



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΥΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΡΟΝΟΙΑΣ

**ΤΜΗΜΑ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

*Γεώργιος Ε. Νίνος*

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΙΑ  
ΤΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

(Θεωρία Σφαλμάτων - Σημαντικά Ψηφία - Στοιχεία  
Στατιστικής & Θεωρίας Πιθανοτήτων - Γραφική  
Ανάλυση - Παραδείγματα - Ασκήσεις)

**ΑΘΗΝΑ 2018**

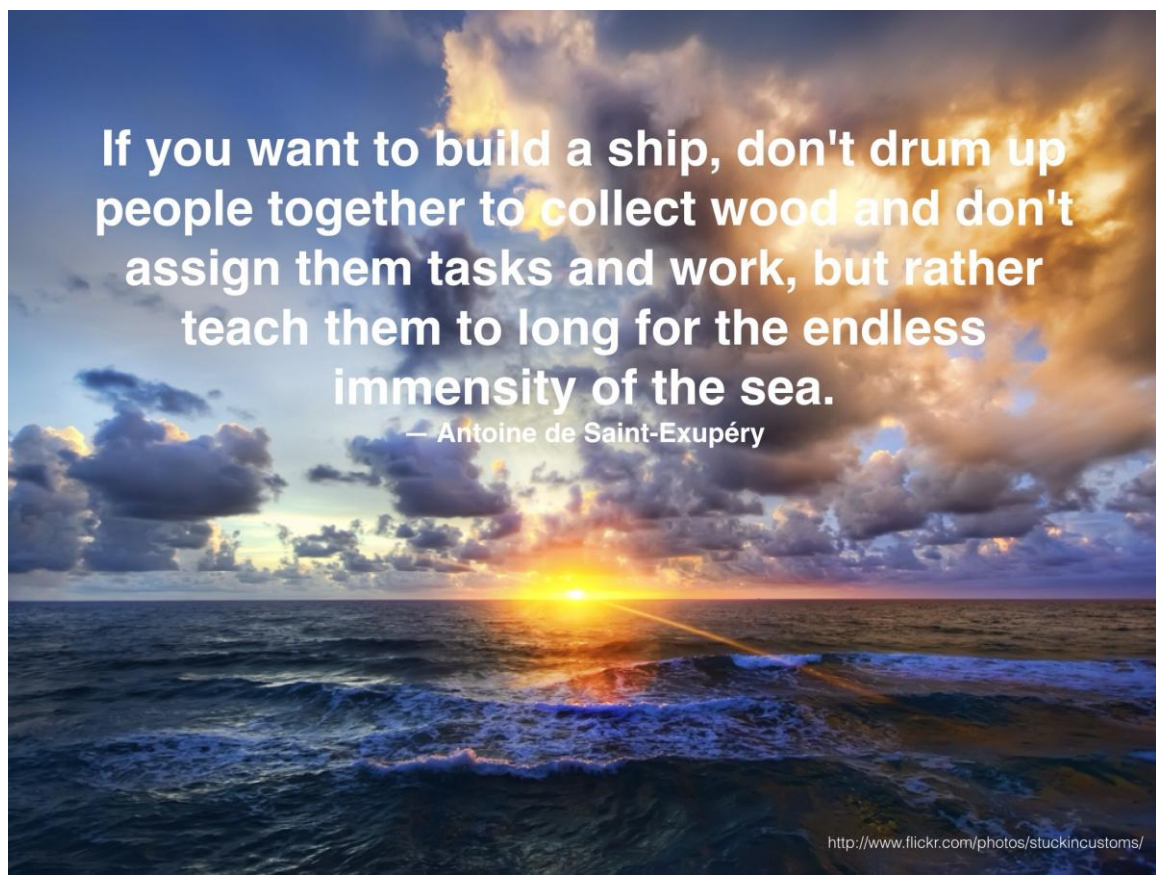
## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I.	ΜΕΤΡΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ–ΑΚΡΙΒΕΙΑ & ΠΙΣΤΟΤΗΤΑ .....	4
II.	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΝΑΚΡΙΒΕΙΩΝ ΜΕΤΡΗΤΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ	
	A. ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ .....	6
	B. ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ .....	8
III.	ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	
	A. ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ .....	9
	B. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ .....	9
IV.	ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ .....	11
V.	ΑΠΟΛΥΤΟ & ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ .....	15
VI.	ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ	
	A. ΓΕΝΙΚΑ .....	18
	B. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ & ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ .....	19
	Γ. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ .....	23
	Δ. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ & ΣΦΑΛΜΑΤΑ .....	24
	E. ΑΣΚΗΣΕΙΣ .....	25
VII.	ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ	
	A. ΓΕΝΙΚΑ .....	27
	B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ .....	32
VIII.	ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ	
	A. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΙΝΑΚΑ .....	33
	B. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ .....	35
	Γ. ΑΝΑΦΟΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ – ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ .....	36
	Δ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ .....	37
IX.	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	
	A. ΓΕΝΙΚΑ .....	37
	B. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ .....	41
	Γ. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ .....	41
	Δ. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ .....	44
	E. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ .....	46

---

---

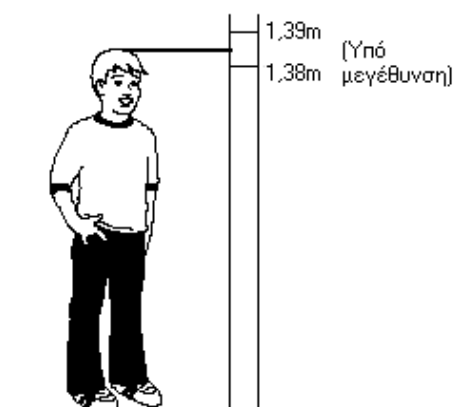
ΣΤ.	ΑΣΚΗΣΕΙΣ .....	48
<b>Χ.</b>	<b>ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</b>	
Α.	ΓΕΝΙΚΑ .....	49
Β.	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΜΕΓΕΘΗ .....	52
Γ.	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΜΕΓΕΘΗ .....	57
Δ.	ΧΑΡΑΞΗ ΣΕ ΗΜΙΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ (SEMI-LOG) ΧΑΡΤΙ .....	60
Ε.	ΧΑΡΑΞΗ ΣΕ ΠΛΗΡΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ (LOG-LOG) ΧΑΡΤΙ ...	63
ΣΤ.	ΑΣΚΗΣΕΙΣ .....	66



## I. ΜΕΤΡΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ - ΑΚΡΙΒΕΙΑ & ΠΙΣΤΟΤΗΤΑ.

Αν κάποιος σας ρωτήσει «Τί μήκος έχει ένας δίμετρος χάρακας;», αφού πρώτα παραξενευτείτε κι αναρωτηθείτε μήπως σας κοροϊδεύει, προφανώς θα απαντήσετε: «Δύο μέτρα» ή «200 εκατοστά». Πιο κάτω θα προσπαθήσουμε μαζί να διαπιστώσουμε ότι η απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση, όπως λίγο-πολύ όλα τα πράγματα στη Φυσική, δεν είναι τόσο προφανής όσο φαίνεται.

Στην πραγματικότητα, είναι πολύ σημαντικά κι ενδιαφέροντα τα ζητήματα που ανακύπτουν όταν επιχειρούμε να μετρήσουμε ένα φυσικό μέγεθος και στην προκειμένη περίπτωση ένα μήκος με το συγκεκριμένο χάρακα. Ας πραγματοποιήσουμε ένα υποθετικό πείραμα: Εστω ότι θέλετε να μάθετε τί ύψος έχει ο μικρός σας ξάδερφος (βλ. Σχήμα I.1.). Του ζητάτε λοιπόν να σταθεί όρθιος δίπλα στον πιο πάνω κανόνα και με μια πρόχειρη ματιά αποφαίνεστε ότι το ύψος του είναι περίπου 1,4 m. Ομως δεν είστε ευχαριστημένοι από την ακρίβεια της μέτρησης σας, γιατί καταλαβαίνετε ότι το πραγματικό του ύψος μπορεί να κυμαίνεται ανάμεσα στα 1,35 m και 1,45m, κι έτσι αποφασίζετε να πάρετε μία μετρητική ταινία, ώστε να έχετε μία πιο ακριβή μέτρηση.



ΣΧΗΜΑ I.1.

Το αποτέλεσμα της νέας σας, πιο προσεκτικής, μέτρησης είναι 1,385m. Στην πραγματικότητα, το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος σας, το 0,005m, είναι προσεγγιστικό, επειδή η μικρότερη υποδιαίρεση της μετρητικής σας ταινίας είναι ένα εκατοστό και δεν ταυτίζεται ακριβώς με το ανώτατο σημείο του κεφαλιού του μικρού σας ξάδερφου. Πάντως, είσαστε σίγουροι ότι το ύψος του κυμαίνεται ανάμεσα στα 1,380 και 1,390 m. Με αυτόν ακριβώς τον τρόπο, δηλαδή χρησιμοποιώντας ολοένα και πιο ακριβή όργανα μέτρησης, θα προσεγγίζατε συνέχεια μια πιο ακριβή τιμή.

Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να καταστήσουμε σαφές, ότι αξιωματικά και θεωρητικά, δεν υφίσταται κάποιος συγκεκριμένος λόγος (μιλώντας στα πλαίσια της Κλασσικής Φυσικής, όπου δεν εμπλέκονται κβαντομηχανικές θεωρήσεις), εξ αιτίας

του οποίου να μην μπορούμε να έχουμε μία απολύτως ακριβή μέτρηση του εν λόγω ύψους. Από τη μέχρι τώρα συζήτηση, όλα φαίνονται να εξαρτώνται από την πιστότητα του οργάνου μέτρησης που διαθέτουμε. Δηλαδή το πρόβλημα τίθεται ως εξής: «Δώσε μου καλύτερο (ακριβότερο;) όργανο, να σου κάνω καλύτερη μέτρηση».

Ξαναγυρνώντας στο παράδειγμα με τη μέτρηση του ύψους του μικρού μας ξάδερφου, και αναζητώντας μία ακόμη καλύτερη μέτρηση, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό όργανο, το αποκαλούμενο «Συμβολόμετρο Laser». Αυτό το πανάκριβο κι εξαιρετικά ακριβές όργανο μέτρησης μας επιτρέπει να μετρούμε μήκη με ακρίβεια αυτήν του μήκους κύματος του φωτός του laser, δηλαδή περίπου  $6 \times 10^{-7}$  m. Εντυπωσιακό, αλλά όχι απόλυτα ακριβές! Αν συνεχίσουμε όμοια σκεπτόμενοι για λίγο ακόμα, θα διαπιστώσουμε ότι το πρόβλημα δεν τελειώνει ποτέ, ανεξάρτητα από το «πόσο κοντά μεταξύ τους» βρίσκονται οι υποδιαιρέσεις του οργάνου μας.

Όμως υπάρχει και μία διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος της μέτρησης που δεν έχουμε συνυπολογίσει ως τώρα. Ποια σημεία των άκρων του υπό μέτρηση αντικειμένου πρέπει να ληφθούν ως αρχή και ως τέλος της μέτρησης μας; Δηλαδή, τα άκρα του αντικειμένου μας (π.χ. το κεφάλι ή τα παπούτσια του μικρού μας ξάδερφου) απέχουν πολύ από το να χαρακτηριστούν «λεία», παρουσιάζουν πολλές ανομοιομορφίες, τραχύτητες και οδοντώσεις. Ποια από αυτές τις ανομοιομορφίες πρέπει να θεωρήσουμε ως αρχή και ως τέλος της μέτρησης μας; Ακόμη περισσότερο, τί νόημα έχει ο όρος «άκρο» όταν το μετρούμενο αντικείμενο είναι τραχύ; Και τί εννοούμε τέλος πάντων, όταν λέμε ότι επιχειρούμε να μετρήσουμε το ύψος του συγκεκριμένου προσώπου, όταν δε μπορούμε να ξέρουμε με απόλυτη ακρίβεια τα όρια της μέτρησης μας. Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι **«γνωρίζουμε την τιμή ενός μετρούμενου μεγέθους, μόνο στα πλαίσια των ανακρίβειών ή των σφαλμάτων που προσδιορίζουμε και αναφέρουμε με τη μετρητική διαδικασία»**. Αυτά τα αναφερόμενα σφάλματα πρέπει να συμπεριλαμβάνουν και τις **ανακρίβειες που σχετίζονται με το όργανο μέτρησης** και αυτές που σχετίζονται με όσα αναπτύχθηκαν έως τώρα στην παρούσα παράγραφο και που χάριν συντομίας θα τα ονομάσουμε **«διαδικαστικούς περιορισμούς»**.

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε ότι και οι δύο προαναφερθέντες παράγοντες σφαλμάτων σχετίζονται με την **ΑΚΡΙΒΕΙΑ** της μέτρησης μας και αφορούν στην **επαναληψιμότητα της μετρητικής διαδικασίας**, δηλαδή στο κατά πόσο επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η ακρίβεια ποσοτικοποιείται από τις διακυμάνσεις που παρατηρούνται κατά τις επαναλαμβανόμενες και πολλαπλές μετρήσεις του μεγέθους αυτού. Σε όλα όσα αναφέρθηκαν ως τώρα επισημάναμε δύο αιτίες των διακυμάνσεων αυτών: την **«πεπερασμένη διακριτική ικανότητα του οργάνου μέτρησης»** και τους **«διαδικαστικούς περιορισμούς»**, δηλαδή την αδυναμία επακριβούς αναπαραγωγής της μετρητικής διαδικασίας.

Υπάρχει όμως και μία δεύτερη κατηγορία σφαλμάτων, τα σχετιζόμενα με την **ΠΙΣΤΟΤΗΤΑ** της μέτρησης μας. Με τον όρο «πιστότητα» εννοούμε το πόσο κοντά βρίσκεται η μετρούμενη με την πραγματική τιμή ενός φυσικού μεγέθους. Η πιστότητα ποσοτικοποιείται από τις συσσωρευόμενες ανακρίβειες (αστοχίες) κατά την προσπάθεια εντοπισμού μιας μέτρησης, σε σύγκριση με την πιστότητα του πρότυπου μετρητικού οργάνου. Τα διάφορα κράτη έχουν θεσπίσει σχετικούς

καταλόγους πρότυπων τιμών για τις μονάδες μέτρησης των φυσικών μεγεθών, με τις οποίες οι επιστήμονες και οι μηχανικοί μπορούν να συγκρίνουν τις μετρήσεις τους. Για να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε και να εκτιμήσουμε την πιστότητα της μέτρησης ύψους του αρχικού παραδείγματος, θα πρέπει να «αγοράσουμε» ένα προσεκτικά «καλυμπραρισμένο» χάρακα, για τον οποίο να είναι γνωστή η πραγματική τιμή του μήκους του σε σύγκριση με το πρότυπο μέτρο.

Σημειώνουμε ότι, ποσοτικά, η πιστότητα δεν μπορεί ποτέ να είναι καλύτερη από την ακρίβεια, αλλά η ακρίβεια είναι συνήθως καλύτερη από την πιστότητα. Για να γίνουν πιο κατανοητά τα προηγούμενα, ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα: Είναι σχετικά εύκολο να αγοράσει κάποιος ένα θερμόμετρο, το οποίο να αποδεικνύεται ότι μπορεί με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις να καθορίζει τη θερμοκρασία ενός αντικειμένου με ακρίβεια χιλιοστού του βαθμού Κελσίου. Υποθέστε ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι 21,019 βαθμούς Κελσίου, με το σφάλμα ακρίβειας να υπολογίζεται στο 0,001 °C. Ομως, στην καλύτερη περίπτωση μπορείτε να ελπίζετε σε ένα σφάλμα πιστότητας όχι μικρότερο από 0,05 °C. Κατά την παρουσία σας στα Εργαστήρια Φυσικής, τα σφάλματα που θα υπολογίζετε και θα αναφέρετε θα είναι πάντοτε σφάλματα ακρίβειας και όχι σφάλματα πιστότητας, αλλά στο υπόλοιπο της ζωής σας και της καριέρας σας, ο ρόλος που θα διαδραματίζουν και τα δύο θα είναι σημαντικότατος. Για παράδειγμα, αν είστε γιατρός και μετράτε τη θερμοκρασία ενός ασθενούς προσεκτικά και κατ'επανάληψη, αλλά το θερμόμετρο που χρησιμοποιείτε αποκλίνει κατά 2 °C από την πραγματική θερμοκρασία, η μέτρηση σας είναι τελείως αναξιόπιστη και η επικείμενη διάγνωση θα είναι τελείως επισφαλής.

Συνοψίζοντας την έως τώρα συζήτηση, θα λέγαμε ότι **τα Σφάλματα είναι εγγενή, συμφυή και αναπόφευκτα σε κάθε μετρητική προσπάθεια κι εργαστηριακή διερεύνηση. Δεν πρέπει ποτέ να τα αμελούμε ή να τα παραβλέπουμε. Αντίθετα, πρόκειται για ένα ζήτημα θεμελιακής σημασίας για την ισχύ και την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας και πρέπει πάντα να τα λαμβάνουμε υπόψη, ανεξάρτητα με το ποιο είναι το εκάστοτε πείραμα.**

## **II. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΝΑΚΡΙΒΕΙΩΝ ΜΕΤΡΗΤΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ.**

### ***A. ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ.***

Μερικά παραδείγματα μετρητικών οργάνων τα οποία διαθέτουν αναλογικές κλίμακες είναι: οι βαθμολογημένοι κανόνες, οι μετρητικές ταινίες, τα αναλογικά ηλεκτρικά πολύμετρα, τα αναλογικά θερμόμετρα, τα χρονόμετρα με δείκτες, κ.α. Ακολουθώντας, εξετάζουμε εκτενέστερα δύο συγκεκριμένα παραδείγματα από αυτά.

#### **Βαθμολογημένος κανόνας.**

Υποθέστε ότι θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος ενός μολυβιού με τη βοήθεια ενός κοινού χάρακα, όπως απεικονίζεται στο πιο κάτω σχήμα II.1. Η πιο συνήθης

διαδικασία (με όλες τις επιφυλάξεις και τις αμφιβολίες που συζητήθηκαν στην παράγραφο Ι) είναι να τοποθετήσουμε το ένα άκρο του μολυβιού έτσι ώστε να προβάλλεται στο μηδέν της κλίμακας του χάρακα. Βέβαια, κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο, αλλά έτσι συνηθίζεται. Τώρα δε μένει τίποτε άλλο από το ν'αποφασίσουμε σε ποια ένδειξη του χάρακα αντιστοιχίζεται ή προβάλλεται η μύτη του μολυβιού.



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.1.

Στη δεδομένη περίπτωση, κατά πάσα πιθανότητα θ'αποφανθείτε ότι η ζητούμενη μέτρηση κυμαίνεται μεταξύ της ένδειξης των 35 και των 37 χιλιοστών. Μάλιστα, η τελική αναφορά του αποτελέσματος, θα μοιάζει κάπως έτσι:

Καλύτερη εκτίμηση του μήκους του μολυβιού = 36 mm

Πιθανότερο εύρος: 35,5 mm με 36,5 mm

Αρα,  $35,5 \text{ mm} < \text{μήκος} < 36,5 \text{ mm}$

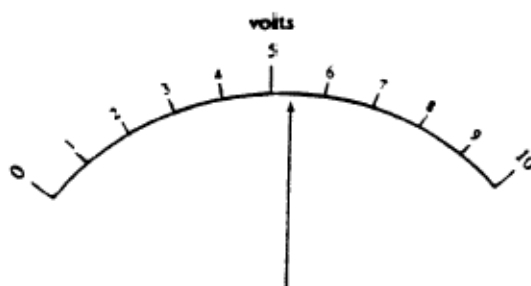
### Αναλογικό Βολτόμετρο.

Εστω ότι μας ζητούν να αποφανθούμε σχετικά με την τιμή της τάσης στην οποία αντιστοιχεί η ένδειξη του βολτομέτρου του ακόλουθου σχήματος ΙΙ.2.. Εδώ, ο χωρισμός της κλίμακας μεταξύ γειτνιαζουσών ενδείξεων είναι αρκετά ευρύς, ώστε να μας επιτρέπει προσεγγίσεις της τάξης του δεκάτου (0,1) του Volt. Αρα, μία πολύ λογική ανάγνωση της ένδειξης του βολτομέτρου θα μπορούσε να είναι:

Καλύτερη εκτίμηση της τιμής της τάσης = 5,3 Volts

Πιθανότερο εύρος: 5,2 Volts με 5,4 Volts

Αρα,  $5,2 \text{ Volts} < \text{τάση} < 5,4 \text{ Volts}$



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.2.

Αυτή η διαδικασία, της εκτίμησης δηλαδή μίας πειραματικής ή μετρούμενης τιμής ανάμεσα σε διαδοχικές ή γειτνιάζουσες ενδείξεις μιας βαθμολογημένης κλίμακας, αποδίδεται με τον όρο «**παρεμβολή**» (Interpolation).

## **B. ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΚΑΙΜΑΚΩΝ.**

Στην περίπτωση που μας ζητηθεί να αναγνώσουμε την ένδειξη ενός ψηφιακού οργάνου, π.χ. ενός ψηφιακού χρονομέτρου με ακρίβεια εκατοστού του δευτερολέπτου (0,01 sec), τότε κάλλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η προσέγγιση του σφάλματος λειτουργεί όπως ακριβώς στα παραδείγματα των αναλογικών οργάνων. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι το χρονόμετρο μας αναγράφει ένα χρόνο 127,35 sec. Σύμφωνα με τα προηγούμενα θεωρούμε ότι ο πραγματικός χρόνος κυμαίνεται μεταξύ

$$127,345 \text{ s} < \text{χρόνος} < 127,355 \text{ s}$$

Το όριο ανακρίβειας που είναι εγγενές στη διαδικασία χειρισμού και ανάγνωσης της ένδειξης ενός μετρητικού οργάνου συχνά καλείται «**Οργανικό Οριο Σφάλματος**» ή «**Σφάλμα Ανάγνωσης**» ή «**Διακριτική Ικανότητα**» (**Instrumental Limit of Error {ILE}** ή **Instrumental Resolution**) και συμβολίζεται διεθνώς με το μικρό ελληνικό γράμμα «**δ**».

Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι, κατά την αναφορά των αποτελεσμάτων των μετρήσεων μας, η προτιμότερη προσέγγιση είναι ν' αναγράφουμε την ένδειξη του εκάστοτε μετρητικού οργάνου που διαθέτουμε, ακολουθούμενη από το εύρος της ανακρίβειας, εκπεφρασμένης με τη μορφή  $\pm$  περιοχής σφάλματος, δηλαδή:

$$Q \text{ (βέλτιστα εκτιμώμενο)} \pm \delta Q$$

Εχοντας υιοθετήσει αυτόν τον τρόπο γραφής, τα πιο πάνω παραδείγματα αναφέρονται ως εξής:

$$\text{Μήκος } L: L \pm \delta L = (36,0 \pm 0,5) \text{ mm}$$

$$\text{Τάση } V: V \pm \delta V = (5,2 \pm 0,1) \text{ Volts}$$

$$\text{Χρόνος } t: t \pm \delta t = (127,350 \pm 0,005) \text{ sec}$$

## **III. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ.**

Απ' όσα συζητήθηκαν στην παράγραφο I κατανοήσαμε ότι τα σφάλματα είναι ένα αναπόφευκτο χαρακτηριστικό κάθε μετρητικής διαδικασίας και πειραματικής διερεύνησης. Στην πράξη, τα σφάλματα συνηθέστερα ταξινομούνται ως **(Α) Τυχαία** και **(Β) Συστηματικά**, κατ' αντιστοιχία με το αν σχετίζονται με την ακρίβεια ή με την πιστότητα της μετρητικής διαδικασίας.

## **A. ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ.**

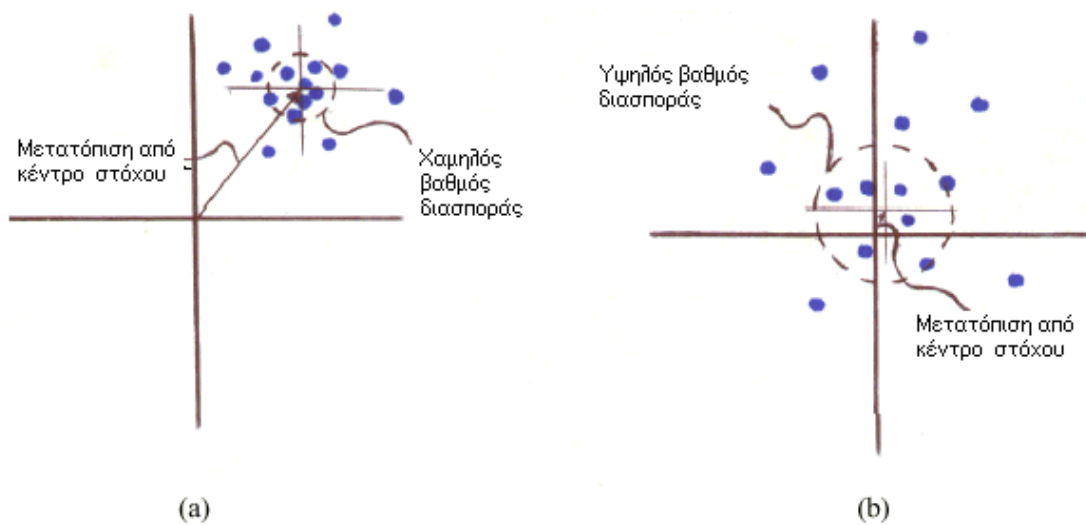
Τα Τυχαία Σφάλματα σχετίζονται με την Ακρίβεια μιας μέτρησης και είναι εκείνα που ανακύπτουν στατιστικά από την ανάλυση των επαναλαμβανόμενων και πολλαπλών μετρήσεων. Ειδικότερα, ποσοτικοποιούνται με καλύτερη ακρίβεια (και η τάξη μεγέθους τους ελαττώνεται) από την αυξανόμενη πολλαπλότητα των μετρήσεων. Τα Τυχαία Σφάλματα διαπράττονται αναπόφευκτα σε κάθε πειραματική διαδικασία, ακόμα και αν θεωρήσουμε ότι ο πειραματιστής εξαντλεί την προσοχή και την επιμέλειά του. Οφείλονται σε αστάθμητους κι ανεξέλεγκτους παράγοντες (τυχαίες διακυμάνσεις). Επενεργούν άλλοτε κατά τη μία και άλλοτε κατά την άλλη κατεύθυνση, «διασπείροντας» τις πειραματικές τιμές που καταγράφουμε «εκατέρωθεν» (δηλαδή δεξιά κι αριστερά) της πραγματικής τιμής του υπό μέτρηση φυσικού μεγέθους. **Όλα τα σφάλματα που θα κληθείτε να προσδιορίσετε ποσοτικά, κατά την εξάσκησή σας στα Εργαστήρια Φυσικής, θα είναι πάντοτε τυχαία.** Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα τυχαίου σφάλματος αποτελούν οι παρατηρούμενες μικροδιαφοροποιήσεις στην καταγραφή του χρόνου πραγματοποίησης ενός φαινομένου. Ενδελεχέστερη ανάλυση της -εξαιρετικού ενδιαφέροντος- στατιστικής διαμόρφωσης των τυχαίων σφαλμάτων παρατίθεται στην παράγραφο ΙΧ.

