

ΒΙΟΦΥΣΙΚΗ

2. ΣΤΑΤΙΚΗ – ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΡΟΠΕΣ ΚΑΙ ΜΟΧΛΟΙ

ΓΚΛΩΤΣΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

dimglo@uniwa.gr

Τμήμα Μηχανικών Βιοϊατρικής
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Δυνάμεις και Ροπές

2. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Απλά μοντέλα

3. Διανυσματικός λογισμός

4. Παραδείγματα – Ασκήσεις πράξεις Διανυσμάτων

5. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Σύνθετα μοντέλα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Δυνάμεις και Ροπές

2. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Απλά μοντέλα

3. Διανυσματικός λογισμός

4. Παραδείγματα – Ασκήσεις πράξεις Διανυσμάτων

5. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Σύνθετα μοντέλα

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δύναμη: δράση ενός σώματος σε ένα άλλο / αιτία αλλαγής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος (αλλαγή θέσης) / αιτία παραμόρφωσης ενός σώματος (αλλαγή γεωμετρίας) / διανυσματικό μέγεθος

Στατική: Όταν οι δυνάμεις εφαρμόζονται / ασκούνται σε σώματα που έχουν σταθερή θέση στο χώρο - ισορροπούν

Δυναμική: Όταν οι δυνάμεις εφαρμόζονται / ασκούνται σε σώματα που μεταβάλλουν τη θέση τους στο χώρο – κίνηση

Αντοχή: Όταν οι δυνάμεις εφαρμόζονται / ασκούνται σε σώματα μεταβάλλοντας την μορφή τους (παραμόρφωση)

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Νεύτωνας (1643 μ.Χ.-1727 μ.Χ.) φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος, φιλόσοφος

1^{ος} νόμος: $\Sigma F=0$

Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν σε ένα σύστημα στο οποίο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη. Το σύστημα αυτό διατηρεί σταθερή την ταχύτητά του

2^{ος} νόμος: $F = m * \gamma$

m: μάζα (ποσότητα ύλης)

γ : επιτάχυνση

3^{ος} νόμος: Δράση – Αντίδραση

Μονάδα μέτρησης Δύναμης: $N = Kg * m / sec^2$, $1 N = 0,10 kp$, $1 kp = 9.8 N$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Ροπή: διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται από το γινόμενο της δύναμης και της απόστασης. Δείχνει την 'τάση' που έχει μια δύναμη να περιστρέψει το στέρεο σώμα στο οποίο ασκείται ως προς ένα σημείο ή έναν άξονα. Π.χ. Κίνηση οστών-αρθρώσεων

$$M = F * d$$

F: δύναμη

d: απόσταση

Μονάδα μέτρησης Ροπής: N * m, kr * m

Δύο βασικές ροπές είναι η ροπή κάμψης και ροπή στρέψης.

Ροπή κάμψης: Δείχνει την 'τάση' που έχει μια δύναμη να προκαλέσει κάμψη στο υλικό στο οποίο ασκείται

Ροπή στρέψης: Δείχνει την 'τάση' που έχει μια δύναμη να προκαλέσει στρέψη στο υλικό στο οποίο ασκείται

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Δυνάμεις και Ροπές

2. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Απλά μοντέλα

3. Διανυσματικός λογισμός

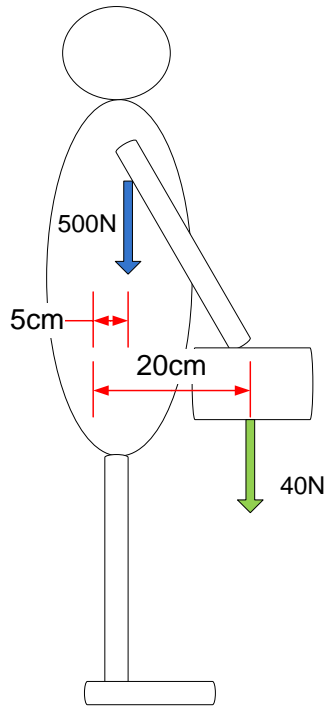
4. Παραδείγματα – Ασκήσεις πράξεις Διανυσμάτων

5. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Σύνθετα μοντέλα

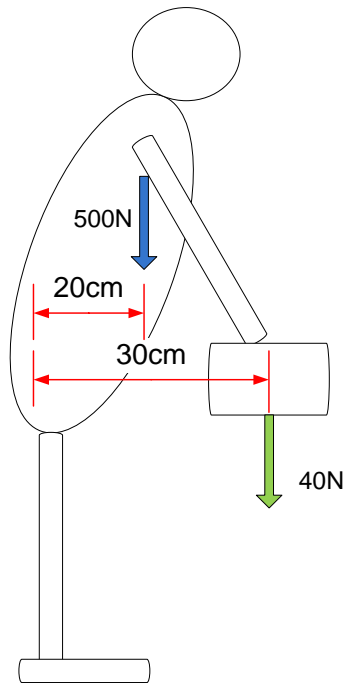
ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.1α

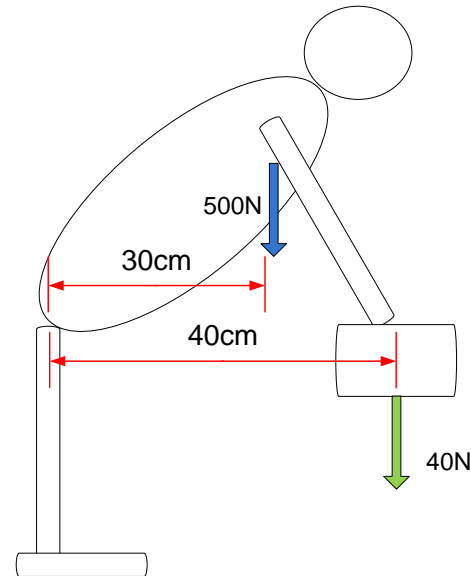
-Έστω κάμψη της σπονδυλικής στήλης για την ανύψωση βάρους όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Βρείτε την ροπή και τη δύναμη που χρειάζεται να ασκήσουν οι μύες του κορμού σε κάθε περίπτωση. Το πάχος των μυών του κορμού είναι 5cm



A



B



Γ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.1β

-Χρησιμοποιούμε το μοντέλο που θεωρεί ότι ο κορμός από τη μέση και πάνω είναι ένα ενιαίο στέρεο σώμα, ενώ η κάμψη γίνεται στην οσφυϊκή μοίρα και πιο συγκεκριμένα μεταξύ L4-L5 ή L5-S1 (HAT model)

-Ο οξύς πόνος στη μέση εμφανίζεται σχεδόν στο 80% των ανθρώπων τουλάχιστον μία φορά στη ζωή τους

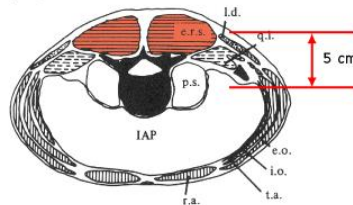
- Ασθένεια που διαρκεί έως και 7 εβδομάδες για την πλειοψηφία των ασθενών

-Έχει άμεση σχέση με την στάση του σώματος

-Στην καθιστή θέση η οσφυϊκή μοίρα πιέζεται ακόμα περισσότερο από ότι στην όρθια θέση

-Η καλύτερη θέση θεωρείται ανάσκελα ξαπλωμένος

-Οι σπόνδυλοι μπορούν να αντέξουν δυνάμεις τις τάξεως των μερικών kN



Πηγή:

<https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/erector-spinae-muscle-forces>

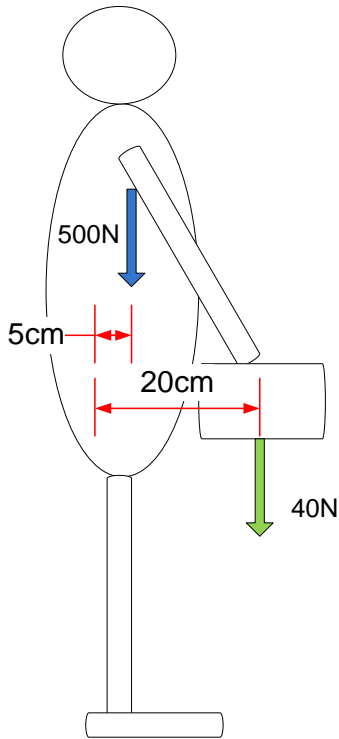
Πηγή:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/83/Gray_111_-_Vertebral_column.png

