

**Άσκηση 4: “Μέτρηση ιξώδους υγρού με ελεύθερη βύθιση σφαίρας – νόμος Stokes”**

**Αντικείμενο:** Μέτρηση δυναμικού ιξώδους υγρού με τη μέθοδο της ελεύθερης βύθισης σφαίρας σε αυτό και εφαρμογή του νόμου του Stokes.

**Αντικείμενο**

Αντικείμενο είναι ο προσδιορισμός του ιξώδους διαφόρων υγρών με μέτρηση της ταχύτητας κατά την ελεύθερη βύθιση σε αυτά σφαίρας γνωστής διαμέτρου και πυκνότητας. Ο προσδιορισμός του ιξώδους βασίζεται στον τύπο του Stokes που περιγράφει το συγκεκριμένο φαινόμενο (της ελεύθερης βύθισης σώματος σε υγρό).

**Βασική θεωρία**

Ο Stokes υπολόγισε με αναλυτικό τρόπο την αντίσταση,  $F$ , που αναπτύσσεται κατά την κίνηση σφαίρας ακτίνας,  $R$ , εντός υγρού που έχει δυναμικό ιξώδες,  $\mu$ , με ταχύτητα  $U$ , (υδροδυναμική αντίσταση) ως:

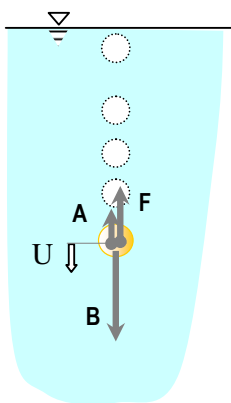
$$F = 6\pi R\mu U \quad (1)$$

Η παραπάνω έκφραση ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι το ροϊκό πεδίο που δημιουργεί η σφαίρα γύρω της έχει χαμηλή τιμή του αριθμού **Reynolds**<sup>1</sup> και συγκεκριμένα  $Re \ll 1$ .

Γενικότερα, εάν  $Re \gg 1$ , η υδροδυναμική αντίσταση δίνεται από τη γενική έκφραση  $F = C_d A U^2$  όπου  $C_d$  ο συντελεστής αντίστασης (ή οπισθέλκουσας σχήματος, που εξαρτάται από τη διαμόρφωση του σχήματος του σώματος, το ιξώδες και την πυκνότητα του υγρού) και  $A$  η μετωπική επιφάνεια του σώματος κάθετα στη διεύθυνση της ταχύτητας.

**Εξεταζόμενο φαινόμενο**

Μια δεξαμενή είναι γεμάτη με κάποιο υγρό, π.χ. λάδι ή γλυκερίνη, που βρίσκεται σε ηρεμία. Το υγρό έχει γνωστή πυκνότητα,  $\rho$  (για μέτρηση της πυκνότητας υγρού βλέπε εργαστ/κή άσκηση 1), αλλά άγνωστο δυναμικό ιξώδες,  $\mu$ . Σε αυτό το υγρό αφήνουμε να βυθιστεί ελεύθερα μια μικρή σφαίρα, γνωστής διαμέτρου  $D=2R$  κατασκευασμένης από υλικό πυκνότητας  $\rho_s$  (συνήθως κάποιο μέταλλο π.χ. αστάλι). Με μετρήσεις του βάθους του σφαιριδίου  $Y_i$ , και του αντίστοιχου χρόνου  $t_i$ , προσδιορίζεται η ταχύτητα βύθισης,  $U(t)$ , του σφαιριδίου ως συνάρτηση του χρόνου.



