M11 Τροχός του Maxwell.Δυναμική μελέτη

1 Σκοπός

Σκοπός της άσκησης είναι εύρεση ροπής αδράνειας του τροχού του Maxwell.

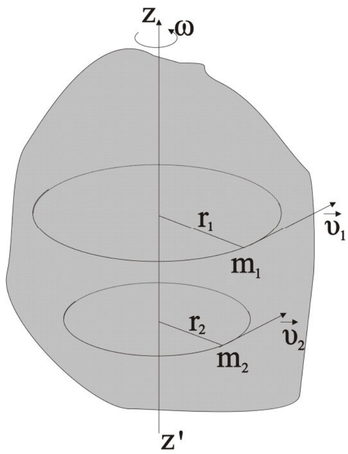
2 Θεωρία

2.1 Ροπή αδράνειας

Ροπή αδράνειας I ενός στερεού ως προς άξονα ZZ' ονομάζουμε το άθροισμα των γινομένων των στοιχειωδών μαζών από τις οποίες αποτελείται το σώμα επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2 \qquad \text{Μονάδα } 1\,\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Για ένα σώμα το οποίο δεν αποτελείται από διάκριτες μάζες αλλά από συνεχή κατανομή μάζας η παραπάνω άθροιση μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα. Θεωρούμε τότε ότι το σώμα χωρίζεται σε άπειρες στοιχειώδεις μάζες dm που απέχουν απόσταση r από τον άξονα περιστροφής και η ροπή αδράνειας λαμβάνει την μορφή



Σχήμα 1:Στερεό σώμα

$$I = \int dm\, r^2 \qquad (2.1)$$

Εφαρμογές :1) **Ροπή αδράνειας σημειακής μάζας** m που βρίσκεται σε απόσταση R από τον άξονα περιστροφής

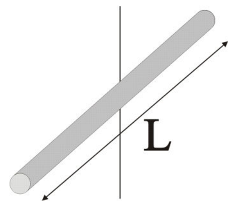
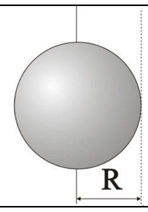
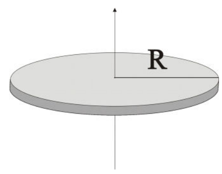
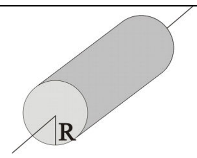
$$I = mR^2$$

2)Ροπή αδράνειας δακτυλίου μάζας M ακτίνας R

$$I = MR^2$$

Οι παραπάνω ροπές αδράνειας υπολογίσθηκαν χωρίς την χρήση ολοκληρωμάτων. Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στην ροπή αδράνειας μερικών χαρακτηριστικών σωμάτων ως προς άξονα περιστροφής που υποδηλώνεται στο σχήμα και περνάει από το κέντρο μάζας τους.

Πίνακας 1
Ροπή αδράνειας μερικών χαρακτηριστικών σωμάτων

Σχήμα	**Ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας**	
Λεπτή Ράβδος	$I=\frac{1}{12}mL^2$	
Συμπαγής Σφαίρα	$I=\frac{2}{5}mR^2$	
Δίσκος	$I=\frac{1}{2}mR^2$	
Συμπαγής κύλινδρος	$I=\frac{1}{2}mR^2$	

2.2 Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σ' ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας (υπολογισμένη ως προς τον άξονα περιστροφής) και της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος

$$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad , \quad I \ \ \sigma\tau\alpha\theta \qquad (2.2)$$

Ειδικές περιπτώσεις: 1)Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $\Sigma\tau=0$, λαμβάνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σώματος παραμένει σταθερή.

2)Θέτοντας $\Sigma\tau=\sigma\tau\alpha\theta$ λαμβάνουμε $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta$, δηλαδή το σώμα εκτελεί **στροφική ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση**

2.3 Τροχός του Maxwell. Δυναμική μελέτη

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα τροχό οποίος διαθέτει έναν άξονα μεγάλου μήκους που με τη σειρά του είναι τυλιγμένος σε σχοινί όπως στο παρακάτω σχήμα και κρατείται σε ύψος h (**Εικόνα 1**). Κάποια χρονική στιγμή αφήνεται ελεύθερος να κινηθεί. Από τότε και μετά εκτελεί σύνθετη κίνηση, δηλαδή ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι το βάρος και οι τάσεις των νημάτων. Η μεταφορική κίνηση του σώματος καθορίζεται από την εξίσωση

$$\Sigma F = m a_{cm}$$

όπου a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού.

