

Πίνακες– Γραμμικά Συστήματα

1. Είδη Πινάκων

Οι πίνακες είναι ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο, με εφαρμογές και διασυνδέσεις σε πολλές επιστήμες. Η σημαντικότερη εφαρμογή των πινάκων είναι στην επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο αυτό, εκτός από την ανάπτυξη της θεωρίας πινάκων, θα εμβαθύνουμε στην χρήση αυτής στην αντιμετώπιση γραμμικών συστημάτων.

Ορισμός 1.1: Έστω μ, ν θετικοί ακέραιοι. «Πίνακας μ γραμμών και ν στηλών» ονομάζεται μια διάταξη $\mu \times \nu$ το πλήθος αριθμών σε μορφή ορθογωνίου σχήματος, ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i\nu} \\ \vdots & & & & & \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu j} & \dots & a_{\mu \nu} \end{pmatrix} \rightarrow i \text{ γραμμή}$$

↓

j στήλη

Οι πίνακες συμβολίζονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα A, B κτλ. Αντί να λέμε την πλήρη έκφραση: «Πίνακας A με μ γραμμές και ν στήλες», λέμε πιο σύντομα: «Πίνακας A $\mu \times \nu$ » και συμβολίζουμε: $A_{\mu \times \nu}$. Επίσης λέμε ότι ο πίνακας A έχει **διάσταση** (ή μέγεθος) $\mu \times \nu$. Οι αριθμοί με τους οποίους

σχηματίζουμε τον πίνακα λέγονται και στοιχεία του πίνακα., και συμβολίζουμε:

a_{ij} → το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην τομή της i γραμμής και j στήλης. Για τον πίνακα A χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό: $A = (a_{ij})_{\mu \times \nu}$

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ έχει διάσταση 2×3 , ο $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ έχει 3×2 , ο $C = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

έχει 3×1 , ενώ ο $D = (0 \ -3 \ 2 \ 1)$ έχει 1×4 . Στον πίνακα $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ έχουμε τα στοιχεία: $a_{13} = -3$, $a_{31} = 1$.

Είδη Πινάκων:

- Εάν ο πίνακας έχει διάσταση $1 \times \nu$ (δηλαδή έχει μία γραμμή) λέγεται **πίνακας γραμμή**:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1\nu})$$

- Εάν ο πίνακας έχει διάσταση $\mu \times 1$ (δηλαδή έχει μία στήλη) λέγεται **πίνακας στήλη**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\mu 1} \end{pmatrix}$$

Σχόλιο: Οι πίνακες γραμμή και οι πίνακες στήλη, λέγονται και **διανύσματα**.

- Εάν ο πίνακας έχει διάσταση $n \times n$ (δηλαδή ίσο αριθμό γραμμών και στηλών) λέγεται **τετραγωνικός**.
- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός** εάν ισχύει: $a_{ij} = 0$, για κάθε $i < j$, λέγεται **κάτω τριγωνικός** εάν ισχύει: $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$, ενώ λέγεται **διαγώνιος** εάν ισχύει: $a_{ij} = 0$ για κάθε: $i \neq j$.

Δηλαδή ο άνω τριγωνικός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει τα στοιχεία κάτω απ' την διαγώνιο 0, ο κάτω τριγωνικός έχει 0 όλα τα στοιχεία που είναι πάνω απ την διαγώνιο, ενώ ο διαγώνιος έχει 0 όλα τα στοιχεία που δεν είναι πάνω στην διαγώνιο.

Π.χ ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

είναι άνω τριγωνικός, ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

είναι κάτω τριγωνικός, και ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

είναι διαγώνιος.

- Ο διαγώνιος πίνακας $I = (a_{ij})_{n \times n}$ για τον οποίο ισχύει:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

λέγεται **Μοναδιαίος Πίνακας** και συνήθως συμβολίζεται I_n αντί του $I_{n \times n}$. Δηλαδή:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.2: (Ισότητα Πινάκων)

Έστω δύο $\mu \times \nu$ πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Οι πίνακες A και B λέγονται **ίσοι** και συμβολίζουμε $A = B$ αν ισχύει: $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i = 1 \dots \mu, j = 1 \dots \nu$.