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.1γ

-Έστω κάμψη της σπονδυλικής στήλης για την ανύψωση βάρους όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Βρείτε την ροπή σε κάθε περίπτωση



$$M_1 = 500N \times 0.05m = 25Nm$$

$$M_2 = 40N \times 0.2m = 8Nm$$

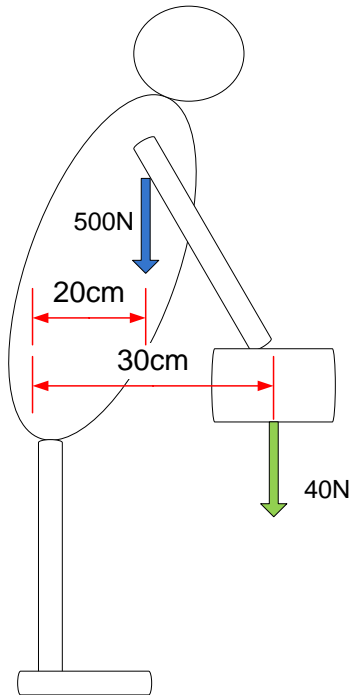
$$M = M_1 + M_2 = 25Nm + 8Nm = 33Nm$$

$$M = F \times d \Leftrightarrow F = \frac{M}{d} = \frac{33Nm}{0.05m} = 660N$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.1δ

-Έστω κάμψη της σπονδυλικής στήλης για την ανύψωση βάρους όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Βρείτε την ροπή σε κάθε περίπτωση



$$M_1 = 500N \times 0.2m = 100Nm$$

$$M_2 = 40N \times 0.3m = 12Nm$$

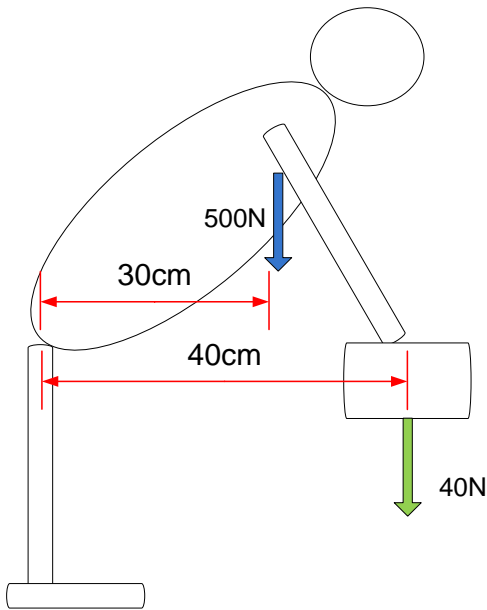
$$M = M_1 + M_2 = 100Nm + 12Nm = 112Nm$$

$$M = F \times d \Leftrightarrow F = \frac{M}{d} = \frac{112Nm}{0.05m} = 2240N$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.1ε

-Έστω κάμψη της σπονδυλικής στήλης για την ανύψωση βάρους όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Βρείτε την ροπή σε κάθε περίπτωση



$$M_1 = 500N \times 0.3m = 150Nm$$

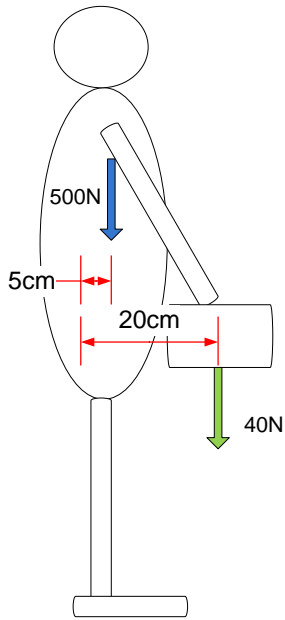
$$M_2 = 40N \times 0.4m = 16Nm$$

$$M = M_1 + M_2 = 150Nm + 16Nm = 166Nm$$

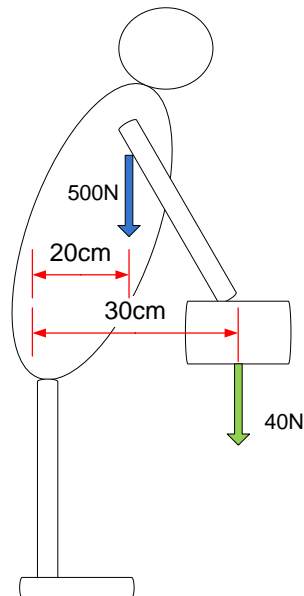
$$M = F \times d \Leftrightarrow F = \frac{M}{d} = \frac{166Nm}{0.05m} = 3320N$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

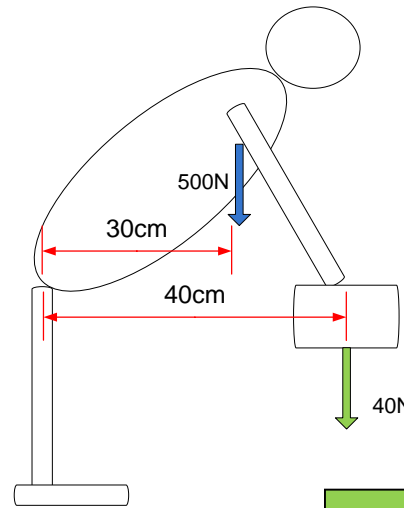
Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.1στ



A



B



Γ

Ποια στάση είναι η βέλτιστη για την ανύψωση βαρών ώστε να μην επιβαρύνουμε την οσφυϊκή μοίρα της σπονδυλικής στήλης;

$$M = 33Nm$$

$$F = 640N$$

$$M = 112Nm$$

$$F = 2240N$$

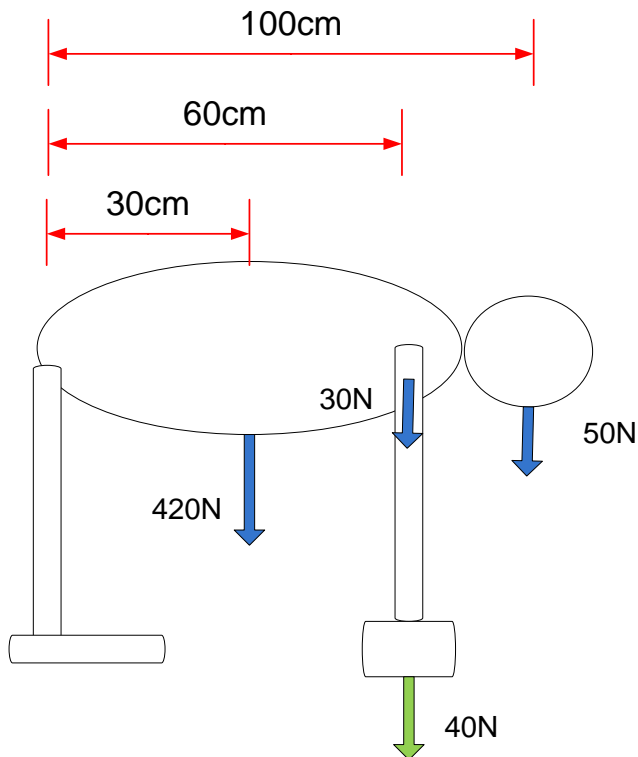
$$M = 166Nm$$

$$F = 3320N$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

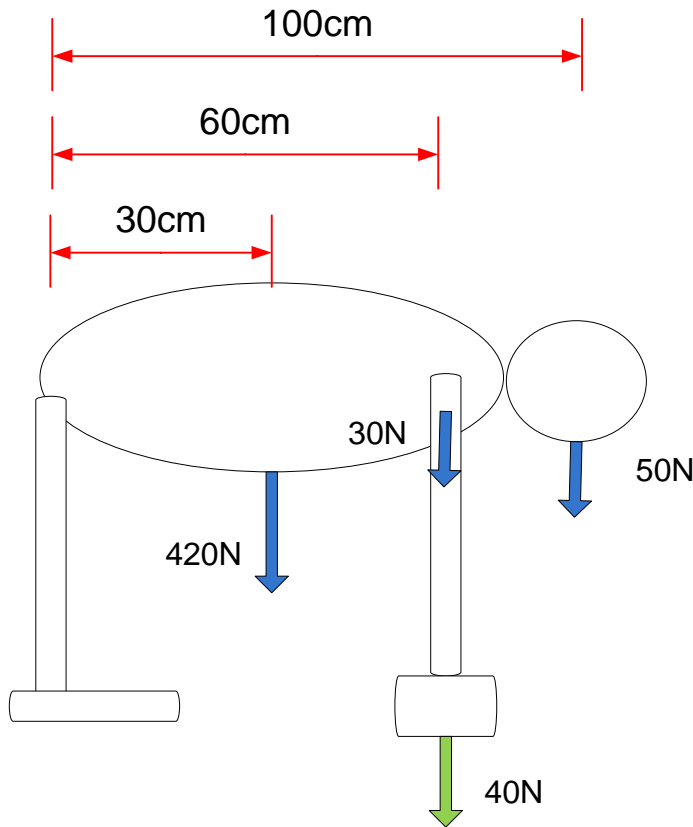
Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.2α