Όταν η ταχύτητα βύθισης του σφαιριδίου σταθεροποιηθεί (δηλαδή όταν ο ρυθμός μεταβολής της γίνει μηδέν,  $dU/dt \rightarrow 0$ ), το βάρος του σφαιριδίου,  $B = m_s g = \rho_s V_s g = (4/3)\pi R^3 \rho_s g$ , εξισορροπείται από την άνοση  $A = mg = \rho V_s g = (4/3)\pi R^3 \rho g$  & την υδροδυναμική αντίσταση  $F$ , και τότε ισχύει:

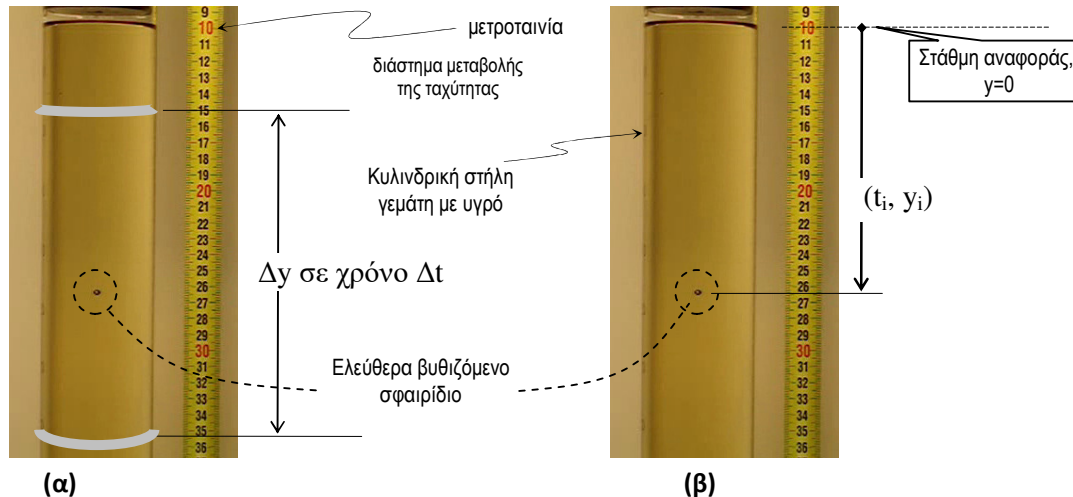
$U = \text{σταθ.} \rightarrow B = F + A \Rightarrow (4/3)\pi R^3 \rho_s g = 6\pi R\mu U + (4/3)\pi R^3 \rho g$ , (2)  
οπότε το ιξώδες προσδιορίζεται από την προηγούμενη σχέση ως

$$\Rightarrow 6\pi R\mu U = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_s - \rho)g \Rightarrow \mu = \frac{2}{9} (\rho_s - \rho)g \frac{R^2}{U} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Ο αριθμός Reynolds, είναι αδιάστατος, εκφράζει το λόγο μεταξύ αδρανειακών και ιξωδών δυνάμεων (βλέπε και Εργαστηριακή Άσκηση 5) και δίνεται από την έκφραση  $Re = \rho U D / \mu = U D / \nu$ , όπου  $\nu = \mu / \rho$  είναι το κινηματικό ιξώδες. Γενικά, όταν σε μια ροή επικρατεί  $Re < 1$  η ροή καλείται *έρπουσα ροή*.

**Πειραματική διάταξη & διαδικασία**

Η πειραματική διάταξη απεικονίζεται στην Εικόνα 1. Η διαδικασία λήψης μετρήσεων είναι η εξής: Σε ένα διαφανή κυλινδρικό σωλήνα (ογκομετρικό) γεμάτο με το υπό εξέταση υγρό αφήνονται να βυθισθούν ελεύθερα μεταλλικά σφαιρίδια γνωστής διαμέτρου.



**Εικόνα 1** Η πειραματική διάταξη της ελεύθερης βύθισης σφαίρας σε υγρό. Διακρίνεται η στήλη (κυλινδρικός σωλήνας) γεμάτη με υγρό στην οποία πραγματοποιείται η ελεύθερη βύθιση του σφαιριδίου, καθώς και η μετροταινία προδιορισμού της θέσης (βάθους),  $Y$ , του σφαιριδίου κάθε χρονική στιγμή,  $t$ . Παρουσιάζονται δύο διαφορετικοί τρόποι λήψης μετρήσεων (α) Σημαδεύουμε δύο στάθμες στη στήλη και μετράμε το χρονικό διάστημα,  $\Delta t$ , για τη βύθιση του σφαιριδίου από την πρώτη στάθμη στη δεύτερη στάθμη,  $\Delta y$ . (β) Για διαφορετικές χρονικές στιγμές,  $t_i$ , μετράμε το αντίστοιχο βάθος του σφαιριδίου,  $y_i$ , και καταγράφουμε το σύνολο των μετρήσεων  $(t_i, y_i)$ . Η στάθμη αναφοράς ( $y=0$ ) δεν είναι ανάγκη να συμπίπτει με την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