Με δεδομένο ότι στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους του $B = mg$ και οι δύο τάσεις των νημάτων T έχουμε

$$mg - 2T = m a_{cm}$$

Η περιστροφική κίνηση του σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του καθορίζεται από την εξίσωση

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

Επειδή οι μόνες δυνάμεις που έχουν ροπή είναι οι τάσεις έχουμε

$$2TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow T = \frac{I\alpha_{\gamma\omega\nu}}{2R}$$

Όμως η σχέση που συνδέει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας και την γωνιακή επιτάχυνση είναι

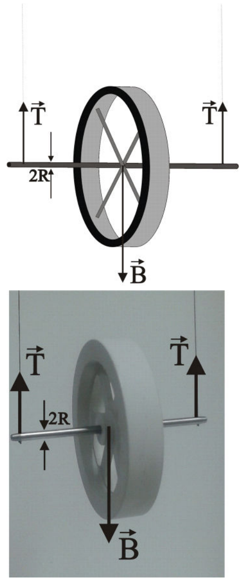
$$a_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις και λύνοντας ως προς a_{cm} έχουμε

$$a_{cm} = \frac{mg}{\dfrac{I}{R^2} + m}$$

Επειδή a_{cm} σταθερό ως προς τη μεταφορική του κίνηση ο τροχός εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με μηδενική αρχική ταχύτητα. Άρα ισχύει για το ύψος h που διανύει μετά χρόνο t

$$h = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Leftrightarrow a_{cm} = \frac{2h}{t^2}$$



Εικόνα 1: Τροχός του Maxwell

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις και λύνοντας ως προς την ροπή αδράνειας I έχουμε

$$I = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right) \qquad (2.3)$$

Έτσι γνωρίζοντας την ακτίνα του άξονα του τροχού, το ύψος από το οποίο τον αφήνουμε ελεύθερο και το χρόνο πτώσης του μπορούμε να προσδιορίσουμε την ροπή αδράνειάς του I

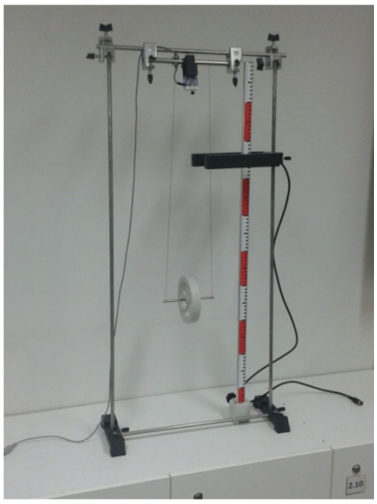
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς το ύψος h να λάβουμε

$$h = \frac{g}{2(\frac{I}{mR^2}+1)} t^2 \qquad (2.4)$$

Κάνοντας τη γραφική παράσταση $h = f(t^2)$ η οποία είναι ευθεία και υπολογίζοντας την κλίση k μπορούμε να την εξισώσουμε με τον συντελεστή του t^2 στην παραπάνω εξίσωση να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας I

$$I = mR^2(\frac{g}{2k} - 1) \qquad (2.5)$$

3 Πειραματική διαδικασία



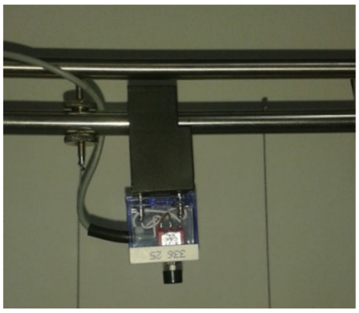
Εικόνα 2: Πειραματική διάταξη

Εικόνα 3: Κονσόλα

Η πειραματική μας διάταξη αποτελείται από τον τροχό του Maxwell ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του ακτίνας $R = 3mm$ όπως φαίνεται στην **Εικόνα 2** και ο οποίος κρέμεται από δύο σχοινιά το άλλο άκρο των οποίων είναι δεμένο ακλόνητα. Ο τροχός μπορεί να ανυψώνεται καθώς τα σχοινιά τυλίγονται γύρω από τον άξονα του. Στο πάνω μέρος της διάταξης υπάρχει διακόπτης (**Εικόνα 4**) με το οποίο ο τροχός θα πρέπει να έλθει σε επαφή πιέζοντάς το. Το χάσιμο της επαφής μεταξύ τροχού και διακόπτη θα σημάνει την αρχή μέτρησης του χρόνου. Υπάρχει ακόμα η φωτοδίοδος (**Εικόνα 5**) από την οποία όταν περάσει ο άξονας του τροχού θα σταματήσει το χρονόμετρο. Ακόμα έχουμε μία κονσόλα (**Εικόνα 3**) στην οποία βρίσκονται οι υποδοχές των καλωδίων της φωτοδιόδου και το χρονόμετρο.
Στο πείραμα θα μετρήσουμε την ροπή αδράνειας I του τροχού τοποθετώντας τη φωτοδίοδο σε διαφορετικά καθορισμένα ύψη και μετρώντας το χρόνο κίνησης του τροχού μέχρι να φτάσει σε αυτήν από το σημείο εκκίνησης. Ακολουθώντας στη συνέχεια τους δύο εναλλακτικούς τρόπους μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας από τις σχέσεις (2.3)ή(2.5)).

