M10 Στροφική ταλάντωση-Μέτρηση μέτρου διάτμησης

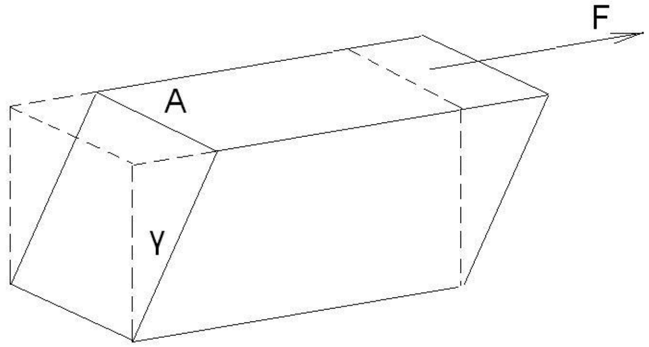
1. Σκοπός

Στην άσκηση γίνεται μέτρηση του μέτρου διάτμησης ενός μεταλλικού σύρματος από την πειραματικά μετρημένη περίοδο ταλάντωσης ενός στροφικού ταλαντωτή. Σκοπός της άσκησης είναι η γνωριμία των σπουδαστών με τα φαινόμενα της στροφικής κίνησης στερεών σωμάτων και την καταπόνηση των υλικών σε διάτμηση και στρέψη καθώς και η αξιοποίηση πειραματικών δεδομένων μέσω της μετατροπής μιας μη γραμμικής σχέσης σε γραμμική.

2. Θεωρία

2.1 Διάτμηση και μέτρο διάτμησης

Στο σχήμα $\boxed{1}$ η διατμητική δύναμη F, που ασκείται παράλληλα στην επιφάνεια εμβαδού A παραμορφώνει κατά τη γωνία γ το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Το πηλίκο:



Σχήμα $\boxed{1}$

$$\tau = \frac{F}{A} \qquad \boxed{1}$$

που έχει διαστάσεις πίεσης και μετριέται σε Pa όταν η δύναμη δίνεται σε N, το εμβαδόν της επιφάνειας σε m^2 και η γωνία γ σε rad, είναι η **διατμητική τάση**. Για μικρές διατμητικές τάσεις η παραμόρφωση είναι ελαστική, δηλαδή το σώμα επανακτά τις αρχικές διαστάσεις του μετά την άρση της δύναμης. Στην περιοχή της ελαστικής παραμόρφωσης η γωνία διάτμησης γ και η διατμητική τάση τ είναι ανάλογα μεγέθη:

$$\tau = G\gamma \qquad \boxed{2}$$

Όπου η σταθερά αναλογίας G σε Pa είναι το **μέτρο διάτμησης** του υλικού.

2.1 Ροπή στρέψης σύρματος

Στο σχήμα $\boxed{2}$ εικονίζεται ένας κύλινδρος με τοίχωμα απειροστά μικρού πάχους dr. Η δύναμη dF ασκεί τη διατμητική τάση:

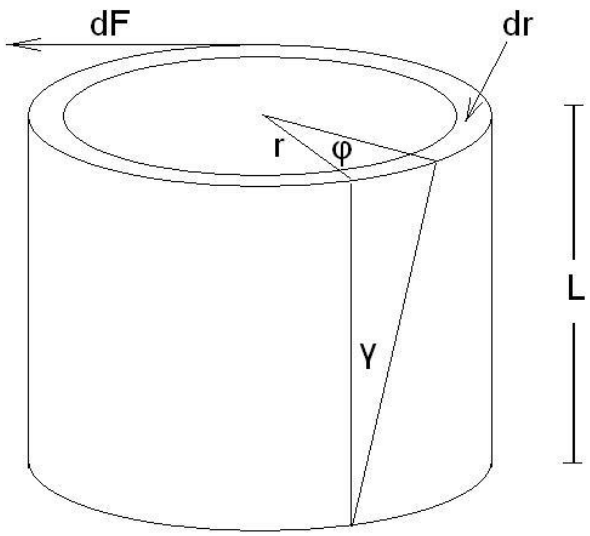
$$\tau = \frac{dF}{2\pi r dr} \qquad \boxed{3}$$

Η γωνία διάτμησης είναι:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad \boxed{4}$$

