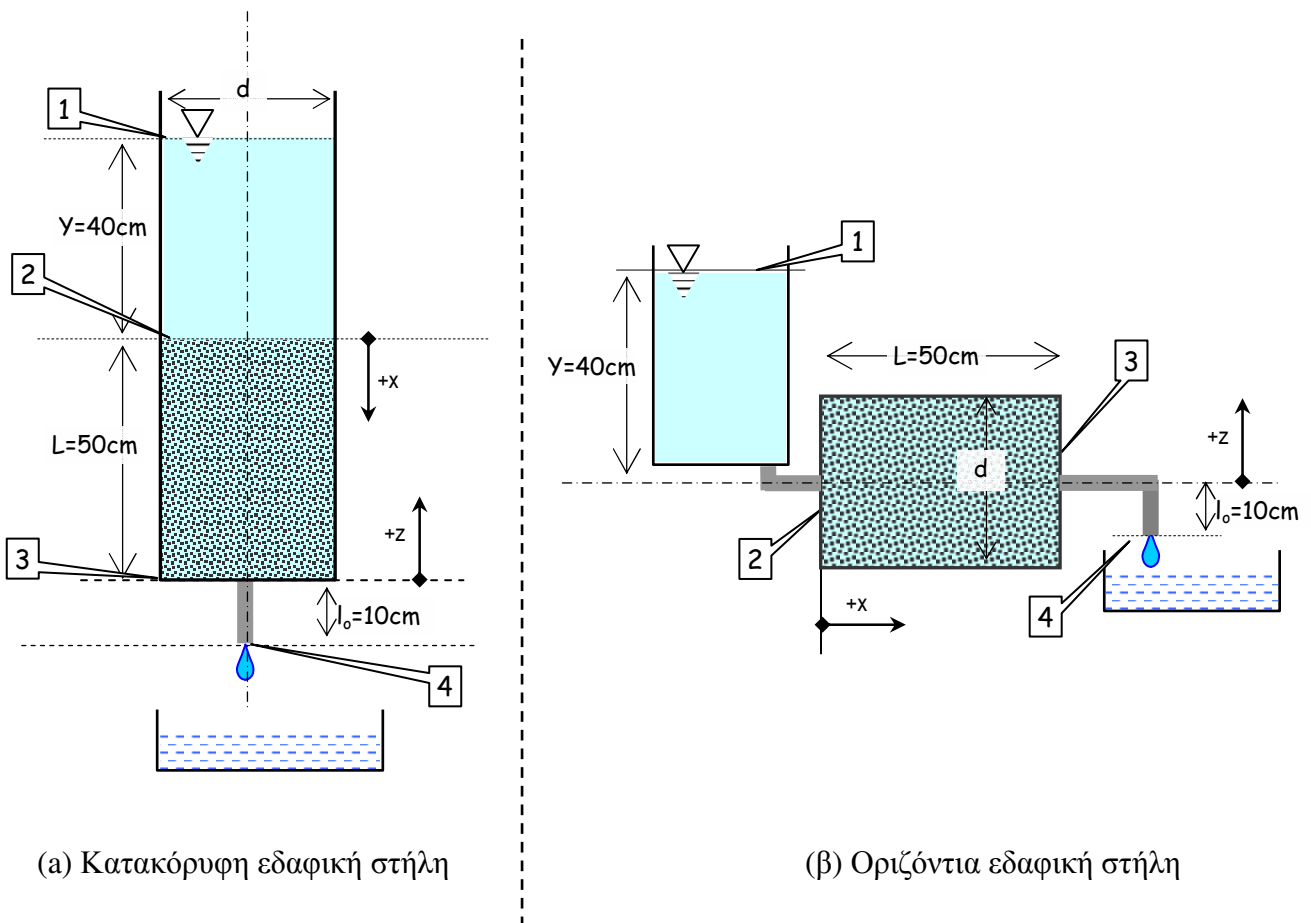


Άσκηση 1 – Ροή νερού σε κορεσμένη εδαφική στήλη

Μια κυλινδρική εδαφική στήλη διαμέτρου $d=30\text{cm}$ έχει υδραυλική αγωγιμότητα $K=3\text{cm/hr}$. Το άνω άκρο τη στήλης γεμίζεται με νερό σε ύψος $Y=40\text{cm}$ πάνω από το επίπεδο έναρξης της εδαφικής στήλης. Από το κάτω επίπεδο το νερό εκρέει από σωλήνα μικρής διαμέτρου και μήκους $l_0=10\text{cm}$.

- (α) Πόση είναι η παροχή, Q_v , διαμέσου της στήλης σε αυτήν την περίπτωση?
- (β) Πόση θα είναι η παροχή, Q_h , εάν η στήλη οριζοντιωθεί και όλες οι άλλες στάθμες παραμείνουν στα ίδια ύψη σχετικά με τον άξονα της στήλης?
- (γ) Πόση θα είναι η παροχή εάν η στήλη τοποθετηθεί με κλίση 45° και όλες οι άλλες στάθμες παραμείνουν στα ίδια ύψη σχετικά με τον άξονα της στήλης?
- (δ) Διαμορφώστε μια γενική έκφραση ανεξάρτητη της γωνίας κλίσης του άξονα της στήλης.



Επίλυση

(α) Για να υπολογίσουμε την παροχή στη στήλη θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Darcy για οποιοδήποτε ζεύγος διατομών στο π.μ., άρα και μεταξύ των διατομών 2 και 3.

$$\frac{Q_v}{A} = -K \frac{\Delta H}{\Delta x} = -K \frac{H_3 - H_2}{x_3 - x_2} \Rightarrow \frac{Q_v}{A} = -K \frac{(h_3 + z_3) - (h_2 + z_2)}{x_3 - x_2} = -K \frac{(h_3 - h_2) + (z_3 - z_2)}{x_3 - x_2}$$

Από τη γνωστή έκφραση για τις υδροστατικές πιέσεις έχουμε

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \Rightarrow p_2 = p_1 - \rho g(z_2 - z_1) = p_{\text{atm}} - \rho g(z_2 - z_1) \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - (z_2 - z_1)$$

$$p_3 - p_4 = -\rho g(z_3 - z_4) \Rightarrow p_3 = p_4 - \rho g(z_3 - z_4) = p_{\text{atm}} - \rho g(z_3 - z_4) \Rightarrow$$

$$h_3 = \frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} - (z_3 - z_4)$$

$$h_3 - h_2 = -(z_3 - z_4) + (z_2 - z_1)$$

Αντικαθιστώντας στο νόμο του Darcy έχουμε

$$\frac{Q_v}{A} = -K \frac{[-(z_3 - z_4) + (z_2 - z_1)] + (z_3 - z_2)}{x_3 - x_2} \Rightarrow \frac{Q_v}{A} = K \frac{(z_3 - z_4) + (z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)}{x_3 - x_2}$$

Παρατηρούμε ότι εάν αυξήσουμε το ύψος της στάθμης του νερού πάνω από την εδαφική στήλη $(z_1 - z_2) \uparrow$ ή το μήκος του μικρού σωλήνα $(z_3 - z_4) \uparrow$ η παροχή θα αυξηθεί, ενώ εάν αυξήσουμε το μήκος της εδαφικής στήλης $(x_3 - x_2) \uparrow$ τότε και το $(z_2 - z_3) \uparrow$ και, επομένως, η παροχή θα αυξηθεί λόγω του ενώ θα μειωθεί λόγω του στον παρονομαστή $\frac{(z_2 - z_3)}{x_3 - x_2}$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ότι τελικά

$$\frac{Q_v}{A} = K \frac{(z_3 - z_4) + (z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)}{x_3 - x_2} = K \frac{z_1 - z_4}{x_3 - x_2} = K \frac{(L + y) - (-l_0)}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{Q_v}{A} = K \frac{L + y + l_0}{L}$$

Δηλαδή, για τη συγκεκριμένη διάταξη με κατακόρυφη εδαφική στήλη, η παροχή είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της εδαφικής στήλης (L) και ανάλογη της υψομετρικής διαφοράς των δύο ακραίων σταθμών του νερού που τη «φορτίζουν», δηλαδή $(z_1 - z_4) = (L + y + l_0)$.

(β) Σε περίπτωση που με τις ίδιες συνθήκες οριζοντιώσουμε τη στήλη θα έχουμε

$$\frac{Q_h}{A} = -K \frac{\Delta H}{\Delta L} = -K \frac{H_3 - H_2}{x_3 - x_2} = -K \frac{(h_3 + z_3) - (h_2 + z_2)}{x_3 - x_2} = -K \frac{(h_3 - h_2) + (z_3 - z_2)}{x_3 - x_2}$$

αλλά $z_3 = z_2$, κι έτσι

$$\frac{Q_h}{A} = -K \frac{h_3 - h_2}{x_3 - x_2}$$

οπότε με αντικατάσταση των h_2 , h_3 και τρόπο παρόμοιο με αυτόν στην περίπτωση (α) προκύπτει

$$h_2 = \frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} - (z_2 - z_1) = \frac{P_{atm}}{\rho g} - (0 - y) = \frac{P_{atm}}{\rho g} + y,$$

$$h_3 = \frac{P_3}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} - (z_3 - z_4) = \frac{P_{atm}}{\rho g} - (0 - (-l_0)) = \frac{P_{atm}}{\rho g} - l_0 \text{ και}$$

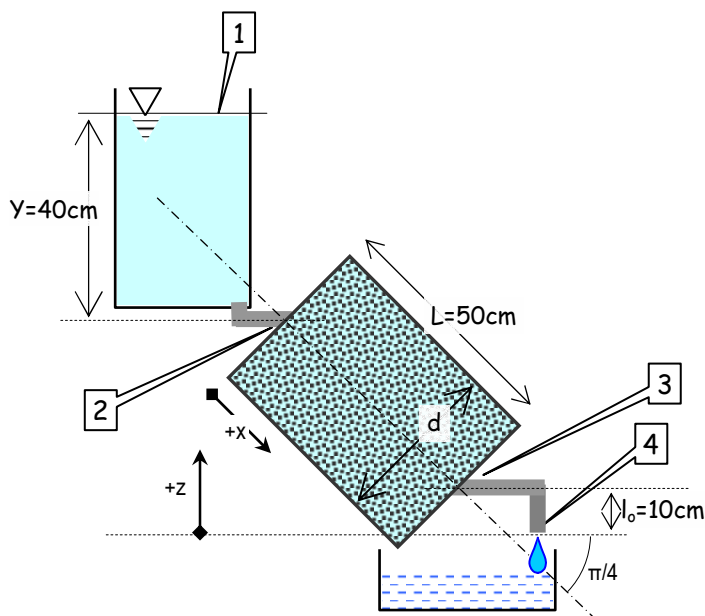
$$h_3 - h_2 = \left(\frac{P_{atm}}{\rho g} - l_0 \right) - \left(\frac{P_{atm}}{\rho g} + y \right) = -(l_0 + y)$$

Οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση του Darcy προκύπτει

$$\frac{Q_h}{A} = -K \frac{h_3 - h_2}{x_3 - x_2} = -K \frac{-(l_0 + y)}{L - 0} \Rightarrow \frac{Q_h}{A} = K \frac{l_0 + y}{L}$$

Δηλαδή, για τη συγκεκριμένη διάταξη με οριζόντια εδαφική στήλη, η παροχή είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της εδαφικής στήλης, L , και ανάλογη της υψομετρικής διαφοράς των δύο ακραίων σταθμών του νερού που τη «φορτίζουν», δηλαδή δηλαδή $(z_1 - z_4) = (y + l_0)$.

(γ) Σε περίπτωση που με τις ίδιες συνθήκες η κλίση της στήλης γίνει 45° ,



θα πρέπει να διατυπώσουμε τη σχέση Darcy για την εδαφική στήλη κατά τη διεύθυνση του άξονα L με τις υψομετρικές τιμές των z_2, z_3 και τις συνθήκες πίεσης στις διατομές 2, 3 (h_2 & h_3) οι οποίες θα προκύψουν από τις τιμές της πίεσης στα z_1, z_4 .

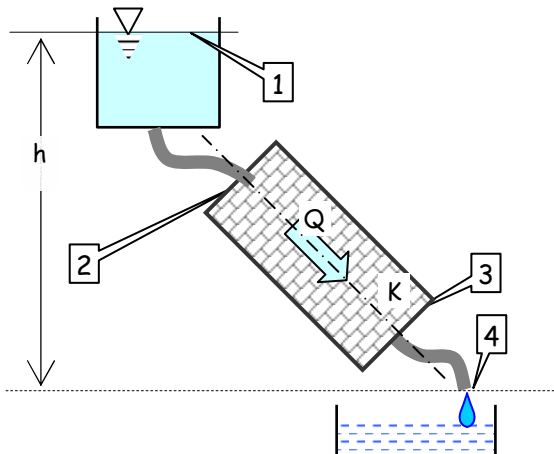
Με τρόπο παρόμοιο με των (α) & (β) θα προκύψει

$$\frac{Q_{45}}{A} = -K \frac{(z_3 + h_3) - (z_2 + h_2)}{x_3 - x_2} = -K \frac{[l_0 + (-l_0)] - [(l_0 + L \sin 45) + y]}{L - 0} \Rightarrow$$

$$\frac{Q_h}{A} = K \frac{(l_0 + L \sin 45) + y}{L}$$

Δηλαδή, και για τη συγκεκριμένη διάταξη με κεκλιμένη εδαφική στήλη, η παροχή είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους της εδαφικής στήλης, L , και ανάλογη της υψομετρικής διαφοράς των δύο ακραίων σταθμών του νερού που τη «φορτίζουν», δηλαδή $(z_1 - z_4) = (y + L \sin 45^\circ + l_0)$.

(δ) Μια γενική έκφραση, από την οποία προκύπτει ότι η γωνία κλίσης του άξονα της στήλης δεν επηρεάζει τη σχέση εξωτερικής βαθμίδας πίεσης-ταχύτητας είναι η ακόλουθη.



Για οποιαδήποτε κυλινδρική στήλη σταθερής διατομής A με πορώδες μέσω υδραυλικής αγωγιμότητας K , η οποία φορτίζεται από μια ανοικτή δεξαμενή (1-2) και από ένα σωλήνα εκροής (3-4) όπως στο σκαρίφημα, η μέση ταχύτητα και η παροχή δίνονται από τη γενική έκφραση:

$$|U| = \frac{Q}{A} = K \frac{h}{L}$$

Μπορείτε να την αποδείξετε την παραπάνω γενική έκφραση;

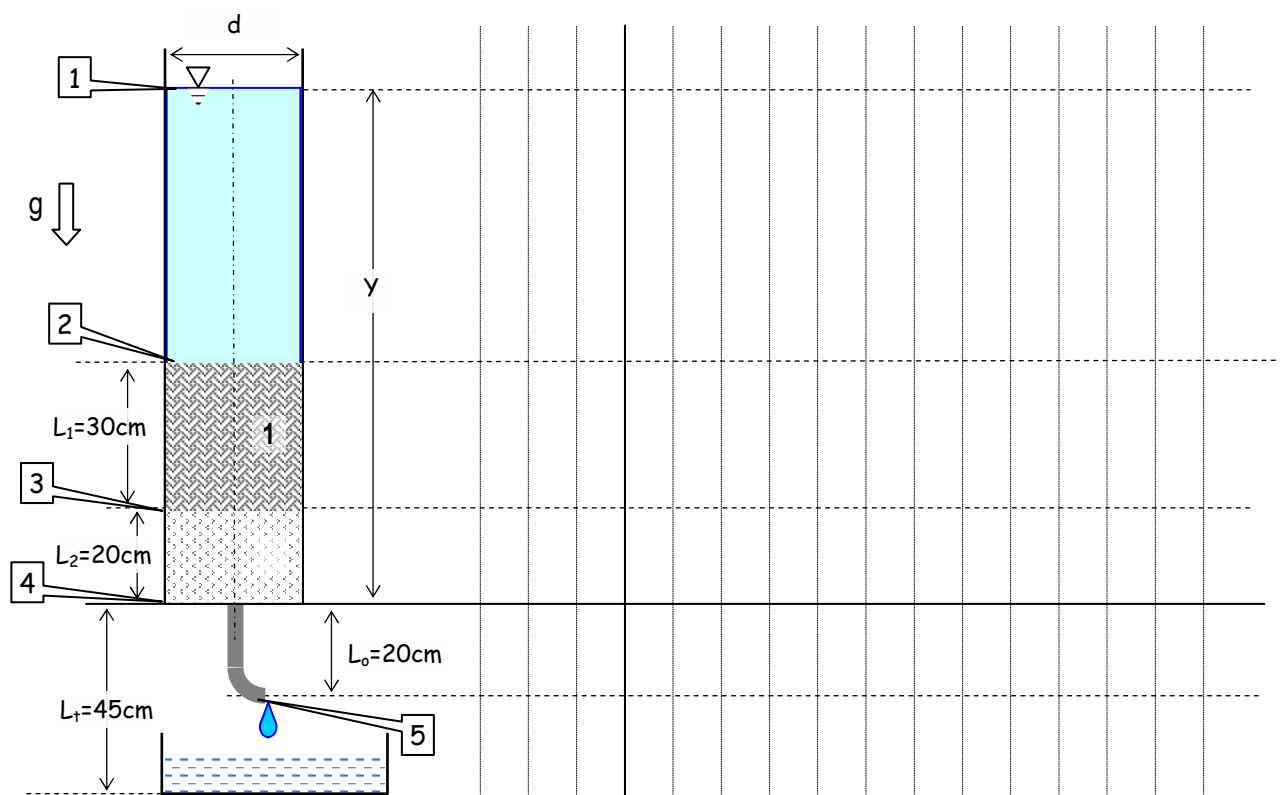
Άσκηση 2 – Ροή νερού σε κορεσμένες εδαφικές στήλες – Διαγράμματα ενέργειας

Μια κυλινδρική εδαφική στήλη διαμέτρου $d=30\text{cm}$ αποτελείται από δύο στρώσεις (1) & (2) με υδραυλικές αγωγιμότητες $K_1=3\text{cm/hr}$ και $K_2=1\text{cm/hr}$ και ύψη (πάχη) $L_1=30\text{cm}$ & $L_2=20\text{cm}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σκαρίφημα. Το άνω άκρο τη στήλης γεμίζεται με νερό σε ύψος Y , από το κατώτερο επίπεδο της στήλης. Από το κάτω επίπεδο το νερό εκρέει από σωλήνα μικρής διαμέτρου και μήκους $L_0=20\text{cm}$.