Δηλαδή δύο πίνακες είναι ίσοι, όταν έχουν ίδια διάσταση και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

2. Πράξεις Πινάκων

Ορισμός 2.1: (Πρόσθεση)

Έστω δύο $\mu \times \nu$ πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Ο πίνακας $(x_{ij})_{\mu \times \nu}$ όπου:

$$x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{για κάθε } i=1..μ, j=1..ν$$

ονομάζεται **άθροισμα** των A και B και συμβολίζεται $A + B$.

Δηλαδή για να προσθέσουμε δύο πίνακες πρέπει να έχουν ίδια διάσταση, και τότε προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία τους.

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, τότε:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -5+3 & 1+4 \\ -4+6 & 2+5 & 7-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ορισμός 2.2:

Έστω πίνακας $A = (a_{ij})_{\mu \times \nu}$. Ο πίνακας $(-a_{ij})_{\mu \times \nu}$ ονομάζεται **αντίθετος** του A και συμβολίζεται: $-A$.

Ιδιότητες Πρόσθεσης:

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- 3) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
- 4) $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$

Ορισμός 2.3:

Έστω πίνακας $A = (a_{ij})_{\mu \times \nu}$. Ονομάζουμε γινόμενο του A με τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ και τον συμβολίζουμε λA τον πίνακα:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\mu \times \nu}$$

Για παράδειγμα: αν $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ τότε $3A = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ -12 & 6 & 21 \end{pmatrix}$

Ιδιότητες:

1) $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$

2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

3) $\kappa(\lambda A) = (\kappa\lambda)A$

4) $1 \cdot A = A$

5) $\lambda A = \mathbb{O} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } A = \mathbb{O}$

Ορισμός 2.4: (Πολλαπλασιασμός Πινάκων)

Εστω $A = (a_{ij})$ ένας πίνακας τύπου $n \times \mu$ και $B = (b_{ij})$, ένας πίνακας τύπου $\mu \times k$. Το γινόμενο των δύο πινάκων θα είναι ένας πίνακας τύπου $n \times k$, (δηλαδή θα έχει όσες γραμμές έχει ο πίνακας A και στήλες όσες έχει ο πίνακας B) του οποίου το κάθε στοιχείο c_{ij} **προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της i-γραμμής του A με τα αντίστοιχα στοιχεία της j-στήλης του B και αθροίσουμε τα γινόμενα.**

Δηλαδή:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\mu} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{i\mu}b_{\mu j}$$

Απ' τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι για να πολλαπλασιάζονται δυο πίνακες θα πρέπει ο αριθμός στηλών του πρώτου να είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του δεύτερου. Τότε ο πίνακας που θα προκύψει θα έχει γραμμές ίσες με τις γραμμές του πρώτου και στήλες, ίσες με τις στήλες του δεύτερου.

Για παράδειγμα: Αν: $A_{3 \times 2}$ και $B_{2 \times 4}$ τότε $AB_{3 \times 4}$

$A_{2 \times 3}$ και $B_{3 \times 1}$ τότε $AB_{2 \times 1}$

Αν $A_{5 \times 3}$ και $B_{2 \times 5}$ τότε ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ το $A \cdot B$

το $B \cdot A$ γίνεται και είναι $BA_{2 \times 3}$

Παράδειγμα

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Gamma = (-2 \quad 6 \quad 5)$$

Να υπολογιστούν οι $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot \Gamma$, $\Gamma \cdot B$, $B \cdot \Gamma$

Λύση:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A \cdot \Gamma \rightarrow$ Δεν γίνεται

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot B &= (-2 \quad 6 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= ((-2) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \quad (-2) \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot (-2)) = (15 \quad -16) \end{aligned}$$