## **B. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ.**

Τα Συστηματικά Σφάλματα εκφράζουν την Πιστότητα μίας μέτρησης. Οφείλονται σε λόγους είτε **(α) Θεωρητικούς** (Χάριν απλοποίησης της θεωρητικής προσέγγισης ενός φαινομένου, αμελούμε την επίδραση κάποιου παράγοντα και ως εκ τούτου η μέτρηση μας δεν το λαμβάνει υπόψη), είτε **(β) Πρακτικούς** ( Βρίσκονται «εκτός δικαιοδοσίας» του πειραματιστή και συνήθως οφείλονται σε κατασκευαστική ατέλεια του χρησιμοποιούμενου μετρητικού οργάνου, η οποία συνίσταται στο ότι δεν ομοιάζει επακριβώς του θεωρούμενου ως πρότυπο). Τα συστηματικά σφάλματα επενεργούν πάντοτε κατά την ίδια κατεύθυνση μετατοπίζοντας «συστηματικά» την καταγραφόμενη τιμή του υπό μέτρηση μεγέθους είτε μόνιμα σε μεγαλύτερη, είτε μόνιμα σε μικρότερη ένδειξη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα διάπραξης συστηματικού σφάλματος είναι το εξής: Υποθέστε ότι επιχειρούμε τη μέτρηση ενός μήκους με ένα κανόνα (χάρακα). Κι έστω ότι βρίσκουμε το εν λόγω μήκος να έχει την τιμή των 8 μέτρων. Από τη στιγμή που πληροφορηθούμε ότι ο συγκεκριμένος χάρακας που χρησιμοποιήσαμε δεν έχει μήκος ακριβώς 1m ή 100cm, όπως νομίζαμε, αλλά -λόγω κατασκευαστικών ατελειών- είναι κάπως «ελαττωματικός» με συνέπεια το πραγματικό του μήκος να μην είναι 100cm, αλλά 98cm για παράδειγμα. Οπότε, το υπό μέτρηση μέγεθος (εδώ, μήκος) δεν είναι  $8 \times 100\text{cm} = 8$  μέτρα, αλλά  $8 \times 98\text{cm}$ . Μπορείτε τώρα μόνι σας να φανταστείτε ένα παρεμφερές σενάριο για μία υποθετική μέτρηση μάζας με μία «ελαττωματική» ζυγαριά, που δε μετρά «πραγματικά» κιλά, αλλά είναι έτσι κατασκευασμένη ώστε να καταγράφει το 90% κάθε «πραγματικού» κιλού. **Προσέξτε τα ακόλουθα λεπτά σημεία:** (α) Κατά τη διάρκεια κάθε πειράματος, γνωρίζω ότι κατά πάσα πιθανότητα υποπίπτω σε συστηματικό σφάλμα. Ομως, δε μπορώ να εκτιμήσω ποσοτικά την τάξη μεγέθους του σφάλματος που διαπράττω, παρά μόνο αν συγκρίνω το μετρητικό όργανο που χρησιμοποιώ με κάποιο άλλο που θεωρείται πρότυπο. Αυτός είναι ο μόνος τρόπος να ποσοτικοποιήσω τα συστηματικά σφάλματα. (β) Σε μία πειραματική διαδικασία κι εφ'όσον το μετρητικό

όργανο που χρησιμοποιώ είναι πάντα το ίδιο, το συστηματικό σφάλμα που διαπράττω είναι συνεχώς το ίδιο και μάλιστα μένει ανεπηρέαστο από το πόσες φορές θα εκτελέσω το πείραμα και από το πόσες μετρήσεις θα καταγράψω.

Σε αντίθεση, τα τυχαία σφάλματα σχετίζονται με την Ακρίβεια μιας μέτρησης και περιγράφονται από την επαναληψιμότητα της συγκεκριμένης μέτρησης. Ο διαχωρισμός μεταξύ αυτών των δύο εννοιών γίνεται σαφέστερος με το πιο κάτω παράδειγμα του σχήματος III.1: Εστω ότι έχουμε αυτές τις δύο εικόνες που προκύπτουν από τα ίχνη των βολών ενός όπλου σε ένα στόχο. Το όπλο σημαδεύει, με τον ίδιο τρόπο και στις δύο περιπτώσεις, στο κέντρο ενός «πραγματικού» στόχου. Σημειώνουμε ότι το πού θα καταλήξει η κάθε σφαίρα και αντίστοιχα το ίχνος που αυτή θα αποδώσει, μεταβάλλονται τυχαία και δε μπορούν να προβλεφθούν εκ των προτέρων.



ΣΧΗΜΑ III.1.

Ενα πρώτο σχόλιο που μπορεί να διατυπωθεί σχετικά με την ευστοχία των δύο περιπτώσεων, είναι ότι και στις δύο περιπτώσεις, το κέντρο των βολών είναι συστηματικά μετατοπισμένο από το πραγματικό κέντρο του στόχου, λιγότερο στα ίχνη της εικόνας (III.1.b) και περισσότερο στα ίχνη της εικόνας (III.1.a). Υστερα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι στην περίπτωση (III.1.b) τα ίχνη των βολών είναι περισσότερο «απλωμένα» ή «σκόρπια», απ'ότι στην περίπτωση (III.1.a) όπου είναι σαφώς πιο «συγκεντρωμένα» κι «εστιασμένα». Αυτή η κατάσταση αποδίδεται με τον όρο «**διασπορά**» ή «διασκεδασμός». Δηλαδή, λέμε ότι η κατανομή των σημείων στο σχήμα (III.1.b) έχει μεγαλύτερη διασπορά από αυτήν του σχήματος (III.1.a). Ο όρος **ΑΚΡΙΒΕΙΑ** προτάθηκε για να περιγράψει την αντίθετη έννοια της διασποράς: μεγάλη ακρίβεια συνεπάγεται μικρή διασπορά. Μιλώντας σ'αυτήν τη βάση, η εικόνα (III.1.a) έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από την (III.1.b). Αντίθετα, η **ΠΙΣΤΟΤΗΤΑ** της εικόνας (III.1.b) υπερέχει αυτήν της εικόνας (III.1.a), ή αλλιώς η εικόνα (III.1.b) χαρακτηρίζεται από μικρότερο συστηματικό σφάλμα.

## IV. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.

Στα παραδείγματα της παραγράφου II οι αναφερθείσες ανακρίβειες σε μία εξατομικευμένη μέτρηση σχετίζονταν με το Οργανικό Οριο Σφάλματος ή Σφάλμα Ανάγνωσης, όπως ειπώθηκε. Ειδικότερα, στο τελευταίο παράδειγμα της παραγράφου II με το ψηφιακό χρονόμετρο, το σφάλμα ανάγνωσης ήταν  $\delta t = 0,005 \text{ sec}$ . Ομως - όπως πολύ εύστοχα μπορεί να επισημάνει κάποιος- υπάρχουν δυναμικά προβλήματα σχετιζόμενα με τις ανθρώπινες αντιδράσεις και το συγχρονισμό του παρατηρητή, τα οποία μπορούν να προκαλέσουν ανακρίβειες πολύ μεγαλύτερες από το σφάλμα ανάγνωσης. Ο καλύτερος τρόπος για να προσεγγίσουμε ποσοτικά το σφάλμα -όπως αποδεικνύει η στατιστική μας, αλλά και όπως εύκολα μπορούμε να καταλάβουμε και μόνοι μας- είναι **να εκτελέσουμε πολλαπλές, εντελώς επαναλήψιμες και ανεξάρτητες μεταξύ τους μετρήσεις** της συγκεκριμένης φυσικής ποσότητας. Εννοείται ότι όσο περισσότερες φορές μετρήσουμε, τόσο το καλύτερο. Εστω ότι χάριν ευκολίας κι απλότητας, εκτελούμε τρεις φορές τη χρονομέτρηση του αυτού φαινομένου. Οι χρόνοι που καταγράφουμε είναι οι εξής: 127,35 sec, 127,83 sec & 127,04 sec. Οπότε, συνοψίζοντας:

$$\begin{aligned} \text{Μέσος χρόνος (βέλτιστα εκτιμώμενος)} &= 127,41 \text{ sec} \\ \text{Εύρος διακύμανσης} &= 127,04 \text{ sec} \text{ εως } 127,83 \text{ sec} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε άρα ότι η αβεβαιότητα εμφανίζεται στο μέρος του δέκατου του δευτερολέπτου (πρώτο δεκαδικό ψηφίο) και όχι στο μέρος του χιλιοστού του δευτερολέπτου (τρίτο δεκαδικό ψηφίο), όπως θα περίμενε κάποιος κρίνοντας από το σφάλμα ανάγνωσης του χρονομέτρου. Και βέβαια ο τρόπος με τον οποίο θ'αναφέραμε το αποτέλεσμα των μετρήσεων μας θα ήταν

$$t \pm \delta t = (127,4 \pm 0,4) \text{ sec}$$

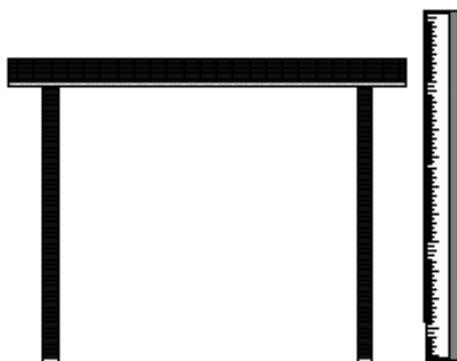
αν θέλαμε να είμαστε σύμφωνοι με όσα έχουμε ήδη πει περί ενδεδειγμένου τρόπου αναγραφής ενός πειραματικού αποτελέσματος με τη μορφή:

$$\boxed{Q \text{ (βέλτιστα εκτιμώμενο)} \pm \delta Q}$$

Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά, ένα ακόμα παράδειγμα στο οποίο θα επιχειρήσουμε να ποσοτικοποιήσουμε το σφάλμα με έναν πιο συστηματικό και μαθηματικά αξιόπιστο τρόπο από την απλή «εκτίμηση».

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι, ο καλύτερος τρόπος για να προσδιορίσουμε τα τυχαία σφάλματα είναι να επιχειρήσουμε να μετρήσουμε την ίδια ποσότητα πολλές φορές ανεξάρτητα. Οι διακυμάνσεις των τιμών των διάφορων μετρήσεων γύρω από τη «μέση τιμή» θα μας δώσουν ένα μέτρο του σφάλματος. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε να μετρήσουμε το ύψος του τραπέζιου που φαίνεται στο πιο κάτω Σχήμα IV.1. κι έστω ότι για καλύτερη αξιοπιστία, αποφασίζουμε να το μετρήσουμε 10 φορές. Τα αποτελέσματα αυτών των 10 ανεξάρτητων μεταξύ τους μετρήσεων παρατίθενται αμέσως ακολούθως. Θα προχωρήσουμε μαζί βήμα-βήμα:

92,3 cm	92,4 cm
92,4 cm	92,4 cm
92,3 cm	92,4 cm
92,5 cm	92,6 cm
92,3 cm	92,5 cm



ΣΧΗΜΑ IV.1.

Με μια απλή ματιά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το σφάλμα ανάγνωσης του συγκεκριμένου κανόνα είναι περίπου 0,1 cm, επειδή οι περισσότερες τιμές κείνται στο διάστημα μεταξύ 92,3 cm έως 92,5 cm. Αρχικά, θα εκτιμήσουμε το μετρητικό σφάλμα με έναν κάπως υποκειμενικό τρόπο βασισμένο στην κρίση και την εμπειρία μας. Ξέρουμε ότι το σφάλμα ανάγνωσης σε ένα δοθέν μετρητικό όργανο είναι πιθανότατα της ίδιας τάξης μεγέθους με τη μικρότερη υποδιαίρεση του. Αλλά, ως γνωστόν, τα διάφορα μετρητικά όργανα ποικίλλουν πάρα πολύ, όσον αφορά στην αξιοπιστία της μικρότερης υποδιαίρεσης, έτσι πρέπει σε κάποιο βαθμό να εμπλακεί και η δική μας κρίση. Αν χρησιμοποιούμε έναν μετρητικό κανόνα η μικρότερη υποδιαίρεση του οποίου είναι 1 mm (χιλιοστό του μέτρου) και η μέτρηση ενός μήκους μας δίνει αποτέλεσμα 92,4 cm, τότε για να είμαστε σύμφωνοι με όσα συζητήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους θα πρέπει ν'αναγράψουμε το αποτέλεσμα με τη μορφή  $(92,4 \pm 0,1)$  cm. Ομως, η εμπειρία μας αποδεικνύει ότι μετρήσεις σαν και την προκειμένη μπορούν να γίνουν αρκετά πιο ακριβείς, με σφάλμα γύρω στο 0,01 mm, στα χέρια ενός έμπειρου πειραματιστή.

Στον προσδιορισμό του σφάλματος σε μία εξατομικευμένη μέτρηση εμπλέκονται πολύ περισσότεροι παράγοντες από το οργανικό όριο σφάλματος και μόνο. Για να καταστήσουμε σαφέστερο τον ισχυρισμό μας αυτό, παραθέτουμε ακολούθως ένα αρκετά εξεζητημένο παράδειγμα. Εστω ότι μας ζητούσαν να μετρήσουμε με τη βοήθεια ενός βαθμολογημένου κανόνα το ύψος του τραπεζιού του Σχ. IV.1., το οποίο στέκεται πάνω σ'ένα πυκνό και μαλακό τάπητα.

Αυτή είναι μία αρκετά γνώριμη σε όλους μας διαδικασία και δε χρειάζεται να μας δοθούν ιδιαίτερες οδηγίες σχετικά με το πώς θα την διεκπεραιώσουμε: Στερεώνουμε το χάρακα δίπλα στο τραπέζι –κατά προτίμηση δίπλα σ'ένα πόδι- και προσέχουμε ώστε η πάνω ακμή του τραπεζιού να ευθυγραμμίζεται πλήρως με μία χιλιοστομετρική ένδειξη (γραμμή) του χάρακα. Ωραία! Τί γίνεται όμως με το άλλο άκρο του χάρακα, αυτό που ακουμπά στο χαλί; Πόσο καλά ευθυγραμμίζεται με το κάτω άκρο του ποδιού του τραπεζιού που κι αυτό ακουμπά στο χαλί; Σε τελική

ανάλυση το πρόβλημα, όπως τίθεται σ' αυτήν την περίπτωση, είναι πρόβλημα καθορισμού του σε ποιο σημείο ευθυγραμμίζονται το κάτω άκρο του χάρακα με τη βάση του ποδιού του τραπεζιού. Ακόμη και αν η κλίμακα του χάρακα είναι εύκολα αναγνώσιμη με ακρίβεια  $\pm 2$  mm ή καλύτερη, το προαναφερθέν πρόβλημα ευθυγράμμισης θα επιφέρει μία πρόσθετη ανακρίβεια περίπου 1 cm. Κάτω από αυτές τις περιστάσεις ο εν λόγω πειραματιστής θα ανέφερε το αποτέλεσμα της μέτρησης του με τη μορφή  $(1,23 \pm 0,01)$  m, για παράδειγμα. Όπως είδαμε λοιπόν, στον προσδιορισμό του σφάλματος εμπλέκονται πολύ περισσότεροι παράγοντες από την ελάχιστη υποδιαίρεση του οργάνου.

Ας ξαναγυρίσουμε όμως στον πίνακα τιμών μας με τις 10 μετρήσεις του ύψους του τραπεζιού, που είπαμε ότι οι περισσότερες από αυτές κυμαίνονται «κάπου» ανάμεσα στο 92,3 και 92,5 cm με το σφάλμα ανάγνωσης να είναι  $\pm 0,1$  cm. Θα συμφωνήσουμε όλοι πιστεύω, ότι είναι προτιμότερο να προσπαθήσουμε να «βρούμε» έναν τρόπο υπολογισμού του σφάλματος, παρά να μαντεύουμε διαισθητικά το σφάλμα.

Το πρώτο βήμα που έχουμε να κάνουμε, όταν έχουμε να μετρήσουμε μία φυσική ποσότητα  $x$  -την οποία για τους λόγους που είπαμε- μετράμε πολλές φορές έστω  $N$ , είναι να υπολογίσουμε τη «μέση τιμή» της σειράς των  $N$  μετρήσεων, όπως ακριβώς βρήκαμε το «μέσο όρο» της βαθμολογίας μας στο σχολείο, δηλαδή ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (\text{IV.1.})$$

όπου  $x_i$  οι μετρούμενες τιμές της φυσικής ποσότητας  $x$  (τα αποτελέσματα των μετρήσεων μας),  $N$  το πλήθος των μετρήσεων και  $\bar{x}$  ο τρόπος συμβολισμού της μέσης τιμής της ποσότητας  $x$ .

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την αποκαλούμενη «μέση απόκλιση» των επί μέρους τιμών από τη μέση τιμή, δηλαδή τη διαφορά καθεμιάς από τις μετρούμενες τιμές μας από τη μέση τιμή τους:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (\text{IV.2.})$$

(Το ελληνικό κεφαλαίο γράμμα «Δ» συμβολίζει διεθνώς τη μεταβολή ενός μεγέθους).

Όμως, για να συνεχίσουμε, δε μπορούμε ν'αρκεστούμε απλά στον υπολογισμό της μέσης τιμής των αποκλίσεων. Γιατί; Για σκεφτείτε το λίγο! Επειδή όλες οι θετικές αποκλίσεις θα «ακυρώσουν» όλες τις αρνητικές αποκλίσεις. Συνεπώς, η αμέσως επόμενη απλούστερη επιλογή μας πρέπει να είναι να υψώσουμε στο τετράγωνο (ώστε να εξαλείψουμε τα αρνητικά πρόσημα) τις μέσες αποκλίσεις, να τις αθροίσουμε, να βγάλουμε την τετραγωνική τους ρίζα και μετά να πάρουμε τη μέση τους τιμή, δηλαδή:

$$\delta x = \frac{1}{N} \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2} \quad (\text{IV.3.})$$

(Τα σφάλματα συμβολίζονται διεθνώς με το ελληνικό μικρό γράμμα «δ»)

Η ποσότητα αυτή για ευνόητους λόγους καλείται «**μέση τετραγωνική απόκλιση**» και αποτελεί το μέτρο της αναμενόμενης ανακρίβειας (ή σφάλματος) σε μία εξατομικευμένη μέτρηση. Με πιο απλά λόγια, αν ξαναμετρήσουμε την ποσότητα  $x$  θα την βρούμε να κυμαίνεται *συνήθως* (με πιθανότητα περίπου 68%) σε ένα διάστημα εύρους  $\pm \delta x$ .

Υπάρχουν δύο γενεσιουργές αιτίες για αυτό το σφάλμα. Η μία είναι η διακριτική ικανότητα του μετρητικού μας οργάνου, ή σφάλμα ανάγνωσης, και η άλλη είναι οι εγγενείς στη μετρητική διαδικασία ανακρίβειες, ή -όπως είπαμε- διαδικαστικοί περιορισμοί. Αν χρησιμοποιούμε ένα χάρακα με μικρότερη υποδιαίρεση 1mm, μπορούμε να «μμαντέψουμε» με αξιοπιστία περίπου  $\delta x = \pm 0,1$  mm, στην περίπτωση που επιχειρούμε να μετρήσουμε ένα αντικείμενο με λείες ακμές. Αν επιχειρούμε να μετρήσουμε ένα τραχύ αντικείμενο, με ασαφώς καθορισμένες ακμές, τότε η αβεβαιότητα θα αυξηθεί περίπου στο  $\delta x = \pm 1,0$  mm ή περισσότερο. Η αβεβαιότητα δε μπορεί ποτέ να γίνει μικρότερη από τη διακριτική ικανότητα του οργάνου μας και συνηθέστατα είναι μεγαλύτερη. Μόνο με την πολλαπλή επανάληψη κατά το δυνατόν περισσότερες φορές μίας μέτρησης πετυχαίνουμε τον καλύτερο προσδιορισμό του σφάλματος.

Φυσικά, το σφάλμα στη μέση τιμή πρέπει να είναι μικρότερο από το σφάλμα σε μία μεμονωμένη μέτρηση. Αποδεικνύεται ότι η αβεβαιότητα στη μέση τιμή είναι:

$$\delta \bar{x} = \frac{\delta x}{\sqrt{N}} \quad (\text{IV.4.})$$

Σ'αυτές τις δύο σχέσεις, τις (IV.3.) και (IV.4.), καταλήγουμε αν εργαστούμε λογικοφανώς. Αν θέλουμε όμως να είμαστε πιο προσεκτικοί στους συλλογισμούς μας και να απαιτήσουμε μεγαλύτερη αξιοπιστία και «αμεροληψία» από τις υπολογιζόμενες αβεβαιότητες, πρέπει να χειριστούμε τα πράγματα κάπως διαφορετικά. Ο χειρισμός αυτός απαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις μαθηματικών και η παρουσίαση του με τη μορφή ολοκληρωμένης απόδειξης δεν εμπίπτει στους σκοπούς συγγραφής των παρουσιών σημειώσεων. Αντ'αυτού και χάριν πληρότητας, στην παράγραφο IX καταβάλλεται προσπάθεια να παρουσιαστούν ορισμένα στοιχεία από τη στατιστική και τη θεωρία πιθανοτήτων, συγκεράζοντας -κατά το δυνατόν- την προσήκουσα μαθηματική αυστηρότητα με την απλότητα των λεγομένων. Για την ώρα θα αρκεστούμε στην απλή παράθεση, υπό τη μορφή ορισμών, δύο ακόμη σχέσεων.

Ορίζουμε λοιπόν ως «**τυπική απόκλιση**» ή «**τυπικό σφάλμα**» μίας κατανομής μετρήσεων την ποσότητα

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (\text{IV.5.})$$

Ομοια, ορίζουμε ως «**τυπική απόκλιση της μέσης τιμής**» την ποσότητα

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (\text{IV.6.})$$

**Ανατρέξτε τώρα στην παράγραφο IX!** Εκεί συζητούνται διεξοδικότερα οι σχέσεις (IV.5.) και (IV.6.) και αποσαφηνίζονται ο τρόπος ορισμού τους και η στατιστική σημασία που έχουν για μία κατανομή δειγμάτων.

## V. ΑΠΟΛΥΤΟ & ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ.

Προσοχή τώρα σ' αυτήν την παράγραφο! Ηρθε η ώρα να καταλήξουμε στον ορισμό των μεγεθών που τελικά επιλέγουμε να χρησιμοποιούμε για να ποσοτικοποιήσουμε τα πειραματικά μας σφάλματα. Ο υπολογισμός των δύο ποσοτήτων που ορίζουμε αμέσως ακολούθως, θα αποτελέσουν (μαζί με τον υπολογισμό της μέσης τιμής) το ουσιαστικό αποσκοπούμενο σας, κατά την επεξεργασία των μετρήσεων στα πειράματα που θα εκτελέσετε στα Εργαστήρια Φυσικής. Είναι ακριβώς οι τρεις αυτές ποσότητες που αντανακλούν την πεποίθησή μας ότι περιγράφουν αντιπροσωπευτικότερα από οποιοσδήποτε άλλες τα μετρούμενα αποτελέσματα μιας πειραματικής διαδικασίας και των αναπόφευκτα εμπλεκόμενων ανακρίβειών. Η κατανόηση της σημασίας τους –και όχι η στείρα απομνημόνευσή τους– προϋποθέτει τη μελέτη, αποκρυστάλλωση και αφομοίωση των βασικότερων στοιχείων της θεωρίας, όπως αυτά περιγράφονται στις παραγράφους IV & IX (η οποία παρατίθεται εν είδη παραρτήματος).

Συμφωνούμε λοιπόν στο εξής να ονομάζουμε «**απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής**» την ποσότητα:

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \equiv \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (\text{V.1.})$$

Συμβολίζουμε το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής με το μικρό ελληνικό γράμμα «**δ**», για να συμμορφωνόμαστε με τα διεθνώς κείμενα και ισχύοντα. Παρατηρούμε –όπως άλλωστε φαίνεται στη σχέση (V.1.)– ότι το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής δεν είναι τίποτε άλλο από αυτό που είχαμε ορίσει στην προηγούμενη παράγραφο ως «**τυπική απόκλιση της μέσης τιμής**». Σημειώνουμε ότι το  $\delta\bar{x}$  έχει τις ίδιες διαστάσεις (δηλαδή μετριέται στις ίδιες μονάδες) με τη μέση τιμή του μετρούμενου μεγέθους και αυτό είναι κάτι το οποίο δεν πρέπει ν' αμελούμε ποτέ να επισημαίνουμε, κατά την αναφορά των αποτελεσμάτων μας. Εννοιολογικά, η

σημασία του απόλυτου σφάλματος επεξηγείται διεξοδικότερα και λεπτομερέστερα στην παράγραφο ΙΧ. Ανατρέξτε!

Εντελώς ανάλογα, ορίζουμε ως «**σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής**» την ποσότητα

$$\frac{\overline{\delta x}}{\bar{x}} \quad (\text{V.2.})$$

Δηλαδή, για να βρούμε το σχετικό σφάλμα ενός μεγέθους, διαιρούμε απλά το απόλυτο σφάλμα με τη μέση τιμή. Σημειώνουμε τα εξής ευνόητα:

- (α) Οι δύο εκφράσεις των σφαλμάτων (σχέσεις V.1. & V.2.) είναι πολύ συγγενείς και αλληλένδετες μεταξύ τους. Από τη στιγμή που γνωρίζουμε το ένα απ'αυτά, μπορούμε να υπολογίσουμε και το άλλο (αρκεί να ξέρουμε τη μέση τιμή) και σε τελική ανάλυση νομιμοποιούμαστε να ισχυριστούμε ότι το σχετικό σφάλμα δεν είναι τίποτε άλλο παρ'εκτός η αναφορά του απόλυτου σφάλματος υπό τη μορφή ποσοστού.
- (β) Επειδή ακριβώς το σχετικό σφάλμα εκφράζεται ως ποσοστό, δηλαδή λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, γι'αυτό είναι και αδιάστατο (είναι όπως λέμε ένας καθαρός αριθμός ή δεν έχει μονάδες μέτρησης). Θα δούμε στη συνέχεια της παρούσας παραγράφου τί σκοπούς εξυπηρετεί αυτό και σε τί πλεονεκτεί η αναφορά του σχετικού σφάλματος σε σχέση με την αναφορά του απόλυτου σφάλματος. Επίσης, θα δούμε τί επιπτώσεις έχει στον τρόπο αναγραφής των αποτελεσμάτων το γεγονός ότι το σχετικό σφάλμα είναι αδιάστατο.
- (γ) Συνηθέστατα, το σχετικό σφάλμα αναφέρεται και ως ποσοστό επί τοις εκατό, δηλαδή:

$$\sigma_{\sigma\chi} \% = \frac{\overline{\delta x}}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (\text{V.3.})$$

Αλλά και οι τρεις αυτές επισημάνσεις ήταν τόσο ευνόητες που σίγουρα θα τις είχατε αντιληφθεί και μόνοι σας! Έτσι δεν είναι;

Πάντως, εκείνο που κρατούμε ως κανόνα είναι το εξής:

**Στο τέλος κάθε πειράματος, μετά τη λήψη μετρήσεων και την επεξεργασία των τιμών, αναφέρουμε πάντα τη μέση τιμή με τα σφάλματα της (και το απόλυτο και το σχετικό).**

Για να καταδείξουμε εμφανή τη σημασία καθενός από τα δύο είδη σφαλμάτων, όπως ορίστηκαν πιο πάνω, καθώς και τις μεταξύ τους διαφορές αναφέρουμε το εξής παράδειγμα:

Υποθέστε ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης της ακμής ενός κύβου αναφέρεται ως

$$\bar{L} \pm \delta\bar{L} = (8,5 \pm 0,2)cm$$

δηλαδή, το απόλυτο σφάλμα της μέτρησης μας είναι 0,2 cm. Υποθέστε ακόμη ότι μετράμε το ύψος ενός ουρανοξύστη και το βρίσκουμε

$$\bar{h} \pm \delta\bar{h} = (15572,8 \pm 0,2)cm$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο μετρήσεις έχουν το ίδιο απόλυτο σφάλμα. Τί θα απαντήσουμε όμως αν κάποιος μας ρωτήσει: «Ποια μέτρηση είναι ακριβέστερη;». Τελείως διαισθητικά «υποψιαζόμαστε» ότι πιο ακριβής είναι η μέτρηση του ύψους του ουρανοξύστη γιατί, πώς να το κάνουμε, άλλο είναι να μετράς έναν χειροπιαστό κύβο με ακρίβεια χιλιοστού κι άλλο ένα θεόρατο ουρανοξύστη με την ίδια ακρίβεια.