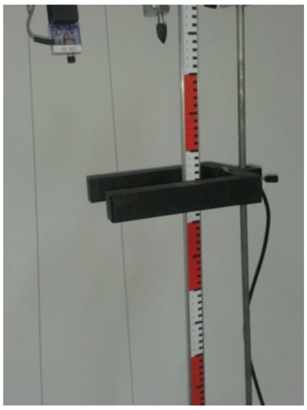
4 Εργασίες

1. Για να μετρήσουμε το χρόνο πτώσης του τροχού διαλέγουμε στη κονσόλα την λειτουργία t_{E-F} με το γκρί καλώδιο στο E και το μαύρο στο F.
2. Ανεβάζω τον τροχό διπλώνοντας το σχοινί στον άξονα (προσέχοντας να μην μπερδεύεται) και κρατώ τον τροχό έτσι ώστε να πιέζει το διακόπτη εκκίνησης (**Εικόνα 4**)στο πάνω μέρος
3. Πατώ το κουμπί start το οποίο ταυτόχρονα μηδενίζει και το χρονόμετρο



Εικόνα 4 : Διακόπτης εκκίνησης

4. Τοποθετώ την φωτοδίοδο (**Εικόνα 5**) στις αποστάσεις h οι οποίες αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα και αφήνοντας στον τροχό ελεύθερο σημειώνω τον χρόνο για την κάλυψη της απόστασης h που αναγράφεται στην κονσόλα
5. Επαναλαμβάνω τα βήματα 2,3,4 για όλες τις τιμές h του πίνακα.
6. Υπολογίζω τη ροπή αδράνειας I από τη σχέση (2.3) και συμπληρώνω την αντίστοιχη στήλη του πίνακα λαμβάνοντας υπόψη ότι
$$m = 0.450Kg$$
$$R = 3 \cdot 10^{-3} m$$
7. Υπολογίζω τη μέση τιμή της ροπής αδράνειας $\bar{I}$
8. Υπολογίζω το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής
$$\delta\bar{I} = \sqrt{\frac{\sum(\Delta I)^2}{N\cdot(N-1)}}$$
και το επί τοις εκατό σφάλμα $\sigma\% = \frac{\delta\bar{I}}{\bar{I}}100\%$.
9. Γράφω τα αποτελέσματα στη μορφή
$$\bar{I} \pm \delta\bar{I} =$$
$$\bar{I} \pm \sigma\% =$$
10. Εκτελώ τη γραφική παράσταση $h = f(t^2)$ και υπολογίζουμε την κλίση
$$k =$$



Εικόνα 5: Φωτοδίοδος

11. Από τη σχέση (2.5) υπολογίζω και πάλι τη ροπή αδράνειας I
$$I =$$
12. Συγκρίνω τις δύο τιμές και εξηγώ ποια κατά τη γνώμη μου θεωρώ πιο αξιόπιστη για την παρακάτω μελέτη.

A/A	h (m)	t (s)	t^2 (s^2)	I $(Kg \cdot m^2)$	$\bar{I}$ $(Kg \cdot m^2)$	ΔI $(Kg \cdot m^2)$	$(\Delta I)^2$ $(Kg \cdot m^2)^2$	$\sum(\Delta I)^2$
1	0.10							
2	0.15							
3	0.20							
4	0.25							
5	0.30							
6	0.35							
7	0.40							
8	0.45							
9	0.50							
10	0.55							

Για την πραγματοποίηση αυτής της άσκησης συνεργάσθηκαν οι φοιτητές του Τμήματος Ναυπηγών Μηχανικών ΤΕ του ΤΕΙ Αθήνας **Αργυρός Αλέξανδρος** και **Σαραντίδης Σαράντης.**
Θερμές ευχαριστίες στην καθηγήτρια Εφαρμογών του ΤΕΙ Αθήνας **Αικατερίνη Σκουρολιάκου** για τις παρατηρήσεις και τη βοήθειά της.