(α) Πόση είναι η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα, K^* , της εδαφικής στήλης;

(β) Σε πόσο ύψος h , πρέπει να διατηρείται η στάθμη του νερού, ώστε σε μια λεκάνη που ευρίσκεται $L_1=45\text{cm}$ κάτω από τη στήλη, να συλλέγεται νερό με ρυθμό $Q=3,0\text{ lt/hr}$;

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα ενεργειακής καταστάσεως του νερού (για τα: y -ύψος θέσης, h -ύψος πίεσης, H -υδραυλικό ύψος κατά μήκος της στήλης) χρησιμοποιώντας τον κάρναβο δίπλα στο σκαρίφημα. Δώστε τις αριθμητικές τιμές στα σημαντικά σημεία.



Επίλυση

Προσδιορισμός μέσης μακροσκοπικής ταχύτητας.

Ορίζουμε ως **υπομετρικό άξονα αναφοράς, Oz**, με θετική φορά αντίθετη της βαρύτητας και επίπεδο αναφοράς ($z=0$) στο κάτω μέρος της στήλης, θέση (4).

Επίσης ορίζουμε ως **άξονα αναφοράς μηκών κατά τη δ/νση της ροής, Ox**, παράλληλο στον άξονα της στήλης με αρχή στη διατομή (4) και φορά από τη διατομή (4) προς τη διατομή (2)..

Για να συλλέγεται νερό στη λεκάνη με ρυθμό $Q=3,0\text{ lt/s}$, θα πρέπει το μέτρο της μέσης ταχύτητας U , να ισούται με

$$|U| = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} \Rightarrow |U| = \frac{4 \times 3,0 \text{ lt/hr}}{\pi \times (30 \text{ cm})^2} = \frac{4 \times 3000,0 \text{ cm}^3/\text{hr}}{\pi \times (30 \text{ cm})^2} \Rightarrow |U| = 4,244 \text{ cm/hr} \quad (2.1)$$

Επειδή, υποπτευόμαστε(!) ότι η ταχύτητα είναι προς τα κάτω, και συγκεκριμένα από τη διατομή (2) με τη μεγαλύτερη ολική υδραυλική ενέργεια (H_2) προς τη διατομή (4) με τη μικρότερη ολική υδραυλική ενέργεια (H_4), τότε ως προς τον άξονα Ox , που έχει θετική φορά προς τα πάνω, η ταχύτητα γίνεται

$$U = -4,244 \text{ cm/hr} \quad (2.2)$$

(α) Η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα για τις δύο στρώσεις, K^* , δίνεται από την έκφραση για διάστρωση κάθετη στη μακροσκοπική ροή

$$K^* = \frac{\sum_{i=1}^2 L_i}{\sum_{i=1}^2 \frac{L_i}{K_i}} \Rightarrow K^* = \frac{30 \text{ cm} + 20 \text{ cm}}{\frac{30 \text{ cm}}{3 \text{ cm/hr}} + \frac{20 \text{ cm}}{1 \text{ cm/hr}}} \Rightarrow \boxed{K^* = 1,667 \text{ cm/hr}} \quad (2.3)$$

(β) Για να υπολογίσουμε το ύψος της στάθμης του νερού στο επάνω μέρος της στήλης αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το ισοδύναμο π.μ. με υδραυλική αγωγιμότητα K^* και μήκος $L = (30+20) \text{ cm} = 50 \text{ cm}$.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Darcy για το ισοδύναμο πορώδες μέσω μεταξύ των διατομών (2) & (4) έχουμε:

$$U = -K^* \frac{H_2 - H_4}{x_2 - x_4} = -K^* \frac{(z_2 + h_2) - (z_4 + h_4)}{x_2 - x_4} = -K^* \frac{(z_2 - z_4) + (h_2 - h_4)}{x_2 - x_4} \quad (2.4)$$

$$= -K^* \frac{(L_1 + L_2) + (h_2 - h_4)}{L_1 + L_2}$$

Όμως τα μανομετρικά ύψη h_2 & h_4 είναι αντίστοιχα $h_2 = y - (L_1 + L_2)$ και $h_4 = -L_0$, οπότε η (2.4) γίνεται

$$U = -K^* \frac{(L_1 + L_2) + y - (L_1 + L_2) + L_0}{L_1 + L_2} = -K^* \frac{y + L_0}{L_1 + L_2} \Rightarrow U(L_1 + L_2) = -K^*(y + L_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{U(L_1 + L_2) + K^* L_0}{-K^*} \quad (2.5)$$

και με αντικατάσταση των τιμών (2.1) & (2.3) προκύπτει

$$y = \frac{-4,244 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times 50 \text{ cm} + 1,667 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times 20 \text{ cm}}{-1,667 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}} \Rightarrow \boxed{y = 107,29 \text{ cm}} \quad (2.6)$$

(γ) Για να κατασκευαστούν τα διαγράμματα ενεργειακής κατάστασης του νερού θα πρέπει να υπολογιστεί το μανομετρικό ύψος του νερού στη διατομή (3).

Εφαρμόζοντας το νόμο του Darcy μεταξύ των διατομών (3) & (4) για τη στρώση (2) θα πάρουμε

$$U = -K_2 \frac{H_3 - H_4}{x_3 - x_4} = -K_2 \frac{(z_3 + h_3) - (z_4 + h_4)}{x_3 - x_4} = -K_2 \frac{(z_3 - z_4) + (h_3 - h_4)}{x_3 - x_4}$$

Η οποία, αφού $z_3 - z_4 = L_2$ $x_3 - x_4 = L_2$,

γίνεται

$$UL_2 = -K_2 L_2 - K_2 (h_3 - h_4) \Rightarrow K_2 h_3 = -UL_2 - K_2 L_2 + K_2 h_4 \Rightarrow$$

$$h_3 = \frac{-UL_2 - K_2 L_2 + K_2 h_4}{K_2} \quad (2.7)$$

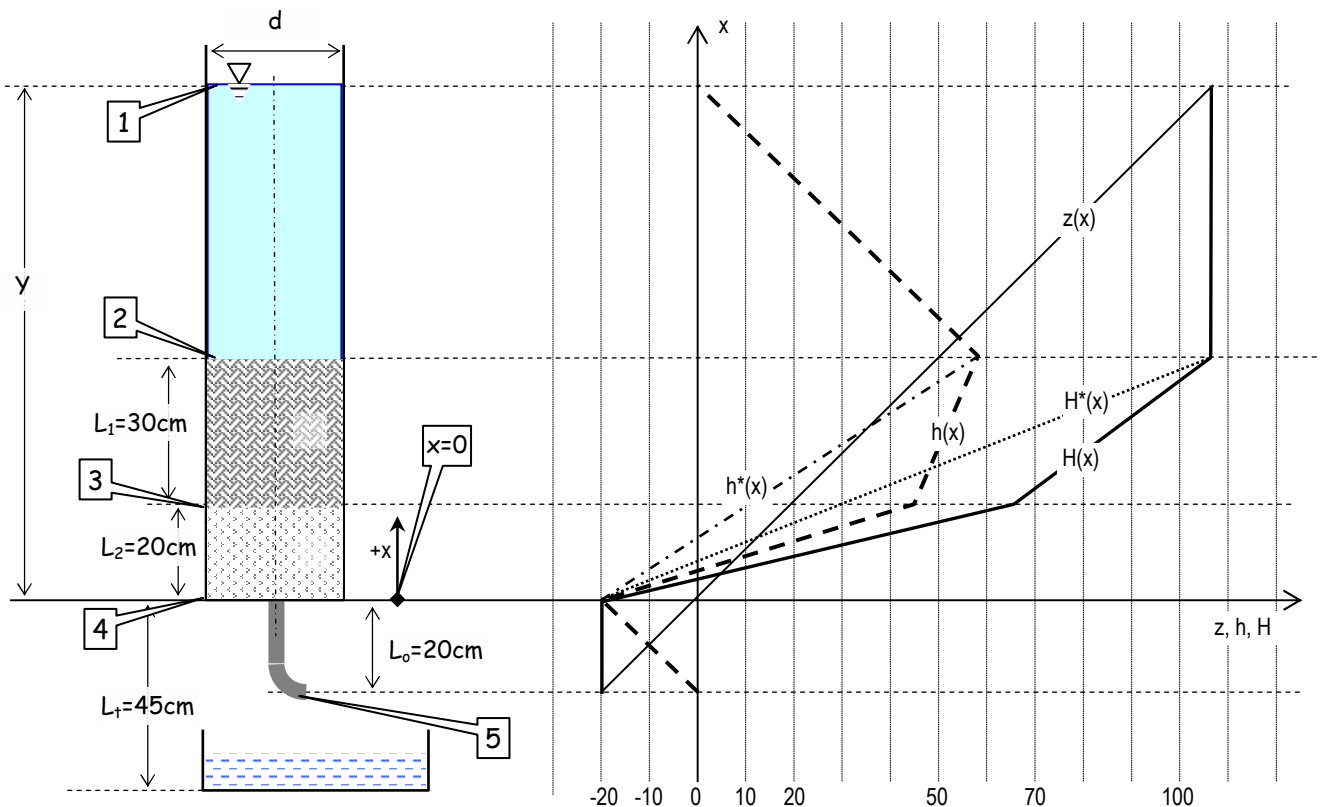
και με αντικατάσταση των τιμών (2.1) & (2.3) προκύπτει

$$\Rightarrow h_3 = \frac{-\left(-4,244 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}\right) \times 20\text{cm} - 1,0 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times 20\text{cm} + 1,0 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times (-20\text{cm})}{1,0 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}} = 44,88\text{cm} \quad (2.8)$$

Συγκεντρωτικά, στις στάθμες (1, 2, 3, 4 & 5) της στήλης έχουμε τα παρακάτω ισοδύναμα ύψη:

Στάθμη	Ύψος θέσης ή υψόμετρο, z (cm)	Μανομετρικό ύψος, h (cm)	Ολικό υδραυλικό ύψος, H (cm)
1	107,29	0	107,29
2	50	57,29	107,29
3	20	44,88	64,88
4	0	-20	-20
5	-20	0	-20

Με βάση τα αποτελέσματα της επίλυσης που παρουσιάζεται στον Πίνακα, σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ενεργειακής κατάστασης του νερού στον κάρναβο δίπλα στην εκφώνηση αφού επιλέξουμε ποιες γραμμές του κανάβου θα χρησιμοποιήσουμε ως άξονες συντεταγμένων για τα τρία διαγράμματα [z(x), h(x) & H(x)], την κλίμακα σε κάθε άξονα κλπ. Λόγω επαρκούς χώρου μπορούμε να διαμορφώσουμε τρία ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων (δηλαδή με ίδια κλίμακα στους ορθογώνιους άξονες) τα οποία να συμπίπτουν.



Παρατηρήσεις

Η μανομετρική πίεση μεταβάλλεται εντονότερα στη στρώση (2) απ'ότι στη στρώση (1) επειδή αντίστοιχα η υδραυλική αγωγιμότητα K_2 είναι μικρότερη από την υδραυλική αγωγιμότητα K_1 . και το νερό ρέει πιο δύσκολα δαπανώντας μεγαλύτερη υδραυλική ενέργεια

Εκτός των διαγραμμάτων ενεργειακής κατάστασης του νερού, $z(x)$, $h(x)$ & $H(x)$, παρουσιάζονται και δύο ακόμα: Η διάστικτη-διακεκομμένη h^* παριστάνει την κατανομή της μανομετρικής πίεσης $h^*(x)$ στην περίπτωση που αντικαθιστούσαμε τις δύο στρώσεις του π.μ. με ένα ομοιόμορφο π.μ. με ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα K^* [από τη (2.3)].

Αντίστοιχα, η $H^*(x)$, την ολική υδραυλική ενέργεια ανά μονάδα βάρους υγρού για το ομοιόμορφο π.μ. με ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα K^* .

Άσκηση 3 – Ροή νερού σε κορεσμένες εδαφικές στήλες

Μια κυλινδρική εδαφική στήλη διαμέτρου $d=40\text{ cm}$ αποτελείται από δύο στρώσεις (1) & (2) με υδραυλικές αγωγιμότητες $K_1=3\text{ cm/hr}$ και $K_2=1\text{ cm/hr}$ και ύψη (πάχη) $L_1=30\text{ cm}$ & $L_2=45\text{ cm}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σκαρίφημα της Εικόνας 3.1.

Το κάτω άκρο της στήλης τροφοδοτείται με νερό από ένα δοχείο (Δ) που διατηρείται σε στάθμη h . Το άνω άκρο τη στήλης γεμίζεται με νερό το οποίο, με τη βοήθεια υπερχειλίσης (Υ), διατηρείται σε ύψος $L_3=35\text{ cm}$, από το ανώτερο επίπεδο της στήλης.

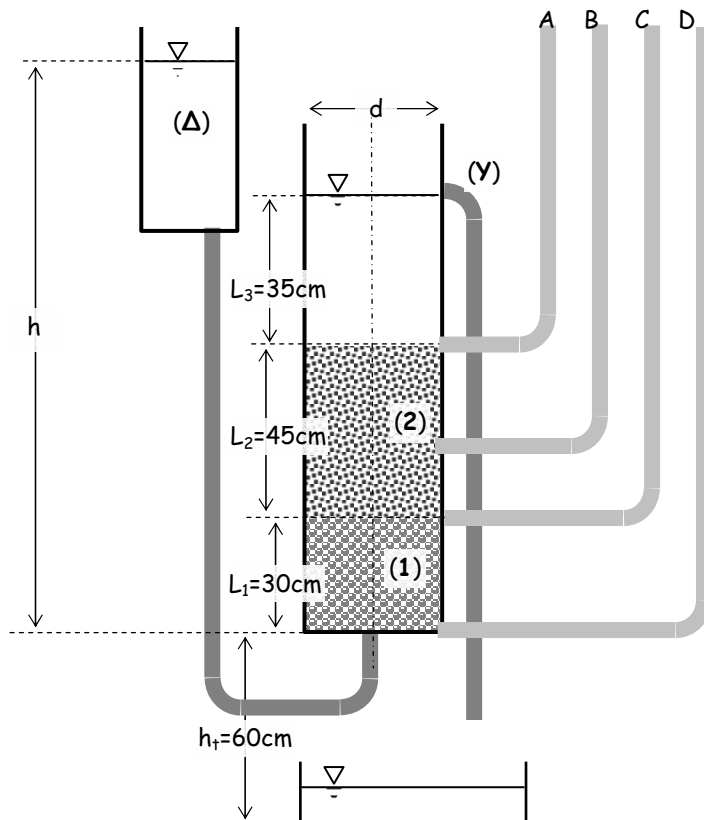
Ζητούμενα:

(α) Πόση είναι η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα, K^* , της εδαφικής στήλης;

(β) Πόση είναι η παροχή σε κάθε στρώση Q_1 , Q_2 και η αντίστοιχη ταχύτητα, U_1 , U_2 , εάν $h=160\text{ cm}$;

(γ) Πόσο είναι το ύψος της στάθμης του νερού στους μανομετρικούς σωλήνες A, B, C, D (εάν $h=160\text{ cm}$);

(δ) Σε πόσο ύψος h' , πρέπει να διατηρείται η στάθμη του νερού στο δοχείο (Δ), ώστε σε μια λεκάνη που ευρίσκεται $h_f=60\text{ cm}$ κάτω από τη στήλη, να συλλέγεται νερό με ρυθμό $Q'=20\text{ lt/hr}$.

