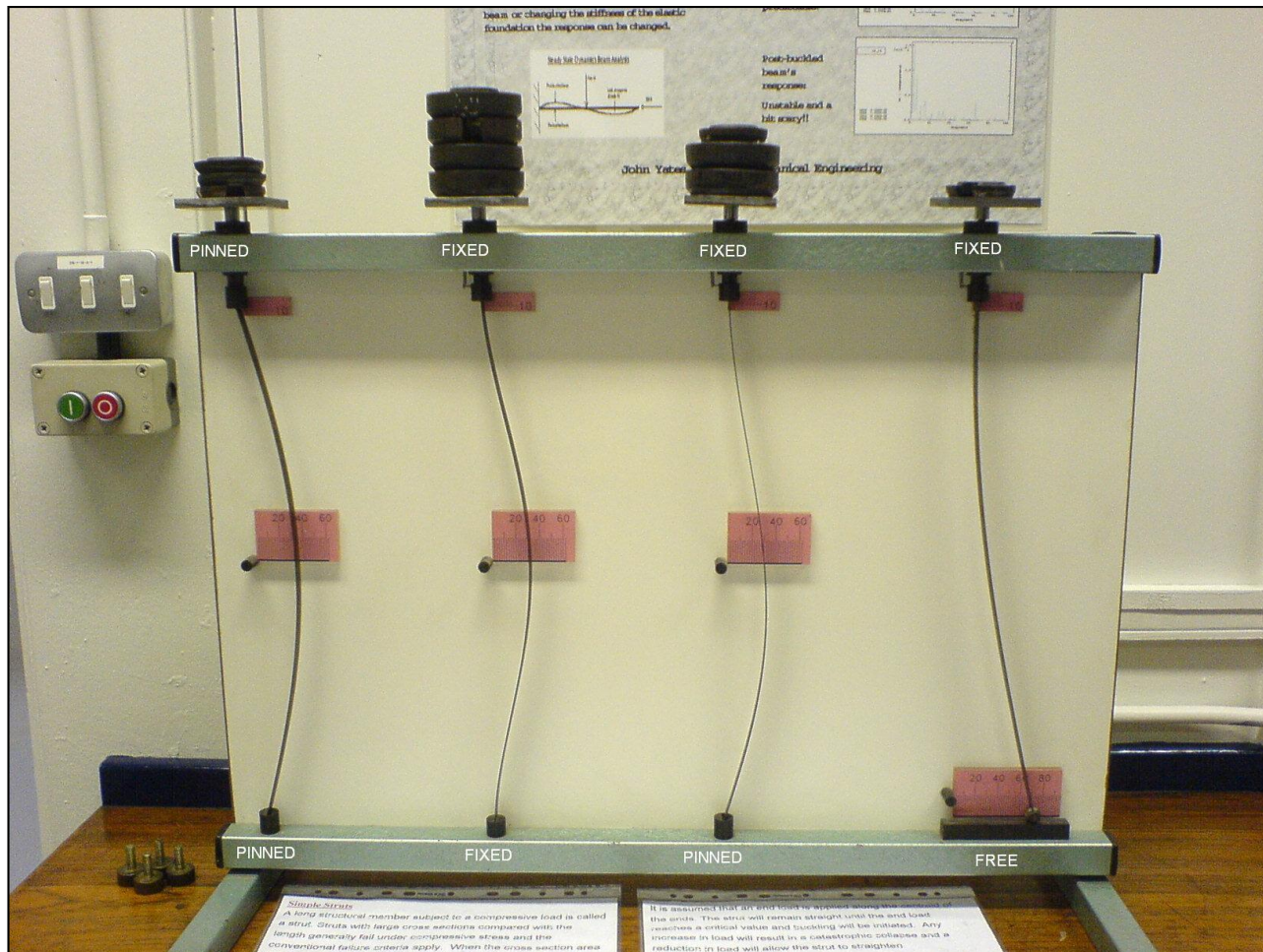
$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{4L_e^2}$$