$B \cdot \Gamma \rightarrow$ Δεν γίνεται

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού:

$$1) A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$$

$$2) A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma \text{ και } (B + \Gamma) \cdot A = B \cdot A + \Gamma \cdot A$$

$$3) (\lambda \cdot A) \cdot (\mu \cdot B) = (\lambda\mu) \cdot A \cdot B$$

$$4) I \cdot A = A \cdot I = A$$

Ορισμός 2.5:

Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Τότε:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ φορές}}$$

Παρατηρήσεις:

1) Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Δηλαδή: $A \cdot B \neq B \cdot A$

2) Αν $A \cdot B = \mathbb{O} \not\Rightarrow A = \mathbb{O}$ ή $B = \mathbb{O}$

3) Αν $A \cdot B = A \cdot \Gamma \not\Rightarrow B = \Gamma$

3. Ανάστροφος Πίνακας

Ορισμός 3.1: (Ανάστροφος πίνακας)

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $\mu \times \nu$ πίνακας. Ονομάζουμε ανάστροφο του A και τον συμβολίζουμε A^T τον $\nu \times \mu$ πίνακα που έχει ως γραμμές τις στήλες του A .
Δηλαδή:

$$\text{Αν } A^T = (b_{ij}) \text{ είναι: } b_{ij} = a_{ji}$$

Παράδειγμα

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ τότε: } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες ανάστροφου:

$$1) (A^T)^T = A$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Ορισμοί 3.2:

i) Ο πίνακας A λέγεται συμμετρικός αν και μόνον αν $A^T = A$

ii) Ο πίνακας A λέγεται αντισυμμετρικός αν και μόνον αν $A^T = -A$

Παρατηρούμε ότι ένας συμμετρικός πίνακας θα είναι κατ' ανάγκην τετραγωνικός, και για τα στοιχεία του ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$. Ο αντισυμμετρικός πίνακας θα είναι τετραγωνικός, θα έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου μηδέν και τα συμμετρικά στοιχεία ως προς την κύρια διαγώνιο αντίθετα.

Παραδείγματα

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 8 \\ -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός ενώ

ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & 0 & -7 & -5 \\ -3 & 7 & 0 & -1 \\ -9 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός

4. Ορίζουσα

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A , αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός που ονομάζεται ορίζουσα του πίνακα A , και συμβολίζεται:

$$\det(A) \quad \text{ή} \quad D(A) \quad \text{ή} \quad |A|$$

Η ορίζουσα υπολογίζεται ως εξής:

- Για πίνακα διάστασης 2×2 :

Αν $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ τότε η ορίζουσα του είναι:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta$$

- Για πίνακα διάστασης $n \times n$:

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα, θα χρειαστεί να ορίσουμε τα εξής:

Ελάσσων Ορίζουσα M_{ij} του στοιχείου a_{ij} ενός $n \times n$ πίνακα, ονομάζεται η ορίζουσα του $(n - 1) \times (n - 1)$ πίνακα που προκύπτει από τον πίνακα A , αν αφαιρέσουμε την γραμμή και την στήλη που βρίσκεται το στοιχείο a_{ij}

Αλγεβρικό Συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} ενός $n \times n$ πίνακα, ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

όπου M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου a_{ij}

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα πίνακα $n \times n$, πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία μιας μόνο γραμμής με τα αλγεβρικά συμπληρώματα τους και προσθέτουμε τα γινόμενα. Δηλαδή:

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in}M_{in}$$

ή

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

- Ο παραπάνω ορισμός θα εφαρμοστεί ειδικά για πίνακα διάστασης 3×3 :

Αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ τότε η ορίζουσα του A είναι:

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13}M_{13} =$$

$$a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται «ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την 1^η γραμμή». Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της ορίζουσας την 2^η ή την 3^η γραμμή, και φυσικά θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Παρατήρηση: Για να θυμόμαστε το πρόσημο του παράγοντα $(-1)^{i+j}$ μπορούμε να θεωρήσουμε τον ακόλουθο πίνακα

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (5(-2) - (-3)4) - 4 \cdot (2(-2) - 1 \cdot 4) + 3 \cdot (2(-3) - 1 \cdot 5) = 1$$