Τα πράγματα αποσαφηνίζονται πλήρως αν βάλουμε στη συζήτησή μας την έννοια του σχετικού σφάλματος. Για τον κύβο είναι

$$\frac{\delta\bar{L}}{\bar{L}} = \frac{0,2}{8,5} = 0,024 = 2,4\% \approx 2\%$$

(με στρογγυλοποίηση στο ένα σημαντικό ψηφίο)

ενώ για τον ουρανοξύστη

$$\frac{\delta\bar{h}}{\bar{h}} = \frac{0,2}{15572,8} = 0,00013 = 0,013\% \approx 0,01\%$$

Αρα, πράγματι η μέτρηση του ουρανοξύστη είναι ακριβέστερη. Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι **το σχετικό σφάλμα μας δίνει μία ιδέα σχετικά με την ποιότητα της μέτρησης μας**. Λόγω του τρόπου ορισμού του, ως ο λόγος του απόλυτου σφάλματος προς τη μέση τιμή, είναι σα να εμπεριέχει και μία σύγκριση, πληροφορία που σε καμία περίπτωση δε μπορεί να μας δώσει το απόλυτο σφάλμα από μόνο του. Γνωρίζοντας μόνο το απόλυτο σφάλμα, δε μπορούμε να ξέρουμε αν η μέτρηση μας είναι καλή ή όχι, παρά μόνο αν το συγκρίνουμε με τη μέση τιμή.

## VI. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ.

### A. *Γενικά.*

Κατά την αναγραφή ενός αριθμού, χρησιμοποιώντας τον όρο «σημαντικά ψηφία» εννοούμε το πλήθος των συνολικών ψηφίων του αριθμού αυτού τα οποία υποδηλώνουν την τάξη του, ή πιο απλά το πλήθος των ψηφίων μιας μετρούμενης φυσικής ποσότητας το οποίο είναι επαναλήψιμο κατά τη μετρητική διαδικασία. Συνηθέστατα, το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός αριθμού ταυτίζεται με την ακρίβεια της μέτρησης που τα όργανα που διαθέτουμε μας επιτρέπουν να λαμβάνουμε (αν και υπάρχουν και μετρητικά όργανα τα οποία καταγράφουν και μη σημαντικά ψηφία). Εν κατακλείδι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι **το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός αριθμού μας δίνει ένα μέτρο της ακρίβειας ενός πειραματικού αποτελέσματος.**

Για τον καθορισμό των σημαντικών ψηφίων μιας μέτρησης, κατά την αναφορά του πειραματικού μας αποτελέσματος, χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους κανόνες:

1. Ως πρώτο (και περισσότερο) σημαντικό ψηφίο καταμετράται το αριστερότερο ευρισκόμενο **μη μηδενικό** ψηφίο.

2. Απουσία υποδιαστολής, ως τελευταίο (και λιγότερο) σημαντικό ψηφίο καταμετράται το δεξιότερο **μη μηδενικό** ψηφίο.

3. Παρουσία υποδιαστολής, ως τελευταίο (και λιγότερο) σημαντικό ψηφίο καταμετράται το δεξιότερο ψηφίο, **ακόμα κι αν είναι το μηδέν.**

4. Όλα τα ψηφία ανάμεσα στο πρώτο σημαντικό και το τελευταίο σημαντικό καταμετρώνται ως σημαντικά ψηφία.

Τα ακόλουθα παραδείγματα επεξηγούν περαιτέρω αυτούς τους κανόνες:

(Στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα VI.1. αναγράφουμε κάποια υποθετικά πειραματικά αποτελέσματα και στη δεύτερη το πλήθος των σημαντικών ψηφίων του καθενός, όπως αυτό προσδιορίζεται σύμφωνα με τους ανωτέρω κανόνες).

## ΠΙΝΑΚΑΣ VI.1.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ
874,63	(5)
1480	(3)
1480,00	(6)
0,0058	(2)
0,730	(3)
$5,020 \times 10^4$	(4)
$6,00 \times 10^{-5}$	(3)

**B. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ & ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ.**

Υποψιαζόμαστε ότι για κάποιον παράξενο λόγο αυτή θα σας είναι η πιο οικεία παράγραφος όλων των σημειώσεων!

Τί καταλαβαίνετε λοιπόν όταν ακούτε τη λέξη στρογγυλοποίηση; Προσπαθώντας να δώσουμε έναν άτυπο ορισμό, θα λέγαμε ότι **στρογγυλοποίηση είναι η διαδικασία προσεγγιστικής αναγραφής ενός δεδομένου αριθμού με τη μορφή του αμέσως ανώτερης τάξης μεγέθους «πλησιέστερου» του.**

Αυτό που θέλει να περιγράψει η πιο πάνω «στριφνή» και «δυσνόητη» φράση είναι μία γνώριμή σας σκηνή: Ένας φοιτητής που βαθμολογήθηκε στις εξετάσεις με 4,8 νομιμοποιείται να ζητήσει από τον καθηγητή του να εξαντλήσει την επιείκειά του και να του δώσει τον ελάχιστο προβιβασίμο βαθμό (5), γιατί το 4,8 βρίσκεται πιο κοντά στο 5 απ'ότι «απέχει» από το 4. Νομίζουμε ότι όλοι σας, σε κάποια στιγμή, έχετε «στρογγυλοπήσει» κάποιους αριθμούς και γ'αυτό δε χρειάζεται να καταβάλουμε ιδιαίτερη προσπάθεια για να σας διδάξουμε πώς να το κάνετε. Το μόνο που θα κάνουμε εδώ είναι να ενσωματώσουμε σ'αυτά που ήδη ξέρετε, αυτά που μάθατε έως τώρα στα εισαγωγικά μαθήματα, να τα συστηματοποιήσουμε σε λίγους καλά διατυπωμένους κανόνες και τέλος να προσθέσουμε ορισμένες απλές νέες γνώσεις.

Το επόμενο σημείο που θα θέλαμε να θίξουμε είναι **η αναγκαιότητα στρογγυλοποίησης στα πειράματα Φυσικής**. Είδαμε ότι -κατά την εκτέλεση μιας πειραματικής διαδικασίας- καταγράφουμε τις τιμές κάποιων φυσικών ποσοτήτων και στη συνέχεια -κατά την επεξεργασία τους- διενεργούμε κάποιους υπολογισμούς (πράξεις) μεταξύ τους, προς εξαγωγή νέων μεγεθών (μέση τιμή, σφάλματα). Δεν είναι καθόλου βέβαιο και κανείς δε μας εγγυάται ότι τα εξαγόμενα των πράξεων αυτών θα είναι «ακριβείς» αριθμοί. Με τον όρο μη «ακριβείς» εννοούμε ότι κατά πάσα πιθανότητα, θα έχουν πολύ μεγαλύτερο πλήθος σημαντικών ψηφίων από αυτό που οι συνθήκες του πειράματός μας υπαγορεύουν. Αρα, αντιλαμβανόμαστε όλοι ότι, εκτελώντας πειράματα Φυσικής κι επεξεργαζόμενοι τις μετρήσεις που λάβαμε, πράγματι είναι πολύ πιθανό και σύνθηες να χρειαστεί να στρογγυλοποιήσουμε κάποια από τα αποτελέσματά μας.

Υποθέστε λοιπόν ότι κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας των μετρήσεων μας προκύπτει για κάποια ποσότητα η τιμή 1274,83. Σύμφωνα με όσα έχουμε μάθει ο αριθμός 1274,83 έχει (6) σημαντικά ψηφία (σ.ψ.). Αν τώρα οι δεδομένες συνθήκες ακρίβειας του πειράματός μας επιβάλλουν να γράψουμε τον αριθμό αυτό με (5) σημαντικά ψηφία, τότε πρέπει να τον «στρογγυλοποιήσουμε». Από την εως τώρα εμπειρία σας, το πιο πιθανό είναι να καταλήξετε στο 1274,8 (5 σ.ψ.). Πώς έγινε αυτό; Σκεφτήκαμε ότι προσεγγίζοντας το 1274,83 στο 1274,8 έχουμε κάνει «μικρότερο λάθος» (0,03), απ'ότι αν τον προσεγγίζαμε στο 1274,9 (0,07), ή αλλιώς το 1274,83 βρίσκεται «πιο κοντά» στο 1274,8 παρά στο 1274,9.

Ας δούμε τα πράγματα λίγο πιο γενικά. Εστω ότι μας δίνουν τον κάπως «παράξενο» αριθμό 1274,8X, όπου το X μπορεί να πάρει τις τιμές X=1,2,3,4,6,7,8,9 (δηλαδή, όλους τους μονοψήφιους εκτός του 5). Σύμφωνα με το σκεπτικό που ακολουθήσαμε στη στρογγυλοποίηση του 1274,83→1274,8, μπορούμε να πούμε τα εξής:

Το 1274,8X στρογγυλοποιείται στο 1274,8 αν το X παίρνει τις τιμές 1,2,3,4.

Το 1274,8X στρογγυλοποιείται στο 1274,9 αν το X παίρνει τις τιμές 6,7,8,9.

Τώρα θα προσπαθήσουμε να διατυπώσουμε έναν «καθωσπρέπει» κανόνα για το μηχανισμό στρογγυλοποίησης που βρήκαμε. Ναι, συμφωνούμε μαζί σας ότι αυτό δε θα αποσαφηνίσει περισσότερο την κατάσταση –τα πράγματα είναι ήδη πολύ απλά- και μάλλον θα τα περιπλέξει, αλλά είναι κάτι που πρέπει να κάνουμε:

**Σε μια διαδικασία στρογγυλοποίησης, αν το ψηφίο που πρόκειται ν'απαλειφθεί είναι κάποιο από τα 1,2,3,4, τότε το προηγούμενο του (ή το αριστερά ευρισκόμενό του, ή το αμέσως μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερό του) διατηρείται ως έχει. Αν το ψηφίο που πρόκειται ν'απαλειφθεί είναι κάποιο από τα 6,7,8,9, τότε το προηγούμενο του (ή το αριστερά ευρισκόμενό του, ή το αμέσως μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερό του) αυξάνεται κατά μία μονάδα.**

Τί γίνεται όμως αν το προς απαλειφή ψηφίο είναι το 5; Πιθανότατα αυτό που ξέρατε μέχρι τώρα είναι ο γνωστός μας από το σχολείο κανόνας «το μισό υπέρ του μαθητή». Δυστυχώς, στα Εργαστήρια Φυσικής δε μπορούμε να κρατήσουμε αυτόν τον κανόνα. Για να μη σας απογοητεύσουμε τελείως, ο κανόνας αυτός θα συνεχίσει να ισχύει, όσον αφορά στη βαθμολογία σας, όμως δε μπορούμε να τον κρατήσουμε στην εργαστηριακή μας δουλειά. Γιατί; Επειδή είναι στατιστικά «άδικος» και «μεροληπτικός». Αν τον υιοθετούσαμε, θα είχαμε το πιθανοθεωρητικά ανεπίτρεπτο φαινόμενο να στρογγυλοποιούμε 4 ψηφία (1,2,3,4) στην «κάτω» τάξη μεγέθους και 5 ψηφία (5,6,7,8,9) στην «πάνω» τάξη μεγέθους. Ομως γιατί να κάνουμε μια τέτοια διάκριση; Όλα τα ψηφία θεωρητικά έχουν την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Πρέπει να βρούμε ένα στατιστικά πιο «δίκαιο» και «αμερόληπτο» κανόνα.

Ας συνεχίσουμε για λίγο τις στρογγυλοποιήσεις: Έχουμε καταλήξει στον αριθμό 1274,8 ο οποίος έχει (5) σημαντικά ψηφία. Αν μας ζητήσουν να το γράψουμε με (4) σ.ψ., τότε κατά τα γνωστά θα το στρογγυλοποιήσουμε ως εξής:

$$1274,8 \text{ (5 σ.ψ.)} \rightarrow 1275 \text{ (4 σ.ψ.)}$$

Αν θελήσουμε να στρογγυλοποιήσουμε το 1275 (4 σ.ψ.) και να το γράψουμε με (3 σ.ψ.), τί θα κάνουμε; Κατά την εξάσκησή σας στα Εργαστήρια Φυσικής θα ακολουθείτε τον εξής κανόνα:

**Αν το προς απαλειφή ψηφίο είναι το 5, τότε κοιτάζουμε το προηγούμενο του (ή αλλιώς το αριστερά ευρισκόμενό του, ή το αμέσως μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερό του). Αν το ψηφίο αυτό είναι περιττό, τότε το 5 απαλείφεται και το προηγούμενό του ψηφίο αυξάνεται κατά 1. Αν το εν λόγω ψηφίο είναι άρτιο, τότε το 5 απαλείφεται κι αυτό παραμένει ως έχει. Δηλαδή,**

$$1275 \text{ (4 σ.ψ.)} \rightarrow 1280 \text{ (3 σ.ψ.)}$$

επειδή το 7 (το προηγούμενο του 5) είναι περιττό. Αν αντί για το 1275 είχαμε το

$$1265 \text{ (4 σ.ψ.)} \rightarrow 1260 \text{ (3 σ.ψ.)}$$

Αυτή η μέθοδος στρογγυλοποίησης του 5 είναι, όπως λέμε, μία «σύμβαση» που συμφωνούμε ν'ακολουθούμε στα Εργαστήρια Φυσικής. Όπως κάθε άλλη σύμβαση, είναι τελείως αυθαίρετη. Θα μπορούσαμε να είχαμε υιοθετήσει την ακριβώς αντίθετη σύμβαση (άρτιο – αυξάνεται / περιττό – μένει ως έχει). Ο λόγος για τον οποίο ισχυριζόμαστε ότι η συγκεκριμένη σύμβαση εξασφαλίζει έναν πιο «αμερόληπτο» και στατιστικά «δίκαιο» τρόπο στρογγυλοποίησης του 5 είναι ο εξής: Επειδή στατιστικά τα άρτια ψηφία είναι ίσα το πλήθος με τα περιττά, πιστεύουμε ότι έτσι διατηρούμε στο 5 πιθανότητα 50:50 να στρογγυλοποιηθεί «πάνω» ή «κάτω».

Όλα όσα συζητήθηκαν έως τώρα περί στρογγυλοποίησης, συγκεντρώνονται με συνοπτικό τρόπο στον πιο κάτω πίνακα VI.2.:

## ΠΙΝΑΚΑΣ VI.2.

Εστω ο αριθμός $1274,8X$ με (6) σημαντικά ψηφία (όπου $X$ ένας μονοψήφιος αριθμός εκτός των 0 & 5). Θέλουμε να τον αναγράψουμε με (5) σ.ψ. Αυτό γίνεται ως εξής:
$1274,8X \rightarrow \begin{cases} (i) \rightarrow 1274,8 & \alpha\nu X = 1,2,3,4 \\ \hline (ii) \rightarrow 1274,9 & \alpha\nu X = 6,7,8,9 \end{cases}$
Συνεχίζοντας τη στρογγυλοποίηση, έστω ότι θέλουμε να τον αναγράψουμε με (4 σ.ψ.):
$1274,8$ ή/και $1274,9 \rightarrow 1275$ [βλ. περίπτωση (ii)]
Ομοια, έστω ότι θέλουμε ν'αναγράψουμε τον 1275 (4 σ.ψ.) με (3 σ.ψ.)
$1275 \rightarrow 1280$ (3 σ.ψ.) Επειδή το (7), ο προηγούμενος του (5), είναι περιττός
Αντίστοιχα, αν είχαμε το 1265 (4 σ.ψ.) και θέλαμε να τον αναγράψουμε με (3 σ.ψ.):
$1265 \rightarrow 1260$ (3 σ.ψ.) Επειδή το (6), ο προηγούμενος του (5), είναι άρτιος

Τέλος, στον πίνακα VI.3. που ακολουθεί σκιαγραφούμε τη βήμα προς βήμα στρογγυλοποίηση του αριθμού 1274,83 από πλήθους (6) σ.ψ. μέχρι πλήθους (1) σ.ψ.

ΠΙΝΑΚΑΣ VI.3.

1274,83 → (6)
↓
1274,8 → (5)
↓
1275 → (4)
↓
1280 → (3)
↓
1300 → (2)
↓
1000 → (1)

### ***Γ. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ & ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ.***

- Στον πολλαπλασιασμό ή/και στη διαίρεση είθισται να κρατάμε το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων στο γινόμενο ή/και στο πηλίκο, με αυτό που έχει ο **λιγότερο** ακριβής παράγοντας:

$$2,6 \times 31,7 = 82,42 \rightarrow 82$$

$$5,3 : 748 = 0,007085 \rightarrow 0,0071$$

- Στην πρόσθεση ή/και στην αφαίρεση το πλήθος των σημαντικών ψηφίων που κρατάμε στο αποτέλεσμα καθορίζεται από το πού εμφανίζεται το δεξιότερο ψηφίο σε όλους τους αριθμούς. Το αποτέλεσμα στρογγυλοποιείται στο πιο σημαντικό αβέβαιο ψηφίο. Ο χειρισμός του πλήθους των σημαντικών ψηφίων στην πρόσθεση ή/και στην αφαίρεση αποσαφηνίζεται με τα πιο κάτω παραδείγματα:

$$51,4 - 1,67 = 49,73 \rightarrow 49,7$$

$$7146 - 12,8 = 7133,2 \rightarrow 7133$$

$$20,8 + 18,72 + 0,851 = 40,371 \rightarrow 40,4$$

$$1,4693 + 10,18 + 1,062 = 12,7113 \rightarrow 12,71$$

## Δ. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ & ΣΦΑΛΜΑΤΑ.

Κατά την παρουσία και την εξάσκηση σας στα Εργαστήρια Φυσικής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής πρέπει να εφαρμόζετε τους πιο κάτω κανόνες στην αναφορά των πειραματικών σας αποτελεσμάτων:

### ΚΑΝΟΝΑΣ 1.

**Τα πειραματικά σφάλματα πρέπει ν'αναφέρονται με (ή να στρογγυλοποιούνται στο) ένα (1) σημαντικό ψηφίο.**

Ειδικότερα, όπως υποδεικνύει η θεωρία μας, η αναφορά των σφαλμάτων με ένα σημαντικό ψηφίο είναι προτιμότερη όταν ο αριθμός των μετρήσεων ( $N$ ) που λαμβάνουμε κυμαίνεται μεταξύ 4 και 20 ( $4 \leq N \leq 20$ ). Όταν  $20 < N \leq 100$ , νομιμοποιούμαστε να κρατήσουμε και δεύτερο σημαντικό ψηφίο. Δεδομένου του ότι στα πειράματα που θα κληθείτε να εκτελέσετε δε θα υπερβείτε τις 20 μετρήσεις, αρκούμαστε στο 1 σημαντικό ψηφίο.

### ΚΑΝΟΝΑΣ 2.

**Κατά την αναγραφή ενός πειραματικού αποτελέσματος πρέπει η μετρούμενη τιμή (ή η μέση τιμή των μετρήσεων) και το σφάλμα της να αναφέρονται με την ίδια ακρίβεια.**

Παρατηρείστε πολύ προσεκτικά τα ακόλουθα παραδείγματα:

Μέτρηση	Σφάλμα	Αναφορά
453,79 g	0,5 g	$(453,8 \pm 0,5)g$
37546 sec	27 sec	$(37550 \pm 30)sec$ ή $(37,55 \pm 0,03) \times 10^3 sec$
256,8 m	5,1 m	$(257 \pm 5)m$
9,782 m/s <sup>2</sup>	0,094 m/s <sup>2</sup>	$(9,78 \pm 0,09)m/s^2$

Ουσιαστικά, αυτό που ονομάζουμε «**σωστή αναγραφή πειραματικού αποτελέσματος**» έγκειται στον επιτυχή συγκερασμό των εξής δύο εγχειρημάτων:

- A) Αναφορά της μέτρησης (ή της μέσης τιμής των μετρήσεων) και του σφάλματος με την ίδια ακρίβεια.
- B) Αναφορά του σφάλματος με ένα σημαντικό ψηφίο.

Δηλαδή, οι τιμές της πρώτης γραμμής του πιο πάνω πίνακα θα ήταν λάθος αν αναφέρονταν με τη μορφή  $(453,79 \pm 0,5)g$ , γιατί παραβιάζεται ο κανόνας 2 (της ίδιας

ακρίβειας), παρότι τηρείται ο κανόνας 1 (του ενός σημαντικού ψηφίου στο σφάλμα). Αντίστοιχα, λάθος θα ήταν αν αναφέρονταν τα αποτελέσματα της τελευταίας γραμμής του πιο πάνω πίνακα με τη μορφή  $(9,782 \pm 0,094)m/s^2$ , γιατί παραβιάζεται ο κανόνας «του ενός σημαντικού ψηφίου», παρότι τηρείται ο κανόνας «της ίδιας ακρίβειας».

### **KANONAS 3.**

**Στις μαθηματικές ή φυσικές σταθερές κι εν γένει στα δοθέντα, ή θεωρούμενα ως γνωστά, μεγέθη σε μία πειραματική διαδικασία δεν αναφέρεται σφάλμα.**

Για παράδειγμα, αν σε κάποια πειραματική διαδικασία χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε τη σχέση υπολογισμού της περιφέρειας του κύκλου  $C=2\pi R$ , τότε το **2** και το  $\pi$  δεν έχουν σφάλματα. Πρέπει να είστε κάπως προσεκτικοί με αυτόν τον κανόνα! Πολύ λίγες φυσικές σταθερές έχουν τιμές οι οποίες να είναι γνωστές με απόλυτη ακρίβεια. Η συντριπτική πλειονότητα των φυσικών σταθερών έχει προσδιοριστεί με πειραματικό τρόπο. Ως εκ τούτου, ακόμα και αυτές οι ποσότητες διέπονται από κάποιο σφάλμα. Για παράδειγμα, το 1983, η ταχύτητα του φωτός στο κενό πιστοποιήθηκε να έχει την ακριβή τιμή  $c_0 = 2,99792458 \times 10^8 m/s$ . **Δεν υπάρχει σφάλμα!** Από την άλλη, η παγκόσμια βαρυτική σταθερά  $G$  έχει εξακριβωθεί πειραματικά να έχει την τιμή  $G = 6,6725985 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2 \pm 128$  μέρη ανά εκατομμύριο. Το σφάλμα 128 μέρη ανά εκατομμύριο προσδίδει αβεβαιότητα στα ψηφία .....(85) στην τιμή του  $G$ . Ομως, σε κάθε συνήθη πειραματική διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια η τιμή  $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$ . Οπως βλέπετε, μεσολαβούν τρία ακόμη ψηφία μετά το (7), πριν εμφανιστεί το πρώτο αβέβαιο ψηφίο (8). Αρα, η τιμή  $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$  μπορεί να θεωρείται ως ακριβής στην περίπτωση που ο λιγότερο ακριβής παράγοντας της εξίσωσης έχει τρία ή λιγότερα σημαντικά ψηφία. Αν ο λιγότερο ακριβής παράγοντας έχει τέσσερα σημαντικά ψηφία, τότε μπορούμε να θεωρούμε το  $G$  ως σταθερό, φτάνει να το γράψουμε με τη μορφή  $G = 6,673 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$ . Τα ανωτέρω ισχύουν για τις περισσότερες από τις σταθερές που θα χρησιμοποιήσετε στα Εργαστήρια Φυσικής.

Ενα πολύ σημαντικό ζήτημα, που δεν έχουμε θίξει εως τώρα, είναι το πώς «επιδρούν», ή πώς «μεταφέρονται», ή σωστότερα πώς «διαδίδονται» τα σφάλματα, όταν γίνονται πράξεις μεταξύ των μεγεθών στα οποία αναφέρονται, για να εξαχθούν νέα μεγέθη. Ακολουθεί ιδιαίτερη παράγραφος αφιερωμένη εξ ολοκλήρου στο πολύ σημαντικό αυτό ζήτημα.

## ***E. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.***

1. Δίνονται οι αριθμοί της πρώτης στήλης του ακόλουθου πίνακα. Να γράψετε στη δεύτερη στήλη το πλήθος των σημαντικών ψηφίων του καθενός.

976,45	
84000	
0,0094	
4,000	
100	
5280	
400,0	
301,07	
27,11	
$8,00 \times 10^4$	
$3,010 \times 10^{-5}$	
90,05	

2. Ομοια για τους αριθμούς:

1234	
1.234.000	
123,4	
1004	
10,30	
0,0001230	
100,0	

3. Δίνονται οι αριθμοί της πρώτης στήλης του ακόλουθου πίνακα. Να γράψετε στη δεύτερη στήλη τους ίδιους αριθμούς με ακρίβεια δύο (2) σημαντικών ψηφίων.

4,451	
1,75	
2,045	
12,251	
1,03	
1,85	
9999	
13,7	
1,024	
4,6675	

4. Ξαναγράψτε τις ακόλουθες μετρηθείσες τιμές με τον ενδεδειγμένο τρόπο, έτσι ώστε να είναι σύμφωνες με όσα διδαχθήκατε περί σωστής αναγραφής των πειραματικών αποτελεσμάτων:

(α) Μετρηθέν ύψος:  $h \pm \delta h = (5,03 \pm 0,4329)m$

(β) Μετρηθείς χρόνος:  $t \pm \delta t = (19,5432 \pm 1) \text{sec}$

(γ) Μετρηθέν φορτίο:  $q \pm \delta q = (-3,21 \times 10^{-19} \pm 2,67 \times 10^{-20}) \text{coulombs}$

$$(δ) \quad \text{Μετρηθέν μήκος κύματος: } \lambda \pm \delta\lambda = (0,000000563 \pm 0,00000007)m$$

$$(ε) \quad \text{Μετρηθείσα ορμή: } p \pm \delta p = (3,267 \pm 0,175) \times 10^3 \text{ g} \cdot \text{cm}/\text{sec}$$

## **VII. ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ.**

### ***A. ΓΕΝΙΚΑ.***

Σύμφωνα με την πάγια τακτική που ακολουθούμε σε όλη την έκταση των σημειώσεων αυτών, κατά την εκμάθηση των θεωρητικών προαπαιτούμενων για τα Εργαστήρια Φυσικής, θα εισάγουμε ορισμένες νέες έννοιες, μέσω της παρουσίασης ενός συγκεκριμένου παραδείγματος.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι εργάζεστε ως προϊστάμενος της Τεχνικής Υπηρεσίας του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής. Το νέο ακαδημαϊκό έτος ξεκίνησε, μόλις επιστρέψατε από τις καλοκαιρινές σας διακοπές όπου περάσατε πολύ-πολύ όμορφα, φθινοπώριασε, θα χειμωνιάσει, ο καιρός θα ψυχράνει κι εσείς πρέπει να φροντίσετε έγκαιρα για τις προμήθειες σε καύσιμα για το κεντρικό σύστημα θέρμανσης του ΠΑ.Δ.Α., ώστε να μη ξυλιάσει ο κόσμος εδώ μέσα.