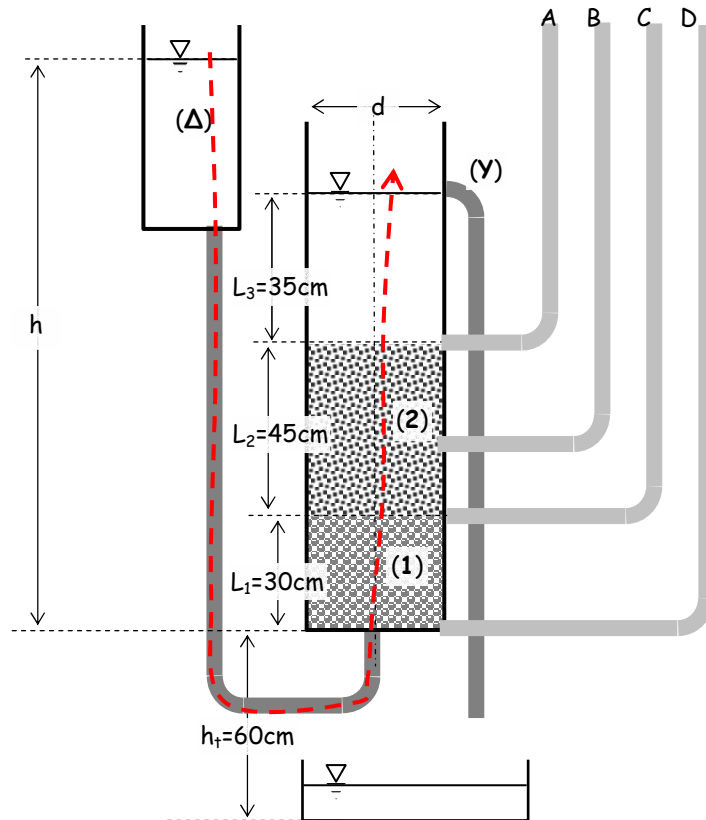


Εικόνα 3.1

Επίλυση

Αποτυπώνουμε τη διαδρομή που θα ακολουθήσει ένα υγρό σωματίδιο νερού από ελεύθερη επιφάνεια νερού/αέρα σε ελεύθερη επιφάνεια νερού/αέρα.

Η διαδρομή απεικονίζεται με την κόκκινη διακεκομμένη γραμμή (βλέπε Εικόνα 3.2). Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν διακλαδώσεις, προκύπτει μόνο μια συνεχής γραμμή άρα η παροχή διατηρείται ίδια σε κάθε διατομή αυτής της διαδρομής. Ο κατακόρυφος σωλήνας υπερχειλίσσης στη λεκάνη στράγγισης δε συμμετέχει στην ανάλυση του προβλήματος.



Εικόνα 3.2

Η διαδρομή του νερού από ελεύθερη επιφάνεια σε ελεύθερη επιφάνεια χωρίζεται σε τρία τμήματα. Στο πρώτο και στο τρίτο η ροή πραγματοποιείται σε σωλήνες ενώ στο δεύτερο σε πορώδες μέσο. Άρα η μεγαλύτερη απώλεια ενέργειας λόγω τριβών γίνεται στο μεσαίο τμήμα διαμέσου των δύο στρώσεων πορώδους μέσου.

(α) Αυτές οι στρώσεις είναι κάθετες στη δ/ση της ροής, επομένως μπορούν να αντικατασταστούν από μία ισοδύναμη στρώση δηλαδή μια ενιαία στρώση με ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα, K^* , η τιμή της οποίας υπολογίζεται από τον αντίστοιχο τύπο (για ροή κάθετα σε στρώσεις)

$$K^* = \frac{\sum_{i=1}^2 L_i}{\sum_{i=1}^2 \frac{L_i}{K_i}} \Rightarrow K^* = \frac{30\text{cm} + 45\text{cm}}{\frac{30\text{cm}}{3\text{cm/hr}} + \frac{45\text{cm}}{1\text{cm/hr}}} \Rightarrow \boxed{K^* = 1,364\text{cm/hr}} \quad (3.1)$$

(β) Όπως προαναφέρθηκε η παροχή παραμένει η ίδια σε κάθε διατομή. Επειδή στις δύο στρώσεις του πορώδους μέσου η διατομή παραμένει ίδια έτσι και οι ταχύτητες σε κάθε στρώση θα είναι ίσες, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε

$$U_1 = U_2 = U \quad (3.2)$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το νόμο του Darcy (βλέπε γενική έκφραση της περίπτωσης (δ) της Ασκήσης 1) για το ισοδύναμο πορώδες μέσο (υδραυλικής αγωγιμότητας K^*), και για δεδομένο $h=160\text{cm}$, έχουμε για την τιμή της ενιαίας σε όλες τις στρώσεις ταχύτητας, $U=U_1=U_2$,

$$U = K^* \frac{\Delta H}{\Delta L} = K^* \frac{h - [L_1 + L_2 + L_3]}{(L_1 + L_2)}$$

$$= 1,364 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{160\text{cm} - [(30\text{cm} + 45\text{cm}) + 35\text{cm}]}{(30\text{cm} + 45\text{cm})} = 1,364 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{50\text{cm}}{75\text{cm}} \Rightarrow$$

$U = U_1 = U_2 = 0,9093 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}$

(3.3)

Με υπολογισμένη πλέον την τιμή της ενιαίας σε όλες τις στρώσεις ταχύτητας και με δεδομένο το εμβαδό της διατομής του π.μ. μπορούμε να υπολογίσουμε την παροχή Q :

$$Q = UA = U \frac{\pi d^2}{4} = 0,9093 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{3,14159 \times (40\text{cm})^2}{4} \Rightarrow Q = 1142,70 \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} = 1,143 \frac{\text{lt}}{\text{hr}}$$

$Q = 1142,70 \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} = 1,143 \frac{\text{lt}}{\text{hr}}$

(3.4)

(γ) Το ύψος της στάθμης του νερού σε κάθε μανομετρικό σωλήνα ορίζεται (μετριέται) από τη στάθμη του άξονα της αντίστοιχης διατομής.

Τα ύψη της στάθμης του νερού στους μανομετρικούς σωλήνες Α και Δ προκύπτουν αμέσως παρατηρώντας ότι οι σωλήνες Α & Δ συγκοινωνούν αντίστοιχα με τη δεξαμενή Δ και το «δοχείο» της υπερχειλίσης. Επειδή η ροή στους σωλήνες είναι πάρα πολύ αργή (εξ αιτίας της αργής ροής στο πορώδες μέσο) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι πιέσεις και τα ισοδύναμα μανομετρικά ύψη έχουν υδροστατική κατανομή (συγκοινωνούντα δοχεία), άρα,

Μανομετρικός σωλήνας D: $h_D = h = 160\text{cm}$

Μανομετρικός σωλήνας A: $h_A = L_3 = 35\text{cm}$

Μανομετρικός σωλήνας C: Το ύψος της στάθμης του νερού στο μανομετρικό σωλήνα C δεν προσδιορίζεται άμεσα (όπως στους Α & D) αλλά θα υπολογισθεί με εφαρμογή του νόμου του Darcy είτε από τη μεριά της στρώσης (1) είτε από τη μεριά της στρώσης (2), ως ακολούθως (βλέπε και Εικόνα 3.3):

$$U = U_1 = -K_1 \frac{\Delta H}{\Delta X} = -K_{CD} \frac{(z_D + h_D) - (z_C + h_C)}{x_D - x_C} = -K_1 \frac{(z_D + h_D) - (z_C + h_C)}{-L_1} \Rightarrow$$

$$-h_C = \frac{UL_1}{K_1} - (z_D + h_D) + z_C \Rightarrow h_C = (z_D + h_D) - z_C - \frac{UL_1}{K_1}$$

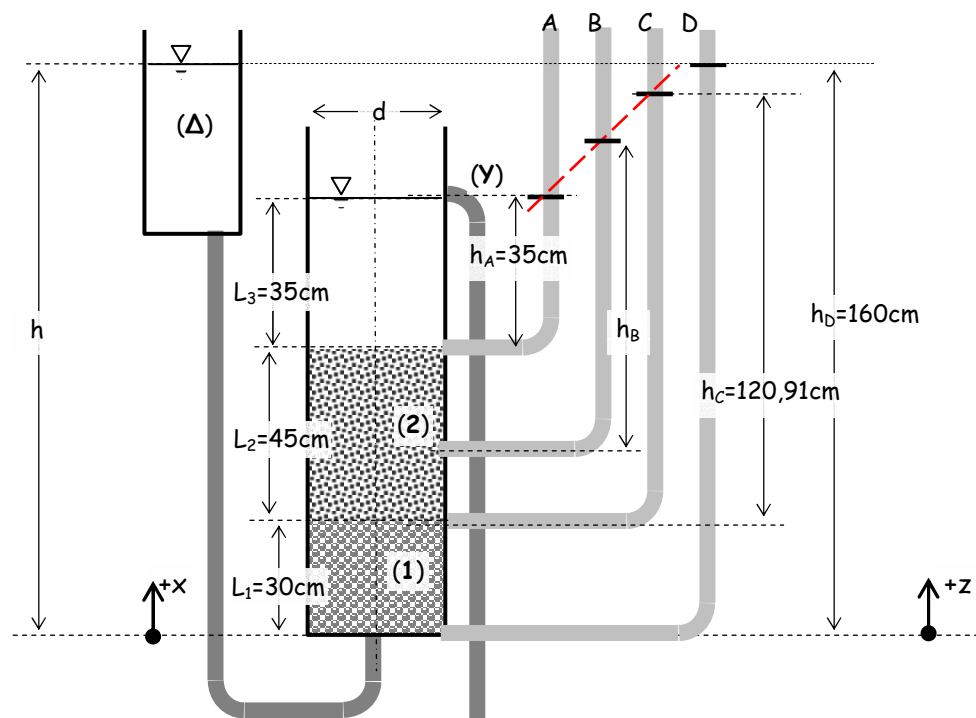
και με εφαρμογή των αριθμητικών δεδομένων έχουμε

$$h_C = (z_D + h_D) - z_C - \frac{UL_1}{K_1}$$

$$= (0\text{cm} + 160\text{cm}) - 30\text{cm} - \frac{0,9093 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times 30\text{cm}}{3,0 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}} = 160\text{cm} - 30\text{cm} - 9,093\text{cm} \Rightarrow$$

$h_C = 120,907\text{cm}$

Μανομετρικός σωλήνας B: Το ύψος της στάθμης του νερού στο μανομετρικό σωλήνα B, h_B , θα μπορούσε να προσδιορισθεί με ανάλογο τρόπο. Όμως, επειδή δεν μας δίνεται η θέση της διατομής B (x_B) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αριθμητικά το νόμο του Darcy. Όμως μπορούμε να εκτιμήσουμε το ύψος h_B με γραφικό τρόπο από τα ύψη h_A & h_C των μανομετρικών σωλήνων A & C. Επειδή ο νόμος του Darcy είναι γραμμικός (με σταθερά K), το ύψος της στάθμης του νερού στο μανομετρικό σωλήνα B προσδιορίζεται γραφικά με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των σταθμών των σωλήνων εκατέρωθεν αυτού (A & C), βλέπε πλάγια διακεκομμένη κόκκινη γραμμή που ενώνει τις στάθμες στους μανομετρικούς σωλήνες A & C, στο σκαρίφημα της Εικόνας 3.3:



Εικόνα 3.3

(δ) Για να υπολογίσουμε το απαιτούμενο ύψος, h' , ώστε να έχουμε παροχή Q' , εφαρμόζουμε πάλι το νόμο του Darcy και λύνουμε ως προς το άγνωστο ύψος, h' :

$$U' = \frac{Q'}{A} = K * \frac{\Delta H'}{\Delta L} = K * \frac{h' - (L_1 + L_2 + L_3)}{(L_1 + L_2)} \Rightarrow h' = \frac{Q'(L_1 + L_2)}{AK * } + (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\begin{aligned}
h' &= \frac{Q'(L_1 + L_2)}{AK^*} + (L_1 + L_2 + L_3) \\
&= 20,0 \times 10^3 \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} \times \frac{(30\text{cm} + 45\text{cm})}{\frac{3,14159 \times (40\text{cm})^2}{4} \times 1,364 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}} + (30\text{cm} + 45\text{cm} + 30\text{cm}) \\
&= 20,0 \times 10^3 \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} \times \frac{4 \times 75\text{cm}}{3,14159 \times (40\text{cm})^2 \times 1,364 \frac{\text{cm}}{\text{hr}}} + 110\text{cm} \\
&= 875,12\text{cm} + 110\text{cm} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$h' = 985,12\text{cm}$$

(3.5)

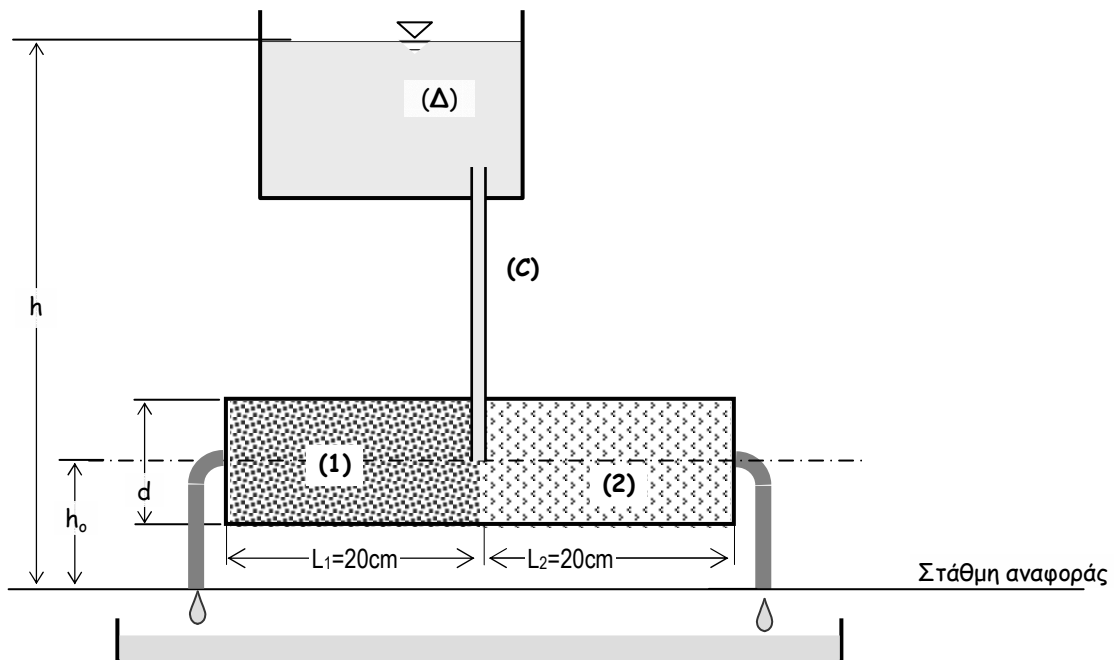
Άσκηση 4 – Ροή νερού σε κορεσμένες εδαφικές στήλες

Μια κυλινδρική εδαφική στήλη διαμέτρου $d=35\text{ cm}$ αποτελείται από δύο στρώσεις (1) & (2) με υδραυλικές αγωγιμότητες $K_1=2,7\text{cm/hr}$ και $K_2=1,3\text{cm/hr}$ και πάχη $L_1=L_2=20\text{cm}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σκαρίφημα. Ο οριζόντιος άξονας της στήλης ευρίσκεται τοποθετημένος σε ύψος $h_0=30\text{cm}$ από το επίπεδο αναφοράς σταθμών. Η στήλη τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή (Δ) που διατηρείται σε στάθμη $h=5\text{m}$. Στο δύο άκρα της στήλης προσαρμόζονται λεπτοί σωλήνες (Α) & (Β) από τους οποίους εκρέει νερό σε μηδενικό ύψος (στη στάθμη αναφοράς) και το οποίο συλλέγεται σε μια λεκάνη (Τ).

(α) Πόση είναι η παροχή Q_A & Q_B σε κάθε σωλήνα? Πόση είναι η παροχή, q_c , στο σωλήνα τροφοδοσίας της στήλης, C?

(β) Σε πόσο ύψος h , πρέπει να διατηρείται η στάθμη του νερού στο δοχείο (Δ), ώστε στη λεκάνη (Τ) να συλλέγεται νερό με ρυθμό $Q_T=43\text{ lt/hr}$?

Σημ. Η ροή του νερού σε όλους τους σωλήνες γίνεται χωρίς τριβές

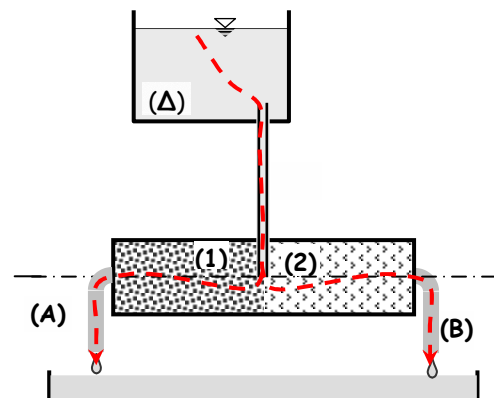


Εικόνα 4.1

Επίλυση

Είδος ροής: Διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα αφορά σε κορεσμένη ροή νερού σε πορώδες(η) μέσο(α).