Όπου G είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού του κυλίνδρου. Εκφράζουμε τη γωνία διάτμησης γ συναρτήσει της **γωνίας στρέψης** φ:

$$\gamma = \frac{r}{L}\varphi \qquad \boxed{5}$$



Σχήμα $\boxed{2}$

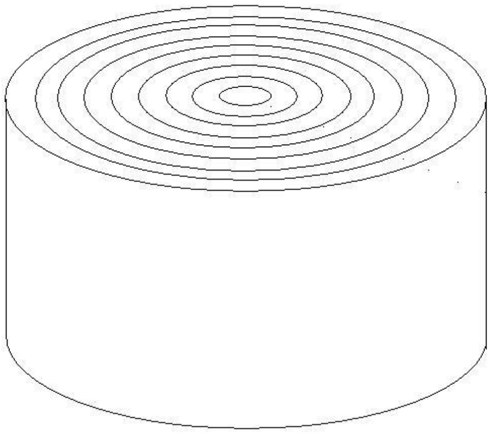
Από τις τρεις τελευταίες εξισώσεις $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ λαμβάνουμε τη δύναμη συναρτήσει της γωνίας στρέψης:

$$dF = \frac{2\pi G r^2 dr}{L}\varphi \qquad \boxed{6}$$

Η ροπή στρέψης της δύναμης dF στο κυλινδρικό τοίχωμα είναι:

$$dM = rdF = \frac{2\pi G r^3 dr}{L}\varphi = \frac{\pi G dr^4}{2L}\varphi \qquad \boxed{7}$$

Το σύρμα είναι ένας συμπαγής κύλινδρος, που αντιμετωπίζουμε ως επαλληλία απειροστά μικρού πάχους κυλινδρικών φλοιών όπως στο σχήμα $\boxed{3}$. Η ροπή στρέψης σε κάθε κυλινδρικό τοίχωμα δίνεται από την εξίσωση $\boxed{7}$. Για να υπολογίσουμε την ολική ροπή στρέψης M πρέπει επομένως να ολοκληρώσουμε την εξίσωση $\boxed{7}$ από 0 έως την ακτίνα r του σύρματος. Βρίσκουμε έτσι τη ροπή στρέψης του σύρματος συναρτήσει της γωνίας στρέψης φ:

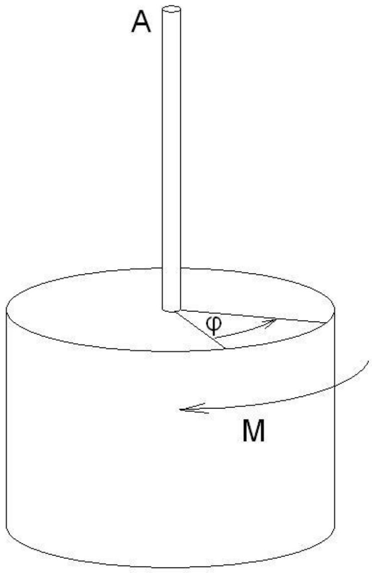


Σχήμα $\boxed{3}$

$$M = \frac{\pi G r^4}{2L}\varphi \qquad \boxed{8}$$

2.3 Στροφική ταλάντωση

Στο σχήμα $\boxed{4}$ εικονίζεται ένας κύλινδρος εξαρτημένος από ένα σύρμα. Το άκρο A του σύρματος είναι πακτωμένο σε σταθερό σημείο. Αν στραφεί το σύρμα κατά γωνία φ, τότε στον κύλινδρο ασκείται από το σύρμα μια ροπή επαναφοράς ίση και αντίθετη της ροπής στρέψης $\boxed{8}$:



Σχήμα $\boxed{4}$

$$M_\varepsilon = -\frac{\pi G r^4}{2L}\varphi \qquad \boxed{8}$$

Όπου r είναι η ακτίνα και L το μήκος του σύρματος. Η ροπή M_ε προσδίδει στον κύλινδρο γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, η οποία σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης είναι τέτοια ώστε:

$$M_\varepsilon = I\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad \boxed{9}$$

Στην εξίσωση αυτή το μέγεθος I είναι η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου. Για ένα συμπαγή κύλινδρο, όπως είναι αυτός του σχήματος $\boxed{4}$, η ροπή αδρανείας είναι:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \boxed{10}$$

Όπου m είναι η μάζα και R η ακτίνα του κυλίνδρου.