-Έστω ότι θέλουμε να σηκώσουμε αντικείμενο από το έδαφος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε την ροπή που ασκείται στην οσφυϊκή μοίρα και τη δύναμη που χρειάζεται να ασκήσουν οι μύες του κορμού σε αυτή τη στάση



ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.2β



$$M_1 = 420N \times 0.3m = 126Nm$$

$$M_2 = 30N \times 0.6m = 18Nm$$

$$M_3 = 40N \times 0.6m = 26Nm$$

$$M_4 = 50N \times 1m = 50Nm$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 =$$

$$= 126Nm + 18Nm + 26Nm + 50Nm = 220Nm$$

$$M = F \times d \Leftrightarrow F = \frac{M}{d} = \frac{220Nm}{0.05m} = 4400N$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΟΠΕΣ

Δυνάμεις και Ροπές: Αριθμητικό παράδειγμα 2.3

-Έστω ότι θέλουμε να σηκώσουμε αντικείμενο 40N από το έδαφος. Ποια είναι η στάση ώστε να μπορέσουμε να σηκώσουμε το αντικείμενο με μικρότερη καταπόνηση στην οσφυϊκή μοίρα από αυτή που ασκείται με την στάση της άσκησης 2;

A/ Σχεδιάστε το μοντέλο θεωρώντας τον κορμό-χέρια-κεφάλι σαν ένα ενιαίο στέρεο σώμα

B/ Βρείτε την ροπή που ασκείται στην οσφυϊκή μοίρα

Γ/ Βρείτε τη δύναμη που χρειάζεται να ασκήσουν οι μύες του κορμού

Θεωρείστε 500N για τον κορμό-χέρια-κεφάλι και 5cm πάχος των μυών ανύψωσης του κορμού.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Δυνάμεις και Ροπές

2. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Απλά μοντέλα

3. Διανυσματικός λογισμός

4. Παραδείγματα – Ασκήσεις πράξεις Διανυσμάτων

5. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Σύνθετα μοντέλα

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ένα στερεό σώμα μπορεί να δέχεται πολλαπλές δυνάμεις. Η τελική επίδραση που θα έχουν οι δυνάμεις στο στέρεο σώμα (ισορροπία, αλλαγή θέσης, παραμόρφωση) εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως η μάζα του σώματος, η γεωμετρία του σώματος, η υλική σύσταση του σώματος, το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων, η κατεύθυνση των δυνάμεων, το μέτρο των δυνάμεων

Οι δυνάμεις είναι **διανυσματικά μεγέθη** και η μελέτη τους στο χώρο γίνεται σε συστήματα συντεταγμένων, όπως είναι το **καρτεσιανό** και το **πολικό** σύστημα

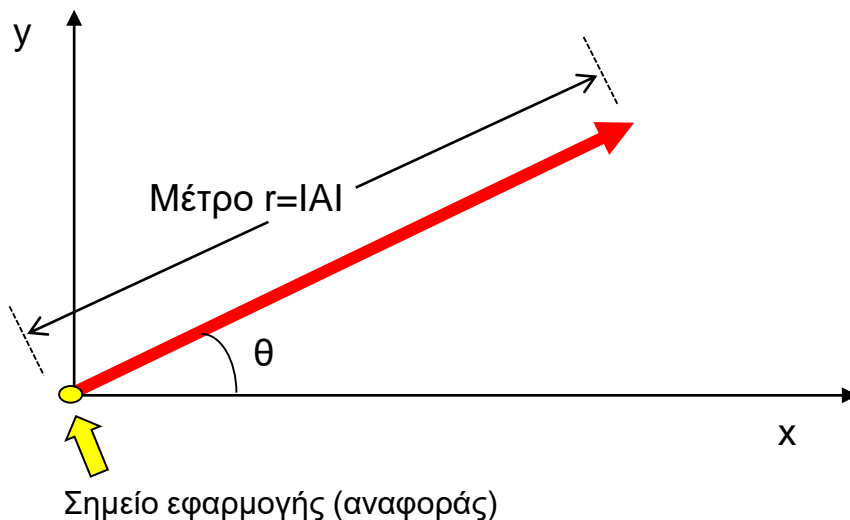
Σαν σημείο εφαρμογής των δυνάμεων πολλές φορές θεωρούμε το **κέντρο μάζας του σώματος**: η μάζα ενός σώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι συγκεντρώνεται σε ένα σημείο στον χώρο

Οι δυνάμεις μπορεί να κατηγοριοποιηθούν σε δύο μεγάλες ομάδες: Δυνάμεις επαφής (χρειάζεται επαφή των σωμάτων που αλληλεπιδρούν π.χ. ελατήριο, τριβή, μύες, τένοντες, αρθρώσεις, σπόνδυλοι) και δυνάμεις πεδίου (δεν χρειάζεται επαφή των σωμάτων που αλληλεπιδρούν π.χ. βαρυτικές, ηλεκτρικές, μαγνητικές, πυρηνικές)

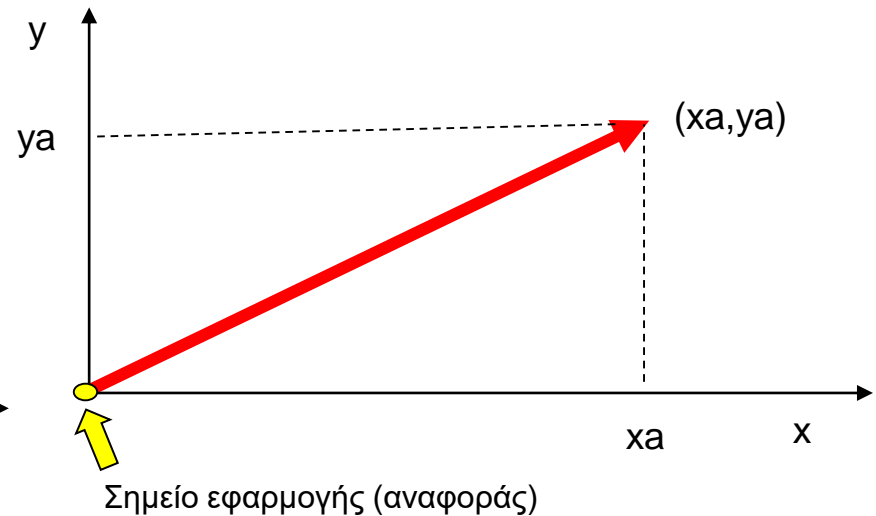
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Διανύσματα, Συστήματα συντεταγμένων, Σημεία εφαρμογής (αναφοράς): Το διάνυσμα έχει πλάτος (r , $|A|$) και κατεύθυνση. Επίσης, στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων περιγράφεται από τις συντεταγμένες

Στις **Πολικές Συντεταγμένες** το διάνυσμα (βέλος) περιγράφεται από το **μέτρο** (συναφές με το μήκος του διανύσματος- r) και την **γωνία** (μας δείχνει την κατεύθυνση- θ)



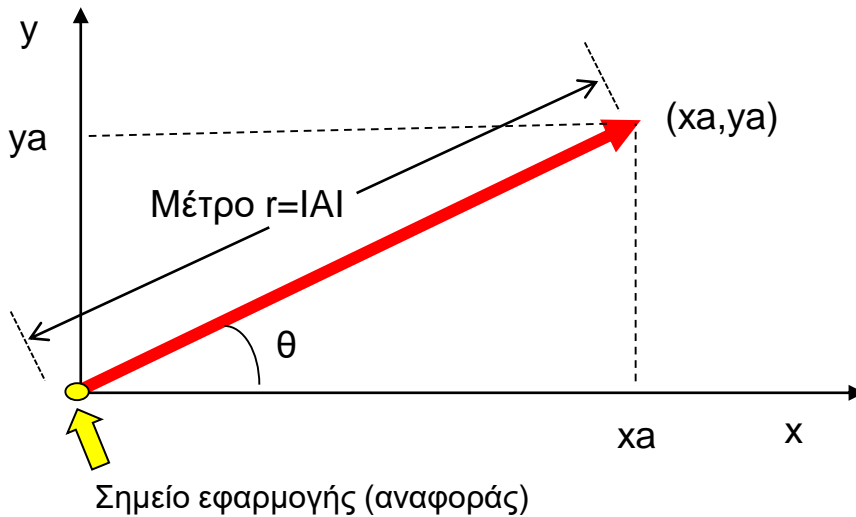
Στις **Καρτεσιανές Συντεταγμένες** το διάνυσμα (βέλος) περιγράφεται από την προβολή της αιχμής του βέλους στον x και στον y άξονα (x_a, y_a)



