



ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Δομική Σχεδίαση Πλοίου –
Εισαγωγή στη Θεωρία Πλακών

Α. Θεοδουλίδης

Κατηγοριοποίηση ελασμάτων στη Μηχανική

a: τυπική διάσταση (πλάτος-μήκος), h: πάχος, w: βέλος κάμψης

- Παχιά ελάσματα: $a/h < 8 \sim 10$
- Μεμβράνες: $a/h > 80 \sim 100$
- Λεπτά ελάσματα: $8 \sim 10 < a/h < 80 \sim 100$

- Δύσκαμπτα ελάσματα: $w/h < 0,2$
- Εύκαμπτα ελάσματα: $w/h > 0,2$
(αν $w/h > 5$ συμπεριφέρονται ως μεμβράνες)



Υποθέσεις **Kirchoff**

1. Υλικό ελαστικό, ομογενές και ισότροπο
2. Αρχικά επίπεδο έλασμα
3. Μικρό βέλος κάμψης (και κλίση) ως προς το πάχος.
4. Ευθείες κάθετες στο μέσο επίπεδο παραμένουν κάθετες σε αυτό μετά την κάμψη (σημαίνει $\epsilon_z=0$, $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$).
5. Η ορθή τάση κάθετα στο μέσο επίπεδο είναι αμελητέα.
6. Το μέσο επίπεδο παραμένει απαραμόρφωτο



Κάμψη ελάσματος

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

- Παρήχθη από τον Lagrange το 1811.
- Με το πρόβλημα ασχολήθηκαν μεγάλα ονόματα όπως:
 - ✓ Euler
 - ✓ Bernoulli
 - ✓ Poisson
 - ✓ Kelvin
 - ✓ Kirchoff
 - ✓ Lagrange
 - ✓
- Οι πιο γνωστές επιλύσεις:
 - Navier
 - Levy

Η ίδια εξίσωση παρήχθη από τον Timoshenko και με ενεργειακή θεώρηση



Οριακές συνθήκες

- Πάκτωση (πλευρά $y=0$) :

$$w = 0|_{y=0} \quad \text{and} \quad \vartheta_y \equiv \frac{\partial w}{\partial y} = 0|_{y=0}$$

- Άρθρωση (πλευρά $x=a$) :

$$w = 0|_{x=a}, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0|_{x=a}$$

ή ισοδύναμα:

$$w = 0|_{x=a}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0|_{x=a}$$

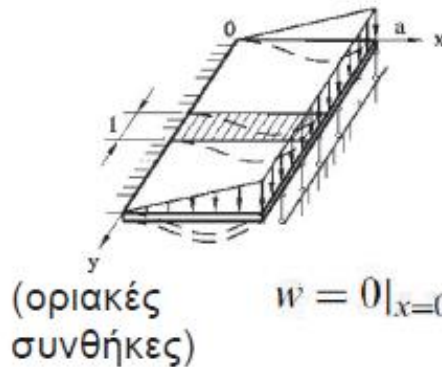
- Ελεύθερη πλευρά ($y=b$) (παρήχθησαν από τον Poisson):

$$M_y = 0|_{y=b}, \quad Q_y = 0|_{y=b}, \quad M_{yx} = 0|_{y=b}$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0|_{y=b} \quad \text{and} \quad -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0|_{y=b}$$

Εφαρμογές: Μακρύ έλασμα-Τριγωνική φόρτιση (πάκτωση-άρθρωση)



$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D}$$

$$w = w_h + w_p = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \frac{p_0 x^5}{120 a D}$$

$$w = 0|_{x=0}, \frac{dw}{dx} = 0|_{x=0} \quad \text{and} \quad w = 0|_{x=a}, M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = 0|_{x=a}$$

$$C_1 = C_2 = 0, C_3 = \frac{7p_0 a^2}{240 D}, C_4 = \frac{9p_0 a}{240 D}$$

$$w = \frac{p_0 a^4}{240 D} \left(7 \frac{x^2}{a^2} - 9 \frac{x^3}{a^3} + 2 \frac{x^5}{a^5} \right)$$

Με μηδενισμό των παραγώγων ως προς y, προκύπτει:

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_y = -\nu D \frac{d^2 w}{dx^2} = \nu M_x, \quad M_{xy} = 0.$$

$$M_x = -\frac{p_0 a^2}{120} \left(7 - 27 \frac{x}{a} + 20 \frac{x^3}{a^3} \right)$$



Απλά εδρασμένη ορθογωνική πλάκα υπό σταθερό φορτίο $p(x,y)=p_0$

Η μέγιστη τιμή του βέλους κάμψης παρατηρείται στο κέντρο $(x,y)=(a/2, b/2)$ και δίδεται από την σχέση:

$$w_{\max} = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}$$

Η ανωτέρω σειρά συγκλίνει γρήγορα και ένας ή δυο όροι δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια.

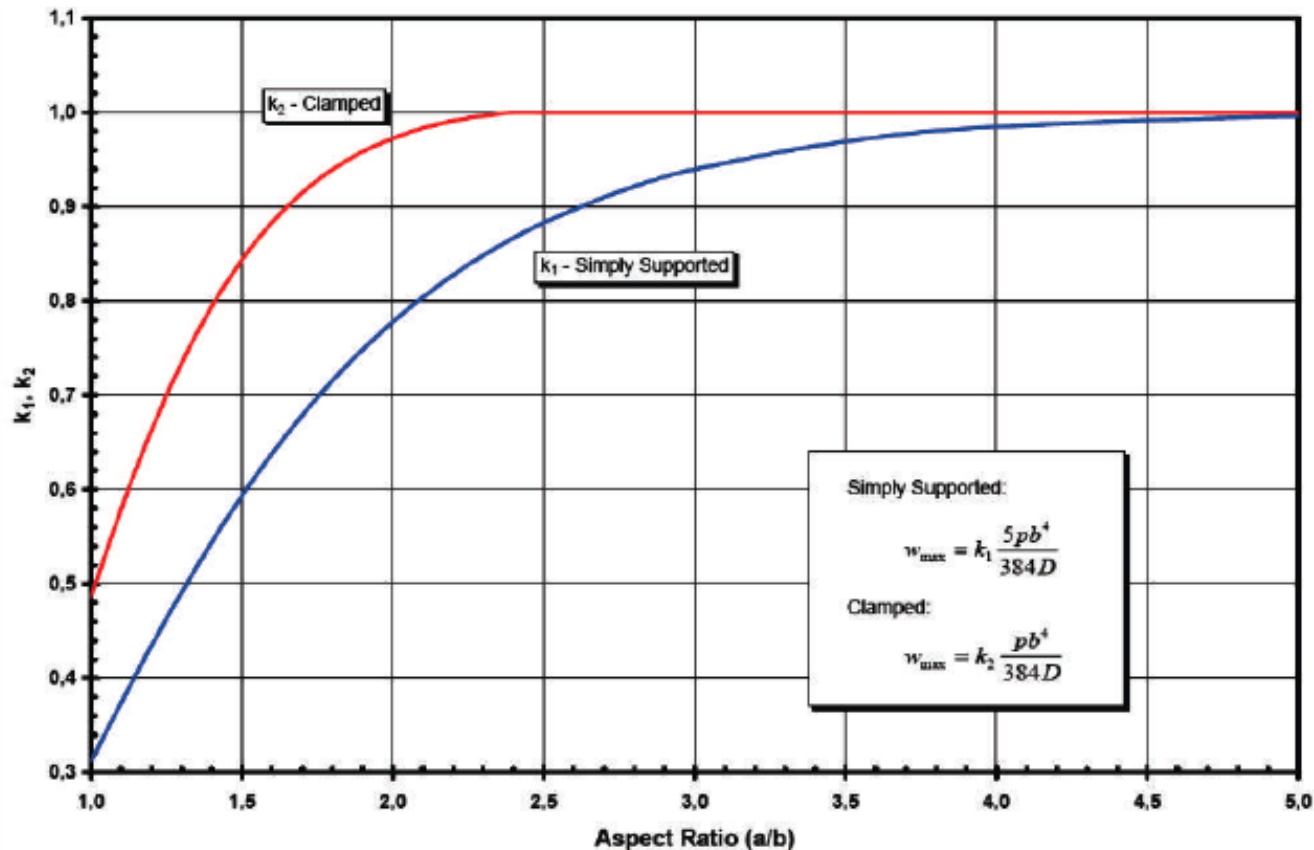
Οι ροπές προκύπτουν από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M_x = \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + \nu(n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\nu(m/a)^2 + (n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