Όπου L_e είναι το ισοδύναμο μήκος το οποίο εξαρτάται από τον τρόπο στήριξης του φορέα στα άκρα και δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις ανάλογα με την περίπτωση:

Αρθρώσεις και στα δύο άκρα	$L_e = 1.0 * L$
Πακτώσεις και στα δύο άκρα	$L_e = 0.5 * L$
Ένα άκρο πακτωμένο και ένα ελεύθερο	$L_e = 2.0 * L$
Ένα άκρο πακτωμένο και ένα αρθρωμένο	$L_e = 0.7 * L$

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Θεωρία του Euler – Διάφορες περιπτώσεις στήριξης

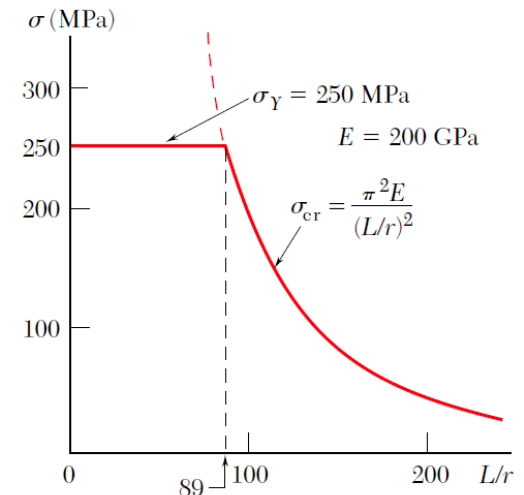


Λυγισμός πρισματικών φορέων

Κρίσιμη τάση λυγισμού: $\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2 e}$ όπου A το εμβαδό της διατομής

Ακτίνα αδράνειας
(radius of gyration): $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Κρίσιμη τάση λυγισμού: $\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$ όπου L_e/r ο λόγος λυγηρότητας του φορέα (slenderness ratio)

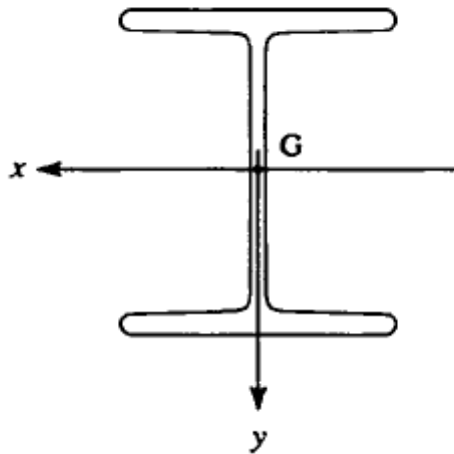


Ferdinand P. Beer, E Russell Johnston, John T. Dewolf, David F. Mazurek,
“Mechanics of Materials”, Mc Graw Hill