Διαδρομή νερού στο π.μ.: Σχεδιάζουμε τη ροή του νερού στο π.μ. η οποία προκύπτει από τους άξονες των αντίστοιχων αγωγών της στήλης (βλέπε σκαρίφημα). Προκύπτει ότι έχουμε δύο διαδρομές νερού (επισημαίνονται με κόκκινες διακεκομμένες γραμμές) οι οποίες ξεκινάνε από την ίδια υψομετρική στάθμη και πίεση (ατμοσφαιρική) από την ελεύθερη στάθμη της δεξαμενής και καταλήγουν πάλι σε



ατμοσφαιρική πίεση και γνωστές υψομετρικές στάθμες (απολήξεις σωλήνων A & B).

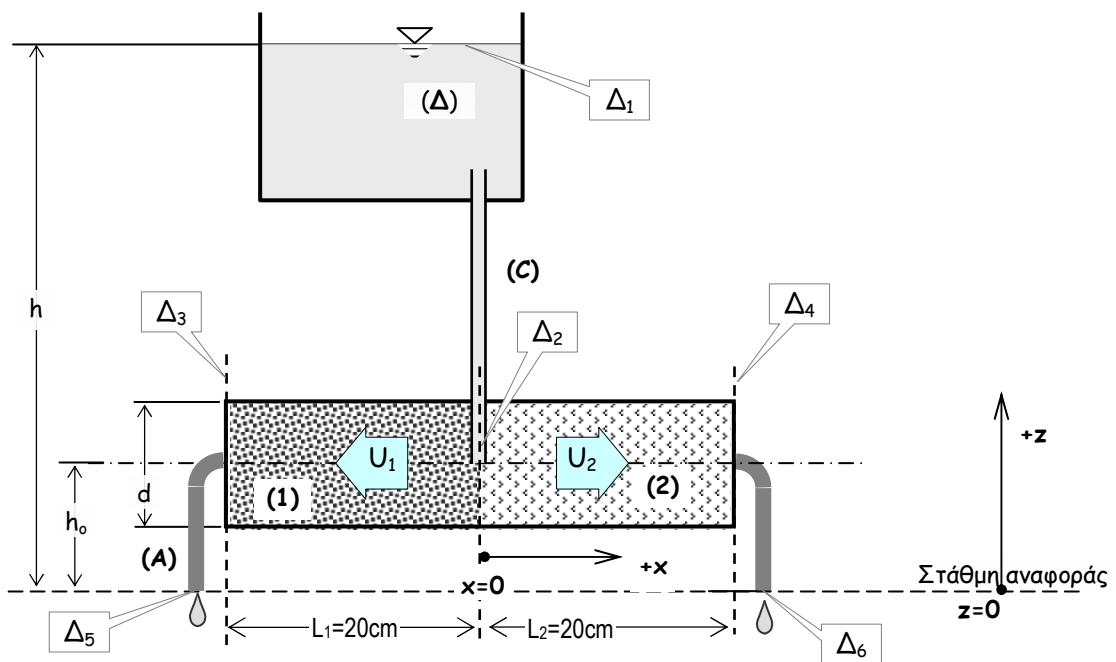
Διαπίστωση πλήθους στρώσεων π.μ. ανά διαδρομή: Σε κάθε μια διαδρομή το νερό περνά από μια μόνο στρώση.

Καθορισμός διατομών ενδιαφέροντος ανά διαδρομή νερού:

Από τη διατομή Δ_1 μέχρι τη διατομή Δ_2 έχουμε ροή νερού σε σωλήνα η οποία συγκριτικά με τη ροή του νερού στο π.μ. γίνεται χωρίς τριβές άρα σε αυτό το τμήμα της διαδρομής (Δ_1 - Δ_2) έχουμε υδροστατική κατανομή της πίεσης του νερού.

Από τη διατομή Δ_2 μέχρι τις διατομές Δ_3 & Δ_4 έχουμε κορεσμένη ροή νερού σε π.μ. με υδραυλικές αγωγιμότητες K_1 και K_2 αντίστοιχα.

Από τις διατομές Δ_3 & Δ_4 μέχρι τις Δ_5 & Δ_6 στις απολήξεις των σωλήνων A & B αντίστοιχα έχουμε και πάλι ροή νερού σε σωλήνα η οποία συγκριτικά με τη ροή του νερού στο π.μ. γίνεται χωρίς τριβές. Επίσης από το σχήμα βλέπουμε το ενδεικτικό της αιωρούμενης σταγόνας που σημαίνει ότι οι σωλήνες A & B έχουν μικρή διατομή και το νερό τους γεμίζει πλήρως άρα και σε αυτά τα τμήματα (Δ_3 - Δ_5 και Δ_4 - Δ_6) έχουμε υδροστατική κατανομή της πίεσης του νερού.



Εικόνα 4.2

Καταγραφή εξισώσεων και επίλυση τους:

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία ανάλυσης (σχεδιασμός συστημάτων αναφοράς/αξόνων, υπόθεση φοράς ταχυτήτων, καταγραφή εξισώσεων κλπ) ως ακολούθως:

Οι εξισώσεις θα καταγραφούν και θα επιλυθούν χωριστά για κάθε διαδρομή

Για την (αριστερή) διαδρομή στο π.μ. (1)

$$-U_1 = -\frac{Q_A}{A} = -K_1 \frac{H_2 - H_3}{x_2 - x_3} \Rightarrow U_1 = K_1 \frac{(z_2 + y_2) - (z_3 + y_3)}{x_2 - x_3} \quad (4.1)$$

Για τις διατομές Δ2 & Δ3 ισχύει

$$\begin{aligned} \text{Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς} & \quad z_2 = z_3 = h_0, \\ \text{Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού} & \quad y_2 = h - h_0, \quad y_3 = -h_0 \\ \text{Μήκη πορώδους μέσου} & \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -L_1 \end{aligned}$$

Οπότε η εξίσωση Darcy για τη ροή στο π.μ. (1) γίνεται:

$$U_1 = K_1 \frac{[h_0 + (h - h_0)] - [h_0 + (-h_0)]}{0 - (-L_1)} = K_1 \frac{h}{L_1} \Rightarrow U_1 = 2,7 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{500\text{cm}}{20\text{cm}} = 67,5 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \quad (4.2)$$

Αντίστοιχα, για τη (δεξιά) διαδρομή στο π.μ. (2) έχουμε

$$U_2 = \frac{Q_B}{A} = -K_2 \frac{H_2 - H_4}{x_2 - x_4} \Rightarrow U_2 = -K_2 \frac{(z_2 + y_2) - (z_4 + y_4)}{x_2 - x_4} \quad (4.3)$$

Για τις διατομές Δ2 & Δ4 ισχύει

$$\begin{aligned} \text{Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς} & \quad z_2 = z_4 = h_0, \\ \text{Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού} & \quad y_2 = h - h_0, \quad y_4 = -h_0 \\ \text{Μήκη πορώδους μέσου} & \quad x_2 = 0, \quad x_4 = L_2 \end{aligned}$$

$$U_2 = -K_2 \frac{[h_0 + (h - h_0)] - [h_0 + (-h_0)]}{0 - L_2} = K_2 \frac{h}{L_2} \Rightarrow U_2 = 1,3 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{500\text{cm}}{20\text{cm}} = 32,5 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \quad (4.4)$$

Έτσι προκύπτουν οι τιμές των παροχών σε κάθε διαδρομή, q_A & q_B .

$$\begin{aligned} Q_A = U_1 A = U_1 \pi d^2 / 4 & \Rightarrow Q_A = 67,5 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{\pi \times (35\text{cm})^2}{4} \Rightarrow Q_A = 64942,6 \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} = 64,942 \frac{\text{lt}}{\text{hr}} \\ Q_B = U_2 A = U_2 \pi d^2 / 4 & \Rightarrow Q_B = 32,5 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \times \frac{\pi \times (35\text{cm})^2}{4} \Rightarrow Q_B = 31268,7 \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} = 31,269 \frac{\text{lt}}{\text{hr}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(α) Η παροχή στο σωλήνα C θα είναι το άθροισμα των δύο παροχών (προκύπτει από ένα ισοζύγιο παροχής όγκου σε όγκο ελέγχου που περικλείει τους σωλήνες C A & B):

$$\sum_{i=A,B,C} \pm Q_i = 0 \Rightarrow Q_A + Q_B - Q_C = 0 \Rightarrow Q_C = Q_A + Q_B \Rightarrow Q_C = Q_A + Q_B = 96,211 \frac{\text{lt}}{\text{hr}} \quad (4.6)$$

(β) Στη λεκάνη συλλέγεται όλο το νερό που περνά από το σωλήνα (C), επομένως θα ισχύει ότι $Q_T = Q_C = Q_A + Q_B$, το οποίο δίνει

$$Q_T = Q_C = Q_A + Q_B = U_1 \frac{\pi d^2}{4} + U_2 \frac{\pi d^2}{4} = \left(K_1 \frac{h}{L_1} + K_2 \frac{h}{L_2} \right) \frac{\pi d^2}{4} = h \left(\frac{K_1}{L_1} + \frac{K_2}{L_2} \right) \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow$$

$$h = \frac{4Q_T}{\pi d^2 \left(\frac{K_1}{L_1} + \frac{K_2}{L_2} \right)} \quad (4.7)$$

Με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει ότι για να έχουμε παροχή $Q_T=431\text{t/hr}$

$$h = \frac{4 \times 43000(\text{cm}^3 / \text{hr})}{\pi \times (35\text{cm})^2 \left(\frac{2,7\text{cm/hr}}{20\text{cm}} + \frac{1,3\text{cm/hr}}{20\text{cm}} \right)} = \frac{4 \times 43000(\text{cm}^3 / \text{hr}) \times 20\text{cm}}{(2,7\text{cm/hr} + 1,3\text{cm/hr}) \times \pi \times (35\text{cm})^2} \quad (4.8)$$

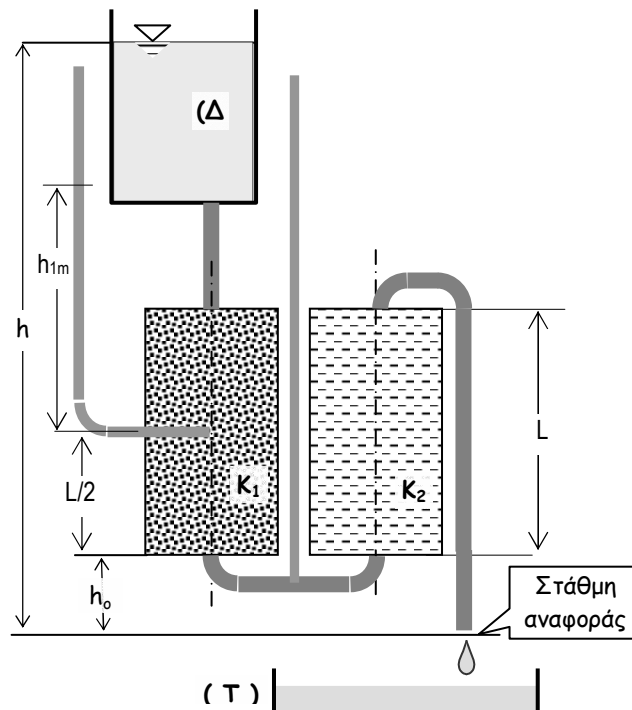
$$= 223,47\text{cm} = 2,235\text{m}$$



Άσκηση 5 – Ροή νερού σε κορεσμένες εδαφικές στήλες

Στη διάταξη που φαίνεται στο διπλανό σκαρίφημα οι δύο κυλινδρικές στήλες (1) & (2) έχουν την ίδια διάμετρο $d=35\text{cm}$ και το ίδιο μήκος $L=70\text{cm}$. Οι υδραυλικές τους αγωγιμότητες είναι $K_1=2,3\text{cm/hr}$ και $K_2=1,5\text{cm/hr}$ αντίστοιχα. Οι δύο στήλες τροφοδοτούνται από δεξαμενή (Δ) της οποίας η ελεύθερη στάθμη διατηρείται σε ύψος $h=235\text{cm}$. Και οι δύο στήλες ευρίσκονται τοποθετημένοι σε ύψος $h_0=35\text{cm}$ από τη στάθμη αναφοράς.

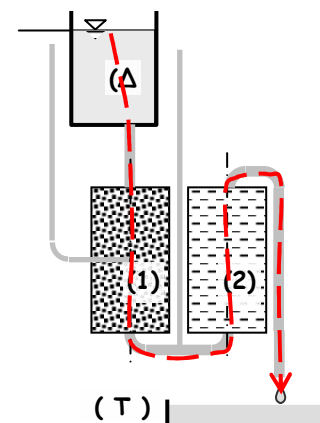
- (α) Να ευρεθεί η παροχή με την οποία θα συλλέγεται νερό στη λεκάνη (Τ).
- (β) Πόση θα είναι η παροχή Q_1 & Q_2 σε κάθε στήλη?
- (γ) Τι τιμές έχουν τα ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού στην **έξοδο** της στήλης (1) και στην **είσοδο** της στήλης (2);
- (δ) Πόσο είναι το ισοδύναμο μανομετρικό ύψος του νερού, h_{1m} , στο μέσο της στήλης (1);
- (ε) Σε πόσο ύψος h , πρέπει να διατηρείται η στάθμη του νερού στο δοχείο (Δ), ώστε στη λεκάνη (Τ) να συλλέγεται νερό με ρυθμό $Q_T=63\text{ lt/hr}$?



Επίλυση

Είδος ροής: Διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα αφορά σε κορεσμένη ροή νερού σε πορώδες(η) μέσο(α).

Διαδρομή νερού στο π.μ.: Σχεδιάζουμε τη ροή του νερού στο π.μ. η οποία προκύπτει από τους άξονες των αντίστοιχων αγωγών της στήλης (βλέπε σκαρίφημα). Προκύπτει ότι έχουμε μία διαδρομή νερού (επισημαίνεται με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) η οποία ξεκινά από την ελεύθερη στάθμη της δεξαμενής (Δ) σε ατμοσφαιρική πίεση και καταλήγει πάλι σε ατμοσφαιρική πίεση και γνωστή υψομετρική στάθμη (απόληξη σωλήνα εξόδου).



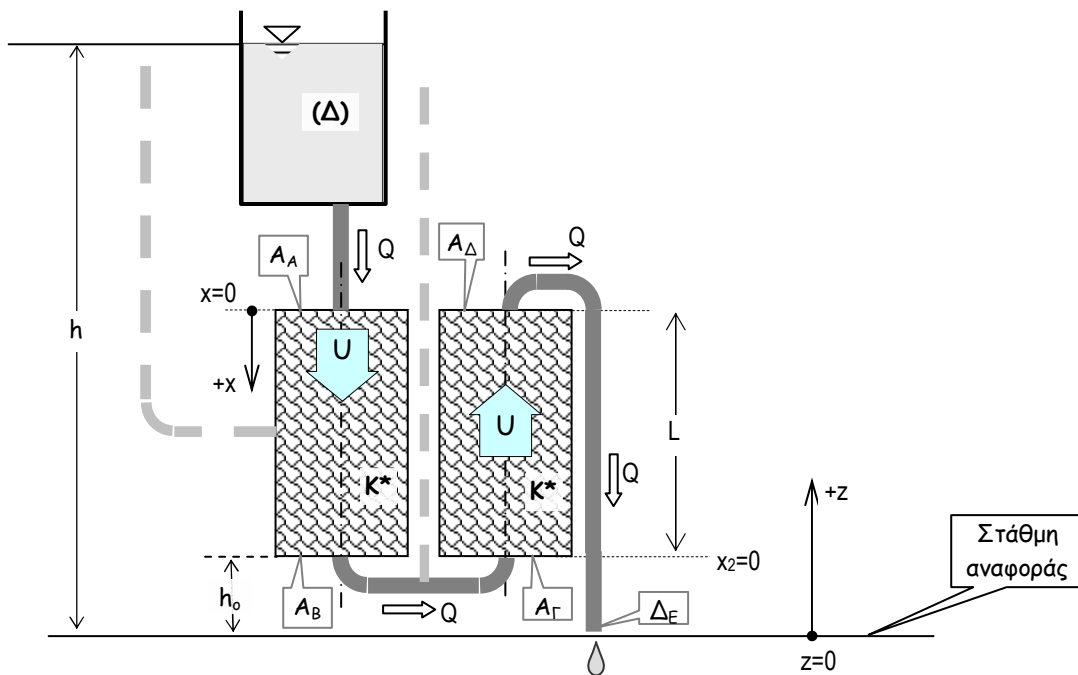
Διαπίστωση πλήθους στρώσεων π.μ. ανά διαδρομή: Υπάρχει μια μόνο διαδρομή νερού η οποία διαπερνά όλες (και τις 2) στήλες εν σειρά. Σε κάθε στήλη η παροχή είναι ίδια, και αφού και οι διατομές είναι ίδιες θα είναι ίδιες και οι ταχύτητες

$$Q_1 = Q_2 = Q \Rightarrow U_1 A_1 = U_2 A_2 \Rightarrow U_1 \frac{\pi d^2}{4} = U_2 \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow U_1 = U_2 = U.$$