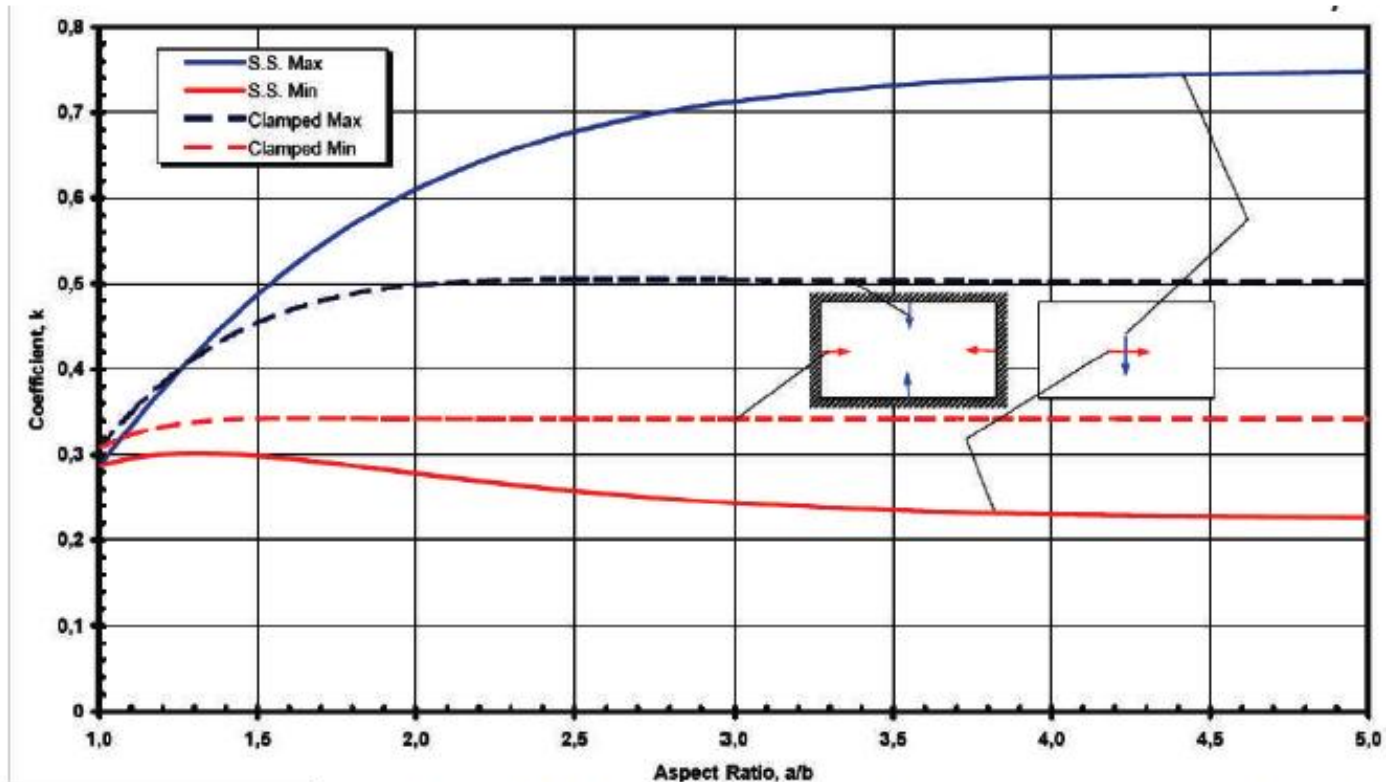
$$M_{xy} = -\frac{16(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Μέγιστο βέλος κάμψης ορθ. ελάσματος λόγω κάθετου ομ. κατανεμημένου φορτίου p



a το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς και b το μήκος της μικρότερης