Εστω τώρα ότι η κέντρική δεξαμενή καυσίμων του ΠΑ.Δ.Α. έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου (σαν τεράστιο σπιρτόκουτο) με ύψος (H), πλάτος (W) και μήκος (L). Επειδή -δυστυχώς- ζούμε σε πολύ καχύποπτους καιρούς, αποφασίζετε να μετρήσετε μόνος σας τις διαστάσεις της δεξαμενής, ώστε να μπορείτε να ελέγξετε και να πιστοποιήσετε τη διαφάνεια της προμήθειας σε καύσιμα. Εφαρμόζοντας στην πράξη όλα αυτά που διδαχθήκατε στα Εργαστήρια Φυσικής σχετικά με την προσεκτική λήψη μετρήσεων και τη σωστή αναγραφή των πειραματικών αποτελεσμάτων, καταλήξατε στις ακόλουθες τιμές για τις διαστάσεις της δεξαμενής:

$$H \pm \delta H = (4,25 \pm 0,03)m$$

$$W \pm \delta W = (3,15 \pm 0,03)m$$

$$L \pm \delta L = (9,47 \pm 0,08)m$$

Συνεπώς, τώρα είναι εύκολο να υπολογίσετε τον όγκο (V) της δεξαμενής:

$$V = HWL = (4,25)(3,15)(9,47) = 126,779625m^3$$

Μπράβο σας! Σιγά-σιγά όμως αρχίζετε να συνειδητοποιείτε ότι –δυστυχώς δε γίνεται αλλιώς- πρέπει ν’αναφέρετε και σφάλμα για τον όγκο. Πώς όμως θα βρούμε το  $\delta V$ ; Το γενικότερο πρόβλημα που τίθεται εδώ είναι το εξής: Με ποιο τρόπο θα υπολογίσουμε το σφάλμα μιας φυσικής ποσότητας, την οποία δε μετράμε άμεσα, αλλά μαθαίνουμε την τιμή της έμμεσα, δηλαδή κατόπιν μαθηματικής επεξεργασίας (υπολογισμών) άλλων άμεσα μετρούμενων ποσοτήτων. Με πιο απλά λόγια, το ουσιαστικό ερώτημα εδώ είναι: Πώς «επιδρούν», ή πώς «μεταφέρονται», ή πώς «διαδίδονται» (εξ ου και ο τίτλος της παραγράφου) τα επί μέρους σφάλματα των

διαστάσεων της δεξαμενής, που σίγουρα διαπράξαμε κατά τη μέτρηση τους με το χάρακα ή τη μετρητική ταινία μας, στον υπολογισμό του όγκου που βρίσκουμε από το γινόμενο των (H), (W) & (L);

Γενικά, υπάρχουν δύο τρόποι για να βρίσκουμε το πώς «διαδίδονται» τα σφάλματα των άμεσα μετρούμενων μεγεθών, που υπεισέρχονται ως μεταβλητές στην εξίσωση υπολογισμού του τελικά ζητούμενου μεγέθους.

Ο πρώτος –και ο απλούστερος– είναι να προσθέτουμε απλά τα επί μέρους *σχετικά σφάλματα*. Δηλαδή, για να βρούμε τον όγκο της δεξαμενής χρησιμοποιήσαμε τον τύπο  $V=HWL$ . Αρα, σύμφωνα με όσα μόλις είπαμε, το σχετικό σφάλμα του όγκου πρέπει να είναι

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta H}{H} + \frac{\delta W}{W} + \frac{\delta L}{L}$$

Το μειονέκτημα αυτού του τρόπου είναι ότι «υπερεκτιμά» τα επί μέρους σφάλματα, δηλαδή τα λαμβάνει όλα υπόψη εξ ίσου, ανεξάρτητα από το αν είναι μεγάλα ή μικρά και μη εξετάζοντας το πόσο συμβάλλουν στο τελικό σφάλμα. Συνήθως, το σφάλμα μιας επί μέρους εμπλεκόμενης μεταβλητής (μεγέθους) είναι ανεξάρτητο από τα σφάλματα των άλλων μεταβλητών και στο τέλος κάποια από αυτά καταλήγουν να είναι αμελητέα σε σχέση με τα υπόλοιπα.

Ο δεύτερος τρόπος είναι σωστότερος, πλέον ενδεδειγμένος και –τέλος πάντων– είναι αυτός που πρέπει να χρησιμοποιείτε κατά την εξάσκησή σας στα Εργαστήρια Φυσικής. Το σωστό λοιπόν τρόπο χειρισμού των διαδιδόμενων σφαλμάτων το δανειζόμαστε από ένα μαθηματικό πρόβλημα που αποκαλείται «**πρόβλημα του τυχαίου δρόμου**» (random walk problem). Το πρόβλημα του τυχαίου δρόμου μας παρέχει μία πολύ εκλεπτυσμένη και κομψή μαθηματική έκφραση για να υπολογίζουμε το σφάλμα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών σ'ένα πειραματικό εγχείρημα. Για να είμαστε σε θέση να το κατανοήσουμε πλήρως, χρειαζόμαστε κάτι ακόμα! Πρέπει –για μία φορά ακόμη– να προστρέξουμε στο οπλοστάσιο των μαθηματικών μας, για να εφοδιαστούμε με ένα νέο μαθηματικό εργαλείο: την **μερική παράγωγο**.

Σ'αυτό το σημείο ας ανοίξουμε μία μεγάλη παρένθεση για μερικές απλές και σύντομες –το υποσχόμαστε– αμμιγείς γνώσεις μαθηματικών:

Εστω λοιπόν μία συνάρτηση τριών (3) μεταβλητών  $f = f(x, y, z)$ , τότε γράφουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{VII.1.})$$

διαβάζουμε «μερική παράγωγος της  $f$  ως προς  $x$ » κι εννοούμε ότι  $\frac{\partial f}{\partial x}$  είναι το αποτέλεσμα της παραγωγίσις της  $f$  ως προς τη μεταβλητή  $x$  (όπως ακριβώς ξέραμε

μέχρι τώρα, σαν η  $f$  να εξαρτιόταν μόνο από τη μεταβλητή  $x$ ), συμπεριφερόμενοι στα  $y$  και  $z$  να ήταν σταθερές.

Δηλαδή, αν μας δώσουν την

$$f = f(x, y, z) = 8x^5 yz^3$$

και μας ζητήσουν να υπολογίσουμε τις μερικές της παραγώγους, αυτές θα είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 40x^4 yz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8x^5 z^3 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 8x^5 y3z^2$$

Ο γενικός κανόνας υπολογισμού του σφάλματος  $\delta f$ , στην περίπτωση που η  $f$  είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών,  $f = f(x, y, \dots, z)$  και με την προϋπόθεση ότι τα σφάλματα των  $x, y, \dots, z$  είναι τυχαία κι ανεξάρτητα μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση:

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right)^2} \quad (\text{VII.2.})$$

Περιφραστικά, η εξίσωση που μόλις γράψαμε «εισηγείται» ότι το σφάλμα μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών ισούται με τη τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των επί μέρους σφαλμάτων όλων των ανεξάρτητων μεταβλητών, σταθμισμένων με την επίδρασή τους πάνω στην  $f$ .

Αρκετά όμως με τη θεωρία, πίσω τώρα στο παράδειγμά μας:

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Ως τώρα έχουμε μετρήσει τις διαστάσεις της δεξαμενής μας:

$$H \pm \delta H = (4,25 \pm 0,03)m$$

$$W \pm \delta W = (3,15 \pm 0,03)m$$

$$L \pm \delta L = (9,47 \pm 0,08)m$$

κι έχουμε βρει τον όγκο της:

$$V = HWL = (4,25)(3,15)(9,47) = 126,779625m^3$$

μένει λοιπόν να υπολογίσουμε το σφάλμα  $\delta V$ , τώρα ξέρουμε πώς! Αρκεί να εφαρμόσουμε σωστά τον πιο πάνω ορισμό:

$$\begin{aligned} \delta V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial H} \delta H\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial W} \delta W\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L} \delta L\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta V = \sqrt{(LW\delta H)^2 + (LH\delta W)^2 + (HW\delta L)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta V = \sqrt{[(9,47)(3,15)(0,03)]^2 + [(9,47)(4,25)(0,03)]^2 + [(4,25)(3,15)(0,08)]^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta V = \sqrt{3,4058m^6} \Rightarrow \delta V = 1,845m^3 \end{aligned}$$

Τέλος, για ν'αναφέρουμε το αποτέλεσμα μας με τον ενδεδειγμένο τρόπο, πρέπει να έχει το σωστό πλήθος σημαντικών ψηφίων, δηλαδή πρέπει το κυρίως αποτέλεσμα μας και το σφάλμα του να έχουν την ίδια ακρίβεια. Οπότε, για να είμαστε σύμφωνοι με όλα όσα διδαχθήκαμε και μετά τις στρογγυλοποιήσεις, γράφουμε:

$$V \pm \delta V = (127 \pm 2)m^3$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Ενας χειρουργημένος για αρτηριοστεφανιαία παράκαμψη (bypass) πρώην καρδιοπαθής, ακολουθώντας τις συμβουλές των θεραπόντων ιατρών του και φροντίζοντας τη φυσική του κατάσταση, βαδίζει καθημερινά με ρυθμό  $R \pm \delta R = (128 \pm 2) \beta\eta\mu\alpha\tau\alpha / \text{min}$ . Κάθε βήμα του καλύπτει απόσταση  $L \pm \delta L = (45 \pm 2) \text{cm}$ . Σε πόσο χρόνο ο εν λόγω βαδιστής θα διανύσει ένα γύρο κυκλικού στίβου διαμέτρου  $D \pm \delta D = (200 \pm 1) \text{m}$ ;

(Θυμηθείτε ότι:  $t = s/u$ ,  $s = \pi D$  &  $u = RL$ , όπου  $s$  το διανυόμενο διάστημα περιφέρειας κύκλου,  $u$  η θεωρούμενη σταθερή ταχύτητα του βαδιστή και  $t$  ο αντίστοιχος χρόνος).

## Λύση .

Είναι

$$t = \frac{s}{u} = \frac{\pi D}{RL} = \frac{(3,14159)(200)}{(128)(0,45)} \Rightarrow t = 10,908298 \text{ min}$$

και

$$\begin{aligned} \delta t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial D} \delta D\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta t &= \sqrt{\left(-\frac{\pi D}{R^2 L} \delta R\right)^2 + \left(-\frac{\pi D}{R L^2} \delta L\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{R L} \delta D\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta t &= t \sqrt{\left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\delta D}{D}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta t &= 0,02445825 \text{ min} \Rightarrow \delta t \approx 0,02 \text{ min} \end{aligned}$$

Οπότε, αναφέρουμε το αποτέλεσμα ως εξής:

$$t \pm \delta t = (10,91 \pm 0,02) \text{ min}$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να υπολογιστεί από την κίνηση ενός απλού εκκρεμούς με τη βοήθεια της σχέσης  $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ , όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $L$  το μήκος και  $T$  η περίοδος του εκκρεμούς. Υποθέστε ότι η περίοδος και το μήκος του εκκρεμούς μετρήθηκαν:  $T \pm \delta T = (2,015 \pm 0,005) \text{ sec}$  και  $L \pm \delta L = (1,001 \pm 0,008) \text{ m}$ . Να βρεθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας με το σφάλμα της.

#### Λύση .

Είναι

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \Rightarrow g = 9,733 \text{ m/s}^2$$

και

$$\begin{aligned} \delta g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \delta T\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta g &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \delta L\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2 L}{T^3} \delta T\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta g &= 0,092 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Οπότε, η απάντησή μας θα είναι

$$g \pm \delta g = (9,733 \pm 0,092) \text{ m/s}^2$$

που όμως παραβιάζει τον κανόνα του «ενός σημαντικού ψηφίου» που πρέπει να έχει το σφάλμα, παρότι σφάλμα και κυρίως αποτέλεσμα έχουν την ίδια ακρίβεια. Συνεπώς διορθώνοντας κάπως, αναφέρουμε τελικά:

$$g \pm \delta g = (9,73 \pm 0,09)m / s^2$$

## B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Δύο σώματα μετρήθηκαν στις θέσεις  $d_1 \pm \delta d_1 = (3,42 \pm 0,01)m$  και  $d_2 \pm \delta d_2 = (7,65 \pm 0,05)m$ . Αν ως  $d$  ορίζουμε την ποσότητα  $d = d_2 - d_1$ , να υπολογιστεί το  $d$  και το απόλυτο του σφάλμα του  $\delta d$ .
2. Ομοια, αν  $d_1 \pm \delta d_1 = (6,710 \pm 0,005)m$ ,  $d_2 \pm \delta d_2 = (0,64 \pm 0,02)m$ ,  $d_3 \pm \delta d_3 = (1,71 \pm 0,01)m$  και το  $d$  ορίζεται ως  $d = d_1 + d_2 - d_3$ .
3. Η ακτίνα ενός κύκλου βρέθηκε να είναι  $R \pm \delta R = (6,072 \pm 0,005)cm$ . Αν υποθέσουμε ότι το  $\pi$  έχει την «ακριβή» τιμή 3,14, να υπολογίσετε το εμβαδόν και το απόλυτο σφάλμα του για το συγκεκριμένο κύκλο.
4. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές  $x \pm \delta x = (0,11 \pm 0,01)m$  και  $y \pm \delta y = (0,204 \pm 0,005)m$ . Ένα τρίγωνο έχει βάση  $b \pm \delta b = (0,742 \pm 0,002)m$  και ύψος  $h \pm \delta h = (0,630 \pm 0,002)m$ . Υπολογίστε το εμβαδόν και το απόλυτο σφάλμα του καθενός. Κατόπιν, υπολογίστε το ολικό εμβαδόν (άθροισμα εμβαδών ορθ. παρ/μου και τριγώνου) και το απόλυτο σφάλμα του ολικού εμβαδού.
5. Σε ένα πείραμα μελέτης της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας ( $E = mgh$ ), λάβαμε τις ακόλουθες μετρήσεις για τα εμπλεκόμενα μεγέθη:  $m \pm \delta m = (0,1000 \pm 0,0005)Kg$ ,  $g \pm \delta g = (9,80 \pm 0,04)m / s^2$  και  $h \pm \delta h = (0,689 \pm 0,002)m$ . Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια και το απόλυτο σφάλμα της.
6. Σώμα μάζας  $m \pm \delta m = (0,352 \pm 0,001)Kg$  κινείται με ταχύτητα  $u \pm \delta u = (1,91 \pm 0,01)m / s$ . Να βρείτε την κινητική του ενέργεια ( $K = mu^2 / 2$ ) και να την αναφέρετε με το απόλυτο και το σχετικό της σφάλμα.
7. Ένας φοιτητής μετρά δύο ποσότητες  $a$  και  $b$  και καταγράφει τις ακόλουθες τιμές:  $a \pm \delta a = (11,5 \pm 0,2)cm$  και  $b \pm \delta b = (25,4 \pm 0,2)cm$ . Στη συνέχεια υπολογίζει το γινόμενο  $q = ab$ . Ποια πρέπει να είναι η απάντησή του; Αναφέρατε τα αποτελέσματά σας με το απόλυτο και με το σχετικό (επί τοις εκατό) σφάλμα. Επαναλάβετε τη διαδικασία για τις τιμές  $a \pm \frac{\delta a}{a} \% = 3cm \pm 8\%$  και  $b \pm \frac{\delta b}{b} \% = 4cm \pm 2\%$ .

## VIII. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΠΙΝΑΚΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ.

### A. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΙΝΑΚΑ.

Στην παράγραφο αυτή, θα προσπαθήσουμε να αποκρυσταλλώσουμε τα σημαντικότερα σημεία από όλα όσα συζητήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους και να τα συγκεντρώσουμε σε μία καλά συστηματοποιημένη και βήμα προς βήμα προδιαγεγραμμένη διαδικασία, αποσκοπώντας έτσι στην κατά το δυνατόν καλύτερη διευκόλυνσή μας, όσον αφορά στον ενδεδειγμένο χειρισμό μιας σειράς πειραματικών μετρήσεων.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μόλις ολοκληρώσαμε την πειραματική διαδικασία που μας είχε ανατεθεί, λαμβάνοντας μέριμνα να τηρήσουμε απαρέγκλιτα και με «θρησκευτική ευλάβεια» όλους τους κανόνες που μάθαμε σχετικά με τη βέλτιστη εκτέλεση του πειράματος και την ελαχιστοποίηση των παντός είδους σφαλμάτων.

Εστω ότι μας είχαν αναθέσει να μετρήσουμε το ύψος του γνωστού μας τραπέζιού και έστω ότι χάριν απλότητας είχαμε καταλήξει στη σειρά των ίδιων δέκα μετρήσεων, όπως πριν.

Κατά την παρουσία σας στα Εργαστήρια Φυσικής, κάθε φορά που θα σας ζητηθεί, ή που θα χρειαστεί, να επεξεργαστείτε μία σειρά πειραματικών μετρήσεων για να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τα σφάλματα του υπό μέτρηση μεγέθους και τέλος ν'αναφέρετε με το σωστό τρόπο τα αποτελέσματά σας, **πρέπει ν'ακολουθείτε τα εξής βήματα:**

- 1) Δημιουργούμε έναν Πίνακα Τιμών, εντελώς ανάλογο με τον πιο κάτω εικονιζόμενο ΠΙΝΑΚΑ VIII.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ VIII.1.

1	2	3	4	5	6
A/A	$x_i$ (cm)	$\bar{x}$ (cm)	$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ (cm)	$(\Delta x_i)^2$ (cm <sup>2</sup> )	$\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2$ (cm <sup>2</sup> )
1	92,3		-0,11	0,0121	
2	92,4		-0,01	0,0001	
3	92,3		-0,11	0,0121	
4	92,5		0,09	0,0081	
5	92,3	92,41	-0,11	0,0121	0,089
6	92,4		-0,01	0,0001	
7	92,4		-0,01	0,0001	
8	92,4		-0,01	0,0001	
9	92,6		0,19	0,0361	
10	92,5		0,09	0,0081	

- 2) Στην πρώτη στήλη του πίνακα αυτού αναγράφουμε τον «Αύξοντα Αριθμό» (A/A) της κάθε μέτρησης μας. Είναι ευνόητο ότι, η αρίθμηση της 1ης στήλης θα ταυτίζεται με το πλήθος των μετρήσεων μας και κατά συνέπεια με τον αριθμό των φορών που εκτελέσαμε το πείραμα μας.
- 3) Στην πρώτη γραμμή του πίνακα συμφωνούμε ν'αναγράφουμε την «επικεφαλίδα» της κάθε στήλης, δηλαδή το συμβολισμό που έχουμε επιλέξει για το υπό μέτρηση ή το υπό επεξεργασία μέγεθος, συνοδευόμενο απαραίτητα εντός παρενθέσεων από τις μονάδες στις οποίες μετράται.
- 4) Έτσι, στη δεύτερη στήλη αναγράφουμε τη σειρά των 10 μετρήσεων του ύψους του τραπεζιού και στην κορυφή της το σύμβολο του ύψους, π.χ.  $x_i$  (cm), όπου  $i$  ένας κυμαινόμενος από το 1 έως το πλήθος των μετρήσεων μας (10) δείκτης.
- 5) Στην 3η στήλη καλούμαστε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των μετρήσεων μας, κατά τα γνωστά:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N=10} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{N} \Rightarrow \bar{x} = 92,41 \text{cm}$$

- 6) Στην 4η στήλη υπολογίζουμε τις μέσες αποκλίσεις καθεμιάς από τις 10 μετρήσεις από τη μέση τιμή (με τα πρόσημά τους).
- 7) Στην 5η στήλη υψώνουμε στο τετράγωνο κάθεμια από τις μέσες αποκλίσεις. Αυτό γίνεται, όπως έχουμε ήδη πει, για να απαλείψουμε τα αρνητικά πρόσημα. Εδώ προσέχουμε το εξής: Τα μεγέθη που αναγράφονται σ'αυτήν τη στήλη δεν έχουν πια διαστάσεις μήκους, αλλά μήκους εις το τετράγωνο. Συνεπώς, οι μονάδες μέτρησης τους – τις οποίες ασφαλώς και πρέπει να σημειώσουμε εντός παρενθέσεων – δεν είναι πια cm αλλά  $\text{cm}^2$ . Επίσης, αν το κρίνουμε απαραίτητο, χρησιμοποιούμε τυποποιημένη γραφή (δυνάμεις του 10).
- 8) Τέλος, ο πίνακας επεξεργασίας των μετρήσεων μας κλείνει με την τελευταία στήλη, στην οποία απλά αθροίζουμε τα αναγραφόμενα στην προηγούμενη στήλη τετράγωνα των μέσων αποκλίσεων. Προσέχουμε ότι η στήλη αυτή «τιτλοφορείται» από το κεφαλαίο ελληνικό γράμμα «Σ» (που διεθνώς συμβολίζει το άθροισμα), στο κάτω μέρος του οποίου αναγράφουμε το από πού ξεκινά η άθροισή μας (από την τιμή του δείκτη  $i=1$ ) και στο πάνω μέρος του «Σ» αναγράφουμε το μέχρι πού αθροίζουμε (εδώ, μέχρι το  $N$  να πάρει την τιμή 10). Βέβαια, δεν αμελούμε τις μονάδες.

Τώρα πια, έχουμε εκτελέσει όλους τους απαραίτητους επί μέρους υπολογισμούς και μπορούμε να προχωρήσουμε στον ποσοτικό προσδιορισμό των σφαλμάτων.

## ***B. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ.***

### ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ.

Θυμηθείτε τον τύπο ορισμού του απόλυτου σφάλματος:

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (\text{VIII.1.})$$

Παρατηρούμε ότι αριθμητής στο κλάσμα που βρίσκεται κάτω από το ριζικό, είναι η τελευταία (6η) στήλη του Πίνακα VIII.1. (του πίνακα επεξεργασίας των μετρήσεων μας). Αρα, για να βρούμε το απόλυτο σφάλμα εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα (συνεχίζουμε την πιο πάνω αρίθμηση).

- 9) Παίρνουμε τον αριθμό που αναγράφεται στην τελευταία (6η) στήλη του πίνακα τιμών μας (δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων).
- 10) Διαιρούμε δια  $[N \text{ επί } (N-1)]$ , όπου  $N$  ο αριθμός των μετρήσεων (Στην περίπτωση μας δια του  $10 \times (10-1) = 10 \times 9 = 90$ ).
- 11) Βγάζουμε την τετραγωνική ρίζα αυτού του κλάσματος.

Αν πραγματοποιήσετε τα βήματα αυτά, αντικαθιστώντας σωστά τους αριθμούς και προσέχοντας πολύ στο πάτημα των πλήκτρων του υπολογιστή σας, τότε κατά πάσα πιθανότητα θα βρείτε ότι

$$\delta\bar{x} = 0,099442892\text{cm} \approx 0,1\text{cm} \quad (\text{VIII.2.})$$

τηρώντας τον κανόνα του «ενός σημαντικού ψηφίου».

### ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ.

Αντίστοιχα, ενθυμούμενοι τον ορισμό του σχετικού σφάλματος  $\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$ , αντιλαμβάνεστε ότι το μόνο απλούστατο που έχετε να πράξετε για τον αριθμητικό υπολογισμό του είναι:

- 12) Παίρνουμε την τιμή του απόλυτου σφάλματος που βρήκαμε στο πιο πάνω βήμα (11),  $\delta\bar{x} = 0,1\text{cm}$  και διαιρούμε με τη μέση τιμή  $\bar{x} = 92,41\text{cm}$ .

Τελικά, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}} &= 0,001082133 \approx 0,001 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{\sigma\chi} \% &= \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100 \Rightarrow \sigma_{\sigma\chi} \% = 0,1\% \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

Τελειώσαμε με τους υπολογισμούς μας! Τώρα το μόνο που μένει είναι ν'αναφέρουμε τα αποτελέσματα μας με τον ενδεδειγμένο τρόπο σε όποιον (καθηγητής, προϊστάμενος, εργοδότης, κ.λ.π.) μας ανέθεσε την εκτέλεση του πειράματος. Ας τακτοποιήσουμε λοιπόν αυτήν την εκκρεμότητα!

## ***Γ. ΑΝΑΦΟΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΑΓΡΑΦΗΣ.***

Και φτάσαμε σ'αυτό που πρέπει να είναι το καταληκτικό σημείο κάθε πειραματικής διαδικασίας και της επακόλουθης επεξεργασίας των μετρήσεων: **τη συνοπτική και σύμφωνη με τα υποδεικνυόμενα από τη θεωρία μας αναφορά των αποτελεσμάτων μας σε όποιον μας είχε αναθέσει την εκτέλεση του πειράματος.**

Συνεπώς, αν θέλουμε να έχουμε μία καθ'όλα αντιπροσωπευτική και συνοπτική περιγραφή της πειραματικής μας διαδικασίας και των αποτελεσμάτων που αποκομίσαμε, θα πρέπει να μεριμνήσουμε για την αναφορά των κάτωθι:

- (α) Μέση Τιμή.
- (β) Τα σφάλματα της (απόλυτο & σχετικό) με τη μορφή  $\pm$  περιοχής .
- (γ) Τις διαστάσεις (μονάδες μέτρησης) των αναφερόμενων μεγεθών (όπου υπάρχουν).
- (δ) Τον κανόνα του «ενός σημαντικού ψηφίου».
- (ε) Τον κανόνα της «ίδιας ακρίβειας».

Οπότε, διακρίνουμε δύο τρόπους αναγραφής των πειραματικών αποτελεσμάτων (πάντα για το παράδειγμα με το ύψος του τραπεζιού):

### 1. ΑΝΑΦΟΡΑ ΜΕ ΤΟ ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ.

$$\bar{x} \pm \delta\bar{x} = (92,4 \pm 0,1)cm$$

### 2. ΑΝΑΦΟΡΑ ΜΕ ΤΟ ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ.

$$\bar{x} \pm \sigma_{\sigma\chi} \% = 92,4cm \pm 0,1\%$$

Βέβαια, όλη η διαδικασία που αναπτύχθηκε σ'αυτήν την παράγραφο είναι εντελώς μηχανιστική και σαφώς προδιαγεγραμμένη. Με λίγη προσοχή, είναι σχετικά εύκολο να την τηρήσετε κατά γράμμα και να αποφύγετε επιπόλαια λάθη. Για να θεωρηθεί όμως πλήρης κι επιτυχής ο χειρισμός μιας πειραματικής διαδικασίας, απαιτείται ακόμη η φραστική κριτική και η εννοιολογική επισήμανση και αξιολόγηση όλων των εμπλεκόμενων παραγόντων που ενδεχομένως επιδρούν στην ισχύ των

αποτελεσμάτων σας. Αυτό γίνεται με τη διατύπωση σύντομων, σαφών και περιεκτικών σχολίων σε μία μικρή παράγραφο λίγων σειρών. Έτσι θ' αποδείξετε την ποιοτική σας αυτενέργεια και την ικανότητα σας να αποστασιοποιήστε από μία μηχανιστική διαδικασία, λειτουργώντας παραγωγικά.

