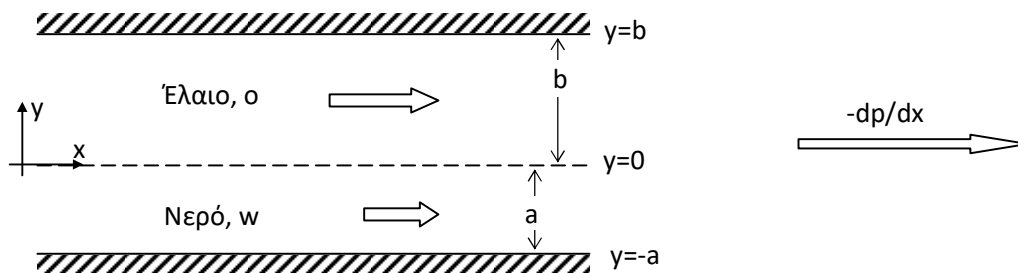


ΑΣΚΗΣΗ 1

Στρωτή ροή μεταξύ παραλλήλων ακίνητων πλακών υπό την επίδραση εξωτερικά επιβαλλόμενης βαθμίδας πίεσης. – Περίπτωση ροής δύο στρωμάτων μη αναμίξιμων υγρών, ελαίου και νερού.

Δεδομένα του προβλήματος: Θεωρούνται γνωστές η βαθμίδα πίεσης dp/dx , οι γεωμετρικές διαστάσεις (πλάτος κάθε στρώσης), a , b , και τα ιξώδη ελαίου και νερού, μ_o , μ_w .



Ξεκινάμε από το σετ διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη στρωτή, ιξώδη ροή ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες [βλέπε Τερζίδης, 1999, Μαθήματα Υδραυλικής – 2. Κλειστοί αγωγοί, Εκδόσεις Ζήτη, εξισώσεις (5.1.2) και (5.2.2)], θεωρώντας ότι η ροή κάθε υγρού διέπεται από διαφορετικό ιξώδες. Θα έχουμε το ακόλουθο σετ εξισώσεων, μία για κάθε φάση:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu_o} \frac{dp}{dx} \quad \text{και} \quad \tau = \mu_o \frac{du}{dy}, \quad \text{για το λάδι (o - oil)} \quad (1)$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu_w} \frac{dp}{dx} \quad \text{και} \quad \tau = \mu_w \frac{du}{dy}, \quad \text{για το νερό (w - water)} \quad (2)$$

Επίσης για ευκολία στην εκμετάλλευση των συνοριακών συνθηκών τοποθετούμε την αρχή του άξονα y (επίπεδο $y=0$), στη διεπιφάνεια που χωρίζει τις δύο ροϊκές στρώσεις. Αυτό έχουμε δικαίωμα να το κάνουμε διότι εμείς καθορίζουμε το είδος και τη θέση του συστήματος αναφοράς.

Επιλύοντας (ολοκληρώνοντας) τις Δ.Ε. θα πάρουμε τις γνωστές εκφράσεις

$$u(y) = \frac{1}{\mu_o} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + A_o(x)y + B_o(x), \quad 0 \leq y \leq b \quad (\text{για το λάδι}) \quad (3)$$

$$u(y) = \frac{1}{\mu_w} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + A_w(x)y + B_w(x), \quad -a \leq y \leq 0 \quad (\text{για το νερό}) \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε 4 σταθερές ολοκλήρωσης για να προσδιορίσουμε, τις A_w , A_o , B_w , B_o , άρα χρειαζόμαστε 4 νέες εξισώσεις, οι οποίες θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες:

ΣΣ.1 $u(b) = 0$ no-slip condition για το λάδι στην (πάνω) πλάκα $y = b$,

ΣΣ.2 $u(-a) = 0$ no-slip condition για το νερό στην (κάτω) πλάκα $y = -a$,

ΣΣ.3 $u(0^+) = u(0^-)$ no-slip condition μεταξύ λαδιού και νερού στη διεπιφάνεια $y = 0$,

ΣΣ.4 $\tau(0^+) = \tau(0^-)$ συνέχεια δυνάμεων (δράση-αντίδραση) μεταξύ νερού & λαδιού στη διεπιφάνεια $y = 0$,