Επειδή το φαινόμενο εξελίσσεται σχετικά γρήγορα, για τις συνήθεις εργαστηριακές συνθήκες, η απευθείας (σε πραγματικό χρόνο - realtime) λήψη μετρήσεων του βάθους έναντι του χρόνου δεν πραγματοποιείται με ικανοποιητική ακρίβεια, επομένως είναι απαραίτητη η επανάληψη της διαδικασίας ώστε να ληφθούν πολλές μετρήσεις. Μεγαλύτερη ακρίβεια στην λήψη μετρήσεων επιτυγχάνεται εάν γίνει καταγραφή /αποτύπωση της ελεύθερης βύθισης με κάποιο οπτικο-ηλεκτρονικό μέσο (π.χ. ψηφιακή κάμερα). Τυπικά πειράματα έχουν αποτυπωθεί σε video του e-class του Εργαστηρίου Υδραυλικής Ι και συγκεκριμένα :

- [http://users.teiath.gr/marval/CIE\\_HydroLab/Stokes\\_123.wmv](http://users.teiath.gr/marval/CIE_HydroLab/Stokes_123.wmv) «Ελεύθερη βύθιση σφαίρας σε υγρό» όπου σε μια στήλη που περιέχει μηχανέλαιο SAE30 βυθίζονται ατσάλινα σφαιρίδια διαμέτρων  $D=3,0\text{mm}$ ,  $2,0\text{mm}$  &  $1,587\text{mm}$  και
- [http://users.teiath.gr/marval/CIE\\_HydroLab/Stokes\\_4balls.wmv](http://users.teiath.gr/marval/CIE_HydroLab/Stokes_4balls.wmv) «Ελεύθερες βυθίσεις σφαιρών σε λάδι και γλυκερίνη» όπου σε δύο παράλληλες στήλες γεμάτες με διαφορετικά υγρά δηλ. μηχανέλαιο SAE30 & γλυκερίνη) στις οποίες βυθίζονται 4 ζεύγη ατσάλινα σφαιρίδια με διαφορετικές διαμέτρους,  $D=3,0\text{mm}$ ,  $2,381\text{mm}$ ,  $2,0\text{mm}$  &  $1,587\text{mm}$ .

Με τη βιντεοσκόπηση έχουμε τη δυνατότητα να πάρουμε μετρήσεις ικανοποιητικής ακρίβειας. Κατά την αναπαραγωγή (playback) του video σε Η/Υ με κάποιο από τα συνηθισμένα προγράμματα (π.χ. VLC, WindowsMediaPlayer, Realplayer κ.α.), εμφανίζεται στην οθόνη προβολής ένας ψηφιακός μετρητής χρόνου. Έτσι, κάνοντας διαδοχικές στάσεις (pause) κατά την αναπαραγωγή του video,

μετρούμε το βάθος στο οποίο έχει «παγώσει» η βύθιση του σφαιριδίου [από την μετροταινία που έχουμε ήδη προσαρμόσει κατά μήκος του σωλήνα (βάθος)] και διαβάζουμε τη χρονική στιγμή που συνέβη κάθε στιγμιότυπο.

Επίσης έχουμε δύο δυνατότητες δηλαδή δύο διαφορετικούς τρόπους λήψης μετρήσεων που περιγράφονται στις Εικόνες 1(α) και 1(β). Είτε με τη μέτρηση του χρονικού διαστήματος  $\Delta t$  για να βυθιστεί το σφαιρίδιο κατά ένα  $\Delta y$  μεταξύ δύο σταθμών που έχουμε σημαδέψει (1.α), είτε με τη μέτρηση του βάθους,  $y_i$ , στο οποίο έχει βυθιστεί το σφαιρίδιο σε διαδοχικές χρονικές στιγμές  $t_i$ .