**Πρέπει να βεβαιωθείτε ότι κατανοήσατε κάθε πτυχή της διαδικασίας που περιγράφηκε σε όλα τα ανωτέρω. Θα σας ζητηθεί να την αναπαράγετε βήμα προς βήμα και να την εφαρμόζετε μόνοι σας, κάθε φορά που θα κληθείτε να εκτελέσετε ένα πείραμα και να επεξεργαστείτε τις μετρήσεις που θα λάβετε. Οποιαδήποτε παρέκκλιση από αυτά, όχι μόνο θα σας επιφέρει οδυνηρή απώλεια βαθμών, αλλά πιθανότατα θα επηρεάσει την ευδόκιμη παρουσία σας στα Εργαστήρια Φυσικής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής.**

Καταβλήθηκε προσπάθεια οι σημειώσεις αυτές να γραφτούν με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι πολύ λίγα αυτά που θα πρέπει ν' απομνημονεύσετε και πολλά εκείνα που θα χρειαστεί να καταλάβετε το πώς συνάγονται. Μοναδική –αλλά πολύτιμη– συμβουλή μας για ένα επιτυχές κι εποικοδομητικό πέρασμα από τα Εργαστήρια Φυσικής του Πανεπιστημίου Δυτικής Αττικής: Μελετήστε, πολύ, συστηματικά και παραγωγικά!

#### ***Δ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.***

1. Τρεις φοιτητές επιχειρούν να μετρήσουν το ίδιο μήκος. Για μεγαλύτερη αξιοπιστία ο καθένας τους διεκπεραιώνει μία σειρά πέντε (5) μετρήσεων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα τιμών:

Φοιτητής Α: $L_A$ (m)	8,14	8,19	8,21	8,16	8,22
Φοιτητής Β: $L_B$ (m)	8,35	8,31	8,29	8,12	8,04
Φοιτητής Γ: $L_\Gamma$ (m)	8,11	8,32	8,16	8,40	8,04

Να υπολογιστούν: α) Η μέση τιμή του υπό μέτρηση μήκους, το απόλυτο και το σχετικό της σφάλμα για κάθε σειρά μετρήσεων και να αναγραφούν τα αποτελέσματα στις μορφές  $\bar{L}_A \pm \delta\bar{L}_A$  και  $\bar{L}_A \pm \sigma_{\sigma_A} \%$ ,  $\bar{L}_B \pm \delta\bar{L}_B$  και  $\bar{L}_B \pm \sigma_{\sigma_B} \%$ ,  $\bar{L}_\Gamma \pm \delta\bar{L}_\Gamma$  και  $\bar{L}_\Gamma \pm \sigma_{\sigma_\Gamma} \%$  για κάθε φοιτητή αντίστοιχα, β) Η μέση τιμή με τα σφάλματα της για όλες τις μετρήσεις και των τριών φοιτητών μαζί και ν' αναγραφούν τα αποτελέσματα στις μορφές  $\bar{L} \pm \delta\bar{L}$  και  $\bar{L} \pm \sigma_{\sigma} \%$ , γ) Συγκρίνετε τα (α) και (β) και σχολιάστε.

## **ΙΧ. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ.**

### ***Α. ΓΕΝΙΚΑ.***

Η κεντρική ιδέα και το ουσιαστικό επιδιωκόμενο αυτής της παραγράφου είναι να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το πώς χρησιμοποιούμε αρχές κι αξιώματα της

στατιστικής –εμφασιδοτώντας περισσότερο στη φυσική τους σημασία- για να καταφέρουμε ν’ αναπτύξουμε αξιόπιστες μεθόδους ανάδειξης της «καλύτερης» ή πιο «ενδεικτικής» τιμής από μία σειρά μετρήσεων, καθώς επίσης κι ένα μέτρο του βαθμού εμπιστοσύνης που τρέφουμε γι’ αυτήν την τιμή. Με άλλα λόγια, ήρθε η ώρα να μάθουμε το θεωρητικό υπόβαθρο ή το τί κρύβεται πίσω από όλες αυτές τις σχέσεις που πήραμε ως δεδομένες στις προηγούμενες παραγράφους.

Πιστεύουμε ότι ο καλύτερος τρόπος για να κατανοήσουμε πλήρως τον τρόπο που τα τυχαία σφάλματα επηρεάζουν κάθε μετρητική διαδικασία, είναι μέσω της παρουσίασης ενός συγκεκριμένου παραδείγματος:

Υποθέτουμε λοιπόν ότι μας δίνουν ένα κουτί το οποίο περιέχει 50 σφαιρικά βλήματα κυνηγητικού όπλου (κοινά σκάγια), ονομαστικά πανομοιότυπα, και μας ζητούν να τα ζυγίσουμε. Κι έστω ότι χρησιμοποιούμε ένα ψηφιακό ζυγό με «οργανικό όριο σφάλματος»  $\delta m = 0,00005 \text{ gr}$ . Τα αποτελέσματα των ζυγίσεων μας παρατίθενται στον πιο κάτω πίνακα. Θα χειριστούμε τώρα τις διακυμάνσεις των μετρήσεων της μάζας ακριβώς σα να είχαμε ζυγίσει την ίδια σφαίρα 50 φορές στην ίδια ζυγαριά.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΧ.1.

Μάζα (σε gr) των 50 ζυγίσεων					
(1)	2,5696	(18)	2,5625	(35)	2,5586
(2)	2,5725	(19)	2,5776	(36)	2,5745
(3)	2,5693	(20)	2,5819	(37)	2,5700
(4)	2,5780	(21)	2,5666	(38)	2,5678
(5)	2,5735	(22)	2,5595	(39)	2,5865
(6)	2,5816	(23)	2,5608	(40)	2,5730
(7)	2,5658	(24)	2,5637	(41)	2,5712
(8)	2,5788	(25)	2,5768	(42)	2,5587
(9)	2,5613	(26)	2,5713	(43)	2,5693
(10)	2,5658	(27)	2,5769	(44)	2,5778
(11)	2,5713	(28)	2,5669	(45)	2,5578
(12)	2,5715	(29)	2,5747	(46)	2,5632
(13)	2,5612	(30)	2,5687	(47)	2,5746
(14)	2,5694	(31)	2,5746	(48)	2,5690
(15)	2,5681	(32)	2,5643	(49)	2,5745
(16)	2,5660	(33)	2,5685	(50)	2,5742
(17)	2,5528	(34)	2,5513		

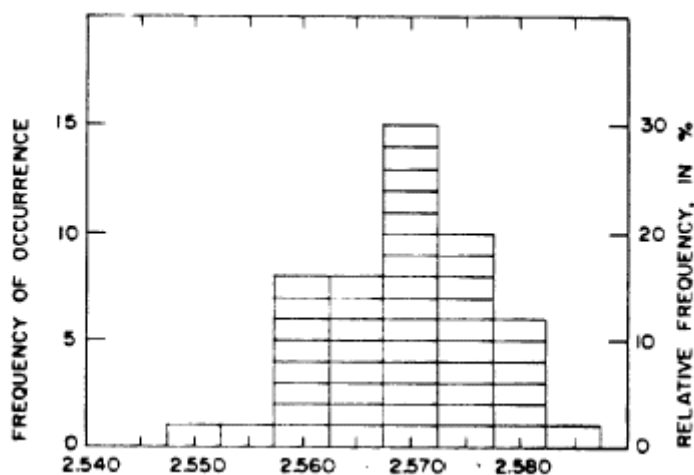
Όταν ταξινομηθούν σε μία σειρά αύξουσας μάζας, οι 50 αυτές τιμές κυμαίνονται από 2,5513 gr εως 2,5865 gr, με 25 τιμές να βρίσκονται πάνω από τα 2,5693 gr και 25 κάτω. Για να μελετήσουμε το «**διάγραμμα συμβάντων**» ή «**συχνότητα εμφανίσεων**», δηλαδή το πόσες φορές καταγράφεται κάθε τιμή (ή εύρος τιμών), θα χρησιμοποιήσουμε ένα εργαλείο που ονομάζεται «**ιστόγραμμα**» και το οποίο είναι ουσιαστικά ένα διάγραμμα του αριθμού των φορών που παρατηρούμε μία συγκεκριμένη τιμή (ή εύρος τιμών). Εστω ότι, για παράδειγμα, ότι επιλέγουμε τις 50 μετρήσεις σε 8 ομάδες τιμών συγκεκριμένου εύρους. Αυτό το επιτυγχάνουμε

διαλέγοντας 8 διαστήματα τιμών, ισομερώς κατανομημένα σε όλο το εύρος των μετρήσεων μας και μετρώντας απλά πόσες από τις τιμές μας βρίσκονται στο κάθε διάστημα. Τα αποτελέσματα της διαδικασίας αυτής φαίνονται στον Πίνακα ΙΧ.2. που ακολουθεί.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΧ.2.

Τάξεις Ελέγχου Τιμών Μάζα (σε gr) των 50 ζυγίσεων		
Κεντρική Τιμή Τάξης	Αριθμός Εμφανίσεων	Εύρος Τάξης
2,550	1	2,5475 - 2,5525
2,555	1	2,5525 - 2,5575
2,560	8	2,5575 - 2,5625
2,565	8	2,5625 - 2,5675
2,570	15	2,5675 - 2,5725
2,575	10	2,5725 - 2,5775
2,580	6	2,5775 - 2,5825
2,585	1	2,5825 - 2,5875

Τα 8 διαστήματα που επιλέξαμε φέρουν την ονομασία «**τάξεις ελέγχου τιμών**» ή απλά «**δοχεία**» και η επιλογή του πλήθους τους βρίσκεται αποκλειστικά στη διαιοδοσία του πειραματιστή. Ίσως θα προσέξατε ότι οι μετρήσεις #2 (2,5725gr) και #18 (2,5625gr) «πέφτουν» ακριβώς πάνω στα όρια των Δοχείων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτές οι δύο οριακές τιμές καταμετρήθηκαν στο κατώτερο διάστημα. Το ιστόγραμμα των δεδομένων απεικονίζεται στο Σχήμα ΙΧ.1.



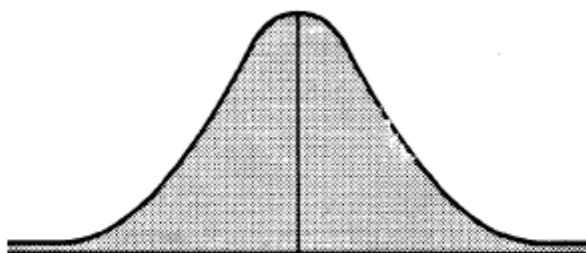
ΣΧΗΜΑ ΙΧ.1.

Οι πειραματικές τιμές ταξινομημένες σε μία **Κατανομή Συχνοτήτων**.

Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά το ιστόγραμμα της Κατανομής Συχνοτήτων του δείγματος, όπως λέγεται, μπορούμε να διατυπώσουμε μερικές απλές επισημάνσεις:

- (i) Υπάρχει μία «συσώρευση» γύρω από μία κεντρική τιμή στο, ή περίπου στο, 2,570 gr. Αυτό πλησιάζει τη μέση τιμή των 50 μετρήσεων.
- (ii) Τιμές που διαφέρουν λίγο από την κεντρική τιμή παρατηρούνται συχνά, ή έχουν μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης.
- (iii) Απομακρυσμένες τιμές ή τιμές που απέχουν πολύ από το κέντρο είναι σπάνιες, ή έχουν μικρή πιθανότητα εμφάνισης.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι ήταν εφικτή η λήψη ενός πολύ μεγάλου αριθμού μετρήσεων της μάζας των σφαιριδίων, τότε αντιλαμβανόμαστε ότι το ιστόγραμμα της κατανομής συχνοτήτων θα προσέγγιζε την «κωδωνοειδή» (σαν καμπάνα δηλαδή) ομαλή καμπύλη του Σχήματος ΙΧ.2.



**ΣΧΗΜΑ ΙΧ.2.**

Χαρακτηριστική «κωδωνοειδής» καμπύλη.

Μία τέτοια καμπύλη παράγεται από τη γραφική παράσταση μιας μαθηματικής συνάρτησης που ονομάζεται **Gaussian ή κανονική κατανομή**.

Η μαθηματική σχέση που μας δίνει τη Gaussian ή κανονική κατανομή είναι η εξής:

$$f_{\bar{x}, \sigma_x}(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\bar{x})^2 / 2\sigma_x^2]} \quad (\text{IX.1.})$$

όπου:  $\bar{x}$ , κέντρο ή μέση τιμή της κατανομής  
 $x$ , η μετρούμενη ποσότητα και  
 $\sigma_x$ , τυπική απόκλιση της κατανομής (το 68,3% όλων των τιμών βρίσκονται σ'ένα διάστημα εύρους  $\bar{x} \pm \sigma_x$ )

Ένα εξαιρετικά αξιοσημείωτο γεγονός είναι το αναφερόμενο ως «θεώρημα του κεντρικού ορίου», ότι δηλαδή σχεδόν όλες οι ομάδες τυχαίων σφαλμάτων προσεγγίζουν αυτήν την καμπύλη, όσο ο πληθώραριθμός των ομάδων γίνεται μεγαλύτερος, παρότι οι μετρούμενες φυσικές ποσότητες μπορεί να είναι τελείως διαφορετικές. Και αυτό δε συμβαίνει μόνο στη Φυσική. Κάθε δείγμα ενός πολύ μεγάλου αριθμού τυχαίων συμβάντων προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Αλλά αυτό είναι μία άλλη συζήτηση.

## B. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ.

Αυτό που μέχρι τώρα σας ήταν γνωστό ως «μέσος όρος» μιας σειράς αριθμών, στο εξής θα το ονομάζουμε **μέση τιμή (mean value)** μιας κατανομής δειγμάτων. Εστω δηλαδή ότι έχουμε μία σειρά  $N$  μετρήσεων της φυσικής ποσότητας  $x$ , τις  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Τότε, όπως ήδη ξέρουμε, η μέση τιμή τους υπολογίζεται ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (\text{IX.2.})$$

Συγκεκριμένα τώρα, ερχόμενοι στο παράδειγμά μας με τα 50 σκάγια, ο υπολογισμός της μέσης τιμής τους δίνει αποτέλεσμα:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^{50} m_i}{50} = 2,5693 \text{ gr}$$

## Γ. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ $\sigma_x$ .

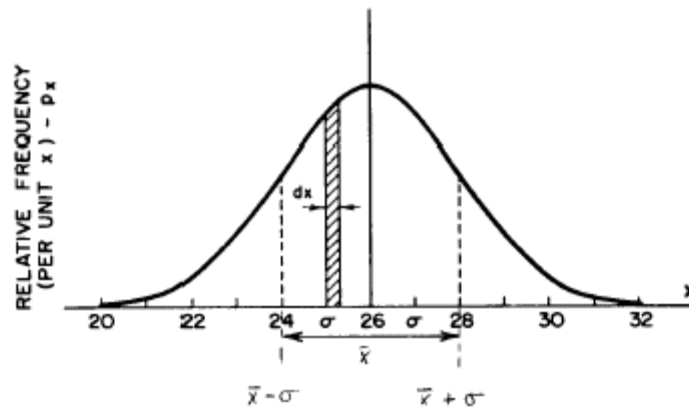
Η **τυπική απόκλιση (standard deviation)** είναι το γνώριμο μας εύρος, που αναφέρθηκε προηγούμενα, στη συζήτηση περί ιστογραμμάτων κι εκφράζει την προσέγγιση της μέσης αβεβαιότητας μιας εξατομικευμένης μέτρησης από το σύνολο των  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Μαθηματικά, η τυπική απόκλιση ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (\text{IX.3.})$$

με το συνήθη συμβολισμό. Η ποσότητα αυτή καλείται και «ριζική μέση τετραγωνική απόκλιση» για προφανείς λόγους. Για το παράδειγμα των σφαιριδίων βρίσκεται ότι

$$\sigma_x = 0,00744 \text{ gr}$$

Στο Σχήμα IX.3. που έπεται αμέσως, απεικονίζεται το πώς θα έμοιαζε μία άλλη κατανομή μετρήσεων με μέση τιμή 26 και τυπική απόκλιση 2.



ΣΧΗΜΑ ΙΧ.3.

Διάγραμμα πυκνότητας πιθανότητας για μία κατανομή με μέση τιμή 26 και τυπική απόκλιση 2.

Ομως, κάτι έχει αλλάξει σε σχέση με πριν! Προσέξτε την ονομασία του κατακόρυφου άξονα! Αντί να σχεδιάσουμε τον αριθμό των εμφανίσεων σε κάθε διάστημα (τάξη ελέγχου τιμών), διαιρέσαμε με τον ολικό αριθμό των μετρήσεων για να πάρουμε τη «**σχετική συχνότητα εμφάνισης**». Καθιστώντας στη συνέχεια τη σχετική συχνότητα εμφάνισης ανεξάρτητη από το εύρος των διαστημάτων, δημιουργούμε την «**πυκνότητα πιθανότητας**» ή αλλιώς «σχετική συχνότητα ανά μονάδα  $x$ » και την οποία ονομάζουμε  $f(x)$ :

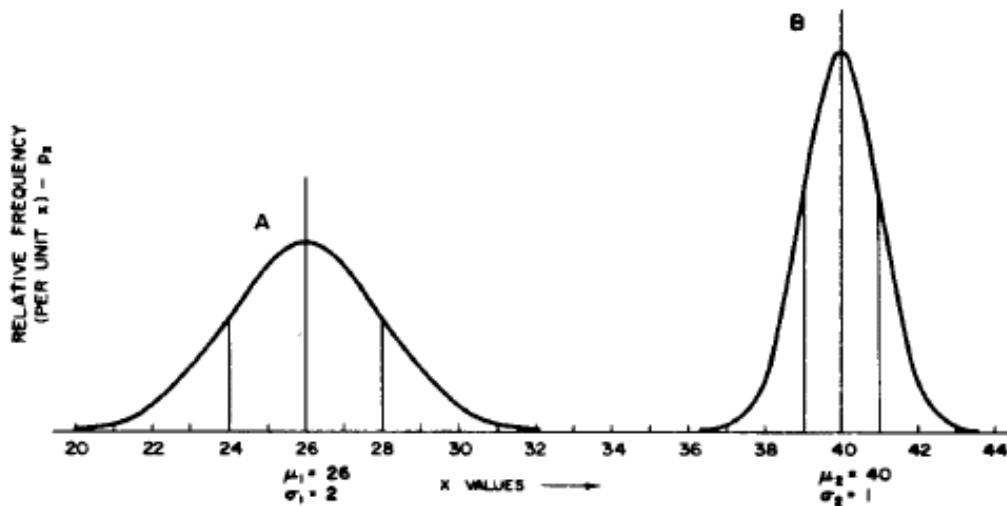
$$f(x) = \frac{\text{αριθμομετρήσεων σ' ένα Δοχείο} / \text{ολικός αριθμομετρήσεων}}{\text{ευρος Δοχείου}}$$

Οι διαστάσεις της πυκνότητας πιθανότητας («μονάδες μέτρησης») είναι  $1/x$ . Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να εμφανιστεί μία τιμή  $x$ , πρέπει να βρούμε την πυκνότητα πιθανότητας και κατόπιν να την πολλαπλασιάσουμε επί  $dx$ . Η πιθανότητα να βρούμε την τιμή του  $x$  να κυμαίνεται σ' ένα διάστημα εύρους  $\pm dx / 2$  γύρω από το  $x_0$  είναι  $f(x_0)dx$ . Αυτό σημαίνει ότι εμβαδόν που οριοθετείται από τη γνώριμή μας κωδωνοειδή καμπύλη του σχήματος ΙΧ.3., μεταξύ δύο τιμών του  $x$ , αντιπροσωπεύει την πιθανότητα παρατήρησης του  $x$  σ' αυτό το εύρος.

Το σχήμα ΙΧ.3. απεικονίζει τη Gauss-ιανή κατανομή που περιγράφηκε πιο πάνω, η οποία προσεγγίζεται όταν ένας πολύ μεγάλος αριθμός μετρήσεων (παρατηρήσεων) μιας φυσικής ποσότητας λαμβάνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες, έτσι ώστε οι διαφορές μεταξύ των παρατηρήσεων να οφείλονται στα τυχαία σφάλματα. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή της καμπύλης, μεταξύ  $x$  και  $x+dx$ , αναπαριστά την πιθανότητα που έχει μία μέτρηση να βρεθεί μέσα σ' αυτό το εύρος τιμών. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι το 68,3% του ολικού εμβαδού που περικλείει η καμπύλη βρίσκεται μεταξύ  $\bar{x} - \sigma_x$  και  $\bar{x} + \sigma_x$ . Δηλαδή, εκεί θα «πέσουν» το 68,3% των μετρήσεων μας. Συνεπώς, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ως ένα μέτρο της «**διασποράς**» (του ανοίγματος) των τιμών του  $x$  γύρω από το κέντρο της κατανομής.

Μία αλλαγή των συνθηκών υπό τις οποίες εκτελείται το πείραμα, όπως μία θερμοκρασιακή μεταβολή ή μία κατασκευαστική ατέλεια των μετρητικών μας οργάνων, λέγεται ως γνωστόν «συστηματική επίδραση». Μία τέτοια επίδραση μπορεί να προκαλέσει μία συνολική μετατόπιση όλης της κατανομής γύρω από μία νέα μέση ή κεντρική τιμή. Η αιτία και το μέγεθος τέτοιων «συστηματικών» μετατοπίσεων μπορεί συνήθως να εντοπιστεί μέσα από μία ενδελεχή ανάλυση της ίδιας της μετρητικής διαδικασίας και των εμπλεκόμενων φυσικών διεργασιών.

Αν οι τυχαίες διακυμάνσεις μειωθούν, είτε λόγω βελτίωσης της τεχνικής μας, είτε απλά λόγω καλής τύχης, η **διασπορά** ή ο **διασκεδασμός** (το άνοιγμα) της κωδωνοειδούς καμπύλης των παρατηρήσεων θα μικρύνει. Και βέβαια αυτό αντανακλάται σε μικρότερη τυπική απόκλιση  $\sigma_x$ . Αυτό ακριβώς απεικονίζεται και στο σχήμα IX.4., όπου μπορούμε να δούμε δύο κανονικές κατανομές, η καθεμιά από τις οποίες αντιπροσωπεύει τον ίδιο αριθμό μετρήσεων.



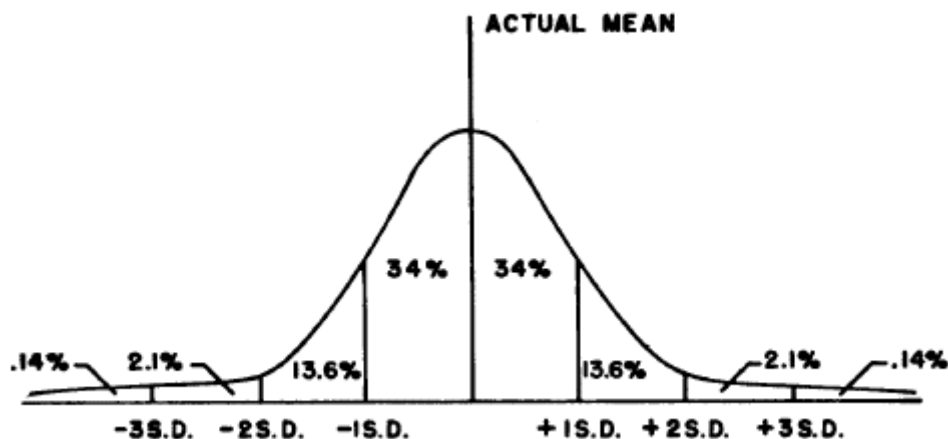
ΣΧΗΜΑ IX.4.

Δύο κανονικές κατανομές με διαφορετικές τιμές παραμέτρων «μέσης τιμής» και «τυπικής απόκλισης»

Βλέπουμε ότι η καμπύλη A εστιάζεται γύρω από τη μέση τιμή  $\mu_1=26$  και αντίστοιχα η B γύρω από τη  $\mu_2=40$ . Η καμπύλη A έχει μεγαλύτερη τυπική απόκλιση  $\sigma_1=2$  από τη B, που έχει  $\sigma_2=1$ . Συνεπώς, νομιμοποιούμε να ισχυριστούμε ότι η σειρά μετρήσεων που αντιπροσωπεύεται από την καμπύλη B είναι στατιστικά πιο αξιόπιστη απ' αυτήν που αντιπροσωπεύεται από την καμπύλη A.

Επίσης, πολύ χρήσιμες πληροφορίες, όσον αφορά στην στατιστική αξιοπιστία των μεγεθών που υπολογίσαμε, παρέχονται από το ακόλουθο σχήμα IX.5. Σ' αυτό φαίνεται μία κανονική κατανομή, η οποία –μετά τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης- έχει χωριστεί σε τομείς ακεραίων πολλαπλασίων της  $\sigma_x$  (Standard Deviation - S.D.). Όπως μπορείτε να δείτε, πολύ μικρό ποσοστό των μετρήσεων βρίσκεται εκτός ενός διαστήματος εύρους 3 τυπικών αποκλίσεων εκατέρωθεν (δεξιά κι αριστερά) της μέσης τιμής:  $0,14\% + 0,14\% = 0,28\%$ , ή μιλώντας με πιο απλά

λόγια: σε μία σειρά 1000 μετρήσεων μόλις 3 θα «πέσουν» έξω από αυτό το διάστημα πλάτους  $\pm 3\sigma_x$  γύρω από το  $\bar{x}$ . Αρκετά καλά, δε νομίζετε;



ΣΧΗΜΑ IX.5.

Μία κανονική κατανομή χωρισμένη σε τομείς ακεραίων πολλαπλασίων της τυπικής απόκλισης (S.D.), όπου φαίνεται το αναμενόμενο ποσοστό μετρήσεων που αντιστοιχεί σε κάθε τομέα.

Το «κριτήριο Chauvenet» είναι ένας κανόνας ο οποίος ισχυρίζεται ότι, μετρήσεις που βρίσκονται μακρύτερα αυτού του διαστήματος πλάτους  $\pm 3\sigma_x$  από τη μέση τιμή θα πρέπει να αμελούνται. Πάντως, ο κανόνας αυτός δεν είναι καθολικά αποδεκτός, μιας και όλες οι προσεκτικά ειλημμένες μετρήσεις είναι εξ ίσου έγκυρες και υπολογίσιμες.

#### Δ. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ.

Σύμφωνα με τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας που δόθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η πιθανότητα να καταγράψουμε μία μέτρηση μέσα σ'ένα διάστημα πλάτους  $dx$  κοντά σε μία φυσική ποσότητα  $x$ , δίνεται από τη σχέση:

$$P = \int_x^{x+dx} f_{\bar{x}, \sigma_x}(x) dx \quad (\text{IX.4.})$$

Τώρα, η πιθανότητα να καταγράψουμε μία μέτρηση  $x$  μέσα σε ολόκληρο το εύρος των παρατηρήσεων μας είναι ασφαλώς ίση με τη μονάδα, δηλαδή είναι απόλυτα βέβαιο ότι θα καταγράψουμε μία ένδειξη «κάπου» μέσα στα όρια της περιοχής που μετράμε:

$$P(-\infty \leq x \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\bar{x}, \sigma_x}(x) dx = 1 \quad (\text{IX.5})$$

Με άλλα λόγια, είναι σίγουρο ότι θα καταγράψουμε μία μέτρηση του  $x$  από τη στιγμή που οι μετρήσεις εκτείνονται «σε όλο τον κόσμο» (από το μείον άπειρο έως το συν

άπειρο). Αυτό ονομάζεται «**συνθήκη ή απαίτηση κανονικοποίησης**» (**normalization requirement**).