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Σύνδεση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων

Από πολικές (r, θ) σε καρτεσιανές (x_a, y_a) : Γνωρίζω το r και το θ , θέλω να βρω το x_a, y_a



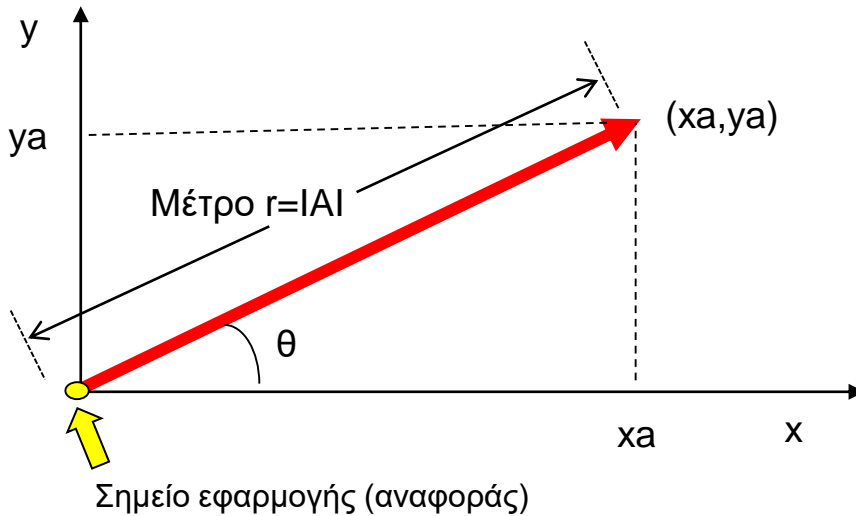
$$\sin(\theta) = \frac{\text{απέναντι - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{y_a}{r} \Leftrightarrow y_a = r \times \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{προσκειμένη - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{x_a}{r} \Leftrightarrow x_a = r \times \cos(\theta)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Σύνδεση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων

Από καρτεσιανές (x_a, y_a) σε πολικές (r, θ) : Γνωρίζω το x_a, y_a , θέλω να βρω το r και το θ



$$\text{Πυθαγόρειο - θεώρημα} := r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{απέναντι - κάθετος}}{\text{προσκειμένη - κάθετος}} = \frac{y_a}{x_a} \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_a}{x_a}\right)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Σύνδεση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων

Από πολικές (r, θ) σε καρτεσιανές (x_a, y_a) :

Αν γνωρίζουμε το μέτρο και τη γωνία, μπορώ να υπολογίσω τις συντεταγμένες x και y ως εξής:

$$x_a = r \times \cos(\theta)$$

$$y_a = r \times \sin(\theta)$$

Από καρτεσιανές (x_a, y_a) σε πολικές (r, θ) :

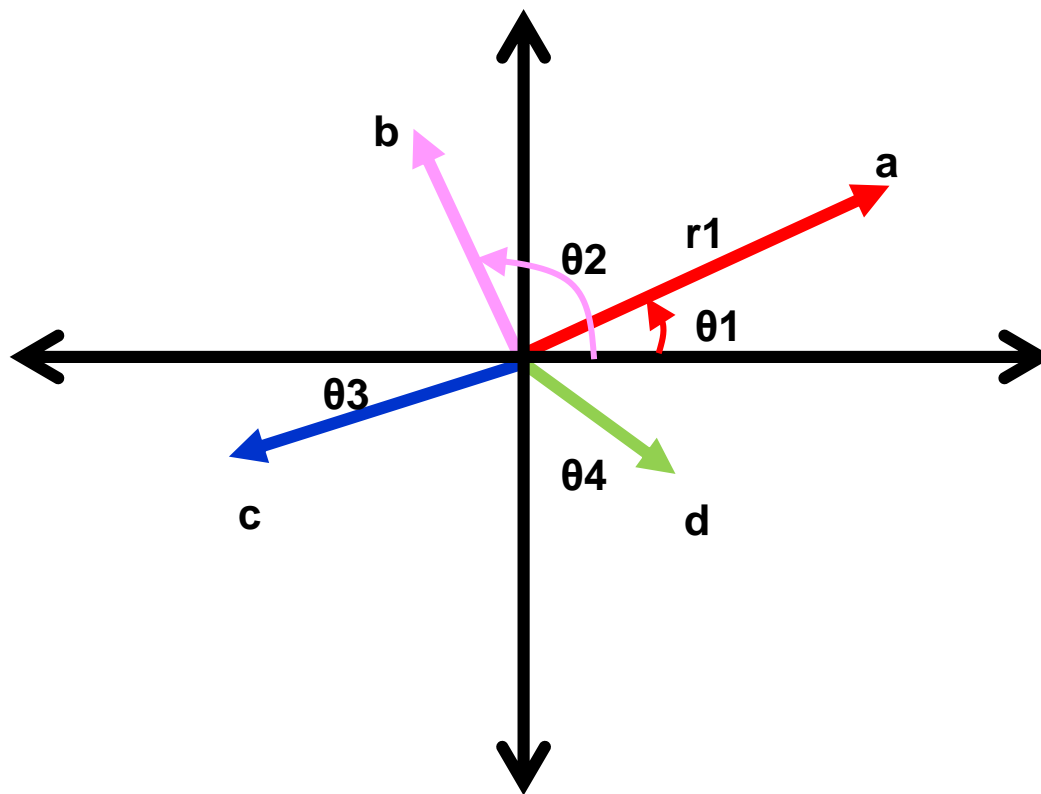
Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες x και y μπορώ να υπολογίσω το μέτρο και τη γωνία, ως εξής:

$$r = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_a}{x_a}\right)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πολικό σύστημα συντεταγμένων και διανύσματα