Οι εξισώσεις $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ και $\boxed{10}$ μας δίνουν:

$$\frac{1}{2}mR^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi G r^4}{2L}\varphi = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi G r^4}{mR^2L}\varphi = 0 \qquad \boxed{11}$$

Η εξίσωση $\boxed{11}$ είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς τη γωνία φ και έχει λύση την:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t \qquad \boxed{12}$$

Όπου

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G r^4}{mR^2L}} \qquad \boxed{13}$$

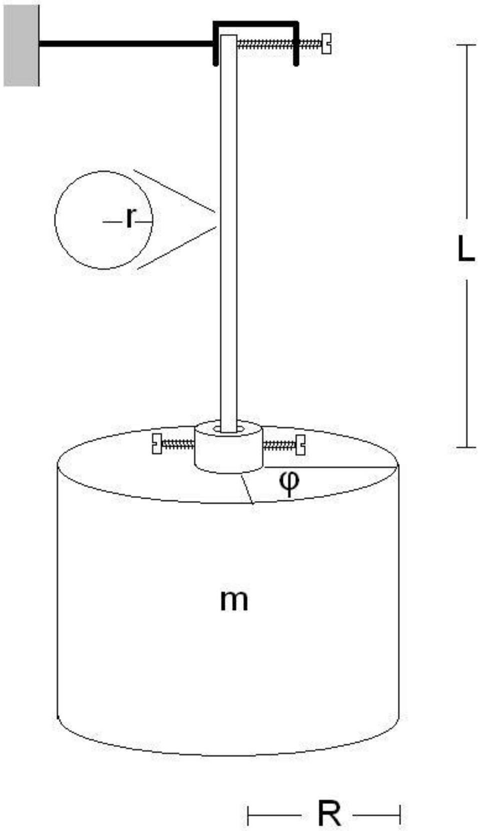
Ο κύλινδρος εκτελεί επομένως στροφική αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{4\pi m R^2 L}{G r^4}} \qquad \boxed{14}$$

3 Πειραματική διαδικασία

3.1 Πείραμα

Στο πείραμα θα μετρήσουμε το μέτρο διάτμησης του χαλκού. Αυτό θα γίνει με την πειραματική διάταξη που εικονίζεται στο σχήμα $\boxed{5}$. Τα σύμβολα που σημειώνονται συμπίπτουν με αυτά των εξισώσεων $\boxed{13}$ και $\boxed{14}$ και είναι τα εξής:



Σχήμα $\boxed{5}$

L=μήκος σύρματος

r=διάμετρος σύρματος

m=μάζα κυλίνδρου

R=ακτίνα κυλίνδρου

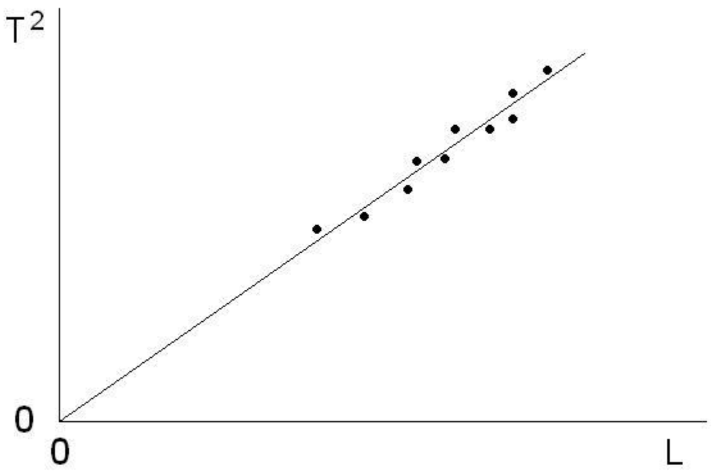
Από την εξίσωση $\boxed{14}$ λαμβάνουμε:

$$T^2 = \frac{4\pi m R^2}{G r^4} L \qquad \boxed{15}$$

Βλέπουμε ότι το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του μήκους. Στο πείραμα θα λάβουμε μετρήσεις της περιόδου Τ συναρτήσει του μήκους L του σύρματος και θα απεικονίσουμε γραφικά τη σχέση $T^2 - L$, η οποία είναι ευθεία όπως στο σχήμα $\boxed{6}$. Από την εξίσωση βλέπουμε ότι η κλίση Κ της ευθείας είναι:

$$K = \frac{4\pi m R^2}{G r^4} \quad \text{σε} \quad \frac{s^2}{m} \qquad \boxed{16}$$