Μέγιστη ορθή τάση ορθ. ελάσματος λόγω κάθετου ομ. κατανεμημένου φορτίου p

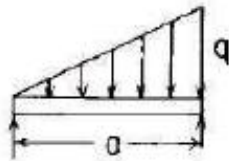


$$\sigma = k \cdot p \cdot \frac{b^2}{t^2}$$

Η σταθερά k εξαρτάται από το λόγο a/b , τις οριακές συνθήκες και τη θέση του σημείου υπολογισμού της τάσης

Κάμψη ορθ. ελάσματος λόγω υδροστατικής πίεσης

1d. Uniformly increasing along length



$$\sigma_{\max} = \frac{\beta qb^2}{t^2} \quad \text{and} \quad y_{\max} = \frac{-\alpha qb^4}{Et^3}$$

a/b	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
β	0.16	0.26	0.34	0.38	0.43	0.47	0.49
α	0.022	0.043	0.060	0.070	0.078	0.086	0.091

(Values from charts of Ref. 8; $\nu = 0.3$.)

1e. Uniformly increasing along width



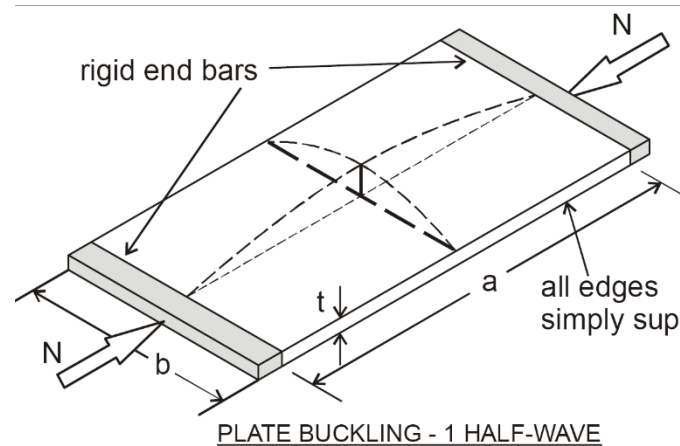
$$\sigma_{\max} = \frac{\beta qb^2}{t^2} \quad \text{and} \quad y_{\max} = \frac{-\alpha qb^4}{Et^3}$$

a/b	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
β	0.16	0.26	0.32	0.35	0.37	0.38	0.38
α	0.022	0.042	0.056	0.063	0.067	0.069	0.070

(Values from charts of Ref. 8; $\nu = 0.3$.)



Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων



- Θεωρώ ορθογωνική πλάκα $a \times b \times t$ η οποία υπόκειται σε ομοαξονική θλιπτική φόρτιση παράλληλα με τις πλευρές a . Όσο η δύναμη N είναι σχετικά μικρή η πλάκα υποκειται σε θλίψη και έχω μετατοπίσεις μόνο κατά την κατεύθυνση άσκησης του θλιπτικού φορτίου.
- Όταν η τιμή N ξεπεράσει κάποια τιμή, χαρακτηριστική για τη συγκεκριμένη πλάκα, θα εμφανισθούν μετατοπίσεις και κατά την κάθετη στην πλάκα διεύθυνση. Αυτές οι κάθετες μετατοπίσεις σηματοδοτούν την έναρξη του λυγισμού.

Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού δίδεται από τη σχέση: $N_{cr} = k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{b}$

όπου: $D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ η ακαμψία της πλάκας

$$k = \left(\frac{m \cdot b}{a} + \frac{a}{m \cdot b} \right)^2 = \left(\frac{m}{\phi} + \frac{\phi}{m} \right)^2 \quad \phi = \frac{a}{b}$$

$m =$ ακέραιος αριθμός

Η αντίστοιχη κρίσιμη τάση λυγισμού δίδεται από τη σχέση:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{k \cdot \pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot (b/t)^2}$$



Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων

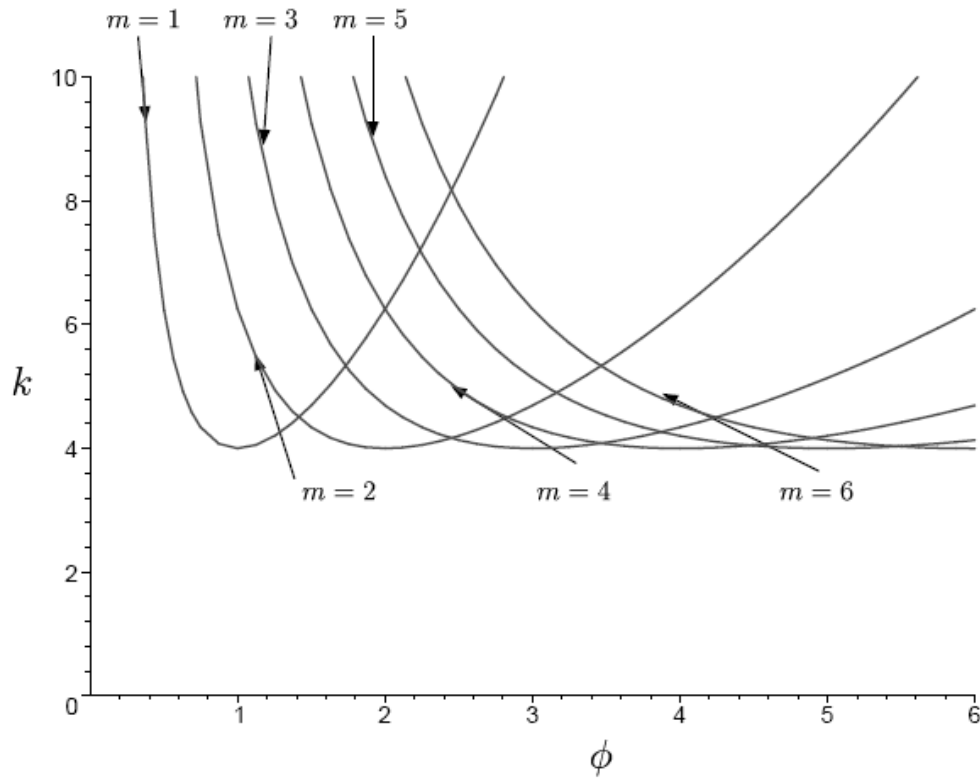
$$\frac{dk}{d\phi} = 2 \left(\frac{m}{\phi} + \frac{\phi}{m} \right) \left(\frac{1}{m} - \frac{m}{\phi^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi^2 = m^2$$

Επομένως το k γίνεται ελάχιστο όταν ο λόγος επιμήκους της πλάκας γίνεται ακέραιος αριθμός, δηλ. ισχύει $a=m \times b$

Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή k είναι $k=4$ και αυτό συμβαίνει όταν ισχύει $a=m \times b$



Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων



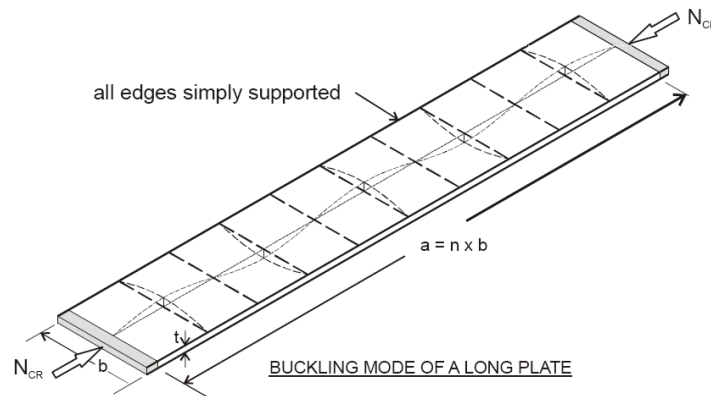
Η τιμή του συντελεστή k σαν συνάρτηση του λόγου a/b , για διάφορες τιμές του συντελεστή m , φαίνεται στο ανωτέρω διάγραμμα



Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων

Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή k για κάθε τιμή του λόγου a/b , μας δίνει τη χαρακτηριστική μορφή της λυγισμένης πλάκας (buckling mode). Διαφορετικές μορφές του m επίσης περιγράφουν δυνατές μορφές λυγισμού οι οποίες όμως σχετίζονται με μεγαλύτερα k δηλαδή μεγαλύτερα φορτία λυγισμού. Ο k λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του, 4, μόνο για ακέραιες τιμές του λόγου a/b .