### Οδηγίες εκπόνησης άσκησης

#### «Εύκολη» άσκηση

Από οποιοδήποτε από τα video που προαναφέρθηκαν επιλέξτε μια βύθιση, δηλαδή κάποιο συνδυασμό υγρού και διαμέτρου σφαιριδίου,  $D$ . Σε αυτήν «σημαδέψτε» στην οθόνη του Η/Υ σας δύο στάθμες όπως στην Εικόνα 1.α και μετρήστε με τη βοήθεια της μετροταινίας και του χρονομετρητή τα  $\Delta y$  και  $\Delta t$ . Υπολογίστε την ταχύτητα ελεύθερης βύθισης,  $U$ , του σφαιριδίου. Υπολογίστε την τιμή του ιξώδους του αντίστοιχου υγρού.

#### «Δύσκολη» άσκηση

- 1) Επιλέξτε μια βύθιση, δηλαδή μόνο ένα συνδυασμό υγρού και διαμέτρου σφαιριδίου,  $D$ , είτε από οποιοδήποτε από τα video που προαναφέρθηκαν, είτε από τις παλαιότερες εργαστηριακές μετρήσεις (Α, Β, Γ) του Πίνακα 1 που ακολουθεί .
- 2) Για τη βύθιση που επιλέξατε να μελετήσετε, την τιμή της ταχύτητας ελεύθερης βύθισης του σφαιριδίου,  $U$ , μπορείτε να την υπολογίσετε από την κλίση,  $b$ , της ευθείας  $Y(t)=a+bt$ , που θα παρεμβάλλετε μεταξύ των σημείων που αντιστοιχούν στα ζεύγη  $(t_i, Y_i)$ . Την ευθεία αυτή μπορείτε (βλέπε παρακάτω σελίδα οδηγιών): (α) είτε να τη χαράξετε με γραφικό τρόπο, αφού σχεδιάσετε τα σημεία  $(t_i, Y_i)$ , ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (γραφική μέθοδος), (β) είτε να την υπολογίσετε αναλυτικά εφαρμόζοντας μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για γραμμική παρεμβολή (αναλυτική μέθοδος).
- 3) Αφού υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας  $U$ , προσδιορίστε τις τιμές των  $\mu$  και  $Re$
- 4) Σε κατάλληλο φύλλο έργου δώστε μια πολύ σύντομη περιγραφή της διαδικασίας των υπολογισμών που κάνατε και των αποτελεσμάτων.

### Δεδομένα

Ορισμός και φαινομενολογία του ιξώδους των υγρών δίνεται στο Εκπαιδευτικό Υλικό του e-class του μαθήματος Υδραυλική Ι Θεωρία

Πυκνότητες  $\rho$ , ελαίου SAE-30:  $900\text{kg/m}^3$ , καστορέλαιου:  $1000\text{kg/m}^3$ , γλυκερίνης:  $1260\text{kg/m}^3$

Πυκνότητα χάλυβα  $\rho_s=7870\text{kg/m}^3$

Παλαιότερες μετρήσεις βύθισης χρόνου για τρεις περιπτώσεις υγρών δίνονται στον Πίνακα 1

**ΠΡΟΣΟΧΗ** - Κάθε εργασία θα παραδοθεί στο εργαστήριο και αφού σφραγισθεί θα επιστραφεί. Κάθε σφραγισμένη εργασία θα φυλαχθεί σε φάκελο μέχρι το τέλος του εξαμήνου οπότε και θα την υποβληθεί μαζί με το τεστ του Εργαστηρίου. Το Εξώφυλλο της εργασίας υπάρχει στα Έγγραφα ([https://eclass.teiath.gr/modules/document/file.php/PEY134/Hydraulics I Lab CoverPage.doc](https://eclass.teiath.gr/modules/document/file.php/PEY134/Hydraulics_I_Lab_CoverPage.doc))