Μπορούμε έτσι να αντικαταστήσουμε τις δύο στήλες με μια ενιαία με συνολικό μήκος ίσο με το άθροισμα των άλλων δύο και με ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα που θα προκύψει από την εφαρμογή του αντίστοιχου τύπου για ροή κάθετα στις στρώσεις. Σύμφωνα με αυτόν τον τύπο η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα του ενιαίου π.μ. K^* είναι

$$K^* = \frac{\sum_{i=1}^N L_i}{\sum_{i=1}^N \frac{L_i}{K_i}} \Rightarrow K^* = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2}} \stackrel{L_1=L_2}{\Rightarrow} K^* = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

και η ίδια ταχύτητα και στις δύο στήλες θα δίνεται από το νόμο του Darcy εκπεφρασμένο για τις διατομές εισόδου A_A και εξόδου A_Δ .



$$U = \frac{Q}{A} = -K^* \frac{H_\Delta - H_A}{x_\Delta - x_A} \Rightarrow U = -K^* \frac{(z_\Delta + y_\Delta) - (z_A + y_A)}{x_\Delta - x_A}$$

Για τις διατομές A_A & A_Δ ισχύει

Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς $z_A = z_\Delta = h_0 + L$

Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού $y_A = h - (h_0 + L)$, $y_\Delta = -(h_0 + L)$

Μήκη πορώδους μέσου $x_A = 0$, $x_\Delta = 2L$

Οπότε η εξίσωση Darcy για τη ροή στο ισοδύναμο π.μ. (με K^*) γίνεται:

$$U = -K * \frac{(h_0 + L - h_0 - L) - [h_0 + L + (h - h_0 - L)]}{2L} = K * \frac{h}{2L} \Rightarrow U = K * \frac{h}{2L}$$

Επομένως

$$Q = UA = K * \frac{h}{2L} A \Rightarrow Q = K * \frac{h}{2L} \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L} \frac{\pi d^2}{4}}$$

Με την προηγούμενη ανάλυση επαναλαμβάνουμε συγκεντρωτικά όσες από τις απαντήσεις βρήκαμε για τα ερωτήματα

(α) και (β)

Η παροχή με την οποία θα συλλέγεται νερό στη λεκάνη (T) αλλά και η παροχή Q_1 & Q_2 σε κάθε στήλη.

$$\boxed{Q_T = Q_1 = Q_2 = Q = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L} \frac{\pi d^2}{4}}$$

(ε) Το ύψος h , στο οποίο πρέπει να διατηρείται η στάθμη του νερού στο δοχείο (Δ), ώστε στη λεκάνη (T) να συλλέγεται νερό με ρυθμό $Q_T=63$ lt/hr δίνεται από την

$$Q_T = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L} \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{4Q_T}{\pi d^2} \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} L}$$

Για τα ερωτήματα

(γ) Τι τιμές έχουν τα ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού στην **έξοδο** της στήλης (1) και στην **είσοδο** της στήλης (2); και

(δ) Πόσο είναι το ισοδύναμο μανομετρικό ύψος του νερού, h_{1m} , στο μέσο της στήλης (1);

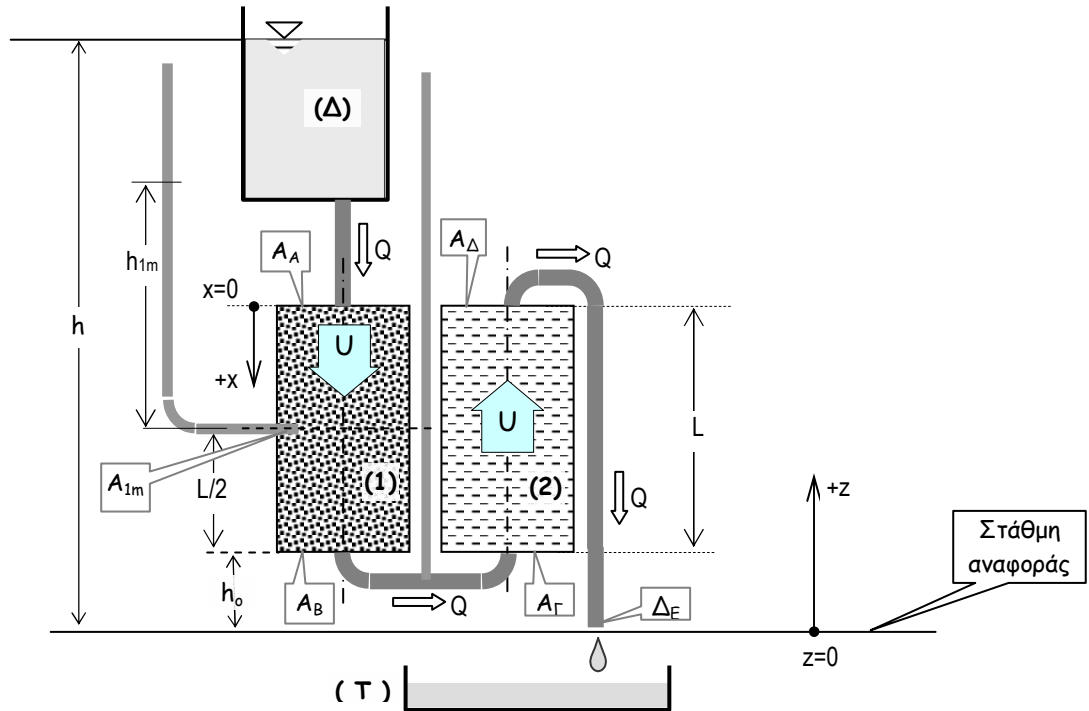
θα πρέπει να κάνουμε ξεχωριστά την ανάλυση για κάθε στήλη.

Καθορισμός διατομών ενδιαφέροντος στη διαδρομή του νερού:

Από την ελεύθερη στάθμη της δεξαμενής μέχρι τη διατομή A_A αλλά και από τη A_B στη A_Γ έχουμε ροή νερού σε σωλήνα η οποία συγκριτικά με τη ροή του νερού στο π.μ. γίνεται χωρίς τριβές άρα σε αυτό το τμήμα της διαδρομής έχουμε υδροστατική κατανομή της πίεσης του νερού.

Από τη διατομή Δ_A μέχρι τη διατομή A_B και από τη A_Γ μέχρι τη A_Δ έχουμε κορεσμένη ροή νερού σε π.μ. με υδραυλικές αγωγιμότητες K_1 και K_2 αντίστοιχα.

Από τη διατομή Δ_Δ μέχρι τη Δ_E στην απόληξη του σωλήνα εξόδου από τη στήλη (2) έχουμε και πάλι ροή νερού σε σωλήνα η οποία συγκριτικά με τη ροή του νερού στο π.μ. γίνεται χωρίς τριβές. Επίσης από το σχήμα βλέπουμε το ενδεικτικό της αιωρούμενης σταγόνας που σημαίνει ότι ο σωλήνας εκροής της στήλης (2) έχει μικρή διατομή και το νερό τον γεμίζει πλήρως άρα και σε αυτό το τμήμα ($A_\Delta A_E$) έχουμε υδροστατική κατανομή της πίεσης του νερού.



Καταγραφή εξισώσεων και επίλυση τους:

Σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία ανάλυσης (σχεδιασμός συστημάτων αναφοράς/αξόνων, υπόθεση φοράς ταχυτήτων, καταγραφή εξισώσεων κλπ) ως ακολούθως:

Για τη στήλη (1) έχουμε:

$$U_1 = U = \frac{Q}{A} = -K_1 \frac{H_B - H_A}{x_{1B} - x_{1A}} \Rightarrow U = -K_1 \frac{(z_B + y_B) - (z_A + y_A)}{x_B - x_A}$$

Για τις διατομές A_A & A_B ισχύει

Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς

$$z_B = h_0, \quad z_A = h_0 + L$$

Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού

$$y_A = h - (h_0 + L), \quad y_B = ?? \text{ (άγνωστο)}$$

Μήκη πορώδους μέσου

$$x_A = 0, \quad x_B = L$$

Οπότε η εξίσωση Darcy για τη ροή στο π.μ. (1) γίνεται:

$$U = -K_1 \frac{(h_0 + y_B) - [h_0 + L + (h - h_0 - L)]}{L - 0} = -K_1 \frac{h_0 + y_B - h}{L} = K_1 \frac{h - h_0 - y_B}{L} \Rightarrow$$

$$y_B = h - h_0 - \frac{U}{K_1} L = h - h_0 - \frac{4Q}{\pi d^2 K_1} L$$

Για την εύρεση του $y_{1m} = h_{1m}$ θα γράψουμε την εξίσωση Darcy για τη στήλη (1) μεταξύ των διατομών A_A και A_{1m} .

$$U_1 = U = \frac{Q}{A} = -K_1 \frac{H_{1m} - H_A}{x_{1m} - x_{1A}} \Rightarrow U = -K_1 \frac{(z_{1m} + y_{1m}) - (z_A + y_A)}{x_{1m} - x_{1A}}$$

Για τις διατομές A_A & A_{1m} ισχύει

Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς

$$z_A = h_0 + L, \quad z_{1m} = h_0 + L/2$$

Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού

$$y_A = h - (h_0 + L), \quad y_{1m} = ?? \text{ (άγνωστο)}$$

Μήκη πορώδους μέσου

$$x_A = 0, \quad x_{1m} = L/2$$

Οπότε η εξίσωση Darcy για τη ροή στο π.μ. (1) γίνεται:

$$U = \frac{Q}{A} = -K_1 \frac{\left(h_0 + \frac{L}{2} + y_{1m} \right) - \left[h_0 + L + (h - h_0 - L) \right]}{\frac{L}{2} - 0} = K_1 \frac{h - \left(h_0 + \frac{L}{2} + y_{1m} \right)}{\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K_1} \frac{L}{2} = h - h_0 - \frac{L}{2} - y_{1m} \quad \stackrel{U = K^* \frac{h}{2L}}{\Rightarrow}$$

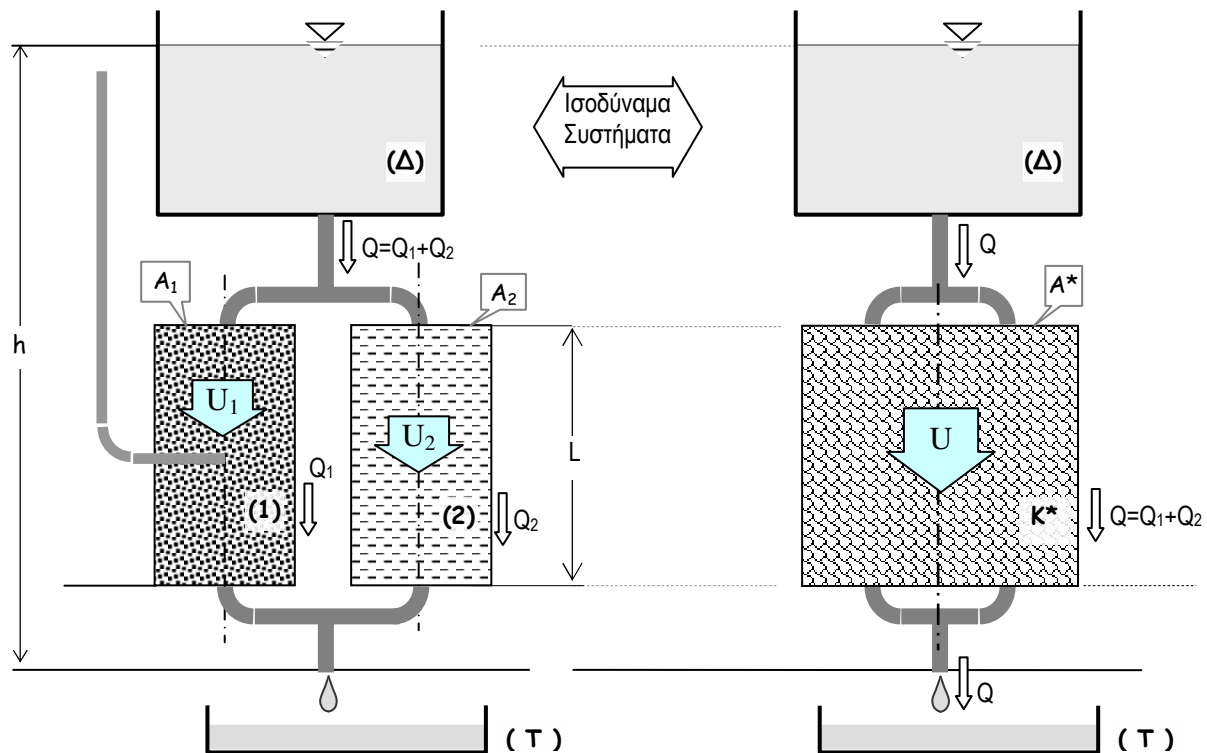
$$y_{1m} = h - h_0 - \frac{L}{2} - \frac{K^* h}{K_1 4}$$

Διαπίστωση πλήθους στρώσεων π.μ. ανά διαδρομή: Υπάρχει δύο διαδρομές νερού που η κάθε μια διαπερνά μια στήλη από τις 2 εν παραλλήλω στήλες. Σε κάθε στήλη η παροχή είναι διαφορετική, αλλά οι διαφορές πίεσης στα άκρα των δύο στηλών είναι ίδιες. Έτσι, θα ισχύει:

$$U_1 = \frac{Q_1}{A} = -K_1 \frac{\Delta H}{\Delta x} = K_1 \frac{h}{L} \Rightarrow Q_1 = AK_1 \frac{h}{L}$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{A} = -K_2 \frac{\Delta H}{\Delta x} = K_2 \frac{h}{L} \Rightarrow Q_2 = AK_2 \frac{h}{L}$$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = A(K_1 + K_2) \frac{h}{L}$$



Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις δύο στήλες με μια ισοδύναμη, η οποία θα έχει συνολικό μήκος ίσο με το κοινό μήκος των άλλων δύο και για την οποία θα πρέπει να ισχύει:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = A^* K^* \frac{h}{L}$$

όπου A^* και K^* η διατομή και η υδραυλική αγωγιμότητα της ισοδύναμης στήλης.

Εάν επιλέξουμε η διατομή της ισοδύναμης στήλης να είναι ίση με το άθροισμα των διατομών των άλλων δύο στηλών, τότε η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα θα προκύψει από την προηγούμενη έκφραση για $A^* = A_1 + A_2$ ως εξής

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = (A_1 + A_2) K^* \frac{h}{L} \Rightarrow A(K_1 + K_2) \frac{h}{L} = (A_1 + A_2) K^* \frac{h}{L} \Rightarrow$$

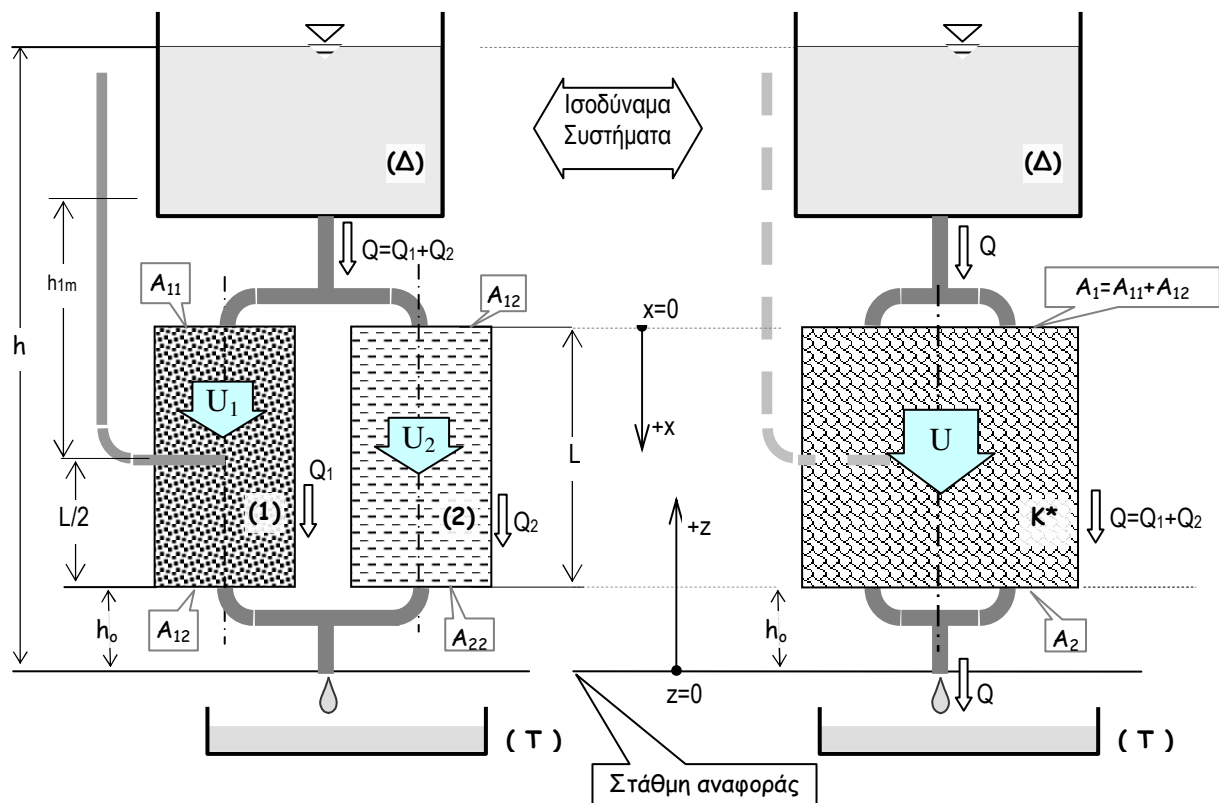
$$\Rightarrow K^* = \frac{A(K_1 + K_2)}{(A_1 + A_2)} = \frac{A(K_1 + K_2)}{2A} \Rightarrow K^* = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

Εναλλακτικά, αν επιλέξουμε η διατομή της ισοδύναμης στήλης να είναι ίδια με τη διατομή των άλλων δύο στηλών, τότε η ισοδύναμη υδραυλική αγωγιμότητα θα προκύψει από την προηγούμενη έκφραση για $A^*=A_1=A_2=A$ ως εξής

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = AK^* \frac{h}{L} \Rightarrow A(K_1 + K_2) \frac{h}{L} = AK^* \frac{h}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K^* = \frac{A(K_1 + K_2)}{A} \Rightarrow K^* = K_1 + K_2$$

Θα συνεχίσουμε την επίλυση της άσκησης επιλέγοντας την πρώτη περίπτωση (επιλέξουμε η διατομή της ισοδύναμης στήλης να είναι ίση με το άθροισμα των διατομών των άλλων δύο στηλών), $A^*=A_1+A_2$.