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ένα έλασμα όταν λυγίζει, οι κυματομορφές του λυγισμού υποδιαίρουν την επιφάνειά του σε τετράγωνα.



Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων

Από τα ανωτέρω συνάγεται ότι κατά τον σχεδιασμό δεν πρέπει να λαμβάνονται ακέραιοι λόγοι a/b διότι αυτοί ελαχιστοποιούν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Αντίθετα πρέπει να επιδιώκεται οι διαστάσεις του ελάσματος να είναι τέτοιες ώστε στο διάγραμμα $k - a/b$ να πέφτουμε στα μεταβατικά σημεία από $m \rightarrow m+1$.

(Το ανωτέρω συμπέρασμα δεν ισχύει αν ληφθούν υπ' όψη οι μη γραμμικές επιδράσεις)

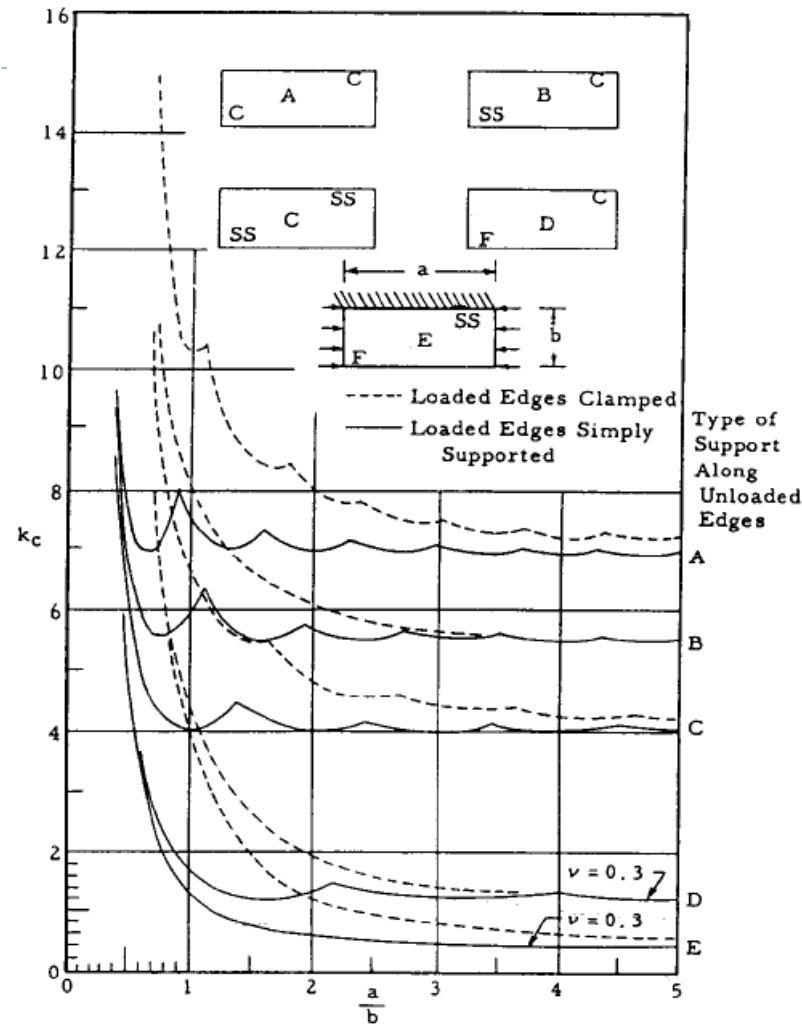
Για πλατιά ελάσματα $(a/b) \rightarrow 0$ η κρίσιμη τάση λυγισμού δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_x^C = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)(a/t)^2}$$

Παρατηρούμε ότι ο λυγισμός πλατιών ελασμάτων εξαρτάται από το a και όχι το b .



Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων



Τιμές του συντελεστή k για διάφορες περιπτώσεις στήριξης

Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων

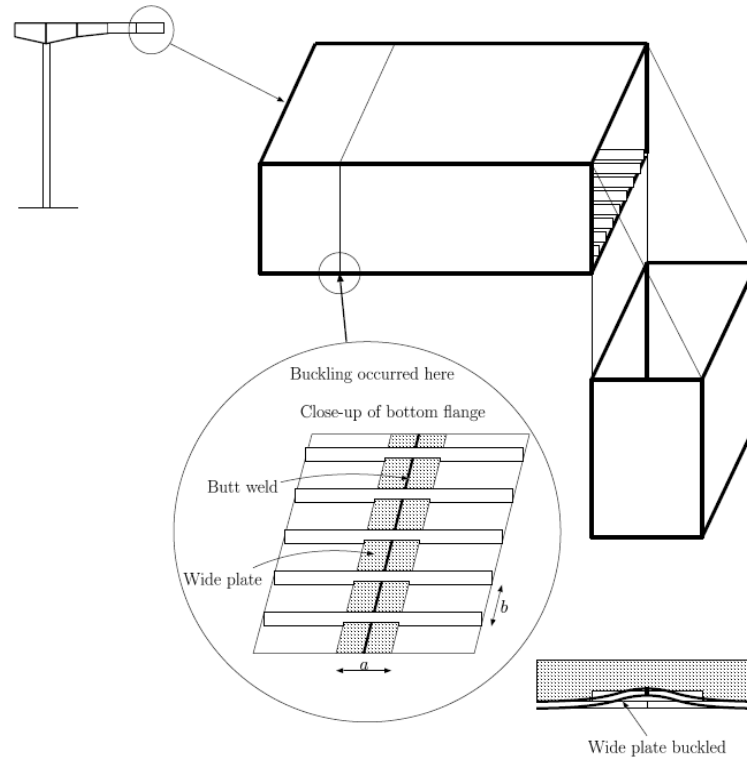
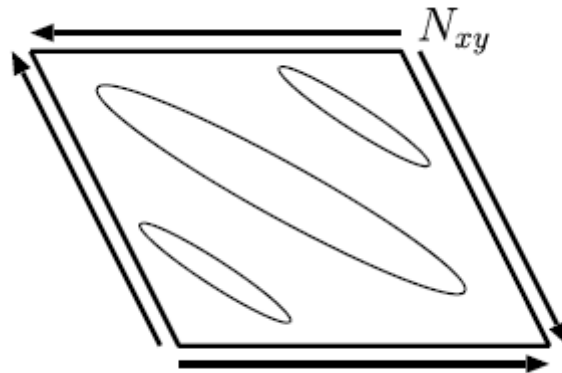


Figure 66: Koblenz bridge collapse from wide plate buckling.

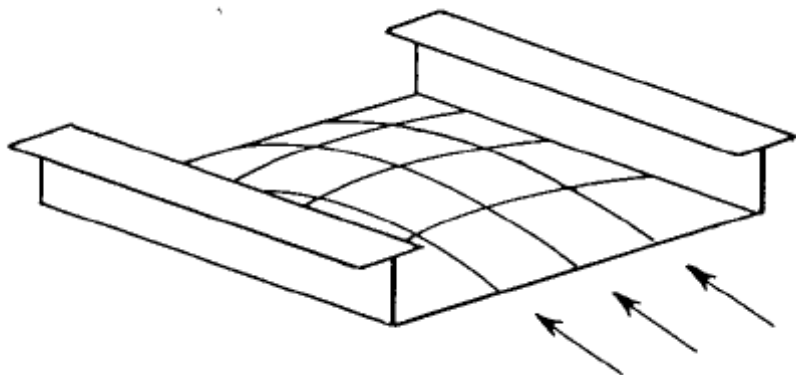
Παράδειγμα κατάρρευσης γέφυρας λόγω λυγισμού «πλατιού» ελάσματος που δημιουργήθηκε από λάθος.