Η πιθανότητα που έχει μία μέτρηση  $x$  να καταγραφεί εντός ενός διαστήματος εύρους  $\pm\sigma_x$  από τη μέση τιμή, όπως έχουμε ήδη πει, είναι 68,3%, δηλαδή 0,683. Αυτό υπολογίζεται από το εξής ολοκλήρωμα:

$$P = \int_{\bar{x}-\sigma_x}^{\bar{x}+\sigma_x} \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\bar{x})^2/2\sigma_x^2]} dx = 0,683 \quad (\text{IX.6.})$$

που όμως δε μπορούμε να το υπολογίσουμε αναλυτικά, αλλά είτε με τη βοήθεια πινάκων, είτε με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Εργαζόμενοι όμοια με τα προηγούμενα βρίσκουμε:

$$P(\bar{x} - 2\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma_x) = 0,954$$

$$P(\bar{x} - 3\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma_x) = 0,997$$

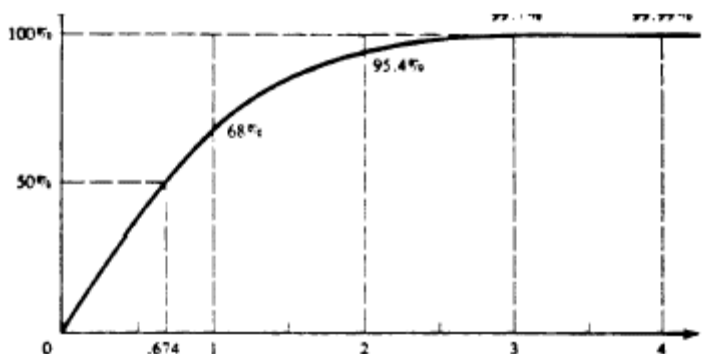
$$P(\bar{x} - 4\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + 4\sigma_x) = 0,9999$$

Ακόμη είναι

$$P(\bar{x} - 0,674\sigma_x \leq x \leq \bar{x} + 0,674\sigma_x) = 0,50$$

Δηλαδή, υπάρχει πιθανότητα 50:50 για μία μέτρηση να παρατηρηθεί στο διάστημα  $\bar{x} \pm 0,674\sigma_x$ . Ως εκ τούτου, η τιμή  $0,674\sigma_x$  ονομάζεται «**πιθανό σφάλμα**».

Το σχήμα IX.6. απεικονίζει την πιθανότητα  $P$ , που έχει μία μέτρηση του  $x$  να βρεθεί μέσα σε μια συγκεκριμένη περιοχή συμμετρικού εύρους γύρω από τη μέση τιμή του  $x$ , και η οποία –όπως βλέπουμε- αυξάνεται δραματικά καθώς αυξάνεται το εύρος της περιοχής αυτής. Θεωρούμε ότι το  $t$  είναι κάποιος θετικός αριθμός.



ΣΧΗΜΑ IX.6.

Ο πίνακας ΙΧ.3. απεικονίζει την πιθανότητα P που έχει μία μέτρηση της φυσικής ποσότητας x να βρεθεί μέσα σ'ένα διάστημα εύρους t τυπικών αποκλίσεων από τη μέση τιμή. Δύο συνηθισμένες ονομασίες γι'αυτήν τη συνάρτηση είναι «ολοκλήρωμα τυπικού σφάλματος» και «συνάρτηση σφάλματος» [erf(t)].

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΧ.3.

.t:	0	,25	,5	,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
P%	0	20	38	55	68	79	87	92	95,4	96,8	99,7	99,95	99,99

Ας εξετάσουμε όμως ακόμη ένα, πολύ σύντομο διευκρινιστικό παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι μας δίνεται μία ομάδα από δέκα ελατήρια – όλα ονομαστικά πανομοιότυπα- και μας ζητούν να επιλέξουμε κάποιο από αυτά και να μετρήσουμε 10 φορές με κάποια συγκεκριμένη διαδικασία τη σταθερά (σκληρότητα) τους. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων αναγράφονται στον πιο κάτω πίνακα ΙΧ.4.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΧ.4.

A/A	K (N/m)	A/A	K(N/m)
1	86	6	88
2	85	7	88
3	84	8	85
4	89	9	83
5	86	10	85

Βρίσκουμε λοιπόν:

$$\bar{k} = 85,9 \text{ N/m}$$

και

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (k_i - 85,9)^2}{9}} = 1,9 \text{ N/m} \Rightarrow \sigma_k \approx 2 \text{ N/m}$$

Αν τώρα επιχειρούσαμε μία 11η μέτρηση της σταθεράς του ελατηρίου, θα περιμέναμε με πιθανότητα 68,3% το αποτέλεσμα να βρισκόταν στο διάστημα  $84 \text{ N/m} \leq k \leq 88 \text{ N/m}$ .

### ***E. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ $\sigma_{\bar{x}}$ .***

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή ας ανακεφαλαιώσουμε τις έννοιες της στατιστικής που συζητήθηκαν ως εδώ:

Εστω λοιπόν ότι καταγράφουμε N μετρήσεις,  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  της ίδιας φυσικής ποσότητας x. Ξέρουμε ήδη, ότι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε όσον αφορά στην αληθή τιμή της ποσότητας x αντιπροσωπεύεται από τη μέση τιμή  $\bar{x}$  της

σειράς των μετρήσεων. Επιπλέον, η τυπική απόκλιση  $\sigma_x$  χαρακτηρίζει την αβεβαιότητα που σχετίζεται με οποιαδήποτε μεμονωμένη μέτρηση και μάλιστα είμαστε βέβαιοι ότι, βρίσκοντας τη  $\bar{x}$ , έχουμε «μαντέψει» καλύτερα από το αν επιλέγαμε οποιαδήποτε άλλη από τις  $N$  μετρήσεις. Όμως, είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε και την αβεβαιότητα αυτής της καλύτερης «μαντεψιάς». Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η αβεβαιότητα της μέσης τιμής  $\bar{x}$  μιας σειράς  $N$  μετρήσεων δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \delta\bar{x} \quad (\text{IX.7.})$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται «**τυπική απόκλιση της μέσης τιμής**» ή «**απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής**». Όπως έχουμε πει στην παράγραφο V, αυτή (μαζί με τη μέση τιμή και το σχετικό σφάλμα) είναι οι ποσότητες που θα χρειαστεί να υπολογίσετε κάθε φορά που θα σας ζητηθεί να επεξεργαστείτε μία σειρά μετρήσεων, γι' αυτό πρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας στην κατά γράμμα τήρηση όλων όσων διδαχθήκατε!

Σημειώστε ότι, από τη στιγμή που το  $\sigma_x$  αντιπροσωπεύει την προσεγγιστική μέση αβεβαιότητα σε κάθε μεμονωμένη μέτρηση από μία σειρά  $N$  μετρήσεων, περισσότερες μετρήσεις δε θα επιφέρουν καμία αξιοσημείωτη μεταβολή στην τιμή της  $\sigma_x$ . Όμως, αυξανόμενου του πλήθους των μετρήσεων, η  $\sigma_{\bar{x}}$  θα ελαττώνεται αργά (εξ αιτίας του παράγοντα  $1/\sqrt{N}$ ). Αυτό είναι λογικοφανές και μάλιστα κάτι που επιθυμούμε! Αν πάρουμε περισσότερες μετρήσεις, αυξάνεται η εμπιστοσύνη μας στη  $\bar{x}$  ως πιο αξιόπιστης τιμής.

Ας επιστρέψουμε όμως στη σειρά των 10 μετρήσεων μας της σταθεράς του ελατηρίου κ. Θυμηθείτε ότι

$$\bar{k} = 85,9 \text{ N/m} \text{ και } \sigma_k = 2 \text{ N/m}$$

Τώρα το  $\sigma_{\bar{k}}$ , όπως ορίστηκε πιο πάνω, υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_{\bar{k}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{N}} = 0,6 \text{ N/m}$$

Εν τέλει, μπορούμε ν' αναφέρουμε το αποτέλεσμα μας σύμφωνα μ' αυτά που διδαχθήκαμε, δηλαδή με τη μορφή

$$\bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}} = (85,9 \pm 0,6) \text{ N/m}$$

Η τιμή του  $\sigma_{\bar{x}}$  είναι αυτή που μας επιτρέπει να γράψουμε τη μέση τιμή της σταθεράς του ελατηρίου με περισσότερα σημαντικά ψηφία (3 στην προκειμένη περίπτωση) από αυτά που καταγράφονται σε οποιαδήποτε από τις μετρήσεις του  $k$ . Δεν πρέπει ποτέ ν'αμελείτε να αναγράφετε την τιμή μιας μετρούμενης ποσότητας  $x$  με τη μορφή

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}, \text{ όπου } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

αρκεί βέβαια να έχετε μετρήσει το  $x$  αρκετές φορές, ώστε να γνωρίζετε το  $\sigma_x$  με ικανοποιητική ακρίβεια.

## ΣΤ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

- Υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ακόλουθων 30 μετρήσεων χρόνου (όλες μετρημένες σε sec). Θα χρειαστείτε έναν υπολογιστή τσέπης, αλλά θα γλυτώσετε πολύ «πάτημα κουμπιών» αν παρατηρήσετε ότι μόνο τα δύο τελευταία ψηφία διαφοροποιούνται και αν μετακινήσετε την υποδιαστολή δύο θέσεις προς τα δεξιά. Στην περίπτωση που ο υπολογιστής που χρησιμοποιείτε δεν υπολογίζει τυπικές αποκλίσεις αυτόματα, θα πρέπει να ανατρέξετε στον ορισμό της τυπικής απόκλισης (σχέση IX.3.).

8,16	8,14	8,12	8,16	8,18	8,10	8,18	8,18	8,18	8,24
8,16	8,14	8,17	8,18	8,21	8,12	8,12	8,17	8,06	8,10
8,12	8,10	8,14	8,09	8,16	8,16	8,21	8,14	8,16	8,13

Στη θεωρία μάθαμε ότι, αν έχουμε πάρει αρκετές μετρήσεις, περιμένουμε το 68,3 % όλων των τιμών να βρίσκεται μέσα σ'ένα διάστημα εύρους  $\pm \sigma_t$  γύρω από το  $\bar{t}$ . Για τις πιο πάνω μετρήσεις, πόσες (αριθμητικά) περιμένετε να βρίσκονται έξω από αυτό το διάστημα; Πόσες «πέφτουν» έξω στην πραγματικότητα; Απαντήστε τις ίδιες ερωτήσεις για το διάστημα  $\bar{t} \pm 2\sigma_t$ .

- Οι ακόλουθες τιμές γωνιών (μετρημένες σε πρώτα λεπτά της μοίρας) λήφθηκαν κατά τη διάρκεια ενός πειράματος μέτρησης του πάχους ενός λεπτού στρώματος υγρού He. Υποθέστε ότι οι τιμές αυτές χαρακτηρίζονται από τυχαιότητα, έτσι ώστε να προσεγγίζονται από μία κανονική κατανομή.

34	35	45	40	46
38	47	36	38	34
33	36	43	43	37
38	35	38	40	33
38	40	48	39	32
36	40	40	36	34

- A) Σχεδιάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί το ιστόγραμμα των μετρήσεων.

- B) Εντοπίστε το μέσο (κέντρο του ιστογράμματος).  
 Γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή.  
 Δ) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση (μιας εξατομικευμένης μέτρησης).  
 Ε) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής.  
 ΣΤ) Ποιο συγκεκριμένο διάστημα των μετρήσεων, γύρω από τη μέση τιμή, έχει πιθανότητα εμφάνισης 68 % και ποιο 95 %;
3. Ένα απλό εκκρεμές χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g$  με τη βοήθεια της σχέσης  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ , όπου  $T$  η περίοδος και  $L$  το μήκος του εκκρεμούς. Είκοσι μετρήσεις του  $T$  δίνουν μέση τιμή 1,82 sec και τυπική απόκλιση (μιας εξατομικευμένης μέτρησης) 0,06 sec. Δέκα μετρήσεις του  $L$  δίνουν μέση τιμή 0,823m και τυπική απόκλιση 0,014m. Πόση είναι η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής για την υπολογιζόμενη μέση τιμή του  $g$ ;
4. Μία δημογραφική έρευνα του πληθυσμού μίας πόλης των Η.Π.Α. πιστοποιεί ότι τα ύψη των αρρένων κατοίκων ακολουθούν την κανονική κατανομή, με μέση τιμή  $\bar{h} = 69inch$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_h = 2inch$ . Σε ένα τυχαίο δείγμα 1.000 αντρών, βρείτε πόσοι άντρες περιμένετε να έχουν ύψος:
- A) μεταξύ 67 inch και 71 inch.  
 B) πάνω από 71 inch.  
 Γ) πάνω από 75 inch.  
 Δ) μεταξύ 65 inch και 67 inch.

## Χ. ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.

### **A. ΓΕΝΙΚΑ.**

Στην παρούσα παράγραφο θ' ασχοληθούμε με τα διαγράμματα: τί είναι, πώς πρέπει να τα σχεδιάζουμε και πώς «αποκωδικοποιούμε» τις πληροφορίες που εμπεριέχουν.

Η σημασία της διαγραμματικής απεικόνισης δύο σχετιζόμενων μεγεθών σ' ένα σύστημα αξόνων (σύστημα αναφοράς) αποδεικνύεται ως ένα βαθμό από το πόσο διαδεδομένη είναι η χρήση τους. Και αυτό δε συμβαίνει μόνο στη Φυσική, αλλά και σε άλλα πεδία (π.χ. οικονομία, πολιτική).

Μία από τις σημαντικότερες ικανότητες ενός επιδέξιου πειραματιστή (και όχι μόνο: κάθε συνεπή κι επιτυχημένου επαγγελματία, επιτρέψτε μας να πούμε), είναι το να μπορεί ν' ανιχνεύει την ύπαρξη -και στη συνέχεια να διερευνά τη φύση- ενός συσχετισμού ανάμεσα σε μετρούμενες ποσότητες.

Για παράδειγμα, έστω ότι ενδιαφερόμαστε να διερευνήσουμε τη σχέση (αν υπάρχει κάποια) μεταξύ του χρόνου που χρειάζεται ένα ταλαντούμενο εκκρεμές να συμπληρώσει μία πλήρη παλινδρόμηση (που, αν θυμάστε, ονομάζεται περίοδος) και των πιο αξιοσημείωτων μετρήσιμων χαρακτηριστικών του: του μήκους του νήματος και της μάζας που είναι ανηρτημένη στο άκρο του. Δηλαδή, αυτό που ψάχνουμε είναι το εξής:

$$T = f(l, m)$$

όπου,  $T$  η περίοδος του εκκρεμούς,  $l$  το μήκος του και το  $f$  υποδηλώνει την ενδεχόμενη συναρτησιακή σχέση εξάρτησης μεταξύ των ποσοτήτων που βρίσκονται στα δύο μέλη της πιο πάνω παράστασης. Αυτό ακριβώς εμφασιοδοτεί και το ερωτηματικό πάνω από το σύμβολο της ισότητας: ο πειραματιστής καλείται να διερευνήσει την ενδεχόμενη σχέση που διέπει τα μεγέθη αυτά.

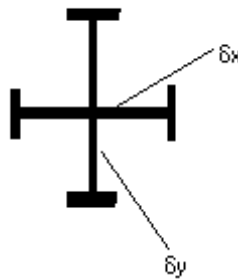
Στις σελίδες που ακολουθούν θα εξετάσουμε λεπτομερώς –με σκοπό να μάθουμε να χρησιμοποιούμε- ορισμένες τεχνικές γραφικής ανάλυσης προς διάγνωση συσχετισμών. Ασφαλώς υπάρχουν και άλλες μέθοδοι, αλλά η οπτική αντίληψη που προσφέρει η γραφική ανάλυση των διαγραμμάτων εντυπώνεται πολύ εύκολα.

Αρχίζουμε με μερικές χρήσιμες οδηγίες για τη σωστή χάραξη διαγραμμάτων:

1. Τα διαγράμματα σχεδιάζονται **πάντα** σε χιλιοστομετρικό χαρτί και μόνο (διαστάσεων Α4, κατά προτίμηση).
2. Χρησιμοποιήστε ένα καλά ξυσμένο ή ένα μηχανικό μολύβι. Ένα άξυστο μολύβι θα παρεμβάλει ανεπιθύμητες ανακρίβειες και μ'ένα στυλό διαρκείας θα πρέπει να σκίζετε μία σελίδα τη φορά, για το παραμικρό λάθος.
3. Σχεδιάστε το διάγραμμά σας σε μία ολόκληρη σελίδα χιλιοστομετρικού χαρτιού. Ένα μεγάλο διάγραμμα είναι σαφώς πιο ευανάγνωστο. Ένα «συμπιεσμένο» και «σμικρυσμένο» διάγραμμα θα μειώσει την ακρίβεια της γραφικής σας ανάλυσης.
4. Τιτλοδοτήστε το διάγραμμά σας με σαφή και συνοπτικό τρόπο.
5. Σε κάθε συνάρτηση της μορφής  $y=f(x)$ , η εξαρτημένη μεταβλητή  $y$  απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα (άξονας των  $y$ ) και η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  στον οριζόντιο άξονα (άξονας των  $x$ ).
6. Τιτλοδοτήστε τους άξονες. Συμπεριλάβετε μονάδες μέτρησης. Βαθμονομήστε τους άξονες. Χρησιμοποιήστε ισοκατανομημένη βαθμονόμηση. Θυμηθείτε: **ΔΕΝ αναγράφουμε πειραματικές τιμές στους άξονες.**
7. Απεικονίστε τα πειραματικά σας σημεία στο σύστημα αξόνων που έχετε χαράξει. Ξέρετε πώς! Αρκεί κάποια στιγμή στη ζωή σας να έχετε λύσει σταυρόλεξο ή να έχετε παίξει «Ναυμαχία». **Στο χιλιοστομετρικό χαρτί δε χρειάζεται να φέρετε διακεκομμένες.**

Η εικόνα που αντικρύζουμε τώρα στο χιλιοστομετρικό μας χαρτί είναι μία κατανομή σημείων τα οποία αντιπροσωπεύουν πλήρως την πειραματική διαδικασία και τη λήψη τιμών που προηγήθηκε.

Το πρώτο σημείο που θα θέλαμε να επισημάνουμε είναι το ότι -μετά τα όσα μάθαμε σχετικά με τα σφάλματα- **τα απεικονιζόμενα στο διάγραμμά μας σημεία δεν είναι πια απλά «μαθηματικά σημεία»**, με τη γεωμετρική έννοια του όρου. Τα πειραματικά σφάλματα τα οποία αναπόφευκτα διαπράττουμε, αποτρέπουν τον ακριβή προσδιορισμό της τιμής του μετρούμενου μεγέθους και κατ'επέκταση αυτό πρέπει με κάποιο τρόπο ν'αναπαρασταθεί στο διάγραμμά μας. Πιο απλά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $y = f(x)$ . Όταν καλούμαστε να «εντοπίσουμε» ένα σημείο με συγκεκριμένη τετμημένη και τεταγμένη, έστω το  $M(x_0, y_0)$ , εκείνο που πραγματικά συμβαίνει είναι ότι γνωρίζουμε το πού βρίσκεται το εν λόγω σημείο με αβεβαιότητες  $\delta x_0$  και  $\delta y_0$ , αντίστοιχα. Αρα, οι πραγματικά «εφικτές» συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι  $(x_0 \pm \delta x_0, y_0 \pm \delta y_0)$ . Την εικόνα αυτή την αποδίδουμε γραφικά με τις αποκαλούμενες «**ράβδους σφαλμάτων**» (**error bars**), τις οποίες σχεδιάζουμε «γύρω» από το πειραματικό μας σημείο, ακριβώς όπως φαίνεται στο σχήμα X.1. πιο κάτω.



ΣΧΗΜΑ X.1.

Το σφάλμα  $\delta x_0$  έχει τις ίδιες διαστάσεις με το μετρούμενο μέγεθος  $x$ . Αν πρέπει ν'αναπαραστήσουμε το  $\delta x_0$  σ'έναν άξονα  $x$ , τότε αυτό δεν είναι τίποτε άλλο από ένα «αναλόγων διαστάσεων» ευθύγραμμο τμήμα. Τα ίδια ισχύουν βέβαια και για τα  $\delta y_0$  και  $y$ . Εν ολίγοις, το πειραματικό μας σημείο απεικονιζόμενο με τις ράβδους σφαλμάτων θα πάρει τη μορφή του ιδιόμορφου «σταυρού» του πιο πάνω σχήματος.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε απεικονίσει όλη την κατανομή των πειραματικών μας σημείων, μαζί με τις ράβδους σφαλμάτων τους, και το μόνο που απομένει είναι να χαράξουμε την «ιδανική» καμπύλη, η οποία να περιγράφει καλύτερα το φαινόμενο του πειράματός μας.

Πριν προχωρήσουμε στη χάραξη της καμπύλης, πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα ακόλουθα:

1. Η κατανομή των πειραματικών σημείων θα είναι τέτοια που πιθανότατα θα μας υπαγορεύει τη μορφή που θα έχει η «βέλτιστη» καμπύλη (π.χ. ευθεία, παραβολή, υπερβολή). Κατά την εξάσκησή σας

στα Εργαστήρια Φυσικής, σχεδόν ποτέ δε θα έχετε αμφιβολία σχετικά με το ποια μορφή θα έχει η καμπύλη που πρόκειται να χαράξετε. Μόνο σε ερευνητικά εργαστήρια, όπου οι επιστήμονες διερευνούν νέα φαινόμενα, εμπλεκόμεστε στο εγχείρημα να «δοκιμάσουμε» διαφορετικές καμπύλες για να διαπιστώσουμε ποια «ταιριάζει» καλύτερα στη συγκεκριμένη κατανομή των πειραματικών σημείων.

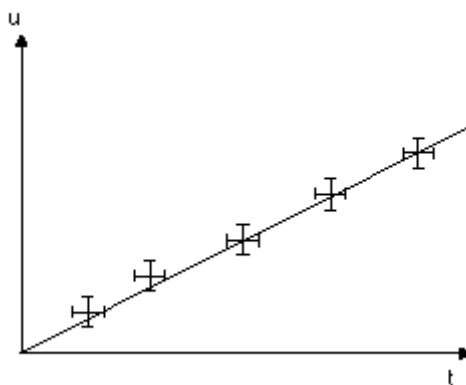
2. Είναι απόλυτα αναμενόμενο τα πειραματικά μας σημεία να μην «πέφτουν» όλα επάνω στη βέλτιστη καμπύλη. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή ακριβώς είναι η διαγραμματική απεικόνιση-«μετάφραση» της έννοιας του σφάλματος. Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι η βέλτιστη καμπύλη, όχι μόνο δεν είναι αναγκαίο, αλλά και δεν πρέπει να διέρχεται από όλα τα πειραματικά σημεία.
3. Οι καμπύλες που θα σχεδιάζουμε πρέπει να είναι:
  - Συνεχείς (όχι διακεκομμένες, να μην έχουν χάσματα και ασυνέχειες).
  - Ομαλές και λείες (όχι τεθλασμένες κα «πριονωτές», να μην έχουν «μύτες» και «οδοντώσεις»), έτσι ώστε να είναι παραγωγίσιμες σε όλα τα σημεία τους.

Η εξασφάλιση των μαθηματικών εννοιών της σύγκλισης, συνέχειας και παραγωγισιμότητας είναι απαραίτητες για τον περαιτέρω χειρισμό κι επεξεργασία της καμπύλης που θα χαράξουμε. Η εμπειρία μας, μάς δίνει το δικαίωμα να πιστεύουμε ότι τα φυσικά μεγέθη συνήθως μεταβάλλονται ομαλά κι αποφεύγουν τα χάσματα (τουλάχιστον σε μακροκλίμακα παρατήρησης). Αλλά αυτό, εκτός από κάτι που συμβαίνει συνήθως, είναι και κάτι το οποίο απαιτούμε: Μία μη παραγωγίσιμη καμπύλη είναι «μη εκμεταλλεύσιμη» γραφικά.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, επισημαίνουμε ότι ασφαλώς και υπάρχουν προγράμματα γραφικής ανάλυσης για ηλεκτρονικούς υπολογιστές, τα οποία είναι εφοδιασμένα με ρουτίνες που «αναλαμβάνουν» για μας τη χάραξη των βέλτιστων καμπυλών. Ακόμα, υπάρχουν και συγκεκριμένες μαθηματικές μεθοδολογίες που μας εξασφαλίζουν μία αξιόπιστη «δια χειρός» χάραξη της βέλτιστης καμπύλης. Δυστυχώς όμως -και προς το παρόν τουλάχιστον- στα Εργαστήρια Φυσικής δε θα χρησιμοποιήσουμε τίποτε από τα προηγούμενα. Θα αρκεστούμε στη «με το μάτι» χάραξη της βέλτιστης καμπύλης, βασιζόμενοι στη διαίθησή μας, ακολουθώντας όμως λιγοστούς απλούς κανόνες, τους οποίους παραθέτουμε στις επόμενες παραγράφους.

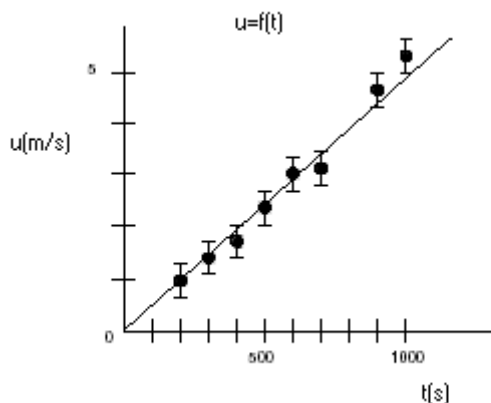
## ***B. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΜΕΓΕΘΗ.***

Σ'αυτήν την παράγραφο επικεντρωνόμαστε στη μελέτη της χάραξης διαγραμμάτων για γραμμικά (α' βάρθμια) εξαρτώμενα μεγέθη. Στην επόμενη θα επεκταθούμε και σε μη γραμμικές σχέσεις. Σύμφωνα με όσα είπαμε στην παράγραφο Χ.Α., αν υποθέσουμε ότι είχαμε τις υποθετικές κατανομές σημείων που απεικονίζονται στα σχήματα Χ.2. και Χ.3.(σχεδιασμένα μαζί με τις ράβδους σφαλμάτων τους), τότε με πολύ καλή προσέγγιση μπορούμε να πούμε ότι τα σημεία αυτά διέπονται από μία γραμμική σχέση.



ΣΧΗΜΑ X.2.

Απεικόνιση πειραματικών σημείων (μαζί με τις ράβδους σφαλμάτων τους) σ' ένα διαγραμμα  $u(t)$ . Οι μετρήσεις αυτές διεπονται από μία γραμμική σχέση και ως εκ τούτου χαράσσουμε τη «βέλτιστη» ευθεία.



ΣΧΗΜΑ X.3.

Διάγραμμα  $u(t)$ , όπου τα  $u$  και  $t$  εξαρτώνται γραμμικά. Οι μετρήσεις είναι υποθετικές και οι ράβδοι σφαλμάτων έχουν σχεδιαστεί μόνο για το μέγεθος που αναπαρίσταται στον κατακόρυφο άξονα  $u$ , ή αλλιώς τα σφάλματα στο μέγεθος  $t$  είναι αμελητέα.