$a(r_1, \theta_1)$

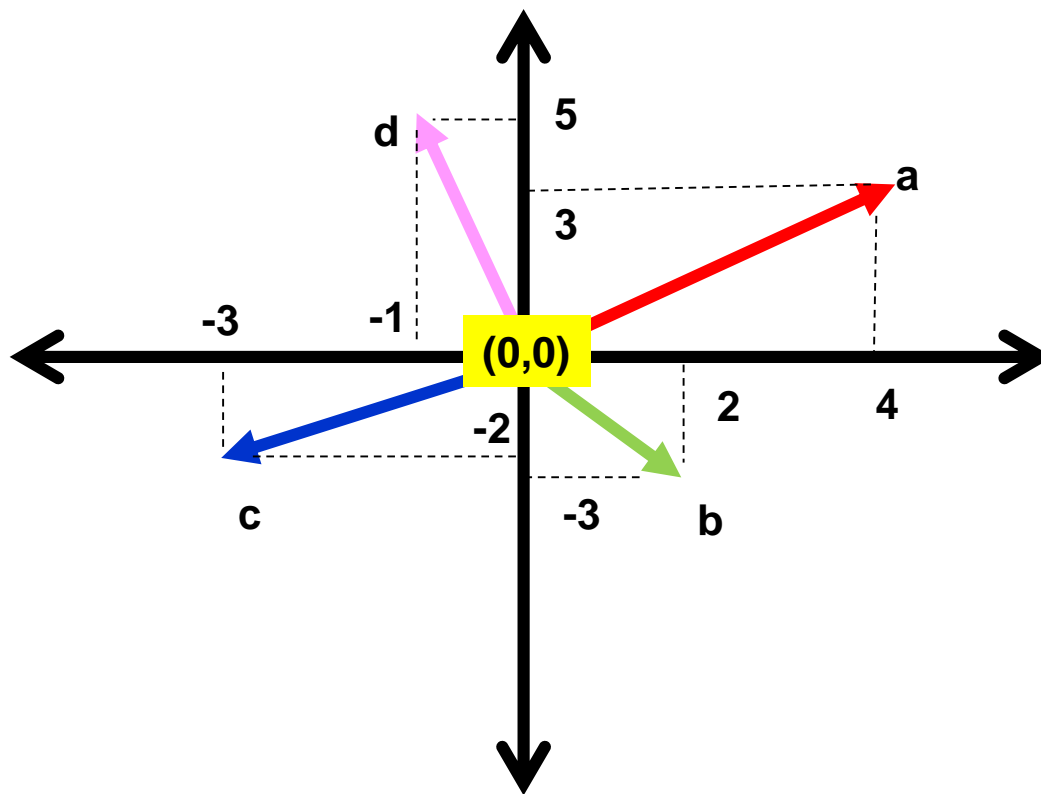
$b(r_2, \theta_2)$

$c(r_3, \theta_3)$

$d(r_4, \theta_4)$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

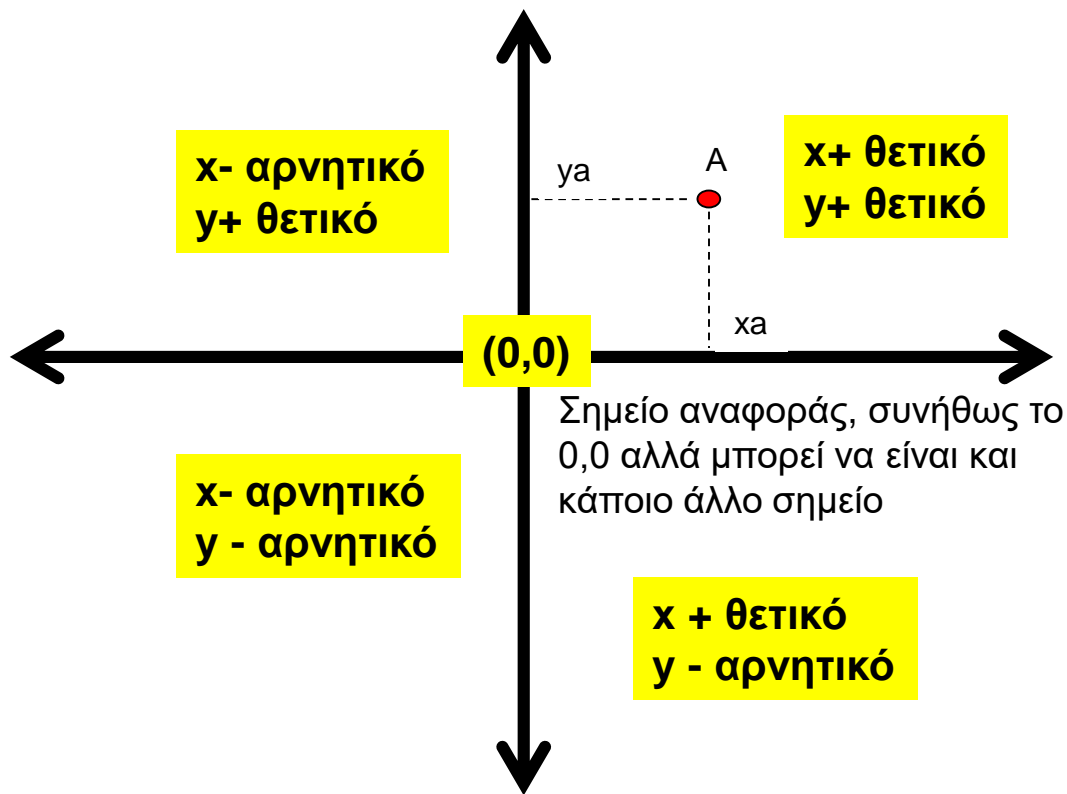
Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και διανύσματα



$a(4,3)$
 $b(2,-3)$
 $c(-3,-2)$
 $d(-1,5)$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων



Προσδιορισμός της θέσης στο χώρο ως προς ένα σημείο αναφοράς

Για να εντοπίσουμε τη θέση ενός σημείου, υπολογίζουμε την προβολή του σημείου στον άξονα x και στον άξονα y (απόσταση του x_a και του y_a από το σημείο αναφοράς)

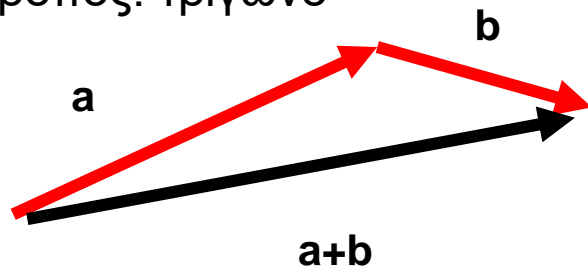
Έτσι προκύπτουν οι συντεταγμένες του σημείου $A(x_a, y_a)$

Ρενέ Ντεκάρτ (Καρτέσιος) (1596 μ.Χ.-1650 μ.Χ.) φιλόσοφος, μαθηματικός, φυσικές επιστήμες

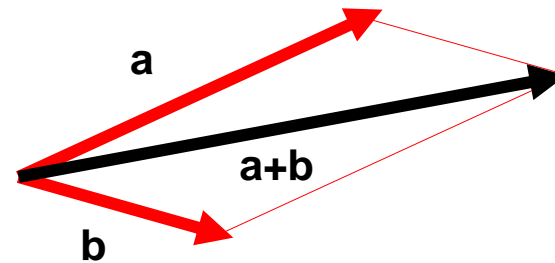
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Πρόσθεση διανυσμάτων

Α' τρόπος: τρίγωνο



Β' τρόπος: παραλληλόγραμμα



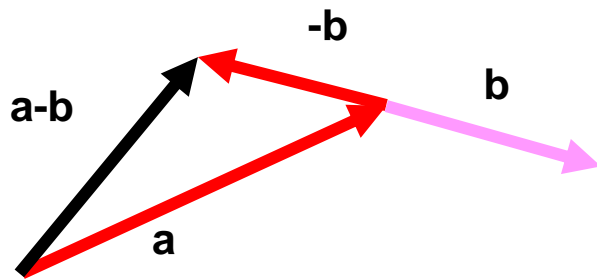
Ισχύουν

1/ $a+b=b+a$

2/ $a+(b+c)=(a+b)+c$

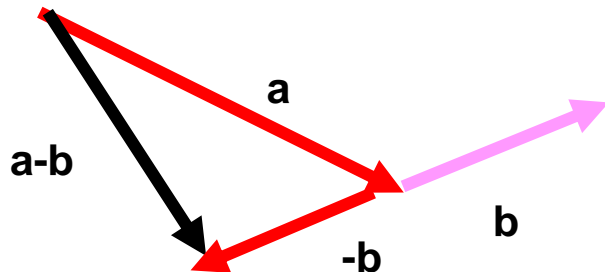
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αφαίρεση διανυσμάτων



Ισχύει

$$a-b=a+(-b)$$



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Δυνάμεις και Ροπές

2. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Απλά μοντέλα

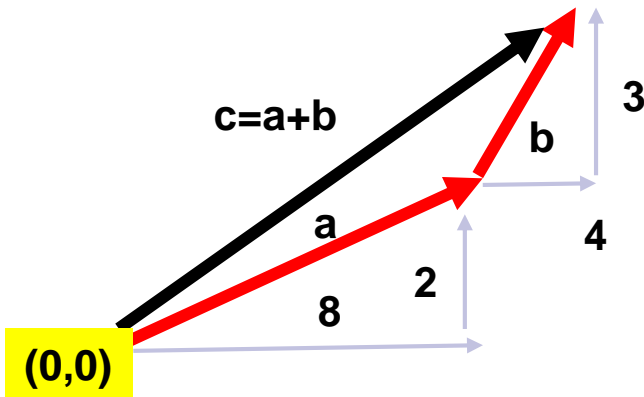
3. Διανυσματικός λογισμός

4. Παραδείγματα – Ασκήσεις πράξεις Διανυσμάτων

5. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Σύνθετα μοντέλα

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.1



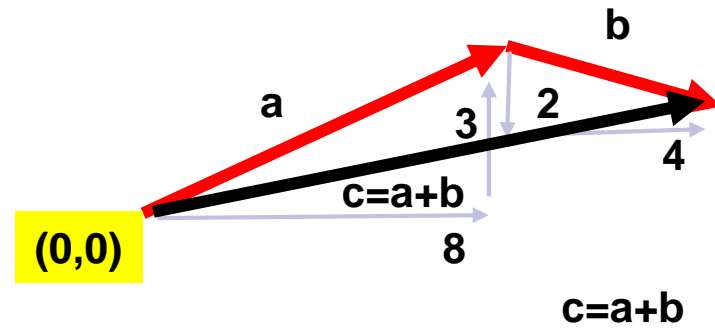
Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (8, 2)$$

$$b \rightarrow (4, 3)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a+b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a+b=(8+4, 2+3)=(12, 5)$$