Στο ισοδύναμο σύστημα π.μ.

$$U = \frac{Q}{A} = -K'' \frac{H_I - H_{II}}{x_I - x_{II}} \Rightarrow U = -K'' \frac{(z_I + y_I) - (z_{II} + y_{II})}{x_I - x_{II}}$$

Για τις διατομές A_I & A_{II} ισχύει

Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς $z_I = h_0 + L, z_{II} = h_0$

Ισοδύναμο μανομετρικά ύψος νερού $y_I = h - (h_0 + L), y_{II} = -h_0$

Μήκη πορώδους μέσου $x_I = 0, x_{II} = L$

Οπότε η εξίσωση Darcy για τη ροή στο ισοδύναμο π.μ. (με K'') γίνεται:

$$U = -K'' \frac{(h_0 + L + h - h_0 - L) - [h_0 - h_0]}{0 - L} = K'' \frac{h}{L}$$

Επομένως

$$Q_T = UA = K'' \frac{h}{L} A = K'' \frac{h}{L} \left(\frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d^2}{4} \right) \Rightarrow \boxed{Q_T = \frac{1}{4} \frac{h}{L} (K_1 + K_2) \pi d^2}$$

Με την προηγούμενη ανάλυση επαναλαμβάνουμε συγκεντρωτικά όσες από τις απαντήσεις βρήκαμε για τα ερωτήματα

(α) Η παροχή, Q_T , με την οποία θα συλλέγεται νερό στη λεκάνη (Τ).

$$\boxed{Q_T = \frac{1}{4} \frac{h}{L} (K_1 + K_2) \pi d^2}$$

(γ) Οι τιμές έχουν τα ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού στις εισόδους των στηλών (1) & (2)

$$y_{11}=y_{21}=A y_1=h-(h_0+L) \quad \text{και} \quad y_{12}=y_{22}=y_{II}=-h_0$$

(ε) Για να συλλέγεται νερό στη λεκάνη (Τ) με ρυθμό $Q_T = 53 \text{ lt/hr}$, η στάθμη του νερού στο δοχείο (Δ), πρέπει να διατηρείται σε ύψος h

$$Q_T = \frac{1}{4} \frac{h}{L} (K_1 + K_2) \pi d^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{4Q_T L}{(K_1 + K_2) \pi d^2}}$$

(β) Η παροχή Q_1 & Q_2 σε κάθε στήλη θα προκύψει από εφαρμογή του νόμου του Darcy για κάθε στήλη στο κανονικό σύστημα

Για τις ταχύτητες σε κάθε στήλη έχουμε:

$$U_1 = \frac{Q_1}{A} = -K_1 \frac{H_{11} - H_{12}}{x_{11} - x_{12}} \Rightarrow U_1 = -K_1 \frac{(z_{11} + y_{11}) - (z_{12} + y_{12})}{x_{11} - x_{12}}$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{A} = -K_2 \frac{H_{21} - H_{22}}{x_{21} - x_{22}} \Rightarrow U_2 = -K_2 \frac{(z_{21} + y_{21}) - (z_{22} + y_{22})}{x_{21} - x_{22}}$$

Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς

$$z_{11}=z_{21}=z_I=h_0+L, \quad z_{12}=z_{22}=z_{II}=h_0$$

Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού

$$y_{11}=y_{21}=y_I=h-(h_0+L), \quad y_{12}=y_{22}=y_{II}=-h_0$$

Μήκη πορώδους μέσου

$$x_{11}=x_{22}=x_I=0, \quad x_{12}=x_{22}=x_{II}=L$$

Οπότε οι ταχύτητες στις δύο στήλες υπολογίζονται (πανεύκολα (αφού έχουν την ίδια υδραυλική κλίση με τη στήλη του ισοδύναμου συστήματος)

$$U_1 = -K_1 \frac{(h_0 + L + h - h_0 - L) - [h_0 - h_0]}{0 - L} = K_1 \frac{h}{L} \quad \text{και ομοίως} \quad U_2 = K_2 \frac{h}{L}$$

Άρα

$$Q_1 = U_1 A = K_1 \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{και} \quad Q_2 = U_2 A = K_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

(δ) Για την εύρεση του $y_{1m}=h_{1m}$ θα γράψουμε την εξίσωση Darcy για τη στήλη (1) μεταξύ των διατομών A_{11} και A_{1m} .

$$U_1 = \frac{Q_1}{A} = -K_1 \frac{H_{1m} - H_{11}}{x_{1m} - x_{11}} \Rightarrow U_1 = -K_1 \frac{(z_{1m} + y_{1m}) - (z_{11} + y_{11})}{x_{1m} - x_{11}}$$

Για τις διατομές A_{11} & A_{1m} ισχύει

Υψόμετρα από τη στάθμη αναφοράς $z_{11}=h_0+L$, $z_{1m}=h_0+L/2$

Ισοδύναμα μανομετρικά ύψη νερού $y_{11}=h-(h_0+L)$, $y_{1m}=??$ (άγνωστο)

Μήκη πορώδους μέσου $x_{11}=0$, $x_{1m}=L/2$

Οπότε η εξίσωση Darcy για τη ροή στο π.μ. (1) γίνεται:

$$U_1 = \frac{Q_1}{A} = -K_1 \frac{\left(h_0 + \frac{L}{2} + y_{1m}\right) - [h_0 + L + (h - h_0 - L)]}{\frac{L}{2} - 0} = K_1 \frac{h - \left(h_0 + \frac{L}{2} + y_{1m}\right)}{\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{U_1}{K_1} \frac{L}{2} = h - h_0 - \frac{L}{2} - y_{1m} \quad \overset{U_1=K_1 \frac{h}{L}}{\Rightarrow} \quad \boxed{y_{1m} = h - h_0 - \frac{L}{2} - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} - h_0 - \frac{L}{2}}$$

Άσκηση 7 – Ροή νερού σε συστήματα κορεσμένων εδαφικών στηλών

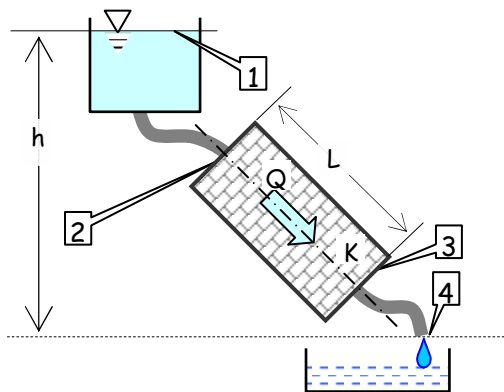
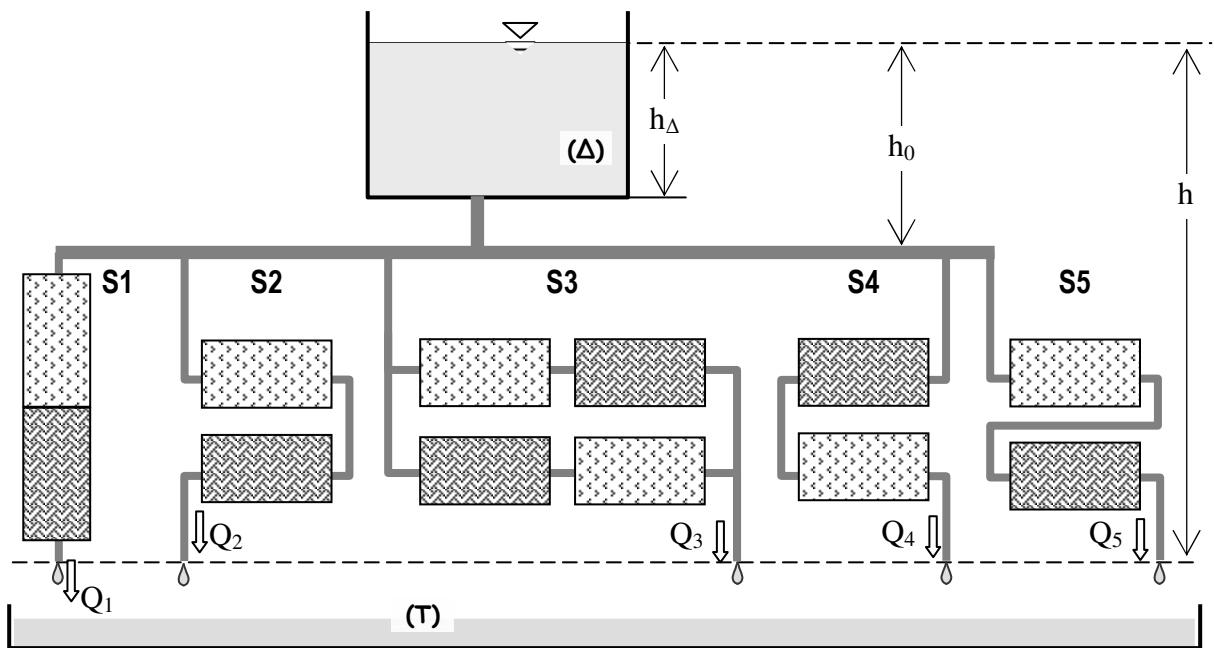
Ένα σύστημα από στήλες πορώδους μέσου αποτελείται από πέντε υποσυστήματα (S1-S5) και τροφοδοτείται από μια ανοικτή δεξαμενή με νερό, (Δ). Όλες οι στήλες είναι κυλινδρικές με διάμετρο $D=[20+(N/2)]\text{cm}$ και μήκος $L=[40+(N/2)]\text{cm}$, και γεμίζουν με δύο διαφορετικά πορώδη μέσα. Η υδραυλική αγωγιμότητα του ενός πορώδους μέσου είναι $K_1=2,7\text{cm/hr}$ και του άλλου $K_2=1,3\text{cm/hr}$. Δίνονται επίσης τα ύψη $h=[2,5+(N/10)]\text{m}$, $h_0=h/3$ και $h_\Delta=40\text{cm}$.

(α) Να προσδιορίσετε τη συνολική παροχή, Q_T , που συλλέγεται στη λεκάνη (15 μον.)

(β) Για κάθε υποσύστημα (S1-S5) να προσδιορίσετε την αντίστοιχη παροχή (Q_1-Q_5) (5 μον./υποσύστημα)

(γ) Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του νερού σε κάθε στήλη (3 μον./στήλη)

Σημ. Η ροή του νερού σε όλους τους σωλήνες γίνεται χωρίς τριβές



ΒΟΗΘΗΤΙΚΟ ΔΕΔΟΜΕΝΟ (βλέπε και Άσκηση 1.γ): Για οποιαδήποτε κυλινδρική στήλη διατομής A και μήκους L , με πορώδες μέσο υδραυλικής αγωγιμότητας K , η οποία φορτίζεται από μια ανοικτή δεξαμενή (1-2) και από ένα σωλήνα εκροής (3-4) όπως στο σκαρίφημα, η μέση ταχύτητα και η παροχή δίνονται από τη γενική έκφραση

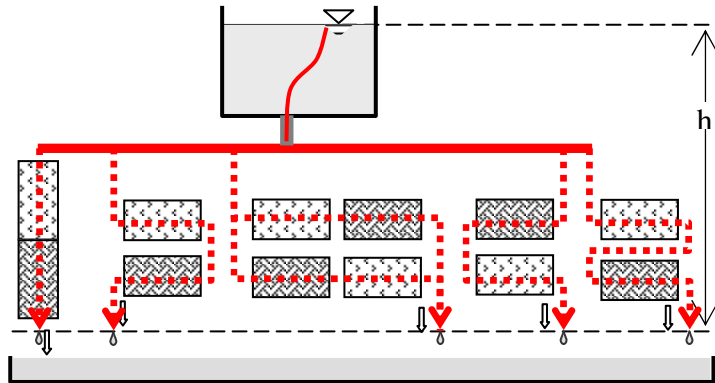
$$U = \frac{Q}{A} = K \frac{h}{L}$$

Σημ. Η ροή του νερού σε όλους τους σωλήνες γίνεται χωρίς τριβές

Επίλυση

Καταρχάς σχεδιάζουμε και παρατηρούμε τη ροή του νερού σε κάθε υποσύστημα.

Σκαρίφημα 0 →



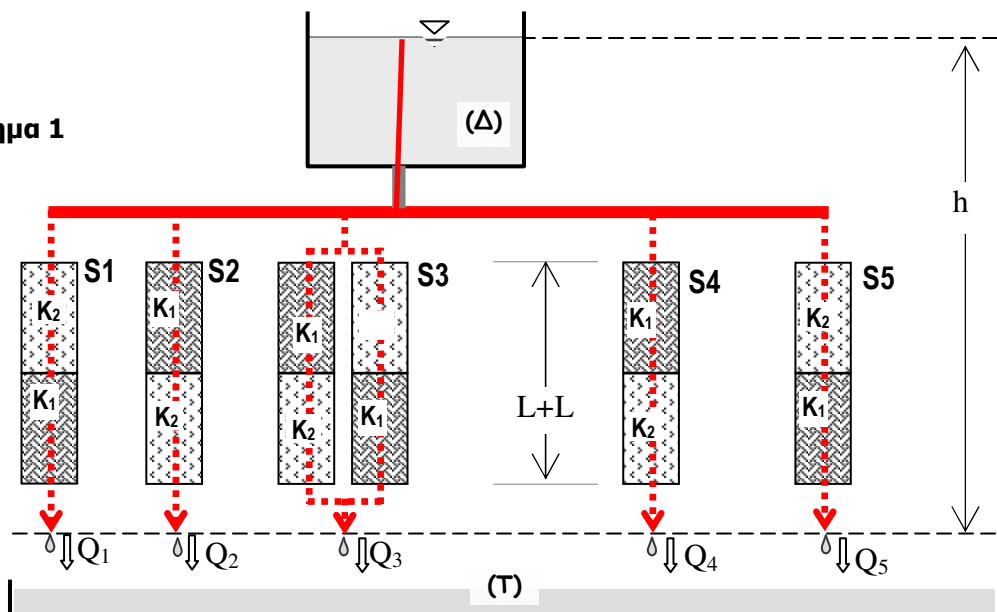
Λαμβάνουμε υπόψη ότι:

(α) οι σωλήνες δεν παρουσιάζουν καμία αντίσταση στη ροή του νερού (όλες οι αντιστάσεις είναι στη ροή του νερού μέσα στη στήλη)

(β) με βάση το θεωρητικό δεδομένο, ο πρινατολισμός της στήλης δεν παίζει ρόλο στην παροχή μέσα από αυτή – μόνο το μανομετρικό φορτίο στα άκρα της δηλαδή η διαφορά των μανομετρικών υψών στις διατομές εισόδου και εξόδου του νερού στην και από τη στήλη, h .