## Πίνακας 1 - Εργαστηριακές μετρήσεις

του βάθους της ελεύθερα βυθιζόμενης σφαίρας ( $Y_i$ ) συναρτήσει του χρόνου ( $t_i$ )

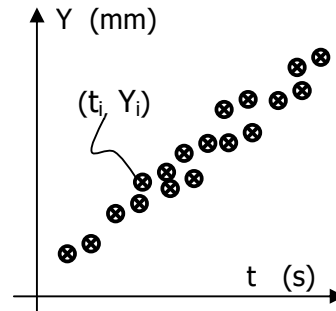
α/α	Μετρήσεις		Μετρήσεις		Μετρήσεις	
	$t_i$ (s)	$Y_i$ (mm)	$t_i$ (s)	$Y_i$ (mm)	$t_i$ (s)	$Y_i$ (mm)
1	0,0		0,0		0,0	
2	0,0		0,0		0,0	
3	0,0		0,0		0,0	
4	0,0	A	0,0	B	0,0	Γ
5	0,0					
6	0,0					
7	0,0		0,0		0,0	
8	0,0		0,0		0,0	
9	0,0		0,0		0,0	
10	0,0		0,0		0,0	
11	0,0		0,0		0,0	
12	0,0		0,0	0,6	0,0	
13	0,0		0,1	1,0	0,1	1,5
14	0,0		0,1	1,4	0,1	2,0
15	0,0		0,1	1,9	0,2	2,9
16	0,0		0,2	2,8	0,2	4,2
17	0,0		0,3	3,8	0,3	5,8
18	0,1	5,1	0,4	5,4	0,4	8,1
19	0,2	6,3	0,5	6,5	0,5	9,8
20	0,2	8,8	0,6	9,0	0,6	13,5
21	0,2	10,6	0,8	10,9	0,8	16,3
22	0,3	15,1	1,1	15,4	1,1	23,1
23	0,4	19,9	1,4	20,1	1,4	30,2
24	0,5	27,4	1,8	27,6	1,8	41,6
25	0,8	36,9	2,7	37,2	2,8	56,0
26	1,0	52,0	3,3	52,3	3,4	78,8
27	1,4	64,2	4,6	64,4	4,8	97,1
28	2,0	90,9	6,7	91,1	6,9	137,2
29	2,4	115,7	7,8	115,9	8,0	174,6
30	2,9	139,8	9,4	140,0	9,6	210,9
31	4,0	184,0	13,1	184,2	13,4	277,5
32	5,4	243,6	17,6	243,9	18,0	367,3
33	5,9	310,2	19,2	310,5	19,7	467,7
34	8,2	383,2	27,0	383,5	27,7	577,7
35	8,7	471,8	28,6	472,0	29,4	711,0
36	12,3	524,2	40,5	524,4	41,5	790,0
37	12,9	672,4	42,4	672,6	43,4	1.013,1
38	17,0	788,7	55,7	789,0	57,1	1.188,4
39	21,2	925,8	69,4	926,0	71,1	1.263,2
<b>Φυσικά χαρακτηριστικά υγρού</b>						
υγρό:	<b>SAE-30</b>		<b>Καστορέλαιο</b>		<b>Γλυκερίνη</b>	
$\mu$ (Pa-s):						
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ):	900,0		1.000,0		1.260,0	
<b>Ιδιότητες &amp; Γεωμετρία σφαιριδίου</b>						
D (mm)=	1,58		1,58		2,38	
$\rho_s$ (kg/m <sup>3</sup> ):	7.870,0		7.870,0		7.870,0	
U (m/s)=						
U (mm/s)=						
Re=						

**Επισήμανση.** Τα ζεύγη τιμών που εμφανίζονται αντιστοιχούν στη φάση της ελεύθερης βύθισης του σφαιριδίου με σταθερή ταχύτητα. Τα αντίστοιχα σημεία δεν κείνται ακριβώς στην ίδια ευθεία λόγω μετρητικών σφαλμάτων. Έχουν παραλειφθεί τα πρώτα ζεύγη τιμών που αντιστοιχούν στη φάση της επιταχυνόμενης βύθισης του σφαιριδίου -από την άφεσή του στο υγρό με μηδενική αρχική ταχύτητα- και μέχρι την αποκατάσταση της σταθερής ταχύτητας βύθισης.