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (8, 3)$$

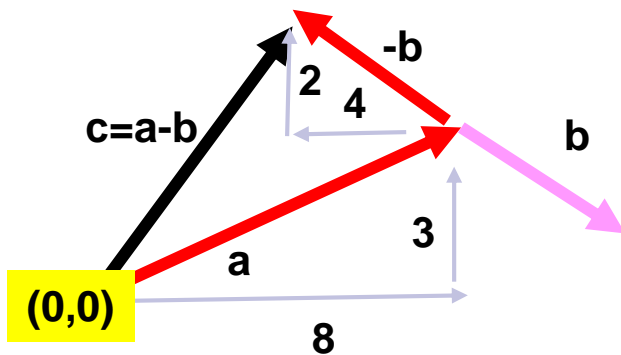
$$b \rightarrow (4, 2)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a+b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a+b=(8+4, 3-2)=(12, 1)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.2



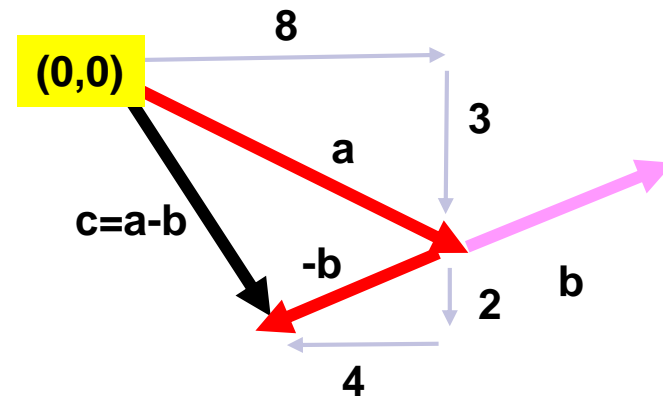
Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (8,3)$$

$$b \rightarrow (4,2)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a+b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a-b=a+(-b)=(8-4,3+2)=(4,5)$$



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (8,3)$$

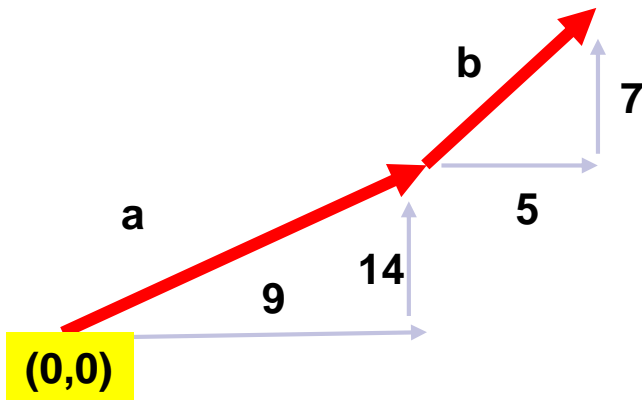
$$b \rightarrow (4,2)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a+b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a-b=a+(-b)=(8-4,-3-2)=(4,-5)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.3



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

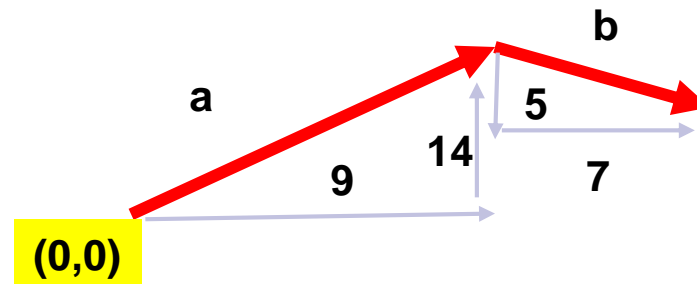
$$a \rightarrow (9,14)$$

$$b \rightarrow (5,7)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a+b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a+b=?$$

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (9,14)$$

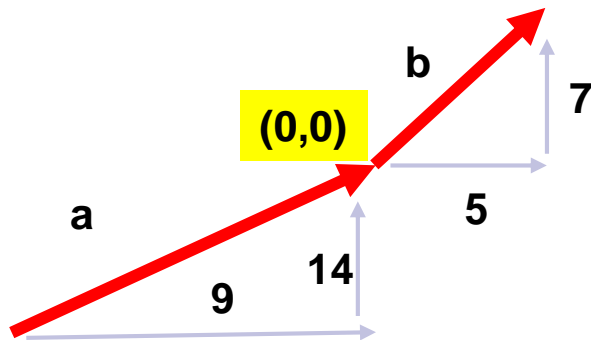
$$b \rightarrow (7,5)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a+b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a+b=?$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.4



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

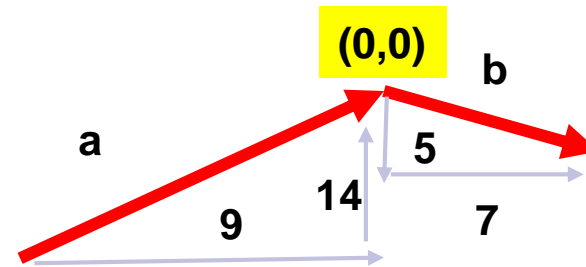
$$a \rightarrow (9, 14)$$

$$b \rightarrow (5, 7)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c = a + b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0, 0)$

$$c = a + b = ?$$

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (9, 14)$$

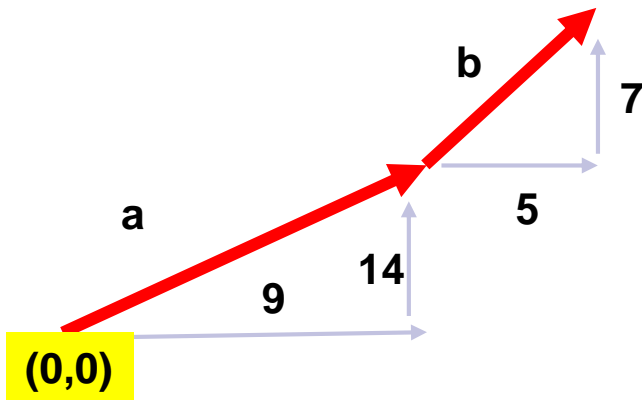
$$b \rightarrow (7, 5)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c = a + b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0, 0)$

$$c = a + b = ?$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.5



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

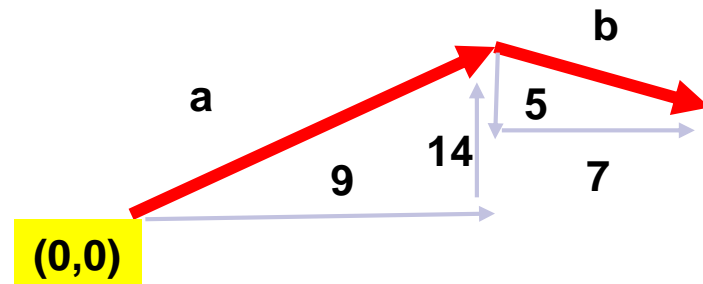
$$a \rightarrow (9,14)$$

$$b \rightarrow (5,7)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a-b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a-b=?$$

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (9,14)$$

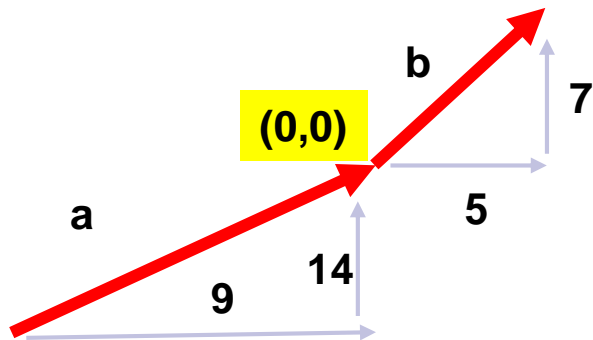
$$b \rightarrow (7,5)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a-b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a-b=?$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.6



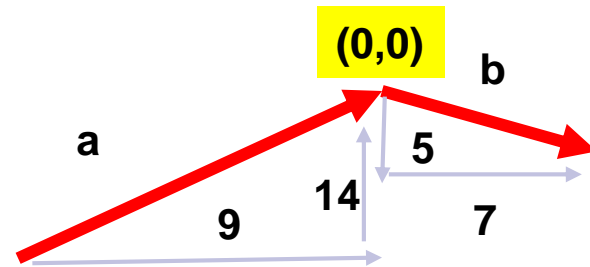
Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (9,14)$$

$$b \rightarrow (5,7)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a-b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a-b=?$$