Έτσι το σύστημα μπορεί να ξανασχεδιασθεί ως ακολούθως:

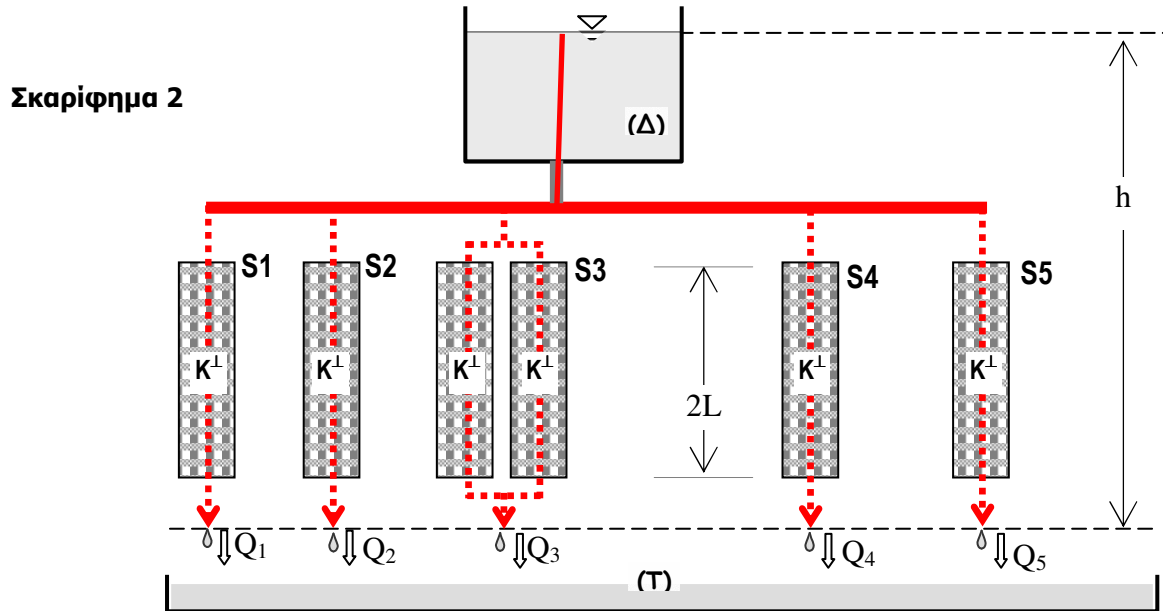
Σκαρίφημα 1



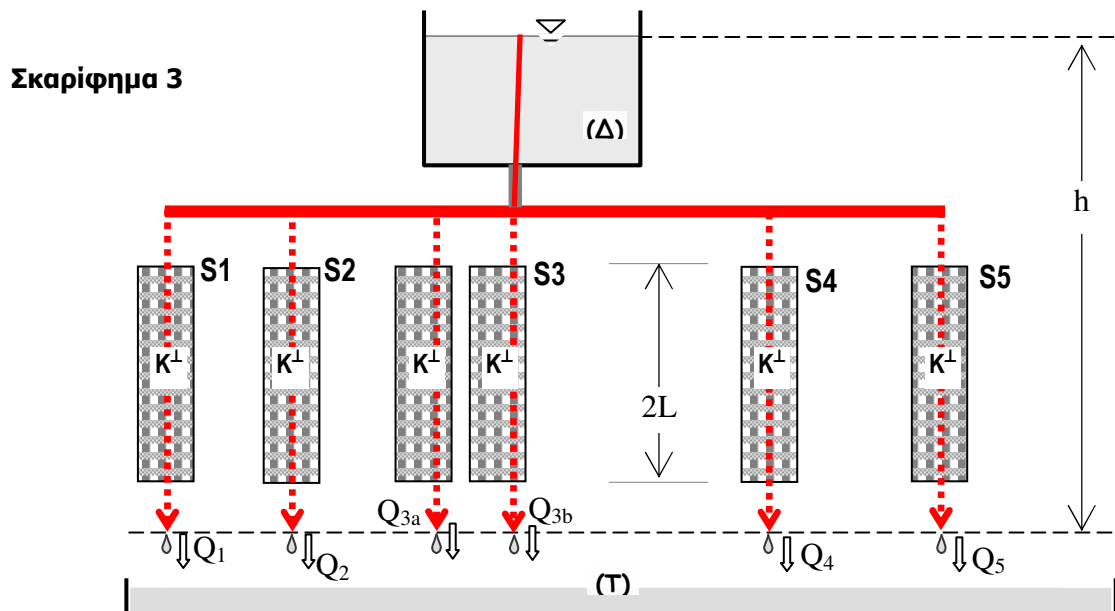
Τα **υποσυστήματα 1, 2, 4 & 5** αποτελούν **2 στήλες** (με ίδια γεωμετρία αλλά διαφορετικές υδραυλικές **αγωγιμότητες**) **συνδεδεμένες εν σειρά** (δηλαδή η ροή κάθε του νερού σε κάθε υποσύστημα διαπερνά τις στήλες/στρώσεις κάθετα) άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε υποσύστημα με μια νέα στήλη ισοδύναμης υδρ/κής αγωγιμότητας

$$K^{\leftrightarrow} = \frac{\sum_{i=1}^2 L_i}{\sum_{i=1}^2 \frac{L_i}{K_i}} = \frac{L_1 + L_2}{\frac{L_1}{K_1} + \frac{L_2}{K_2}} = \frac{L + L}{\frac{L}{K_1} + \frac{L}{K_2}} = \frac{2L}{L \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}} = 2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

Έτσι το σύστημα μπορεί να ξανσοχεδιασθεί ισοδύναμα ως



Επίσης, επειδή το υποσύστημα S3 αποτελείται από δύο ίδιες παράλληλες στήλες, όλο το σύστημα επανασχεδιάζεται ισοδύναμα ως ακολούθως (!) .



Με βάση την παραπάνω ανάλυση μπορούμε πλέον να δώσουμε συγκεντρωτικά τις απαντήσεις στα ερωτήματα (α)-(γ)

(α) Η συνολική παροχή, Q_T , που συλλέγεται στη λεκάνη προκύπτει

$$\begin{aligned} Q_T &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = Q_1 + Q_2 + (Q_{3a} + Q_{3b}) + Q_4 + Q_5 = \\ &= \left(AK^\perp \frac{h}{2L} \right)_1 + \left(AK^\perp \frac{h}{2L} \right)_2 + \left(AK^\perp \frac{h}{2L} + AK^\perp \frac{h}{2L} \right)_3 + \left(AK^\perp \frac{h}{2L} \right)_4 + \left(AK^\perp \frac{h}{2L} \right)_5 = \\ &= 6AK^\perp \frac{h}{2L} = 3AK^\perp \frac{h}{L} = 3A \left(2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{h}{L} = 6A \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L} \end{aligned}$$

(β) Η παροχή κάθε υποσυστήματος (S1-S5) δίνεται από τις εκφράσεις

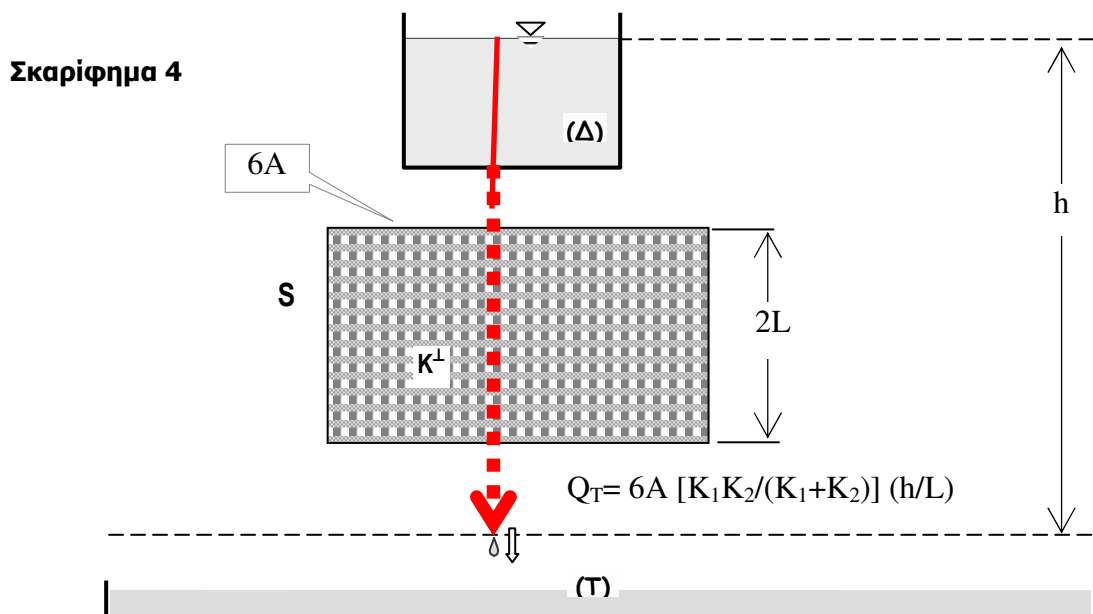
$$Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_5 = AK^\perp \frac{h}{2L} = A \left(2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{h}{2L} = A \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L}$$

$$Q_3 = (Q_{3a} + Q_{3b}) = \left(AK^\perp \frac{h}{2L} + AK^\perp \frac{h}{2L} \right)_3 = AK^\perp \frac{h}{L} = A \left(2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{h}{L} = 2A \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L}$$

(γ) Η ταχύτητα του νερού σε κάθε στήλη κάθε υποσυστήματος δίνεται από τις εκφράσεις

$$U_1 = U_2 = U_{3a} = U_{3b} = U_4 = U_5 = K^\perp \frac{h}{2L} = \left(2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{h}{2L} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι το σύστημα αποτελεί ένα πολύστρωτο π.μ. με ίδιες στρώσεις και ροή παράλληλα σε αυτές και, επομένως, μπορεί να ξανασχεδιασθεί ισοδύναμα με μια κυλινδρική στήλη μήκους $2L$ και διατομής $6A$, άρα με διάμετρο $D\sqrt{6}$, ως εξής



Στα ίδια αποτελέσματα θα καταλήγαμε για την ισοδύναμη υδρ/κή αγωγιμότητα του π.μ. της στήλης του ανωτέρω Σκαριφήματος 4 και με εφαρμογή του τύπου υπολογισμού τη ισοδύναμης υδρ/κής αγωγιμότητας, K'' , για το πολύστρωτο π.μ. με ροή παράλληλα στις στρώσεις του Σκαριφήματος 3

$$K'' = \frac{\sum_i A_i K_i}{\sum_i A_i} = \frac{A_1 K^\perp + A_2 K^\perp + A_{3a} K^\perp + A_{3b} K^\perp + A_4 K^\perp + A_5 K^\perp}{A_1 + A_2 + A_{3a} + A_{3b} + A_4 + A_5} =$$

$$= \frac{K^\perp (A_1 + A_2 + A_{3a} + A_{3b} + A_4 + A_5)}{A_1 + A_2 + A_{3a} + A_{3b} + A_4 + A_5} = K^\perp$$

και από εφαρμογή του δεδομένου (εφαρμογή νόμου Darcy) για το ισοδύναμο π.μ. θα προκύψει η συνολική παροχή, Q_T

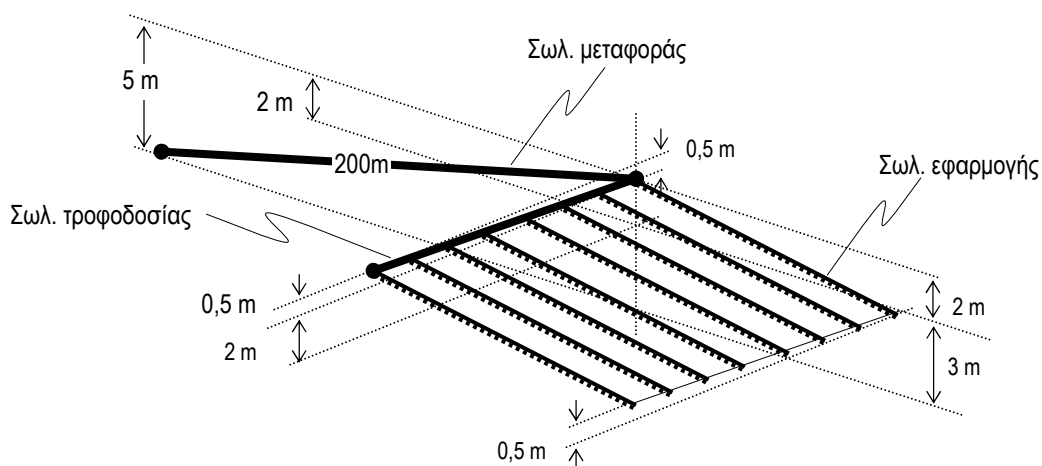
$$Q_T = 6AK^\perp \frac{h}{2L} = 6A \left(2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) \frac{h}{2L} = 6A \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{h}{L}$$

Άσκηση 8 - Διαστασιολόγηση εγκατάστασης στάγδην άρδευσης (από Τσακίρης, 2006)

Ένας αγωγός μεταφοράς μήκους $L=200\text{m}$ είναι τοποθετημένος προς την ανοδική κλίση του εδάφους, η υψομετρική διαφορά μεταξύ των άκρων του είναι $\Delta z=5\text{m}$ και οι μέγιστες επιτρεπόμενες απώλειες (συνολικές=γραμμικές+υψομετρικές) είναι $3\text{m}/100\text{m}$. Ο αγωγός αυτός υδροδοτεί μια τυπική αρδευτική μονάδα, η οποία αποτελείται από έναν αγωγό τροφοδοσίας με κλίση επίσης ανοδική. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ των άκρων του αγωγού τροφοδοσίας είναι $\Delta Z_m=0,5\text{m}$, το μήκος του είναι $L_m=110\text{m}$ και υδροδοτεί 55 αγωγούς εφαρμογής, με απόσταση μεταξύ τους $S_l=2,0\text{m}$. Οι αγωγοί εφαρμογής έχουν μήκος $L_l=100\text{m}$ ο καθένας και είναι τοποθετημένοι ώστε να ακολουθούν την κατωφέρεια του εδάφους, η δε υψομετρική διαφορά μεταξύ των άκρων τους είναι $\Delta Z_l=2,0\text{m}$. Κάθε αγωγός εφαρμογής φέρει σταλακτήρες παροχής $q=4\text{ l/h}$, λειτουργικού φορτίου $P_a=10\text{m}$ (1atm) και απόστασης μεταξύ τους $S_e=0,8\text{ m}$.

Να υπολογισθούν τα παρακάτω:

- Διάμετρος αγωγών εφαρμογής
- Φορτίο στην αρχή και στο τέλος κάθε αγωγού εφαρμογής
- Διάμετρος αγωγού τροφοδοσίας
- Φορτίο στην αρχή και στο τέλος του αγωγού τροφοδοσίας
- Διάμετρος ή διάμετροι αγωγού μεταφοράς



Εικόνα 1 Σχηματικό διάγραμμα (προοπτικό) της αρδευτικής μονάδας του προβλήματος. Το πλήθος των αγωγών εφαρμογής (-----) είναι ενδεικτικό.

Ξεκινούμε με τον καθορισμό των μέγιστων επιτρεπόμενων απωλειών του δικτύου της αρδευτικής μονάδας, P_s . Θα πρέπει

$$\Delta P_s \leq 0,2P_a \Rightarrow \Delta P_s \leq 0,2 \times 10\text{m} \Rightarrow P_s \leq 2\text{m} \quad (\text{e1})$$

και η κατανομή των επιτρεπόμενων απωλειών μεταξύ αγωγών εφαρμογής και τροφοδοσίας να είναι σε αναλογία 55/45, δηλαδή

$$\Delta P_{l \max} = 0,55 \times 2\text{m} + 2\text{m} = 3,1\text{m} \quad \text{και} \quad \Delta P_{m \max} = 0,45 \times 2\text{m} - 0,5\text{m} = 0,4\text{m} \quad (\text{e2})$$

Αγωγοί εφαρμογής

Ο αριθμός σταλακτήρων ανά αγωγό εφαρμογής μήκους L_ℓ , είναι

$$n = 100\text{m}/0,8\text{m}/\sigma\tau\alpha\lambda = 125\sigma\tau\alpha\lambda \quad (\text{e3})$$

$$\text{Η συνολική παροχή στον αγωγό εφαρμογής προκύπτει } Q_\ell = 125 \times 4\text{l/h} = 500 \text{ l/h} \quad (\text{e4})$$

Επειδή η παροχή μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού εφαρμογής εξ αιτίας της εκροής του νερού σε κάθε σταλακτήρα, οι ολικές γραμμικές απώλειες περιορίζονται με ανάλογο τρόπο, μέσω του συντελεστή περιορισμού F , ο οποίος υπολογίζεται για $n_\ell=125$ ως $F_\ell=0,355$ και, έτσι, οι ολικές επιτρεπόμενες γραμμικές απώλειες ανά (100m) του κάθε αγωγού εφαρμογής υπολογίζονται από την ανισότητα

$$H_f \leq \frac{\Delta P_{\ell \max}}{F L_\ell} = \frac{3,1\text{m}}{0,355 \times 100\text{m}} = 8,732\text{m}/(100\text{m}) \quad (\text{e5})$$

Οι αγωγοί εφαρμογής (laterals) θα είναι κατασκευασμένοι από εύκαμπτο πολυαιθυλένιο.

Η ελάχιστη διάμετρος των αγωγών εφαρμογής, D , προκειμένου να αναπτυχθούν οι μέγιστες επιτρεπόμενες γραμμικές απώλειες, H_f , θα προσδιοριστεί από την εξίσωση Hazen-Williams (με Q_ℓ σε $[\text{m}^3/\text{h}]$, D σε $[\text{mm}]$, H_f σε $[\text{m}/100\text{m}$ αγωγού] και $C=140$)

$$H_f = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{Q_\ell}{C}\right)^{1,852} D^{-4,87} \Rightarrow D^{4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{Q_\ell}{C}\right)^{1,852} \frac{1}{H_f} \Rightarrow$$

$$D^{4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{0,5}{140}\right)^{1,852} \times \frac{1}{8,732} \Rightarrow D = \left[1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{0,5}{140}\right)^{1,852} \times \frac{1}{8,732} \right]^{\frac{1}{4,87}} \Rightarrow$$

$$D = 13,99\text{mm} \quad (\text{e6})$$

Δεχόμαστε επιτρεπτή αντοχή των σωλήνων εφαρμογής 4 atm οπότε, από τον Πίνακα 1, επιλέγουμε σωλήνα με την αμέσως μεγαλύτερη εσωτερική διάμετρο, δηλαδή $D=13,99\text{mm} \rightarrow D_\ell=14,4\text{mm}$ (ονομαστική $\varnothing 16\text{mm}$).