Λυγισμός πρισματικών φορέων

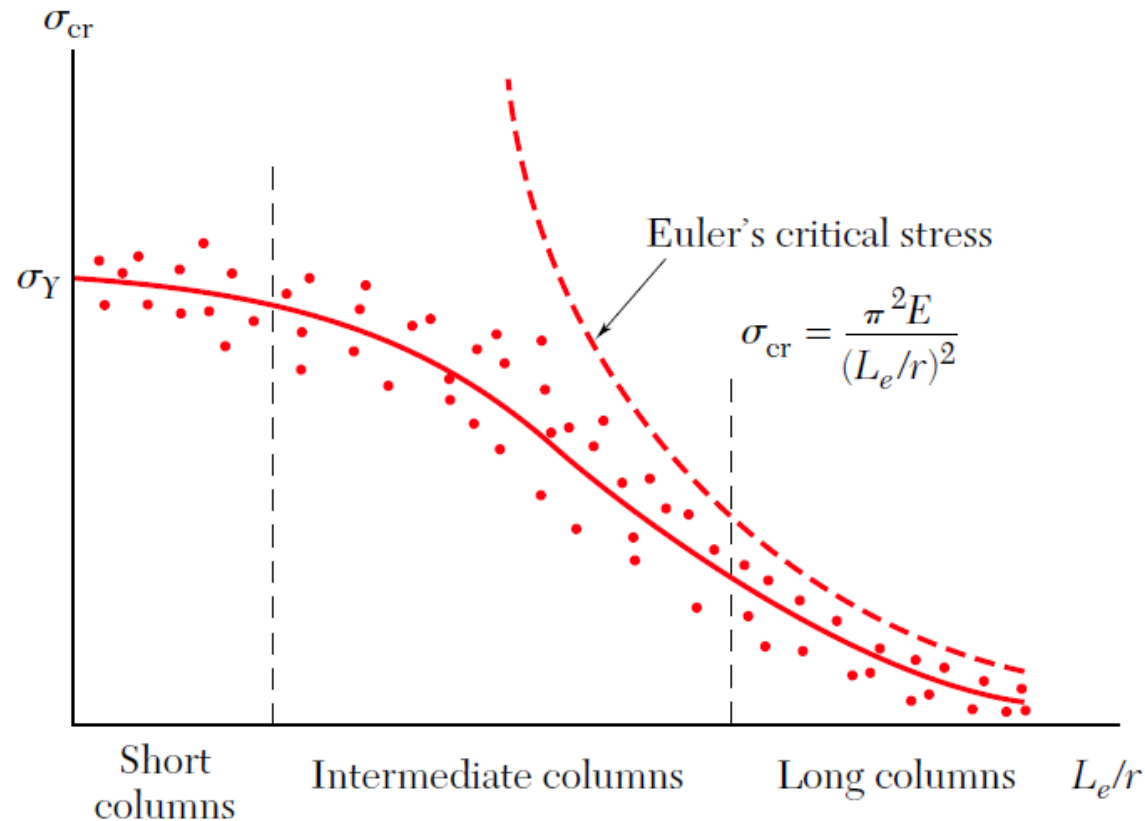
Επίδραση της μορφολογίας της διατομής

- ▶ Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού εξαρτάται έντονα από το λόγο λυγηρότητας, και κατά συνέπεια από το μήκος του φορέα και τη μορφολογία της διατομής.
- ▶ Ένας φορέας θα λυγίσει σε μία κατεύθυνση που είναι κάθετη στον άξονα ως προς τον οποίο ελαχιστοποιείται η ακαμψία EI . Π.χ μια δοκός I θα λυγίσει κατά τον άξονα Gy .



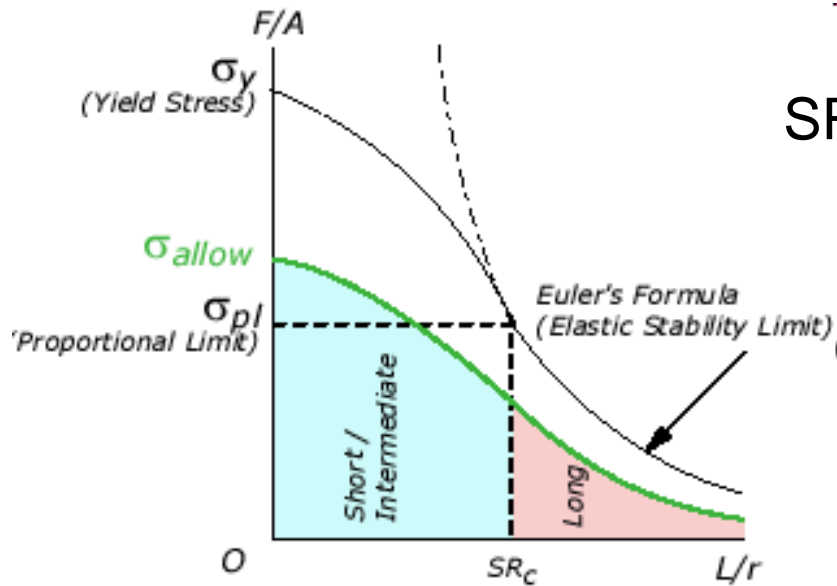
Λυγισμός πρισματικών φορέων

Σχεδιασμός υποστυλωμάτων



Ferdinand P. Beer, E Russell Johnston, John T. Dewolf, David F. Mazurek,
"Mechanics of Materials", Mc Graw Hill