Δίνονται οι αποστάσεις/προβολές των διανυσμάτων a και b ως προς τον x και y άξονα:

$$a \rightarrow (9,14)$$

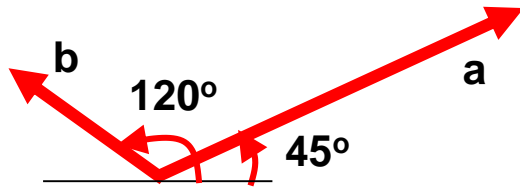
$$b \rightarrow (7,5)$$

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $c=a-b$ ως προς το σημείο αναφοράς $(0,0)$

$$c=a-b=?$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.7α



Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων **a** και **b**:

Πολικές συντεταγμένες

a \rightarrow (100, 45°)

b \rightarrow (50, 120°)

Να βρεθεί το **a+b** στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

1. Μετατρέπω σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x_a = r_a \times \cos(\theta_a) = 100 \times \cos(45) = 100 \times 0.707 = 70.71$$

$$y_a = r_a \times \sin(\theta_a) = 100 \times \sin(45) = 100 \times 0.707 = 70.71$$

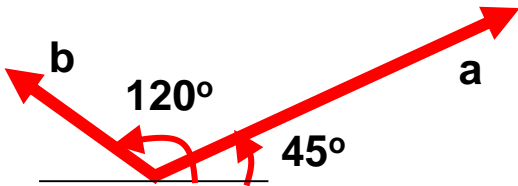
$$x_b = r_b \times \cos(\theta_b) = 50 \times \cos(120) = 50 \times (-0.5) = -25$$

$$y_b = r_b \times \sin(\theta_b) = 50 \times \sin(120) = 50 \times 0.866 = 43.30$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.7β

2. Τοποθετώ στο καρτεσιανό σύστημα

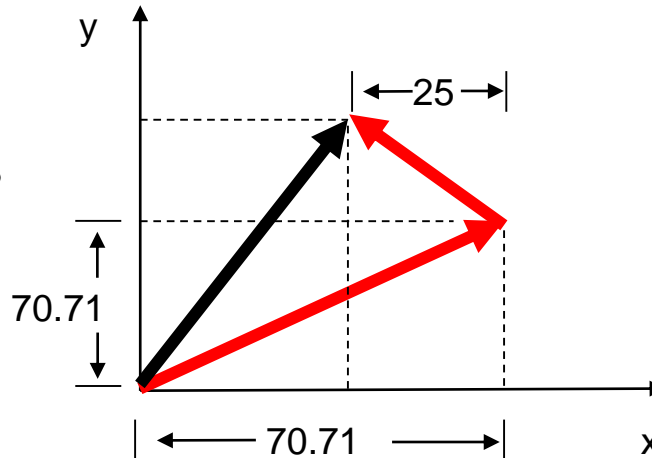


Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων a και b :

Πολικές συντεταγμένες

$a \rightarrow (100, 45^\circ)$

$b \rightarrow (50, 120^\circ)$



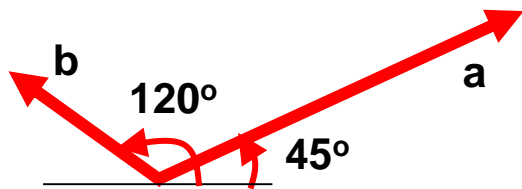
Να βρεθεί το $a+b$ στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

3. Βρίσκω τις συντεταγμένες του συνιστάμενου διανύσματος $a+b$

$$c = a + b = (70.71 - 25, 70.71 + 43.3) = (45.71, 114.01)$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.7γ



4. Μετατρέπω το νέο διάνυσμα σε πολικές συντεταγμένες

$$r = \sqrt{114.01^2 + 45.71^2} = 122.83 \rightarrow 122$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ya}{xa}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{114.01}{45.71}\right) = 68.15^\circ \rightarrow 68^\circ$$

Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων a και b:

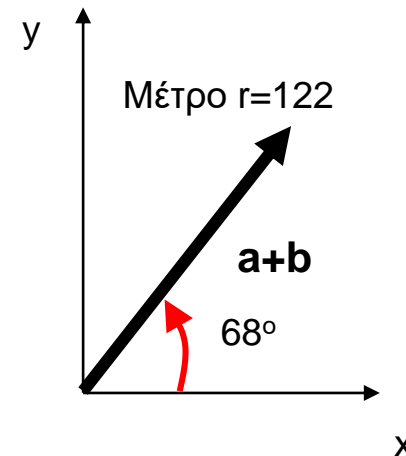
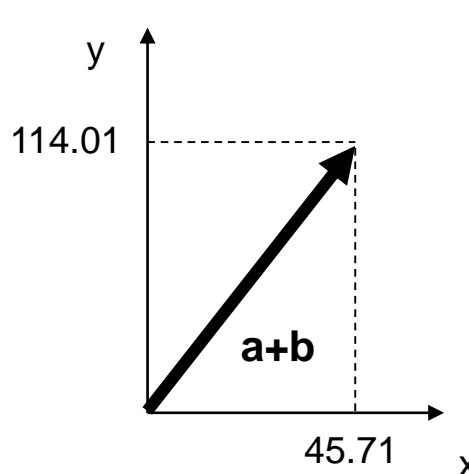
Πολικές συντεταγμένες

a \rightarrow (100, 45°)

b \rightarrow (50, 120°)

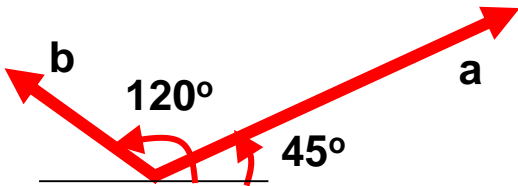
Να βρεθεί το **a+b** στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

5. Σχεδιάζω στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα το νέο διάνυσμα



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.8



Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων **a** και **b**:

Πολικές συντεταγμένες

a \rightarrow (100, 45°)

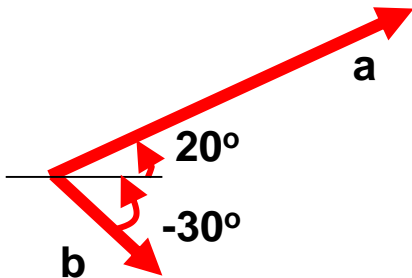
b \rightarrow (50, 120°)

Να βρεθεί το **a-b** στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.9



Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων a και b :

Πολικές συντεταγμένες

$a \rightarrow (120, 20^\circ)$

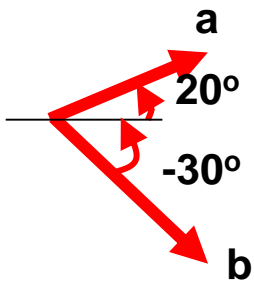
$b \rightarrow (40, -30^\circ)$

Να βρεθούν τα $a+b$ και $a-b$ στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.10



Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων a και b :

Πολικές συντεταγμένες

$a \rightarrow (30, 20^\circ)$

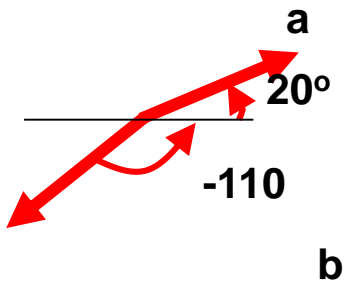
$b \rightarrow (50, -30^\circ)$

Να βρεθούν τα $a+b$ και $a-b$ στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.11



Δίνονται το μέτρο και η γωνία των διανυσμάτων a και b :

Πολικές συντεταγμένες

$$a \rightarrow (30, 20^\circ)$$

$$b \rightarrow (40, -110^\circ)$$

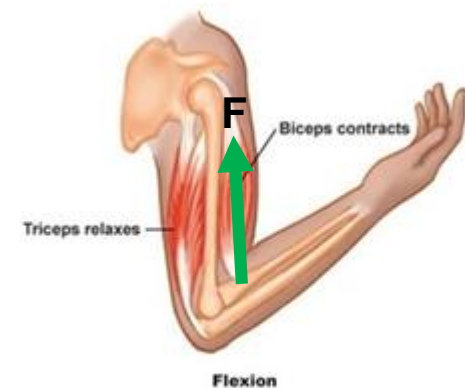
Να βρεθούν τα $a+b$ και $a-b$ στο καρτεσιανό και στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

Άσκηση για μελέτη στο σπίτι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.12α

Έστω ότι ο δικέφαλος μυς ασκεί δύναμη $F=20\text{N}$ με γωνία 35° ως προς τον πήχη. Η δύναμη αυτή διατηρεί σταθερή την άρθρωση και βοηθάει στην ανύψωση του χεριού. Να βρεθούν οι δυνάμεις που πραγματοποιούν τις δύο αυτές λειτουργίες



© 2011 Pearson Education, Inc.