Λυγισμός ορθογωνικών ελασμάτων λόγω διάτμησης

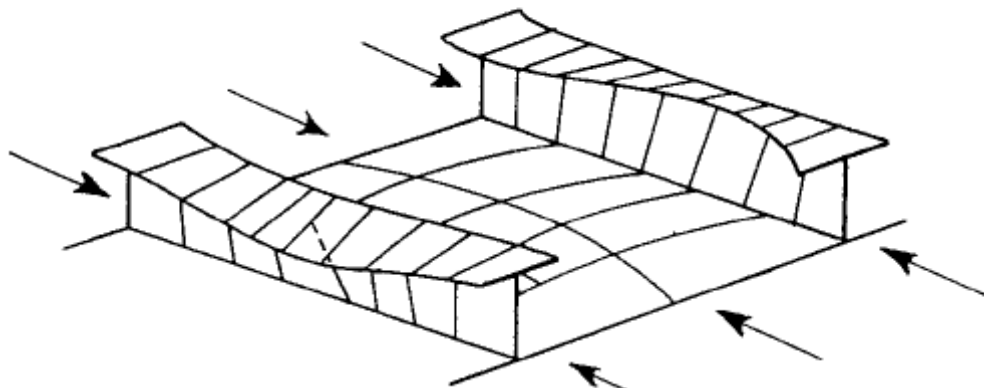
Λυγισμός μιας πλάκας μπορεί να προέλθει και λόγω διάτμησης. Σε αυτή την περίπτωση η παραμόρφωση της πλάκας λαμβάνει χώρα κατά την διεύθυνση της διαγωνίου.



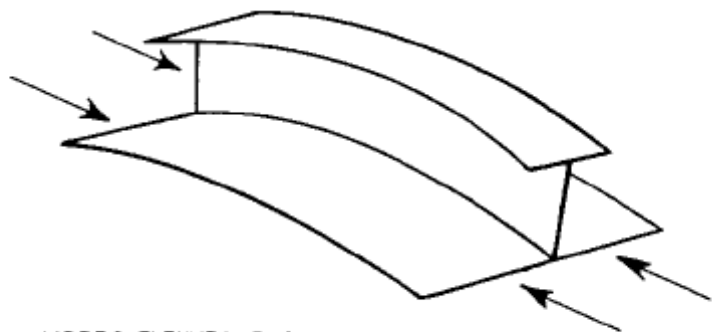
Λυγισμός ενισχυμένων ορθογωνικών ελασμάτων



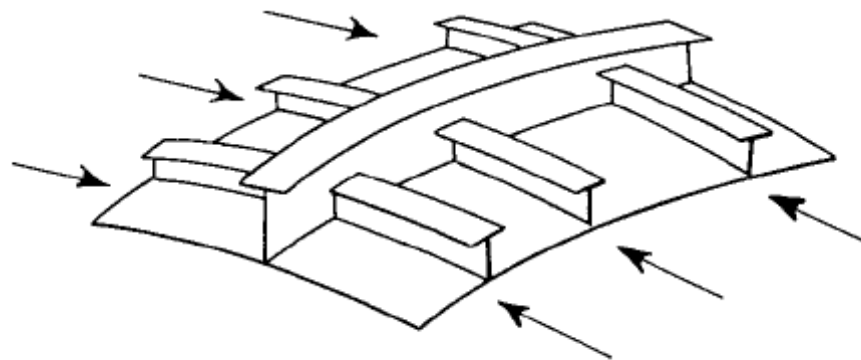
MODE 1. PLATE ALONE BUCKLES BETWEEN STIFFENERS



MODE 3. TRIPPING OR TORSIONAL BUCKLING OF STIFFENERS.



MODE 2. FLEXURAL BUCKLING OF STIFFENERS
PLUS PLATING



MODE 4. OVERALL GRILLAGE OR GROSS PANEL BUCKLING.
BOTH LONGL AND TRANS STIFFENERS.

4 τρόποι λυγισμού ενισχυμένων ελασμάτων



Βιβλιογραφία

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., **“Theory of Plates and Shells”**, Mc Graw-Hill Book Company, 1959.
2. Timoshenko, S, **“Strength of Materials”**, Part II-Advanced Theory and Problems”, D. Van Nostrand Company, 1947.
3. Krauthammer, T., Ventsel E, **“Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications”**, CRC Press, 2001.
4. Hearn, E.J., **“Mechanics of Materials”**, Butterwarth-Heinemann, 1999
5. Young, W.C., Budynas, R.G., **“Roark’s Formulas for Stress and Strain”**, McGraw-Hill, 1989





Τέλος Ενότητας