Λυγισμός πρισματικών φορέων Κοντοί/ενδιάμεσοι φορείς



$$SR_C = \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E}{\sigma_y}}$$

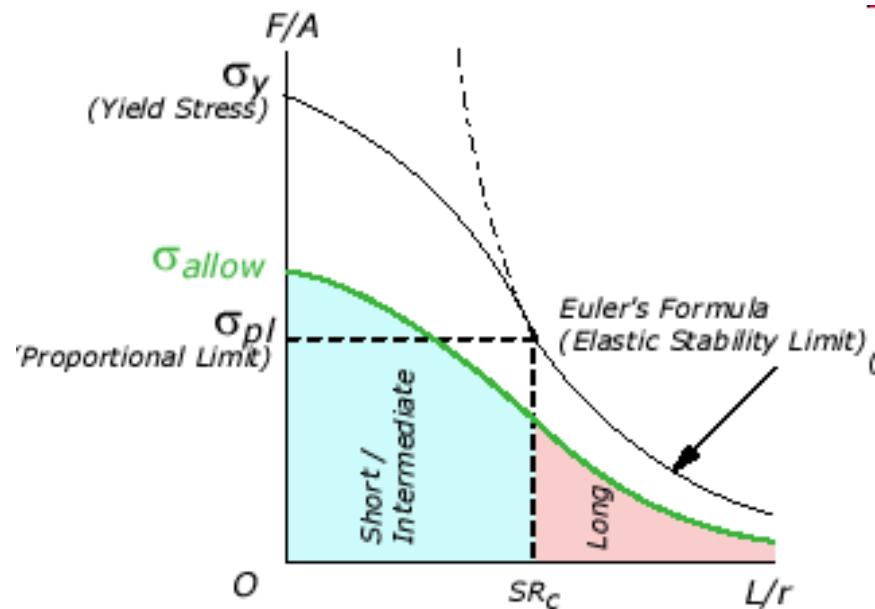
Είναι η κρίσιμη τιμή του λόγου λυγηρότητας.

Συνήθως λαμβάνεται $\sigma_{pl} = \sigma_y / 2$

Η θεωρία του Euler ισχύει για φορείς με μεγάλο λόγο λυγηρότητας.

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Κοντοί/ενδιάμεσοι φορείς – Johnson Formula



$$\text{Όταν: } \frac{L}{r} < SR_c = \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E}{\sigma_y}}$$

Για τον υπολογισμό της κρίσιμης τάσης λυγισμού χρησιμοποιείται η σχέση του Johnson:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \sigma_y \cdot \left[1 - \frac{(L_e / r)^2}{2 \cdot (SR_{cr})^2} \right]$$

Όπου A η επιφάνεια της διατομής, L_e το ισοδύναμο μήκος του φορέα και P_{cr} το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Λυγισμός πρισματικών φορέων Κοντοί/ενδιάμεσοι φορείς – Συντελεστές ασφάλειας

A) Κοντές κολώνες

$$\text{SafetyFactor: } SF = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)}{SR_c} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)^3}{SR_c^3}$$

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{1}{SF} \cdot \left[\sigma_y - \sigma_{pl} \cdot \frac{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)^2}{SR_c^2} \right]$$