Μετά την επιλογή του σωλήνα εφαρμογής υπολογίζουμε το φορτίο στην αρχή και στο τέλος του αγωγού εφαρμογής αφού πρώτα επανυπολογίσουμε τις γραμμικές απώλειες για σωλήνα με την εσωτερική διάμετρο σχεδιασμού που επιλέξαμε.

$$H_f = 1,13 \times 10^{11} \left(\frac{Q_\ell}{C}\right)^{1,852} D_\ell^{-4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{0,5}{140}\right)^{1,852} \times 14,4^{-4,87} = 7,581\text{m}/(100\text{m}) \quad (\text{e7})$$

$$\Delta P_\ell = H_f L_\ell F_\ell = \frac{7,581\text{m}}{100\text{m}} \times 100\text{m} \times 0,355 = 2,69\text{m} \quad (\text{e8})$$

Έλεγχος σχετικά με τις μέγιστες επιτρεπόμενες απώλειες σχεδιασμού

$$2,69\text{m} = \Delta P_\ell < \Delta P_{\ell \max} = 3,1\text{m} \text{ (OK)} \quad (\text{e9})$$

Η παροχή και το ονομαστικό λειτουργικό φορτίο, P_a , του σταλακτήρα απαντώνται στο 0,4 του μήκους του αγωγού εφαρμογής από την αρχή. Έτσι, τα φορτία στην αρχή και στο τέλος του αγωγού δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$P_{\ell, \text{in}} = P_a + 0,77\Delta P_\ell - \frac{\Delta Z_\ell}{2} = 10\text{m} + 0,77 \times 2,69\text{m} - \frac{2\text{m}}{2} \Rightarrow P_{\ell, \text{in}} = 11,07\text{m} \quad (\text{e10})$$

και

$$P_{\ell, \text{end}} = P_a - 0,23\Delta P_\ell + \frac{\Delta Z_\ell}{2} = 10\text{m} - 0,23 \times 2,69\text{m} + \frac{2\text{m}}{2} \Rightarrow P_{\ell, \text{end}} = 10,38\text{m} \quad (\text{e11})$$

Αγωγός τροφοδοσίας

Με παρόμοιο τρόπο αναλύονται οι απώλειες στους αγωγούς τροφοδοσίας

Ο αριθμός σωλήνων εφαρμογής ανά αγωγό τροφοδοσίας είναι $n_m=55$ αγωγοί εφαρμ.
(e12)

Η συνολική παροχή στον αγωγό τροφοδοσίας προκύπτει

$$Q_m = 55 \times 500\text{l/h} = 27,5\text{m}^3/\text{h} \quad (\text{e13})$$

Επειδή η παροχή μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού τροφοδοσίας εξ αιτίας της εκροής του νερού σε κάθε αγωγό εφαρμογής, οι ολικές γραμμικές απώλειες περιορίζονται με ανάλογο τρόπο, μέσω του συντελεστή περιορισμού F_m , ο οποίος υπολογίζεται από τον Πίνακα 2 για $n_m=55$ ως $F_m=0,360$ και, έτσι, οι ολικές επιτρεπόμενες γραμμικές απώλειες ανά (100m) του κάθε αγωγού τροφοδοσίας υπολογίζονται από την ανισότητα

$$H_f \leq \frac{\Delta P_{m \text{max}}}{F_m L_m} = \frac{0,4\text{m}}{0,360 \times 110\text{m}} = 1,01\text{m}/(100\text{m}) \quad (\text{e14})$$

Οι αγωγοί τροφοδοσίας θα είναι κατασκευασμένοι από PVC.

Η ελάχιστη διάμετρος του αγωγού τροφοδοσίας, D , προκειμένου να αναπτυχθούν οι παραπάνω μέγιστες επιτρεπόμενες γραμμικές απώλειες, H_f , θα προσδιοριστεί από την εξίσωση Hazen-Williams (με Q_m σε $[\text{m}^3/\text{h}]$, D σε $[\text{mm}]$, H_f σε $[\text{m}/100\text{m}$ αγωγού] και $C=150$ -επειδή προεκτιμούμε ότι η διάμετρος θα είναι $> 75\text{mm}$)

$$H_f = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{Q_m}{C}\right)^{1,852} D^{-4,87} \Rightarrow D^{4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{Q_m}{C}\right)^{1,852} \frac{1}{H_f} \Rightarrow$$

$$D^{4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times \frac{1}{1,01} \Rightarrow D = \left[1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times \frac{1}{1,01} \right]^{\frac{1}{4,87}} \Rightarrow$$

$$D = 97,40\text{mm} \quad (\text{e15})$$

Δεχόμαστε επιτρεπτή αντοχή 6 atm οπότε από τον Πίνακα 3 επιλέγουμε σωλήνα τροφοδοσίας με την αμέσως μεγαλύτερη εσωτερική διάμετρο, δηλαδή 97,40mm $\rightarrow D_m=103,6\text{mm}$ και εξωτερική ονομαστική διάμετρο $\varnothing 110\text{mm}$.

Μετά την επιλογή του σωλήνα τροφοδοσίας υπολογίζουμε το φορτίο στην αρχή και στο τέλος του αγωγού αφού πρώτα επανυπολογίσουμε τις γραμμικές απώλειες για σωλήνα τροφοδοσίας με την εσωτερική διάμετρο σχεδιασμού που επιλέξαμε.

$$H_f = 1,13 \times 10^{11} \left(\frac{Q_m}{C} \right)^{1,852} D_\ell^{-4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150} \right)^{1,852} \times 103,6^{-4,87} = 0,748 \text{m}/(100\text{m}) \quad (\text{e16})$$

$$\Delta P_m = H_f L_m F_m = \frac{0,748 \text{m}}{100\text{m}} \times 110\text{m} \times 0,360 = 0,296 \text{m} \quad (\text{e17})$$

Έλεγχος σχετικά με τις μέγιστες επιτρεπόμενες απώλειες σχεδιασμού

$$0,296 \text{m} = \Delta P_m < \Delta P_{m \max} = 0,4 \text{m} \quad (\text{OK}) \quad (\text{e18})$$

Όπως θεωρήσαμε για την κατανομή της πίεσης στον αγωγό εφαρμογής (σχέσεις e.10 & e.11), η παροχή και το ονομαστικό λειτουργικό φορτίο στην είσοδο του αγωγού εφαρμογής, $P_{l,\text{in}}$, απαντώνται περίπου στο 0,4 του μήκους του αγωγού τροφοδοσίας. Έτσι, τα φορτία στην αρχή και στο τέλος του αγωγού τροφοδοσίας δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$P_{m,\text{in}} = P_{l,\text{in}} + 0,77 \Delta P_m + \frac{\Delta Z_m}{2} = 11,07 \text{m} + 0,77 \times 0,296 \text{m} + \frac{0,5 \text{m}}{2} \Rightarrow P_{m,\text{in}} = 11,55 \text{m} \quad (\text{e19})$$

και

$$P_{m,\text{end}} = P_{l,\text{in}} - 0,23 \Delta P_m - \frac{\Delta Z_m}{2} = 11,07 \text{m} - 0,23 \times 0,296 \text{m} - \frac{0,5 \text{m}}{2} \Rightarrow P_{m,\text{end}} = 10,75 \text{m} \quad (\text{e20})$$

Αγωγός μεταφοράς

Ο αγωγός μεταφοράς θα είναι κατασκευασμένος και αυτός από PVC.

$$\text{Ο αριθμός σωλήνων τροφοδοσίας ανά αγωγό μεταφοράς είναι } n=1, \quad (\text{e21})$$

$$\text{κι έτσι η συνολική παροχή στον αγωγό μεταφοράς είναι } Q = Q_m = 27,5 \text{m}^3/\text{h} \quad (\text{e22})$$

Η παροχή δε μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού μεταφοράς (επειδή $n=1$).

Οι μέγιστες συνολικές επιτρεπόμενες απώλειες ανά (100m) επιβάλλονται να είναι 3m. Σε αυτές, εκτός από τις γραμμικές απώλειες, H_f , πρέπει να συμπεριληφθούν και οι απώλειες λόγω της υψομετρικής διαφοράς $\Delta z=5\text{m}$ μεταξύ των άκρων του αγωγού μεταφοράς.

Έτσι, οι συνολικές επιτρεπόμενες απώλειες μεταξύ των άκρων του αγωγού μεταφοράς θα δίνονται από τη σχέση

$$\Delta P_{\max} = H_f L + \Delta z \Rightarrow \frac{\Delta P_{\max}}{L} = \frac{H_f L + \Delta z}{L} \leq \frac{3 \text{m}}{100 \text{m}} \Rightarrow$$

$$H_f \leq \frac{3 \text{m}}{100 \text{m}} - \frac{\Delta z}{L} = \frac{3 \text{m}}{100 \text{m}} - \frac{5 \text{m}}{200 \text{m}} = 0,5 \text{m}/(100 \text{m}) \quad (\text{e23})$$

Η ελάχιστη διάμετρος του σωλήνα μεταφοράς D , ώστε να επιτευχθούν οι παραπάνω μέγιστες γραμμικές απώλειες, H_f , θα προσδιοριστεί από την εξίσωση Hazen-Williams (με $Q=Q_m$ σε $[\text{m}^3/\text{h}]$, D σε $[\text{mm}]$ και $C=150$ -επειδή προεκτιμούμε ότι η διάμετρος θα είναι $> 75\text{mm}$)

$$H_f = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{Q}{C} \right)^{1,852} D^{-4,87} \Rightarrow D^{4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{Q}{C} \right)^{1,852} \frac{1}{H_f} \Rightarrow$$

$$D^{4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times \frac{1}{0,5} \Rightarrow D = \left[1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times \frac{1}{0,5} \right]^{\frac{1}{4,87}} \Rightarrow$$

$$D = 112,53\text{mm} \quad (\text{e24})$$

Δεχόμαστε επιτρεπτή αντοχή 6 atm οπότε από τον Πίνακα 3 επιλέγουμε σωλήνα με την αμέσως μεγαλύτερη εσωτερική διάμετρο, δηλαδή 112,5 → D=117,6mm και εξωτερική ονομαστική διάμετρο Ø125mm.

Μετά την επιλογή του σωλήνα μεταφοράς επανυπολογίζουμε τις γραμμικές απώλειες για σωλήνα με την εσωτερική διάμετρο σχεδιασμού που επιλέξαμε.

$$H_f = 1,13 \times 10^{11} \left(\frac{Q}{C}\right)^{1,852} D^{-4,87} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times 117,6^{-4,87} = 0,40\text{m}/(100\text{m}) \quad (\text{e25})$$

Στα τέλος του αγωγού μεταφοράς η πίεση θα είναι ίση με την πίεση στην είσοδο της αρδευτικής μονάδας, $P_{m,in}$ (=πίεση στην είσοδο του πρώτου αγωγού τροφοδοσίας), και επομένως,

η πίεση στην είσοδο του αγωγού μεταφοράς, P_{in} , θα δίνεται από τη σχέση

$$P_{in} = P_{m,in} + \Delta z + H_f L = 11,55\text{m} + 5\text{m} + \frac{0,4\text{m}}{100\text{m}} \times 200\text{m} \Rightarrow P_{in} = 17,35\text{m} \quad (\text{e26})$$

Αυτή η πίεση πρέπει να διατίθεται από το δίκτυο υδροληψίας-τροφοδοσίας της εγκατάστασης.

Ο υπολογισμός που μόλις κάναμε αντιστοιχεί σε σωλήνα μεταφοράς με ενιαία ονομαστική διάμετρο Ø125mm σε όλο το μήκος του. Με αυτήν τη διάμετρο υπερπληρούνται οι ελάχιστες απαιτήσεις σχετικά με την πτώση πίεσης. Υπενθυμίζουμε ότι, προκειμένου οι συνολικές απώλειες να μην ξεπερνούν τα 3m/(100m), ή –παίρνοντας υπόψη την υψομετρική διαφορά των 5m τα 0,5m/(100m) (βλέπε σχέση 23) επιλέξαμε σωλήνα μεταφοράς Ø125mm με αποτέλεσμα οι γραμμικές απώλειες να πέσουν στα 0,4m/(100m) < 0,5m/(100m), ενώ αντίστοιχα, εάν κάναμε τον έλεγχο για τις συνολικές απώλειες έχουμε

$$5,8\text{m} = 5\text{m} + \frac{0,4\text{m}}{100\text{m}} \times 200\text{m} = \Delta P < \Delta P_{\max} = \frac{3,0\text{m}}{100\text{m}} \times 200\text{m} = 6\text{m} \quad (\text{OK}) \quad (\text{e27})$$

Οικονομικότερος σχεδιασμός αγωγού μεταφοράς

Ας υποθέσουμε ότι υλοποιούμε τον αγωγό μεταφοράς με δύο τμήματα: το πρώτο τμήμα θα έχει μήκος L_1 , ονομαστική διάμετρο Ø₁125mm και εσωτερική $D_1=117,6\text{mm}$, και το δεύτερο τμήμα θα έχει μήκος L_2 , την αμέσως μικρότερη ονομ/κή διάμετρο Ø₂110mm και εσωτερική $D_2=103,6\text{mm}$. Προφανώς $L_1+L_2=L=200\text{m}$.

Με βάση την παροχή, η οποία παραμένει αμετάβλητη, υπολογίζουμε τις γραμμικές απώλειες ανά (100m) αγωγού, στα δύο τμήματα του αγωγού, H_{f1} & H_{f2} , αντίστοιχα

$$H_{f1} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times 117,6^{-4,87} = 0,40\text{m}/(100\text{m})$$

$$H_{f2} = 1,13 \times 10^{11} \times \left(\frac{27,5}{150}\right)^{1,852} \times 103,6^{-4,87} = 0,75\text{m}/(100\text{m})$$

Με βάση τα μήκη των τμημάτων, η συνολική πτώση πίεσης του αγωγού μεταφοράς θα δίνεται από τον τύπο

$$\Delta P = \Delta z + (H_{f1}L_1 + H_{f2}L_2) = 5,0\text{m} + \left[\frac{0,4\text{m}}{100\text{m}} \times L_1 + \frac{0,75\text{m}}{100\text{m}} \times (200\text{m} - L_1) \right] \Rightarrow$$

$$\Delta P = 5\text{m} + \frac{0,75\text{m}}{100\text{m}} \times 200\text{m} - \frac{0,35\text{m}}{100\text{m}} L_1 = 6,5\text{m} - \frac{0,35\text{m}}{100\text{m}} L_1 \Rightarrow$$

και επειδή $(\Delta P/L) \leq 3\text{m}/(100\text{m})$ προκύπτει η παρακάτω ανίσωση ως προς L_1

$$6,5\text{m} - \frac{0,35\text{m}}{100\text{m}} L_1 \leq \frac{3\text{m}}{100\text{m}} L \Rightarrow 0,5\text{m} \leq \frac{0,35\text{m}}{100\text{m}} L_1 \Rightarrow L_1 \geq 142,9\text{m}$$

Άρα, προκειμένου να επιτύχουμε οικονομικότερη κατασκευή εντός των προδιαγεγραμμένων γραμμικών απωλειών στον αγωγό μεταφοράς, από τα 200m του αγωγού τουλάχιστον τα 143m μπορούν να υλοποιηθούν με σωλήνα $\varnothing_1 125\text{mm}$ και τα υπόλοιπα 57m με σωλήνα $\varnothing_2 110\text{mm}$.

Εναλλακτικά, εάν δεν προδιαγράφονται οι γραμμικές απώλειες στον αγωγό μεταφοράς αλλά η διατιθέμενη πίεση του δικτύου υδροληψίας, P_w , μπορούμε να εξετάσουμε σε τι μήκος $L_2 = L - L_1$, έχουμε περιθώριο να εγκαταστήσουμε σωλήνα $\varnothing_2 110\text{mm}$ προκειμένου να επιτύχουμε λειτουργία της εγκατάστασης με πίεση στην είσοδο του αγωγού μεταφοράς $P_{in} < P_w$. Θα επιλύσουμε την επόμενη ανίσωση:

$$P_{in} \leq P_w \Rightarrow P_{m,in} + \Delta z + (H_{f1}L_1 + H_{f2}L_2) = P_{m,in} + \Delta z + H_{f1}L_1 + H_{f2}(L - L_1) \leq P_w \Rightarrow$$

$$L_1 \geq \left[(P_{m,in} + \Delta z + H_{f1}L_1 + H_{f2}L) - P_w \right] \frac{1}{H_{f2}}$$