Όπως ξέρουμε, η γραφική παράσταση κάθε γραμμικής (α' βάθμιας) συνάρτησης είναι μία ευθεία γραμμή. Αποσκοπούμε λοιπόν στο να χαράξουμε τη «βέλτιστη» ευθεία. Η ζητούμενη ευθεία είπαμε ότι είναι ανέφικτο (αλλά και ανεπίτρεπτο) να διέλθει απ' όλα τα πειραματικά σημεία. Προσπαθήστε να διέλθει «**δια μέσου**» αυτών, προσέχοντας κατά τη χάραξή της να τηρήσετε τις εξής οδηγίες:

1. Χρησιμοποιήστε ένα διάφανο κανόνα, ώστε να μπορείτε να βλέπετε ολόκληρη την κατανομή των πειραματικών σας σημείων.
2. Μετακινήστε τον κανόνα πάνω-κάτω, μέχρι να βρεθεί σε τέτοια θέση, ώστε να αφήνει ίσο αριθμό πειραματικών σημείων εκατέρωθεν αυτού (δηλαδή, πάνω του και κάτω του).
3. Περιστρέψτε τη νοητή ευθεία που ορίζει η ακμή του εν λόγω κανόνα γύρω από το κέντρο της κατανομής των σημείων σας (το οποίο συμβαίνει να είναι και η μέση τιμή του μεγέθους που απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα), έτσι ώστε τα πειραματικά σας σημεία να

βρεθούν «καλά ζυγισμένα» και «συνολικά ισαπέχοντα» από τη νοητή ευθεία αυτή.

4. **Εχετε εντοπίσει τη βέλτιστη ευθεία!** Χαράξτε με ένα καλά ξυσμένο μολύβι (ή μ'ένα μηχανικό μολύβι) το ίχνος της. Αποφύγετε να της δώσετε ανεπιθύμητα μεγάλο εύρος.

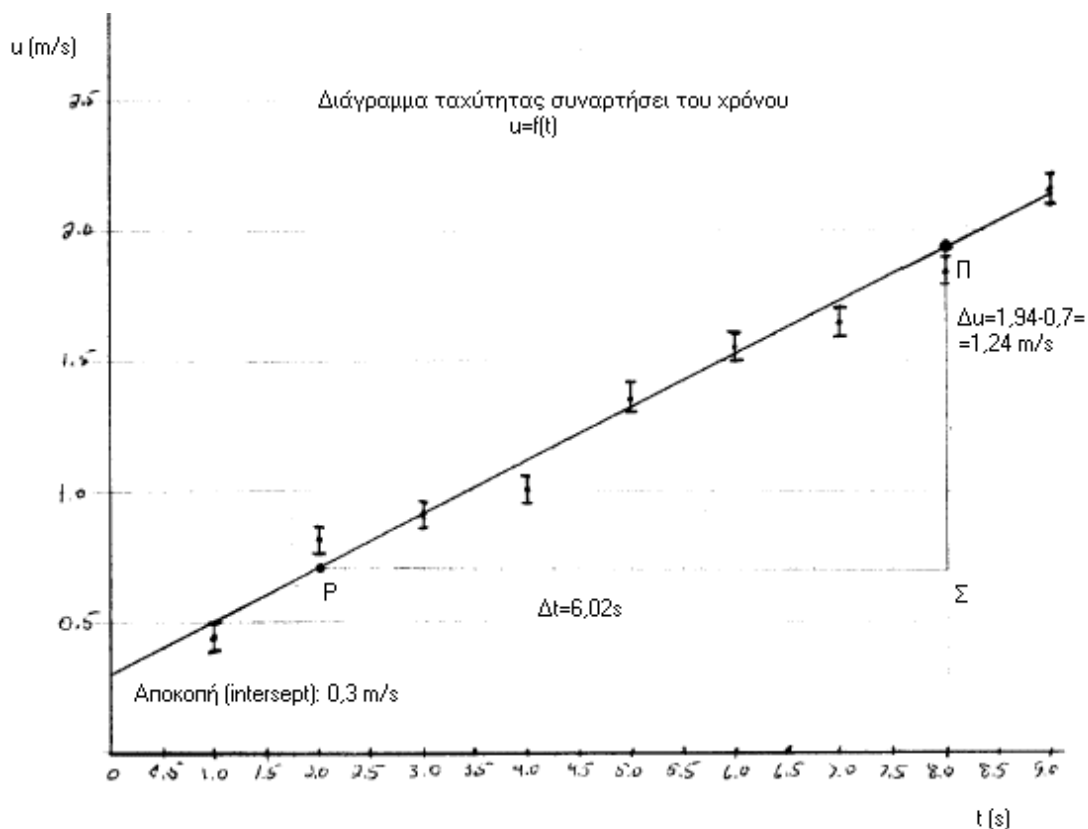
Αν η οδηγία 2 εκτελεστεί σωστά, σας εξασφαλίζει ότι η ευθεία που θα χαράξετε θα διέρχεται από το κέντρο (μέσο) της κατανομής των σημείων. Η προσεκτική εκτέλεση της οδηγίας 3 έχει το εξής στατιστικό αποτέλεσμα: το άθροισμα των αποκλίσεων (αποστάσεων) του καθενός πειραματικού σημείου από την ευθεία είναι ίσο με το μηδέν.

Για να εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, υποθέστε ότι μελετούμε την κίνηση ενός αντικειμένου, μετρώντας την ταχύτητα του  $u$  (εξαρτημένη μεταβλητή – κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει του χρόνου  $t$  (ανεξάρτητη μεταβλητή – οριζόντιος άξονας). Τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα X.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ X.1.

A/A	Ταχύτητα $u \pm \delta u$ (m/s)	Χρόνος $t$ (s)
1	$0,45 \pm 0,06$	1
2	$0,81 \pm 0,06$	2
3	$0,91 \pm 0,06$	3
4	$1,01 \pm 0,06$	4
5	$1,36 \pm 0,06$	5
6	$1,56 \pm 0,06$	6
7	$1,65 \pm 0,06$	7
8	$1,85 \pm 0,06$	8
9	$2,17 \pm 0,06$	9

Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα των μετρούμενων ταχυτήτων είναι όλα ίσα μεταξύ τους –στη γενική περίπτωση, κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει– και ότι στη μέτρηση του χρόνου έχουμε αμελητέο σφάλμα. Κατά συνέπεια, σχεδιάζουμε τις ράβδους σφαλμάτων μόνο για τις ταχύτητες. Εχοντας λοιπόν υπόψη όλες τις προηγούμενες οδηγίες σχετικά με τη σωστή χάραξη διαγραμμάτων, το ζητούμενο διάγραμμα  $u(t)$  θα μοιάζει με αυτό του σχήματος X.4.



ΣΧΗΜΑ X.4.

Διάγραμμα  $u(t)$ , όπου τα  $u$  και  $t$  παίρνουν τις τιμές του Πίνακα X.1. και από το οποίο συνάγεται ότι τα μεγέθη αυτά εξαρτώνται γραμμικά.

Αρα το διάγραμμά μας, έτσι όπως σχεδιάστηκε, μας δείχνει ότι η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Η γενική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας είναι

$$y = ax + \beta$$

όπου  $\alpha$  ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) και  $\beta$  η κάθετη αποκοπή της ευθείας. Αυτά ακριβώς τα δύο μεγεθη μας παρέχουν τις σημαντικότερες πληροφορίες που μπορούμε ν'αποκομίσουμε από ένα γραμμικό διάγραμμα. Οπως ξέρουμε, η κλίση (slope) μιας ευθείας εκφράζει το «πόσο γρήγορα» μεταβάλλεται το μέγεθος που απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα σε σχέση με αυτό που απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα, ή αλλιώς το «πόσο απότομη» είναι η «ανηφόρα» που ορίζεται από την ευθεία του διαγράμματός μας. Η κατακόρυφη αποκοπή (vertical intercept) ή τεταγμένη επί την αρχή, πολύ απλά, εκφράζει την τιμή του  $y$  στο σημείο που η ευθεία μας, ή η προέκτασή της, τέμνει τον κατακόρυφο άξονα ( $x=0$ ). Για τον υπολογισμό της κλίσης ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1. Επιλέγουμε δύο σημεία **πάνω** στη «βέλτιστη» ευθεία που χαράξαμε (τα οποία δε συμπίπτουν κατ'ανάγκη με πειραματικά σημεία), κατά προτίμηση αρκετά απομακρυσμένα το ένα από το άλλο, έστω τα  $\Pi$  και  $P$  στο σχήμα X.4.

2. Είναι βολικότερο να επιλέξουμε σημεία της ευθείας τα οποία προβάλλονται σε εύκολα αναγνώσιμες τιμές των αξόνων μας.
3. Από τα Π και Ρ φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα αντίστοιχα, οι οποίες συναντώνται στο σημείο Σ (βλ. σχ. X.4.), σχηματίζοντας έτσι το ορθογώνιο τρίγωνο ΠΡΣ. Οπότε:

$$\text{κλίση (slope)} = a = \frac{\text{ΠΣ}}{\text{ΡΣ}} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{1,24 \text{ m/s}}{6,02 \text{ s}} = 0,207 \text{ m/s}^2$$

και

$$\text{αποκοπή (intercept)} = \beta = 0,30 \text{ m/s}$$

Αν παραβλέψουμε το ερώτημα σχετικά με το πόσα σημαντικά ψηφία πρέπει να κρατήσουμε στην κλίση και στην αποκοπή κι επικεντρωθούμε μόνο στις αναλογίες μεταξύ των φυσικών μεγεθών, θα δούμε ότι η γενική εξίσωση της ευθείας

$$y = ax + \beta$$

υιοθετώντας τις αντιστοιχίες

$$y \rightarrow u, \quad x \rightarrow t, \quad a \rightarrow a, \quad \beta \rightarrow u_0$$

μας δίνει τη γνωστή μας σχέση για την ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

$$u = u_0 + at = 0,30 \text{ m/s} + (0,207 \text{ m/s}^2) \cdot t$$

όπου και  $u_0$  η ταχύτητα του αντικειμένου στη χρονική στιγμή  $t=0$  και  $a$  η επιτάχυνση.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!!!** Πιθανώς θα θυμάστε από τα λυκειακά μαθηματικά σας ότι στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής  $y=ax+\beta$ , η κλίση  $a$  (συντελεστής διεύθυνσης) της ευθείας ισούται με τον τριγωνομετρικό αριθμό «εφαπτομένη» της γωνίας που σχηματίζει η εν λόγω ευθεία με τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα. Χαρακτηριστικά, στοιχηματίζουμε μάλιστα ότι θα σας έχει εντυπωθεί μία ιδιότητα του τύπου: κλίση  $a = \epsilon\phi\omega$ . Αυτό είναι απολύτως λάθος να το ισχυριστούμε για ένα διάγραμμα μεταξύ φυσικών μεγεθών! Οι λόγοι είναι δύο: Σ'ένα διάγραμμα μεταξύ φυσικών μεγεθών η κλίση έχει πάντα τις διαστάσεις κάποιου φυσικού μεγέθους. Για παράδειγμα, η κλίση της ευθείας του σχήματος X.4. έχει διαστάσεις (μετριέται σε μονάδες) επιτάχυνσης. Ο τριγωνομετρικός αριθμός «εφαπτομένη» όμως -έτσι όπως έχει οριστεί ως ο λόγος της απέναντι κάθετης προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά σ'ένα ορθογώνιο τρίγωνο- είναι αδιάστατος («καθαρός» αριθμός). Επιπλέον, τα μεγέθη «κλίση» κι «εφαπτομένη της γωνίας» δε συμπίπτουν ούτε καν αριθμητικά, στη γενική περίπτωση! Γιατί; Μα πολύ απλά επειδή το σύστημα αναφοράς μας σ'ένα διάγραμμα μεταξύ φυσικών μεγεθών δεν είναι «ορθοκανονικό». Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες μέτρησης στον κατακόρυφο και στον οριζόντιο άξονα κατά κανόνα δεν είναι ίδιες μεταξύ τους. Ο χωρισμός κλίμακας στους δύο άξονες υπαγορεύεται από τις μετρήσεις μας κι αυτές με τη σειρά τους, στη συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων, μπορεί να διαφέρουν αρκετές τάξεις μεγέθους μεταξύ τους. Οπότε τί εφαπτομένη να υπολογίσω; Αν κάποιος θέλει σώνει και καλά να υπολογίσει την

εφαπτομένη της εν λόγω γωνίας, δεν έχει παρά να πάρει ένα χάρακα, να μετρήσει το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΠΣ και ΡΣ (βλ. σχ. Χ.4.) **σε εκατοστά και όχι σε μονάδες των αξόνων** και να βρει το λόγο τους. Ομως αυτό δεν έχει καμία απολύτως σχέση με το πείραμά μας!

## **Γ. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΜΕΓΕΘΗ.**

Εως τώρα έχουμε μελετήσει μόνο γραμμικά εξαρτώμενα μεγέθη. Οι γραμμικές σχέσεις έχουν πολύ μεγάλη χρηστικότητα, επειδή μας παρέχουν την πιο άμεση και οικεία διαισθητική αντίληψη από όλες τις άλλες μαθηματικές εκφράσεις. Στην παρούσα παράγραφο θα μάθουμε πώς να χειριζόμαστε πειραματικά δεδομένα τα οποία διέπονται από μη γραμμικές σχέσεις.

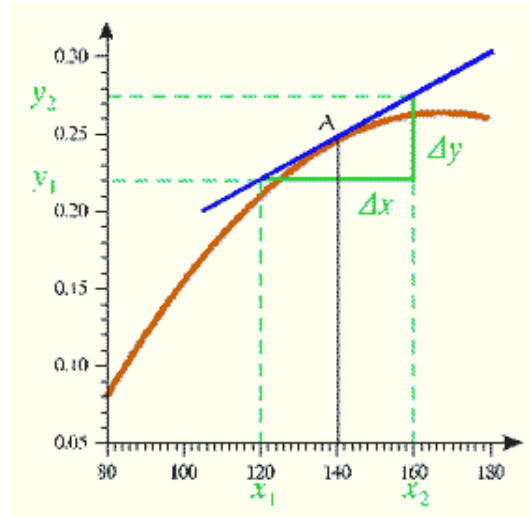
Ας θεωρήσουμε ότι καταγράφουμε τα πειραματικά δεδομένα για δύο φυσικά μεγέθη  $x$  και  $y$ , τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τη μη γραμμική σχέση  $y = cx^n$ , όπου  $c$  και  $n$  σταθερές. Γενικά, υπάρχουν τρεις προσεγγίσεις για τη χάραξη διαγραμμάτων μεταξύ μεγεθών τα οποία συνδέονται με μη γραμμικές σχέσεις:

- A) **Απεικονίζουμε τα δεδομένα μας ως έχουν σ'ένα διάγραμμα  $y = f(x)$ , σε συνηθισμένο χιλιοστομετρικό χαρτί και χαράζουμε μία καμπύλη  $n$ -βαθμού.**
- B) **Μετασχηματίζουμε τα μη γραμμικά δεδομένα μας, έτσι ώστε να καταλήξουμε σε μία γραμμική σχέση και χαράζουμε το γραμμικό διάγραμμα  $y = f(x^n)$ .**
- Γ) **Απεικονίζουμε τα δεδομένα μας ως έχουν σ'ένα διάγραμμα  $y = f(x)$ , αλλά χρησιμοποιούμε μη γραμμική κλίμακα, στην οποία ο ένας, ή και οι δύο άξονες, «συμπιέζονται» λογαριθμικά.**

Σ'αυτήν την παράγραφο αναπτύσσουμε το (Α) και στις επόμενες δύο παραγράφους συζητούμε τα (Β) και (Γ).

Όπως είπαμε, η πρώτη, και πλέον συνηθισμένη, προσέγγιση συνίσταται στην απεικόνιση των δεδομένων μας ως έχουν σε συνηθισμένο χιλιοστομετρικό χαρτί. Αυτό ακριβώς κάνουμε και καταλήγουμε στην υποθετική καμπύλη του σχήματος Χ.5. Τί πρέπει να κάνω αν μου ζητήσουν να υπολογίσω την κλίση της καμπύλης σ'ένα τυχαίο σημείο της Α; Ουσιαστικά, θα ακολουθήσω μία εντελώς ανάλογη τακτική με όσα έκανα για τον υπολογισμό της κλίσης της ευθείας: Πρώτα χαράζω προσεκτικά **την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο Α της καμπύλης** (πώς;). Ύστερα σχηματίζω το γνωστό ορθογώνιο τρίγωνο και τέλος εκτελώ τους αναγκαίους υπολογισμούς:

$$\text{κλίση } A = \kappa_A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dots$$



ΣΧΗΜΑ Χ.5.

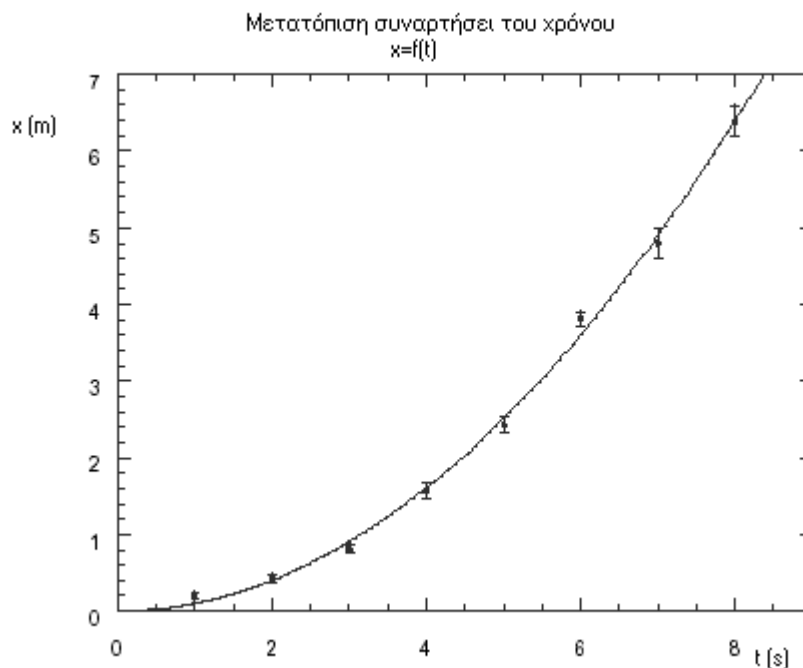
Υπολογισμός της κλίσης σε ένα τυχαίο σημείο μιας υποθετικής καμπύλης που χαράχθηκε από πειραματικά δεδομένα των μη γραμμικά εξαρτούμενων φυσικών μεγεθών  $x$  και  $y$ .

Ας εξετάσουμε όμως ένα πιο συγκεκριμένο και οικείο παράδειγμα. Εστω ότι μελετούμε την κίνηση ενός αντικειμένου και καταγράφουμε τη διανυόμενη απ' αυτό απόσταση συναρτήσει του παρερχόμενου χρόνου. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων μας παρατίθενται στον ακόλουθο Πίνακα Χ.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ Χ.2.

A/A	Μετατόπιση $x \pm \delta x$ (m)	Χρόνος $t$ (s)
1	$0,20 \pm 0,05$	1
2	$0,43 \pm 0,05$	2
3	$0,81 \pm 0,05$	3
4	$1,57 \pm 0,10$	4
5	$2,43 \pm 0,10$	5
6	$3,81 \pm 0,10$	6
7	$4,80 \pm 0,20$	7
8	$6,39 \pm 0,20$	8

Η διαγραμματική αναπαράσταση των μετρήσεων που λάβαμε απολήγει στο πιο κάτω σχήμα Χ.6. Αυτή είναι η συνηθισμένη προσέγγιση και διαπιστώνω ότι το διάγραμμα  $x(t)$  παραπέμπει σε μία δευτεροβάθμια σχέση της μορφής  $x = \frac{1}{2}at^2$  με γραφική παράσταση παραβολή. Μπορώ να υπολογίσω την κλίση της παραβολής, σε οποιοδήποτε σημείο της, με όμοιο τρόπο με αυτόν του σχήματος Χ.5. Θα θέλαμε να προσέξετε τα εξής σημεία: Παρατηρήστε ότι τα απόλυτα σφάλματα στη μετατόπιση αυξάνονται προοδευτικά με την πάροδο του χρόνου. Μπορείτε να σκεφτείτε πώς μεταβάλλονται τα σχετικά σφάλματα στη μετατόπιση; Τί είδους καμπύλη θα έπρεπε να χαράξουμε στην περίπτωση που μας ζητούσαν να φτιάξουμε ένα διάγραμμα  $x = f(t^2)$ ;



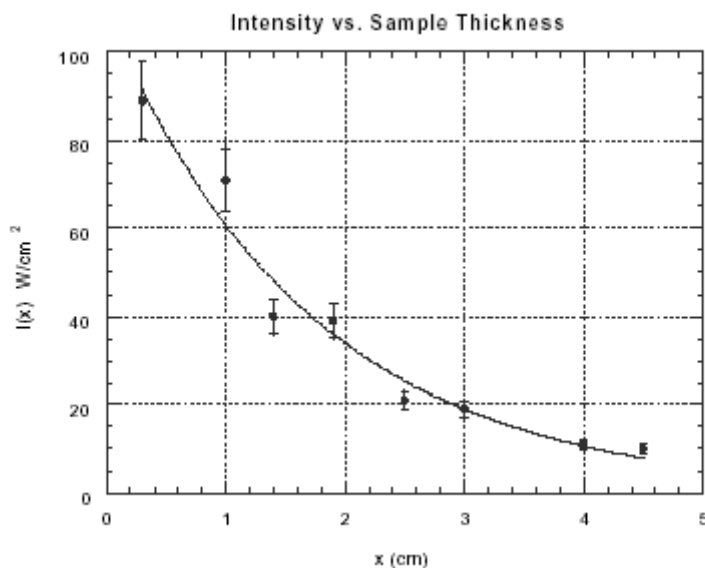
ΣΧΗΜΑ X.6.

Διάγραμμα  $x(t)$ , για τις μετρήσεις του Πίνακα X.2.

Για να εξετάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα, θεωρούμε το φαινόμενο της απορρόφησης του φωτός από ένα μέσο. Προκύπτει λοιπόν (νόμος Lambert-Beer) ότι αν φως αρχικής έντασης  $I_0$  προσπέσει πάνω σε ένα στρώμα απορροφούντος υλικού πάχους  $x$ , τότε η ένταση του φωτός  $I$  που εξέρχεται μετά τη διέλευση από το στρώμα του υλικού αυτού, δίνεται από τη σχέση:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

όπου  $\mu$  είναι μία σταθερά που εξαρτάται (i) από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, (ii) τη φύση των μορίων του απορροφούντος μέσου, (iii) τη συγκέντρωση των μορίων αυτών και (iv) τη θερμοκρασία. Πείτε τώρα ότι διεξάγουμε ένα υποθετικό πείραμα και στο σχήμα X.7. απεικονίζουμε διαγραμματικά τις μετρήσεις που λάβαμε για την ένταση του διερχόμενου φωτός ως συνάρτηση του πάχους του στρώματος του υλικού.



ΣΧΗΜΑ X.7.

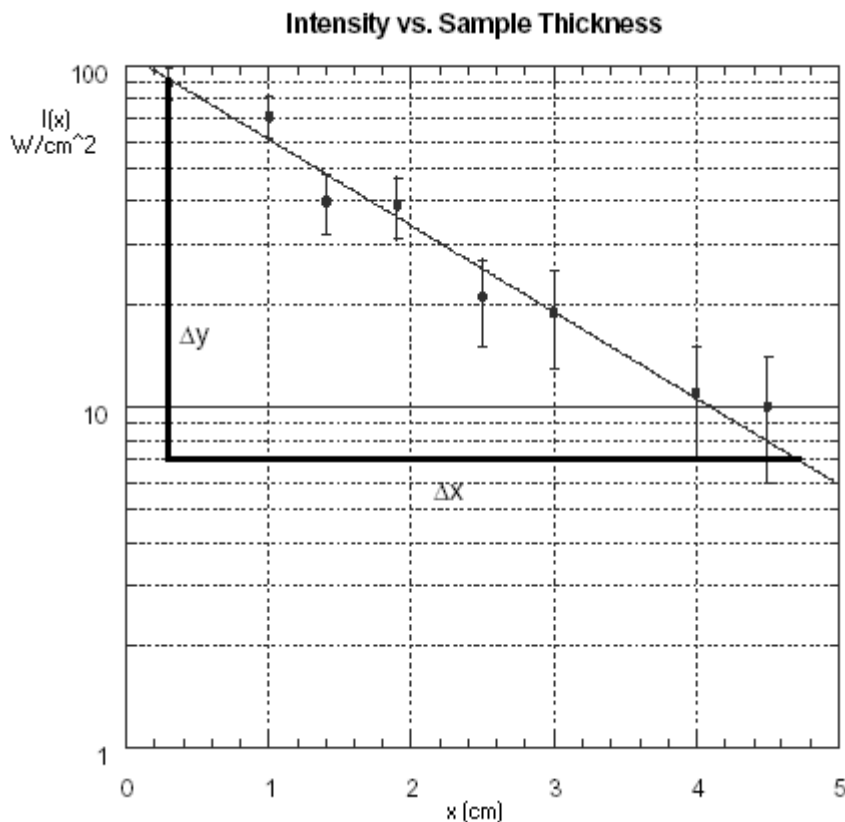
Διάγραμμα  $I(x)$  ενός υποθετικού πειράματος για την απορρόφηση του φωτός από ένα δείγμα υλικού πάχους  $x$ .

Θεωρήστε ότι δε γνωρίζαμε ότι οι μετρήσεις υπακούουν σ' ένα εκθετικό νόμο. Από την κατανομή των πειραματικών μας σημείων, είναι προφανές ότι η συμπεριφορά του φαινομένου δεν είναι γραμμική. Θα δούμε τώρα ότι, μελετώντας τα δεδομένα μας, μπορούμε ν' ανιχνεύσουμε την ακριβή μορφή της μαθηματικής σχέσης που διέπει τα δύο μεγέθη που εξετάζουμε, οπότε δικαιολογημένα χαράξαμε την πιο πάνω καμπύλη όπως την χαράξαμε. Παρατηρούμε λοιπόν ότι σε διαδρομή πάχους  $x=0,5$  cm μέσα στο υλικό, η ένταση του φωτός είναι περίπου  $100 \text{ W/cm}^2$  και μετά από μία πρόσθετη διαδρομή  $1,5$  cm (στο  $x=2,0$  cm) πέφτει στα  $37 \text{ W/cm}^2$ . Αυτό δίνει μία μείωση σχεδόν 37%. Θυμηθείτε ότι  $e^{-1}=0,37$ ! Προσέξτε τώρα ότι στα επόμενα  $1,5$  cm (δηλαδή στο  $x=3,5$ ) η ένταση πέφτει περίπου στα  $13,5 \text{ W/cm}^2$  (περίπου το 13,5% της αρχικής τιμής της). Αλλά  $e^{-2}=0,135$ ! Δηλαδή καταλήγουμε στο ότι: σε μία συγκεκριμένη απόσταση η ένταση  $I$  μειώνεται στο 37% ( $e^{-1}$ ) της αρχικής της τιμής και σε διπλάσια απόσταση μειώνεται στο 13,5% ( $e^{-2}$ ). Συνεπώς, έχουμε πολύ ισχυρές ενδείξεις να πιστεύουμε ότι το φαινόμενο της απορρόφησης του φωτός όταν διέρχεται από ένα υλικό μέσο, υπακούει σ' ένα νόμο εκθετικής μείωσης.