Κανόνας Sarrus:

Ειδικά για τον υπολογισμό της τιμής μιας οριζουσας τρίτης τάξης (πίνακα 3×3), ισχύει και ο παρακάτω πρακτικός κανόνας (Κανόνας του Sarrus):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε την οριζουσα του προηγούμενου παραδείγματος με τον κανόνα του Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 5 \cdot$$

$$1 - 1 \cdot 4 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = -10 + 16 - 18 - 15 + 12 + 16 = 1$$

5. Αντίστροφος Πίνακας

Ορισμός 5.1:

Ένας τετραγωνικός πίνακας A χαρακτηρίζεται ως αντιστρέψιμος εάν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε $AB = BA = I$. Τότε ο πίνακας B ονομάζεται αντίστροφος πίνακας του A και συμβολίζεται: A^{-1} . Δηλαδή ισχύει:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Ορισμός 5.2:

Έστω ότι ο A είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε **προσαρτημένο πίνακα** (adjoint matrix) του A , και τον συμβολίζουμε με $adjA$, τον πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

όπου $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}

Θεώρημα 5.1:

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $|A| \neq 0$. Τότε ο αντίστροφος του A υπολογίζεται από τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \Leftrightarrow$$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Ειδικά για τον **αντίστροφο 2×2 πίνακα** έχουμε:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ και } |A| \neq 0 \text{ τότε: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ (αν υπάρχει)

Λύση:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 4 \neq 0$$

άρα:
$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Λύση:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4(-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

άρα ο A αντιστρέφεται.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -6 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Επίλυση Γραμμικού Συστήματος με Αντίστροφο Πίνακα

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

Θεωρούμε επίσης τους παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Πίνακας $n \times n$ που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ Πίνακας } n \times 1 \text{ που περιέχει τους αγνώστους}$$

$$\text{και } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ Πίνακας } n \times 1 \text{ που περιέχει τους σταθερούς όρους}$$

Τότε, το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με την ισότητα:

$$A \cdot X = B$$

Δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία ισότητα, λύνοντας ως προς τον πίνακα X παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
A \cdot X &= B \Leftrightarrow \\
A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \\
I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \\
\boxed{X} &= \boxed{A^{-1} \cdot B}
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι για να βρούμε την λύση του συστήματος, θα πρέπει να βρούμε τον αντίστροφο του πίνακα συντελεστών και στη συνέχεια να τον πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα των σταθερών όρων.

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Λύση:

Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 - 4(-8) + 3(-11)$$

$= 1 \neq 0$. Άρα ο πίνακας αντιστρέφεται.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -11 \\ -1 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 8 \cdot 1 - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ -11 \cdot 1 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Άρα: $x = 3$, $y = -2$, $z = 2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ και $f(X) = X^2 + 2X + I$, όπου I ο μοναδιαίος

πίνακας, να υπολογιστεί το $f(A)$

2) Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i) Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $A^2 = x \cdot A + y \cdot I$

ii) Να υπολογιστούν: A^3 , A^4

3) Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\Gamma = (-4 \ 1 \ 1)$, $\Delta = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, να

υπολογιστούν τα γινόμενα: (εάν υπάρχουν)

i) $A \cdot B$ ii) $B \cdot A$ iii) $A \cdot \Gamma$ iv) $\Gamma \cdot A$ v) $\Gamma \cdot \Delta$ vi) $\Delta \cdot \Gamma$

4) Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Να

υπολογιστούν:

i) Η ορίζουσα του πίνακα $B \cdot A$

ii) Ο πίνακας $(A \cdot B)^T$

5) Δίνονται οι πίνακες: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν:

i) Οι πίνακες: $X = A \cdot B$ και $Y = A \cdot A^T$

ii) Ο αντίστροφος του πίνακα X

6) Να βρεθεί (εάν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα:

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7) α. Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

β. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = -3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

8) Δίνεται ο πίνακας: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

i) Να βρεθεί ο αντίστροφος του A .

ii) Να λυθεί το σύστημα: $A \cdot X = B$ όπου $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$