Από την κλίση K, τη μάζα m και την ακτίνα R του κυλίνδρου και την ακτίνα r του σύρματος λαμβάνουμε το μέτρο διάτμησης:



Σχήμα $\boxed{6}$

$$G = \frac{4\pi m R^2}{K r^4} \qquad \boxed{17}$$

3.2 Εργασίες

1 Αναγνωρίζουμε την πειραματική διάταξη.

2 Μετράμε με μικρόμετρο τη διάμετρο d του χάλκινου σύρματος με ακρίβεια $\pm 0{,}01mm$ και από αυτήν υπολογίζουμε την ακτίνα r του σύρματος:

$d = \quad mm = \quad \cdot 10^{-3} m \qquad r = \quad \cdot 10^{-3} m$

3 Μετράμε με διαστημόμετρο τη διάμετρο R του κυλίνδρου με ακρίβεια $\pm 0{,}1cm$ και από αυτήν υπολογίζουμε την ακτίνα R του κυλίνδρου:

$D = \quad cm = \quad \cdot 10^{-2} m \qquad R = \quad \cdot 10^{-2} m$

4 Σημειώνουμε τη μάζα m του κυλίνδρου.

$m = \quad kg$

5 Επιλέγουμε ένα μήκος L του σύρματος από 0,45m έως 1m περίπου. Η μέτρηση του μήκους L γίνεται με ακρίβεια $\pm 1mm$. Σημειώνουμε την τιμή του μήκους σε m στη στήλη 2 του πίνακα μετρήσεων.

6 Θέτουμε τον κύλινδρο σε στροφική ταλάντωση. Αυτό γίνεται ως εξής. Στρέφουμε τον κύλινδρο κατά μια γωνία $\varphi < 90^o$, ώστε να παραμένει ελαστική η παραμόρφωση του σύρματος σε στρέψη και μετά τον αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Χάριν ακρίβειας λαμβάνουμε σε s το χρόνο 25 περιόδων ταλάντωσης. Σημειώνουμε την τιμή του στη στήλη 3 του πίνακα μετρήσεων.

7 Υπολογίζουμε σε s το χρόνο T της περιόδου ταλάντωσης. Καταχωρούμε το αποτέλεσμα στη στήλη 4 του πίνακα μετρήσεων.

8 Υπολογίζουμε σε s^2 το τετράγωνο T^2 της περιόδου ταλάντωσης. Καταχωρούμε το αποτέλεσμα στη στήλη 5 του πίνακα μετρήσεων.

9 Επαναλαμβάνουμε τις εργασίες 5 έως και 9 ώστε να συμπληρωθούν εν συνόλω 10 μετρήσεις της περιόδου για 10 διαφορετικά μήκη του σύρματος.

10 Σχεδιάζουμε το διάγραμμα $T^2 - L$.

11 Υπολογίζουμε την κλίση $K = \dfrac{\Delta T^2}{\Delta L}$ της ευθείας $T^2 - L$.

$$K = \frac{\Delta T^2}{\Delta L} = \qquad \frac{s^2}{m}$$

12 Από την κλίση K, τη μάζα m του κυλίνδρου και τις ακτίνες r του σύρματος και R του κυλίνδρου υπολογίζουμε το μέτρο διάτμησης G του χαλκού σύμφωνα με την εξίσωση $\boxed{17}$.

$$G = \qquad \cdot 10^9 Pa = \qquad GPa$$

13 Συγκρίνουμε την πειραματική τιμή με εκείνη της βιβλιογραφίας $G_{lit} = 44GPa$ και σχολιάζουμε το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

1	2	3	4	5
Αύξων αριθμός μέτρησης	L (m)	25T (s)	T (s)	T^2 (s^2)
1				
2				
. . .				
10				