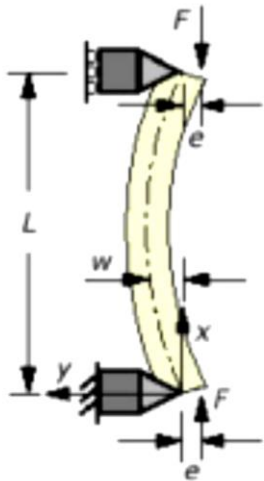
B) Ψηλές κολώνες

$$\text{SafetyFactor: } SF = \frac{23}{12}$$

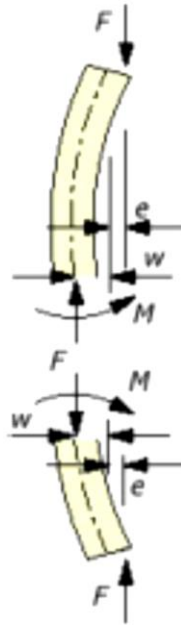
$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{1}{SF} \cdot \left[\sigma_{pl} \cdot \frac{SR_c^2}{\left(\frac{L_{\text{eff}}}{r}\right)^2} \right]$$

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Έκκεντρη αξονική φόρτιση – Secant Formula



Simply supported column subjected to eccentric axial load F



$$F(w + e) = M$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{F}{EI}w = -\frac{Fe}{EI} \quad m^2 = \frac{F}{EI}$$

$$w(x) = A \sin mx + B \cos mx - e$$

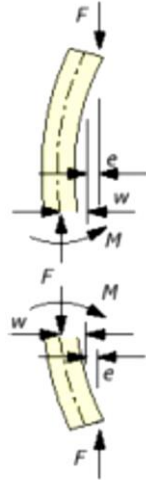
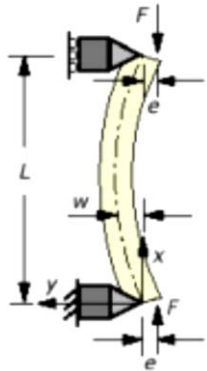
$$w(0) = w(L) = 0$$

$$w = e \left(\tan \frac{mL}{2} \sin mx + \cos mx - 1 \right)$$

Λυγισμός πρισματικών φορέων

Έκκεντρη αξονική φόρτιση – Secant Formula

www.efunda.com



$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{My}{I} = \frac{F}{A} + \frac{F(w + e)y}{I}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{max}y_{max}}{I} = \frac{F}{A} + \frac{F(w_{max} + e)c}{I}$$

Simply supported column subjected to eccentric axial load F

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = e\left(\sec\frac{mL}{2} - 1\right)$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e \cdot c}{I} \sec\frac{mL}{2} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{A}{I} ec \sec\left(\sqrt{\frac{FL}{EI}}\right) \right]$$

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\sqrt{\frac{FL}{EA}}\right) \right]$$

όπου, C είναι η μέγιστη απόσταση από τον ουδέτερο άξονα της εξωτερικής ίνας.



Μη-γραμμικός λυγισμός

- ▶ Η θεωρία του Euler μας παρέχει μια αξιόπιστη εκτίμηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού στην περίπτωση ψηλών κολωνών.
- ▶ Η θεωρία του Euler ισχύει στην ελαστική περιοχή και μας δίνει εκτός από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και την μορφή λυγισμού της κατασκευής (ιδιομορφή) η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια «ποιοτική» ένδειξη.
- ▶ Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου μας ενδιαφέρει η ακριβής συμπεριφορά της κατασκευής μετά το λυγισμό (μεταλυγισμική συμπεριφορά). Σε αυτή την περίπτωση, λόγω των πλαστικών παραμορφώσεων, η μελέτη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς απαιτεί τη θεώρηση των μη γραμμικοτήτων.
- ▶ Η πιο πρόσφορη μεθοδολογία για τη μεταλυγισμική συμπεριφορά είναι η χρήση μη-γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων.