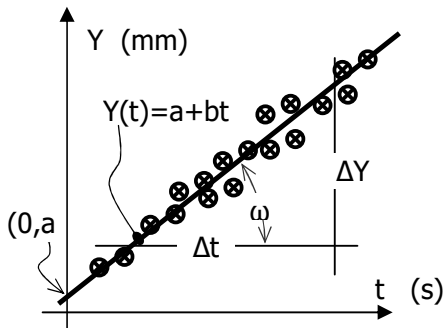
## ΟΔΗΓΙΕΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ «ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΙΞΩΔΟΥΣ ΥΓΡΟΥ»

Κάθε Ομάδα Εργαστηρίου εργάζεται με μια ομάδα μετρήσεων (βλέπε στήλες  $(t_i, Y_i)$  του Πίνακα μετρήσεων)

**Βήμα 1** Τοποθετούμε τα ζεύγη μετρήσεων  $(t_i, Y_i)$  σε διάγραμμα  $t$ - $Y$  (κατά προτίμηση σε «μιλλιμετρέ» χαρτί ή ακόμα καλύτερα χρησιμοποιώντας κάποιο διαδεδομένο πρόγραμμα Η/Υ, όπως Excel).



**Βήμα 2** Παρεμβάλλουμε ευθεία  $Y(t)=a+bt$  στη συστάδα των σημείων  $(t_i, Y_i)$ , με 2 τρόπους (είτε γραφικά είτε με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων – βλέπε παρακάτω) και στη συνέχεια προσδιορίζουμε αντιστοίχως την κλίση,  $b$ , της ευθείας.

Γραφική μέθοδος

Σχεδιάζουμε με χάρακα μια ευθεία γραμμή η κλίση της οποίας προσδιορίζεται γραφικά ως

$$b = \tan \omega = \frac{\Delta Y}{\Delta t}$$

Αναλυτική μέθοδος («ελαχίστων τετραγώνων»)

Αντίθετα από τη γραφική μέθοδο, δε σχεδιάζουμε την ευθεία, αλλά υπολογίζουμε: την κλίση  $b$  της ευθείας με απόλυτη ακρίβεια αναλυτικά από τον τύπο

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^N (t_i y_i) - \left( \sum_{i=1}^N t_i \right) \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N (t_i^2) - \left( \sum_{i=1}^N t_i \right)^2}$$

και την τεταγμένη  $a$  της τομής της ευθείας με τον άξονα  $Y$  από τον τύπο

$$a = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N y_i - b \sum_{i=1}^N t_i \right)$$

Συνίσταται ή χρήση Excel για εξοικονόμηση χρόνου στους παραπάνω υπολογισμούς

**ΠΡΟΣΟΧΗ** στις μονάδες μέτρησης !!!

**Βήμα 3** Υπολογίζουμε τη σταθερή ταχύτητα ελεύθερης βύθισης του σφαιριδίου,  $U=b$  (προσοχή στις μονάδες!). Ισχύει και για τις δύο περιπτώσεις (γραφική & αναλυτική μέθοδος)

**Βήμα 4** Προσδιορίζουμε το ιξώδες του υγρού από την έκφραση Stokes για την αντίσταση σφαίρας που βυθίζεται ελεύθερα,  $F=6\pi R\mu U = B_{\text{(βάρος σφαιριδίου)}} - A_{\text{(Ανωση σφαιριδίου)}}$ ,

$$\text{η οποία δίνει } \mu = \frac{2(\rho_s - \rho)gR^2}{9U}$$

**Βήμα 5** Υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds,  $Re=2R\rho U/\mu$  και ελέγχουμε εάν  $Re \ll 1$