#### Δ. ΧΑΡΑΞΗ ΣΕ ΗΜΙΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ (SEMI-LOG) ΧΑΡΤΙ.

Εστω τώρα ότι επιχειρούμε ν' απεικονίσουμε τα ίδια πειραματικά δεδομένα του σχήματος X.7. (υποθετικό πείραμα απορρόφησης φωτός) σε ημιλογαριθμικό χαρτί. Η εικόνα που παίρνουμε φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα X.8. Ο όρος «ημιλογαριθμικό» αναφέρεται στο ότι ένας από τους δύο κάθετους άξονες έχει «συμπιεστεί» λογαριθμικά. Στο σχήμα X.8. έχει συμπιεστεί ο κατακόρυφος άξονας. Ο τρόπος απεικόνισης σ' ένα ημιλογαριθμικό χαρτί είναι ο εξής: Αναπαριστούμε τα πειραματικά μας σημεία με τις τιμές τους ως έχουν, αλλά το διάγραμμά μας μοιάζει

σα να είχαμε λογαριθμίσει τις τιμές του μεγέθους που απεικονίζουμε στον κατακόρυφο άξονα και στη συνέχεια να τα είχαμε σχεδιάσει σε κανονικό χιλιοστομετρικό χαρτί. Δηλαδή, κατά κάποιο τρόπο, το ημιλογαριθμικό χαρτί «αυτόματα βγάζει το λογάριθμο» για χάρη μας.



**ΣΧΗΜΑ X.8.**

**Διάγραμμα  $I(x)$  ενός υποθετικού πειράματος για την απορρόφηση του φωτός από ένα δείγμα υλικού πάχους  $x$ , σχεδιασμένο σε ημιλογαριθμικό χαρτί.**

Ας εξετάσουμε όμως πιο λεπτομερώς το σχήμα X.8. και το μηχανισμό απεικόνισης σ' αυτό. Προσέξτε ότι ο οριζόντιος άξονας είναι *απαράλλακτος* και ότι όλες οι υποδιαιρέσεις του *ισαπέχουν* η μία από την άλλη: Ακριβώς όπως όλοι οι οριζόντιοι άξονες των διαγραμμάτων που ξέραμε μέχρι τώρα. Από την άλλη, στον κατακόρυφο άξονα ο χωρισμός κλίμακας είναι *λογαριθμικός*. Είναι, όπως λέμε, ένας χωρισμός κλίμακας «2-κύκλων» ή «2-τάξεων», επειδή εκτείνεται σε εύρος από 1 ( $10^0$ ) μέχρι 100 ( $10^2$ ). Κάθε «κύκλος» ή «τάξη» είναι μία πλήρης δύναμη του 10. Αρα, οι κύριες υποδιαιρέσεις του σχήματος X.8. (συνεχείς γραμμές) αφορούν σε μία πλήρη δύναμη του 10. Κατά συνέπεια, μπορούμε να καταλάβουμε ότι οι, ολόενα και πλησιάζουσες μεταξύ τους, δευτερεύουσες υποδιαιρέσεις του κατακόρυφου άξονα (διακεκομμένες γραμμές) αντιπροσωπεύουν τα πολλαπλάσια της συγκεκριμένης δύναμης του 10. Ένας υποτιθέμενος χωρισμός κλίμακας «3-κύκλων» θα είχε 3 δυνάμεις του 10 διαβαθμισμένες κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα. Αναλυτικότερα, 1ος κύκλος: από 1 έως 10 ( $10^0$  έως  $10^1$ ), 2ος κύκλος: από 10 έως 100 ( $10^1$  έως  $10^2$ ) και 3ος κύκλος: από 100 έως 1000 ( $10^2$  έως  $10^3$ ). Μπορείτε να σκεφτείτε με τί θα έμοιαζε ένας χωρισμός κλίμακας «1-κύκλου» σε ημιλογαριθμικό χαρτί; Σημειώστε ότι δε μπορούμε ν' αναπαραστήσουμε στον κατακόρυφο άξονα πειραματικά σημεία με τιμή 0, αφού δεν ορίζεται ο λογάριθμος του 0. Όλες οι

ενδεχόμενες μετρήσεις με  $I(x)=0$  θα έπρεπε ν' αποκλειστούν από ένα τέτοιο διάγραμμα σε ημιλογαριθμικό χαρτί.

**Προφανώς, η χρήση ημιλογαριθμικού χαρτιού ενδείκνεται ιδιαίτερα σε περιπτώσεις όπου τα πειραματικά μας δεδομένα εκτείνονται σ' ένα μεγάλο εύρος τιμών (διαστάσεων αρκετών τάξεων μεγέθους), έτσι ώστε η ενδεχόμενη απεικόνιση τους σε συνηθισμένο χιλιοστομετρικό χαρτί θα είχε δυσμενέστερες επιπτώσεις στην ευκρίνεια του διαγράμματος μας και στην ακρίβεια της γραφικής ανάλυσης.**

Η κατανομή σημείων του σχήματος X.8. μας υποδεικνύει τη χάραξη ευθείας δια μέσου αυτών, η οποία -όπως έχουμε πει- έχει τη γενική μορφή:

$$y = ax + \beta$$

Πρέπει να βρούμε τώρα πώς συνδέονται τα  $y, a, x$  και  $\beta$  της πιο πάνω σχέσης με τις φυσικές ποσότητες του πειράματός μας. Θυμηθείτε ότι τα πειραματικά μας δεδομένα και κατά συνέπεια τα αντίστοιχα διαγράμματα X.7. και X.8. υποθέσαμε ότι προέκυψαν χωρίς πρότερη γνώση του νόμου των Lambert-Beer. Μπορούμε να σκεφτούμε όμως ότι, μία ευθεία με αρνητική κλίση σε ημιλογαριθμικό χαρτί (σαν αυτή του σχήματος X.8.) εισηγείται μία εκθετική μείωση της μορφής:

$$I(x) = I_0 e^{-Ax}$$

όπου  $I_0$  είναι η ένταση της ακτινοβολίας που μετράται στη θέση  $x=0$  και  $A$  μία σταθερά που έχει διαστάσεις  $(\text{μήκος})^{-1}$ . Γιατί το ισχυριζόμαστε αυτό; Το επεξηγούμε αμέσως! Ας βγάλουμε δεκαδικούς λογάριθμους στην πιο πάνω σχέση:

$$\begin{aligned} \log_{10} I(x) &= \log_{10} (I_0 e^{-Ax}) \Rightarrow \log_{10} I(x) = \log_{10} I_0 + \log_{10} e^{-Ax} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \log_{10} I(x) &= (-Ax) \log_{10} e + \log_{10} I_0 \\ \log_{10} e &= 0,434, \quad (e = 2,71828\dots) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{10} I(x) = -0,434Ax + \log_{10} I_0 \end{aligned}$$

που δεν είναι τίποτε άλλο από μία εξίσωση ευθείας, σαν και τη ζητούμενη, αν κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις:

$$y \rightarrow \log_{10} I(x)$$

$$a \rightarrow -0,434A$$

$$x \rightarrow x$$

$$\beta \rightarrow \log_{10} I_0$$

Οπότε, καταλήγουμε στο ότι ο εκθετικός νόμος των Lambert-Beer  $I(x) = I_0 e^{-Ax}$ , μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία γραμμική σχέση  $y = ax + \beta$  αν

υιοθετήσουμε τις πιο πάνω αντιστοιχίες. Η σταθερά  $\mu$  (που εμείς συμβολίσαμε  $A$  στη γενική μορφή της εξίσωσής μας) ισούται με

$$\mu = A = \frac{a}{-0,434} \text{ cm}^{-1}$$

Η τιμή του  $a$  τώρα δεν είναι τίποτε άλλο, από την κλίση της ευθείας του διαγράμματος X.8. και υπολογίζεται κατά τα γνωστά ως εξής:  
(Το  $\Delta y$  μετριέται ως διαφορά κύκλων).

$$\text{κλίση} = \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta[\log_{10} I(x)]}{\Delta x} = \frac{-1,2}{3,94} = -0,305 \text{ W / cm}^3$$

### ***E. ΧΑΡΑΞΗ ΣΕ ΠΛΗΡΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ (LOG-LOG) ΧΑΡΤΙ.***

Το πλήρες λογαριθμικό χαρτί έχει λογαριθμικά βαθμολογημένες κλίμακες και στους δύο άξονες (και στον κατακόρυφο και στον οριζόντιο). Χρησιμοποιείται για τη χάραξη ευθείας γραμμής σ'ένα διάγραμμα  $y=f(x)$ , όπου τα  $y$  και  $x$  ικανοποιούν μία σχέση της μορφής

$$y^m = cx^n$$

που αλλιώς είναι γνωστή με τον όρο «**power law**». Τα  $c$ ,  $m$  και  $n$  είναι σταθερές.

Για να εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γνωστή μας έκφραση του 3ου νόμου του Kepler, που συνδέει τον κύριο ημιάξονα  $R$  της ελλειπτικής τροχιάς ενός πλανήτη με την περίοδο του  $T$  (απαιτούμενος χρόνος για μία πλήρη περιφορά του γύρω από τον Ήλιο). Η ακριβής μαθηματική σχέση είναι:

$$R^3 = KT^2$$

Αν λύσουμε αυτήν τη σχέση ως προς  $R$ , παίρνουμε

$$R = K^{1/3}T^{2/3}$$

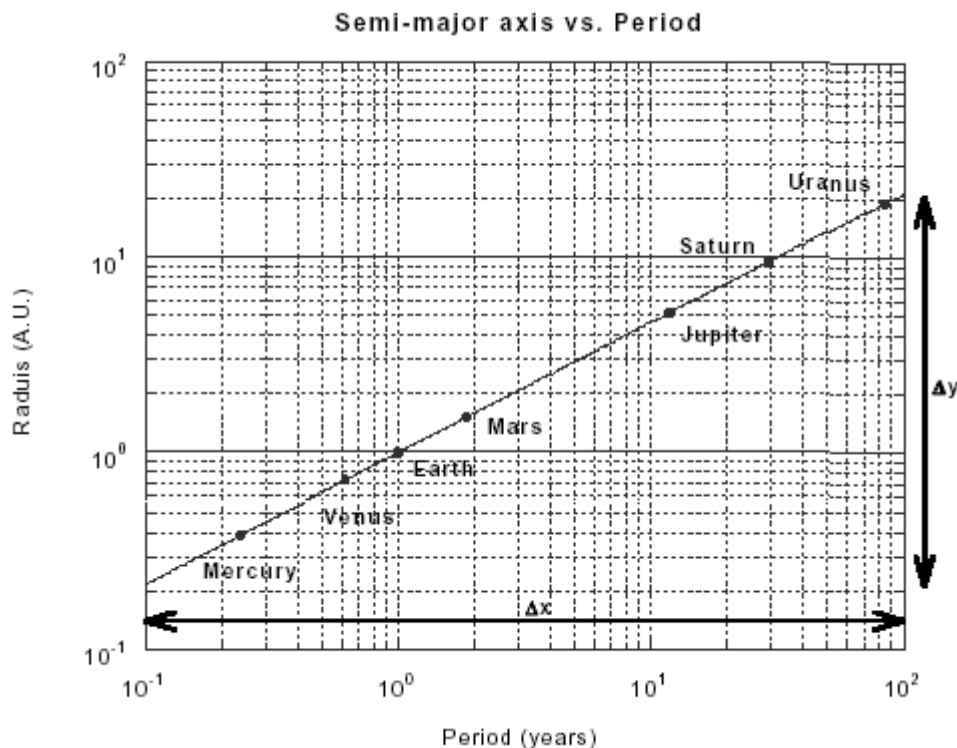
Αρα, το  $R$  συνδέεται μη γραμμικά με το  $T$ . Αν θέλουμε τώρα να επεξεργαστούμε την εξίσωση αυτή για να καταλήξουμε σε μία γραμμική σχέση, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Βγάζουμε λογάριθμους!

$$\begin{aligned} \log_{10} R &= \log_{10}(K^{1/3}T^{2/3}) \Rightarrow \log_{10} R = \log_{10} T^{2/3} + \log_{10} K^{1/3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{10} R = \frac{2}{3} \log_{10} T + \log_{10} K^{1/3} \end{aligned}$$

που πάλι είναι η εξίσωση μιας ευθείας  $y = ax + \beta$ , με

$$y \rightarrow \log_{10} R, \quad x \rightarrow \log_{10} T, \quad a \rightarrow \frac{2}{3}, \quad \beta \rightarrow \log_{10} K^{1/3}$$

Κατά συνέπεια, ένα διάγραμμα του  $\log_{10} R$  συναρτήσει του  $\log_{10} T$  θα πρέπει να μας δώσει μία ευθεία γραμμή. Η διευκόλυνση που μας προσφέρει το πλήρες λογαριθμικό χαρτί συνίσταται στο εξής: αναπαριστούμε τα πειραματικά μας σημεία με τις τιμές τους ως έχουν, αλλά το διάγραμμά μας μοιάζει σα να είχαμε λογαριθμίσει τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται **και στους δύο άξονες** και κατόπιν να τα είχαμε σχεδιάσει σε κανονικό χιλιοστομετρικό χαρτί (βλ. σχήμα X.9.).



**ΣΧΗΜΑ X.9.**

Διάγραμμα  $R(T)$  σχεδιασμένο σε πλήρες λογαριθμικό χαρτί.

Οι ράβδοι σφαλμάτων είναι αμελητέων διαστάσεων για να απεικονιστούν στο διάγραμμά μας, επειδή τα δεδομένα των πλανητικών τροχιών είναι γνωστά με πολύ καλή ακρίβεια. Όπως φαίνεται, οι περίοδοι μετρώνται σε έτη και οι κύριοι ημιάξονες σε Αστρονομικές Μονάδες (Astronomical Units-A.U.). 1 A.U. είναι το μήκος του κύριου ημιάξονα της τροχιάς της Γης.

Η κλίση της ευθείας τώρα, μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους. Ο ένας, προφανώς, είναι μέσω του υπολογισμού του λόγου της διαφοράς των λογαρίθμων:

$$\text{κλίση} = \frac{\Delta(\log_{10} R)}{\Delta(\log_{10} T)} = \frac{\log_{10} 10 - \log_{10} 0,433}{\log_{10} 32 - \log_{10} 0,30} = \frac{1,3635}{2,0279} \cong \frac{2}{3}$$

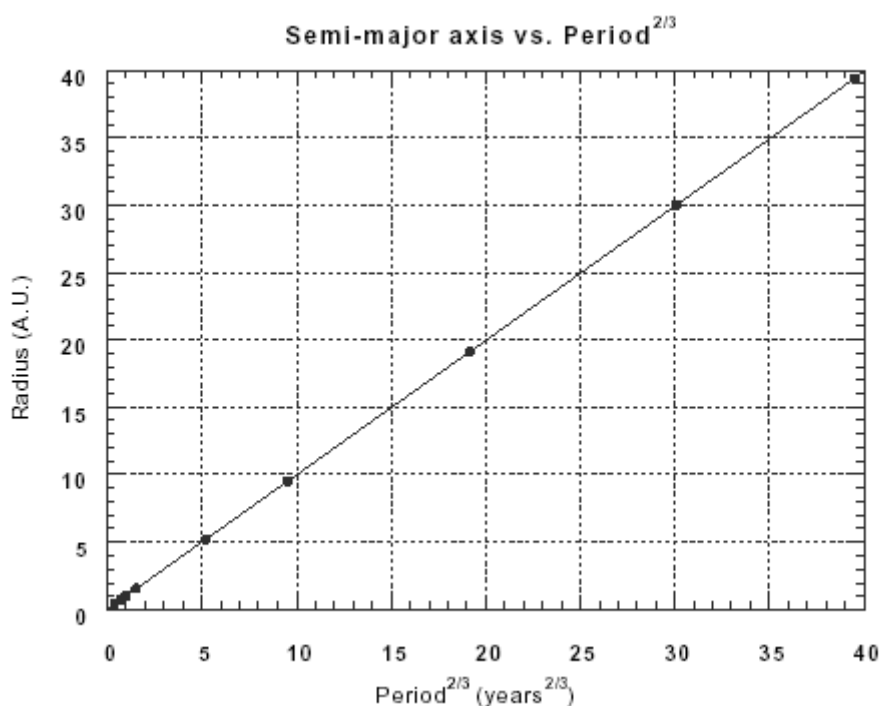
Ο άλλος τρόπος είναι από το λόγο της διαφοράς των «κύκλων», όπως ακριβώς κάναμε στο παράδειγμα του ημιλογαριθμικού χαρτιού:

$$\text{κλίση} = \frac{\Delta y(\text{κύκλοι})}{\Delta x(\text{κύκλοι})} = \frac{2}{3}$$

Είναι θεμελιακής σημασίας να κατανοήσουμε ότι η κλίση σε ένα πλήρως λογαριθμικό (log-log) διάγραμμα εκφράζει τον εκθέτη της σχέσης «power law». Για παράδειγμα, αν χαράξουμε το διάγραμμα της συνάρτησης  $y = cx^n$  σε πλήρες λογαριθμικό χαρτί, τότε η κλίση της ευθείας θα ισούται με  $n$ .

Βέβαια, ένας άλλος τρόπος για να μετασχηματίσουμε τη μη γραμμική σχέση που ισχύει μεταξύ των  $y$  και  $x$  σε γραμμική είναι –όπως ήδη ξέρουμε– να κατασκευάσουμε το διάγραμμα του  $y$  συναρτήσει του  $x^n$  ή, στο παράδειγμά μας, του  $R$  συναρτήσει του  $T^{2/3}$  σε «κανονικό» χιλιοστομετρικό χαρτί. Κάτι παραπλήσιο θα κληθείτε να εφαρμόσετε στην άσκηση 6 του Εργαστηρίου Φυσικής Ι (Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με το απλό εκκρεμές) και όταν επιχειρήσετε να λύσετε την άσκηση 5 της παραγράφου Χ.ΣΤ. πιο κάτω.

Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή για το παράδειγμά μας (βλ. σχήμα Χ.10.):



ΣΧΗΜΑ Χ.10.

Διάγραμμα  $R=f(T^{2/3})$  για το παράδειγμα των τροχιών των πλανητών, σχεδιασμένο σε συνηθισμένο χιλιοστομετρικό χαρτί.

Βλέπουμε ότι για τη μαθηματική σχέση  $R = K^{1/3}T^{2/3}$  και στη συγκεκριμένη περίπτωση που οι μονάδες στους άξονες είναι (έτη) και (Αστρονομικές Μονάδες), η σταθερά  $K$  παίρνει την τιμή 1. Αυτό διαπιστώνουμε και από το διάγραμμά μας.

Ίσως θα παρατηρήσατε ένα σοβαρό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου και αντίστοιχα ένα σημείο όπου πλεονεκτούν τα διαγράμματα σε πλήρες λογαριθμικό χαρτί: Στο κάτω μέρος της ευθείας παρατηρείται «υπερσυσώρευση» και «συνωστισμός» πειραματικών σημείων, με συνέπεια το διάγραμμά μας να χάνει σε ακρίβεια. Λόγω της έκτασης των τιμών μας σε μεγάλο εύρος και της φύσης της βαθμολόγησης των αξόνων, δε μπορούν ν'απεικονιστούν με ευκρίνεια πειραματικά σημεία που οι τιμές τους βρίσκονται σχετικά κοντά μεταξύ τους. Αντίθετα, όπως έχουμε πει, σε πειράματα στα οποία τα δεδομένα μας εκτείνονται σε ένα μεγάλο εύρος τάξεων μεγέθους, προτιμούμε τη χάραξη λογαριθμικών διαγραμμάτων.

## ΣΤ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Ερευνητική ομάδα μελετά τη γραμμική διαστολή των στερεών και σε ένα πείραμα μεταβολής του μήκους  $L$  μιας ράβδου, συναρτήσει της μεταβολής της θερμοκρασίας  $\theta$ , λαμβάνει τις ακόλουθες τιμές:

$\theta$ (°C)	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$L$ (m)	1,3274	1,3290	1,3295	1,3304	1,3314	1,3325	1,3330	1,3343	1,3352

Αν γνωρίζουμε ότι το φαινόμενο περιγράφεται από τη μαθηματική σχέση

$$L = L_0 (1 + \alpha\theta),$$

όπου  $L$  το μήκος σε μια τυχαία θερμοκρασία  $\theta$ ,  $L_0$  το μήκος για θερμοκρασία  $\theta=0^\circ\text{C}$  και  $\alpha$  ο συντελεστής γραμμικής διαστολής. Να υπολογιστούν τα  $L_0$  και  $\alpha$ .

2. Αν μία πέτρα βληθεί προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα  $u$ , τότε ανυψώνεται μέχρις ύψους  $h$  ικανοποιώντας τη σχέση  $u^2 = 2gh$ , όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας. Συνεπώς, το  $u^2$  πρέπει να είναι ανάλογο του  $h$ . Προς επαλήθευση αυτού, ένας φοιτητής μετρά τα  $u^2$  και  $h$  για επτά (7) διαφορετικές ρίψεις. Τα αποτελέσματα του παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

A/A	$h \pm \delta h$ (m)	$u^2 \pm \delta(u^2)$ ( $m^2 / s^2$ )
1	$0,4 \pm 0,5$	$7 \pm 3$
2	$0,8 \pm 0,5$	$17 \pm 3$
3	$1,4 \pm 0,5$	$25 \pm 3$
4	$2,0 \pm 0,5$	$38 \pm 4$
5	$2,6 \pm 0,5$	$45 \pm 5$
6	$3,4 \pm 0,5$	$62 \pm 5$
7	$3,8 \pm 0,5$	$72 \pm 6$

Κατασκευάστε το διάγραμμα  $u^2 = f(h)$  σύμφωνα με αυτά που διδαχθήκατε. Μπορείτε ν'αποφανθείτε σχετικά με το αν είναι πράγματι γραμμική η σχέση που διέπει τα  $u^2$  και  $h$ ; Αν ναι, υπολογίστε την κλίση της ευθείας που

χαράξατε. Η τιμή της κλίσης που βρήκατε, είναι συμβατή με την τιμή που προκύπτει από τη σχέση  $u^2 = 2gh$  (κλίση=2g=19,6 m/s<sup>2</sup>); Σχολιάστε!

3. Ένας φοιτητής μετρά την πίεση κάποιου αερίου σε 5 διαφορετικές θερμοκρασίες, διατηρώντας τον όγκο σταθερό. Καταγράφει τις ακόλουθες τιμές:

P (mmHg)	79	82	85	88	90
.θ (°C)	8	17	30	37	52

Ο φοιτητής αναμένει τις μετρήσεις του να ικανοποιούν μία γραμμική σχέση της μορφής  $\theta=A+BP$ , όπου A (αποκοπή) το απόλυτο θερμοκρασιακό μηδέν (-273 °C) και B μία σταθερά (κλίση). Χαράζετε τη βέλτιστη ευθεία για τα πιο πάνω πειραματικά δεδομένα και υπολογίστε τις τιμές των A και B.

4. Σ'ένα πείραμα μελέτης του απλού εκκρεμούς, ένας φοιτητής καλείται να διερευνήσει αν η περίοδος T του εκκρεμούς είναι ανεξάρτητη του πλάτους A (που ορίζεται ως η μέγιστη γωνία απόκλισης που σχηματίζει το νήμα του εκκρεμούς με την κατακόρυφο). Οι μετρήσεις που λαμβάνει φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Πλάτος $A \pm \delta A$ (deg)	Περίοδος $T \pm \delta T$ (sec)
$5 \pm 2$	$1,932 \pm 0,005$
$17 \pm 2$	$1,94 \pm 0,01$
$25 \pm 2$	$1,96 \pm 0,01$
$40 \pm 4$	$2,01 \pm 0,01$
$67 \pm 6$	$2,12 \pm 0,02$

(i) Για ν'αντιληφθείτε την κρισιμότητα της επιλογής κατάλληλης κλίμακας στους άξονες, σχεδιάστε δύο διαγράμματα  $T=f(A)$ : το πρώτο να περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων ( $A=0$ ,  $T=0$ ) και το δεύτερο να «εστιάζεται» μόνο στις τιμές του T μεταξύ 1,9 και 2,2. Πρέπει να συμπεράνει ο φοιτητής ότι η περίοδος είναι ανεξάρτητη του πλάτους; (ii) Πώς θα επηρεαζόταν το συμπέρασμα του αν όλες οι μετρήσεις του T ήταν αβέβαιες κατά ένα σφάλμα  $\delta T = \pm 0,3$  sec; Σχολιάστε!

5. Ένας ποδηλάτης ξεκινά από την ηρεμία και η διανυόμενη από αυτόν απόσταση μετράται ως συνάρτηση του παρερχόμενου χρόνου. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι τα εξής:

Απόσταση $d \pm \delta d$ (m)	Χρόνος t (sec)
$1,2 \pm 0,3$	1
$5,4 \pm 0,6$	2
$11,1 \pm 0,7$	3
$22,0 \pm 0,7$	4
$32,1 \pm 1,0$	5
$49,0 \pm 1,2$	6

$63,1 \pm 1,5$	7
$86,0 \pm 1,9$	8

(Θεωρούμε αμελητέο το σφάλμα στη μέτρηση του χρόνου). Σύμφωνα με τη θεωρία, τα  $d$  και  $t$  συνδέονται με τη σχέση  $d = \frac{1}{2}at^2$ , όπου  $a$  η επιτάχυνση.

Σε κανονικό χιλιοστομετρικό χαρτί, κατασκευάστε ένα διάγραμμα στο οποίο η κλίση της προς χάραξη ευθείας να είναι ανάλογη της επιτάχυνσης. Πόση είναι η επιτάχυνση;

6. Σε ένα συνέδριο οικολογίας παρουσιάστηκε μία στατιστική μελέτη σχετικά με την παγκόσμια κατανάλωση ενέργειας. Τα δεδομένα της παρατίθενται ακολούθως:

Ισχύς ( $P \pm \delta P$ ) x $10^{12}$ (J/s)	Χρόνος $t$ (έτη)
$1,0 \pm 0,5$	1910
$2,1 \pm 0,5$	1920
$3,0 \pm 0,5$	1930
$5,2 \pm 0,7$	1940
$8,7 \pm 1,0$	1950
$14,0 \pm 1,5$	1960
$22,0 \pm 1,6$	1970

Η μελέτη εισηγείται ότι τα  $P$  και  $t$  συνδέονται με τη θεωρητική σχέση  $P(t) = P_0 e^{Kt}$ , όπου  $K$  είναι μία σταθερά που αναφέρεται ως «ρυθμός αύξησης». Σε ημιλογαριθμικό χαρτί, κατασκευάστε ένα διάγραμμα  $P=f(t)$  –θα χρειαστείτε δύο «κύκλους»- και από αυτό υπολογίστε το  $K$ .

7. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της άσκησης 5, κατασκευάστε σε πλήρες λογαριθμικό χαρτί ένα διάγραμμα  $d=f(t)$ . Στη συνέχεια, πρέπει να επαληθεύσετε ότι ο εκθέτης του  $t$  είναι κατά προσέγγιση 2.

---

---

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Taylor, J.R., *An Introduction to Error Analysis* (A series of Books in Physics, Commins, Eugene, D., Editor University Science Books, Mill Valley, California).
- Squires, G. L., *Practical Physics*, McGraw-Hill, London.
- Βαμβακάς, Ι., Κουρκουτάς, Κ., Κωνσταντινίδης, Σ., Μανιάτης, Π., Μάρκου, Μ., Σωτηριάνος, Γ., Τσαμπάς, Δ., “*Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής Ι*”, Μακεδονικές Εκδόσεις, Περιστερί.
- [www.cc.uoa.gr/~ctrikali/sfalmata/sfalmata.htm](http://www.cc.uoa.gr/~ctrikali/sfalmata/sfalmata.htm)