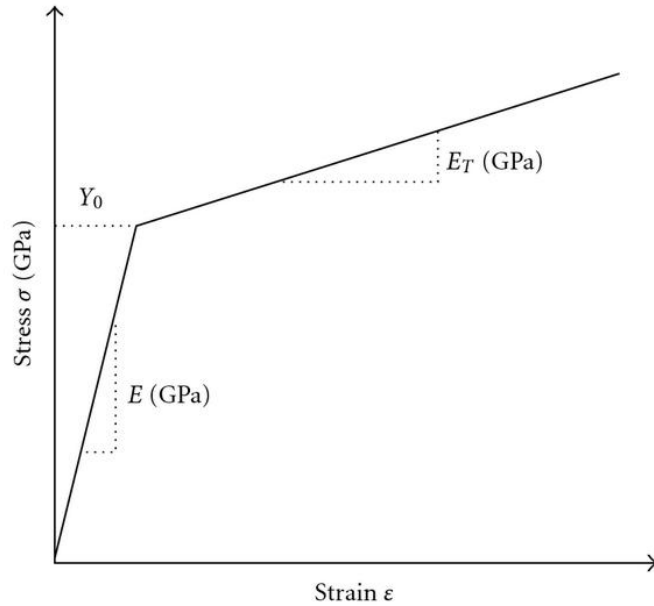


Μη-γραμμικός λυγισμός

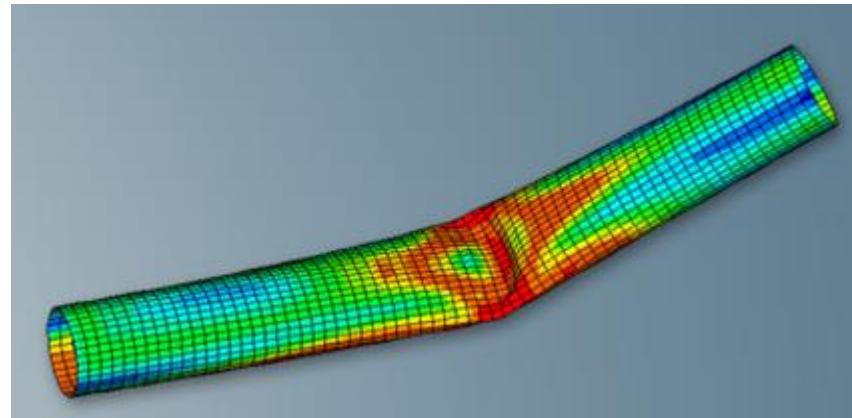
- ▶ Στην περίπτωση της μη-γραμμικής ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων:
 - ❑ Η μη γραμμικότητα του υλικού προσεγγίζεται με μία τμηματικά γραμμική συνάρτηση (συνήθως δι-γραμμική).
 - ❑ Το πρόβλημα των μεγάλων παραμορφώσεων επιλύεται με διαδοχική επαναληπτική διαδικασία, σε κάθε βήμα τις οποίες οι παραμορφώσεις και η ασκούμενη φόρτιση ασκούνται σταδιακά.
 - ❑ Για την επαναληπτική επίλυση υιοθετείται ένα κατάλληλο γνωστό σχήμα, π.χ. Newton-Raphson, Arc Length κ.α.
 - ❑ Σαν αρχική παραμόρφωση (διέγερση) λαμβάνεται συνήθως η πρώτη ιδιομορφή (γραμμικού) λυγισμού.



Μη-γραμμικός λυγισμός



Διγραμμική αναπαράσταση της
καμπύλης τάσεων
παραμορφώσεων



Μη-γραμμικός λυγισμός



Βιβλιογραφία

1. Mohamed Shama: “Buckling of Ship Structures”, Springer, 2013
2. C. M. Wang, C. Y. Wang, J. N. Reddy: “Exact solutions for buckling of structural members”, CRC Series in COMPUTATIONAL MECHANICS and APPLIED ANALYSIS, 2005.
3. Timoshenko, S.: “Strength of Materials – Part II-Advanced Theory and Problems” , D. Van Nostrand Inc., 1947.
4. Megson, T. H. G: “Structural and Stress Analysis”, Butterworth-Heinemann 1996





Τέλος Ενότητας