Από εφαρμογή της ΣΣ.3 προκύπτει

$$u(0^+) = u(0^-) \Rightarrow B_o(x) = B_w(x) \equiv B(x) \quad (5)$$

Από εφαρμογή των ΣΣ.1 και ΣΣ.2 με ταυτόχρονη χρήση του προηγούμενου αποτελέσματος, εξ. (5) (από τη ΣΣ.3), προκύπτει

$$u(b) = 0 = \frac{1}{\mu_o} \frac{dp}{dx} \frac{b^2}{2} + A_o(x)b + B(x), \quad \text{και} \quad u(-a) = 0 = \frac{1}{\mu_w} \frac{dp}{dx} \frac{a^2}{2} - A_w(x)a + B(x), \quad (6)$$

Από εφαρμογή της ΣΣ.4 με ταυτόχρονη χρήση των εκφράσεων (3) & (4), προκύπτει

$$\tau(0^+) = \tau(0^-) \Rightarrow \mu_o \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0^+} = \mu_w \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0^-} \Rightarrow \mu_o A_o(x) = \mu_w A_w(x) \quad (7)$$

Εκμεταλλευόμενοι το προηγούμενο αποτέλεσμα, εξ. (7), το εμφανίζουμε στο ζεύγος εξ. (7)(6), (που προέκυψαν από τις ΣΣ.1 και ΣΣ.2) πολλαπλασιάζοντας κάθε μια με το αντίστοιχο ιξώδες και διαιρώντας με το πλάτος της αντίστοιχης στρώσης

$$0 = \frac{dp}{dx} \frac{b}{2} + \mu_o A_o(x) + \frac{\mu_o}{b} B(x), \quad (8)$$

$$0 = \frac{dp}{dx} \frac{a}{2} - \mu_w A_w(x) + \frac{\mu_w}{a} B(x)$$

Από τις οποίες, προσθέτοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την εξ. (7), θα πάρουμε

$$0 = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (b + a) + \left(\frac{\mu_o}{b} + \frac{\mu_w}{a} \right) B(x) \quad (9)$$

και επιλύοντας ως προς B προκύπτει

$$B(x) = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (b + a) / \left(\frac{\mu_o}{b} + \frac{\mu_w}{a} \right) = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu_w} (b + a) / \left(\frac{\mu_o}{\mu_w} \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \quad (10)$$

την οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε στις ΣΣ.1 και ΣΣ.2 για να προσδιορίσουμε τις σταθερές A_o & A_w .

$$A_o(x) = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left(\frac{b}{\mu_o} - \frac{1 + \frac{a}{b}}{\frac{\mu_o}{b} + \frac{\mu_w}{a}} \right) \quad (11)$$

$$A_w(x) = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left(\frac{a}{\mu_w} - \frac{1 + \frac{b}{a}}{\frac{\mu_o}{b} + \frac{\mu_w}{a}} \right) \quad (12)$$

Πλέον, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις προηγούμενες εκφράσεις για τις σταθερές, A_w , A_o , B, στις εκφράσεις, εξ. (3) & (4), ώστε να πάρουμε την κατανομή ταχύτητας σε κάθε στρώση:

$$u_o(y) = \frac{1}{2\mu_w} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\kappa} \left[y + \frac{\kappa(a+b)}{\kappa+b} \right] (y - b), \quad 0 \leq y \leq b \quad (\text{λάδι}) \quad (13)$$

$$u_w(y) = \frac{1}{2\mu_w} \frac{dp}{dx} \left[y - \frac{b(a+b)}{\kappa+b} \right] (y + a), \quad -a \leq y \leq 0 \quad (\text{νερό}) \quad (14)$$

Όπου κ , είναι ο λόγος ιξωδών λαδιού / νερού

$$\kappa = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad (15)$$

Ερωτήματα για περαιτέρω επεξεργασία

- 1) Επιβεβαιώστε τις ΣΣ. 1-4 χρησιμοποιώντας (ως έλεγχο) τις εκφράσεις (13) & (14)
- 2) Επιβεβαιώστε την ορθότητα ως προς τις διαστάσεις των εκφράσεων τις εκφράσεις (13) & (14)
- 3) Διαμορφώστε διαγράμματα κατανομής ταχύτητας για ενδεικτικές τιμές κ , a , b .
- 4) Προσπαθήστε να λύσετε το πρόβλημα τοποθετώντας το σύστημα αναφοράς με $y=0$ στην κάτω πλάκα, οπότε η διεπιφάνεια λαδιού νερού θα περιγράφεται από την έκφραση $y=a$ και η πάνω πλάκα από την έκφραση $y=a+b$.

Καλή μελέτη – Για οποιοδήποτε πρόβλημα, απορία ή διαπίστωση λάθους στις εκφράσεις στείλτε μου email.