Πηγή: <https://exerciseonarthritis.weebly.com/muscles.html>

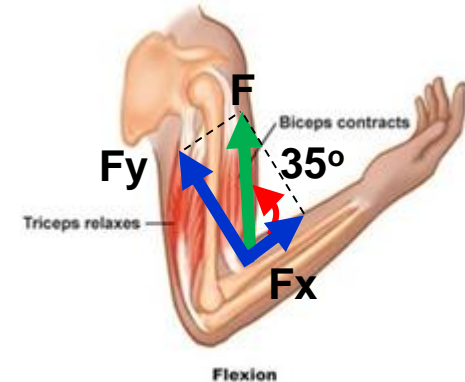
Εκπαιδευτική προβολή:

<https://www.youtube.com/watch?v=49680qdWAmY>

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.12β

Οι δύο δυνάμεις είναι η F_x και η F_y ,
συνισταμένη των οποίων είναι η F .
Τις σχεδιάζω με την μέθοδο του
παραλληλογράμμου



© 2011 Pearson Education, Inc.

Πηγή: <https://exerciseonarthritis.weebly.com/muscles.html>

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.12γ

Υπολογίζω τις δύο δυνάμεις

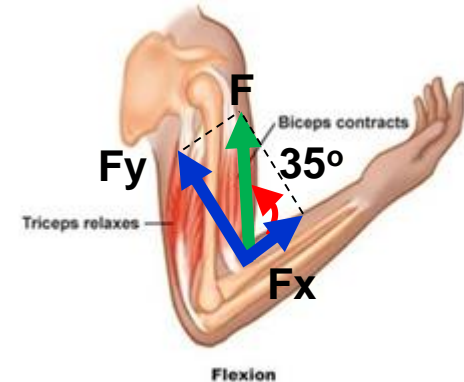
$$\sin(\theta) = \frac{\text{απέναντι - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_y}{F} \Leftrightarrow F_y = F \times \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{προσκείμενη - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_x}{F} \Leftrightarrow F_x = F \times \cos(\theta)$$

$$F_y = F \times \sin(\theta) = 20N \times \sin(35) = 20N \times 0.57358 = 11.47N$$

$$F_x = F \times \cos(\theta) = 20N \times \cos(35) = 20N \times 0.81915 = 16.383N$$

Πότε η F_x θα γίνει ίση με την F_y ; Από τι εξαρτάται το αν η F_y θα είναι μεγαλύτερη από την F_x και το αντίστροφο δεδομένου ότι η F είναι σταθερή;

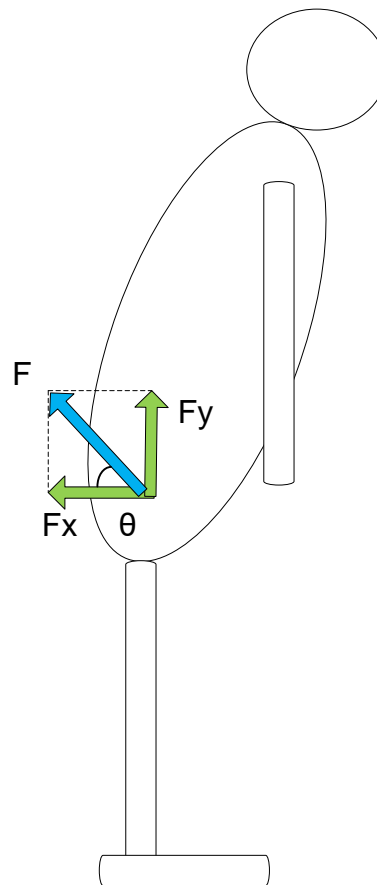


Πηγή: <https://exerciseonarthritis.weebly.com/muscles.html>

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.13α

Έστω ότι οι μύες του κορμού ασκούν δύναμη $F=500\text{N}$ με γωνία θ ως προς την οσφυϊκή μοίρα. Η δύναμη αυτή διατηρεί τον κορμό σε ισορροπία σε αυτή την στάση. Να βρεθούν οι επιμέρους δυνάμεις F_x και F_y για γωνίες 30° , 45° και 70°



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Πράξεις διανυσμάτων: Αριθμητικό παράδειγμα 4.13β

Υπολογίζω τις δύο δυνάμεις

$$\sin(\theta) = \frac{\text{απέναντι - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_y}{F} \Leftrightarrow F_y = F \times \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{προσκειμένη - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_x}{F} \Leftrightarrow F_x = F \times \cos(\theta)$$

$$F_y = F \times \sin(\theta) = 500N \times \sin(30) = 500N \times 0.5 = 250N$$

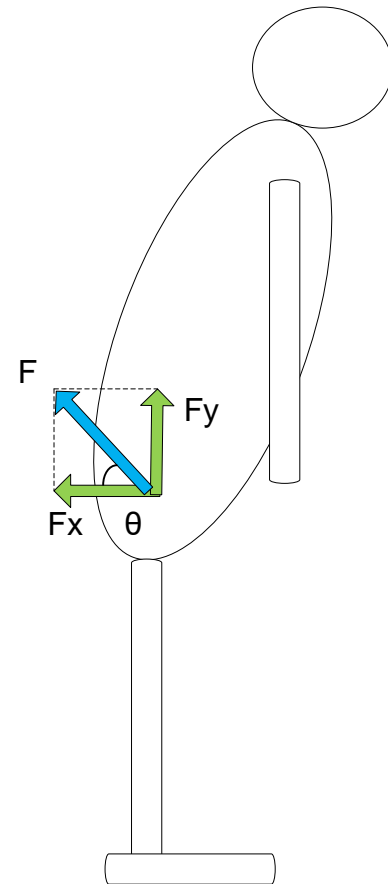
$$F_x = F \times \cos(\theta) = 500N \times \cos(30) = 500N \times 0.866 = 433N$$

$$F_y = F \times \sin(\theta) = 500N \times \sin(45) = 500N \times 0.707 = 353.6N$$

$$F_x = F \times \cos(\theta) = 500N \times \cos(45) = 500N \times 0.707 = 353.6N$$

$$F_y = F \times \sin(\theta) = 500N \times \sin(70) = 500N \times 0.93969 = 469.85N$$

$$F_x = F \times \cos(\theta) = 500N \times \cos(70) = 500N \times 0.3432 = 171N$$



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Δυνάμεις και Ροπές

2. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Απλά μοντέλα

3. Διανυσματικός λογισμός

4. Παραδείγματα – Ασκήσεις πράξεις Διανυσμάτων

5. Ασκήσεις: Στατική, μοχλοί, δυνάμεις και ροπές στο ανθρώπινο σώμα –Σύνθετα μοντέλα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.1

Το κέντρο βάρους κεφαλιού $W=50\text{N}$ απέχει 2.5cm από το υπομόχλιο (άτλαντας-1^{ος} αυχενικός σπόνδυλος), ενώ οι μύες που εξισορροπούν το κεφάλι απέχουν 5cm από το υπομόχλιο. Ποια είναι οι δύναμη F_M που ασκούν οι μύες και η δύναμη F_J που ασκείται στον άτλαντα;

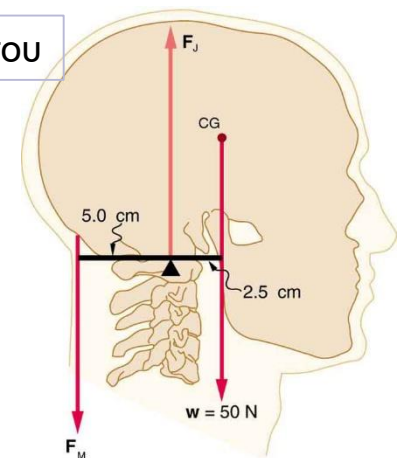
$$F_M \cdot (5\text{cm}) = 50\text{N} \cdot (2.5\text{cm}) \Leftrightarrow F_M = \frac{50\text{N} \cdot 2.5\text{cm}}{5\text{cm}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_M = 25\text{N}$$

$$F_M - F_J + F_H = 0 \Leftrightarrow F_J = F_M + F_H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_M = 50\text{N} + 25\text{N} = 75\text{N}$$

Μοχλός 1^{ου} τύπου



Πηγή:

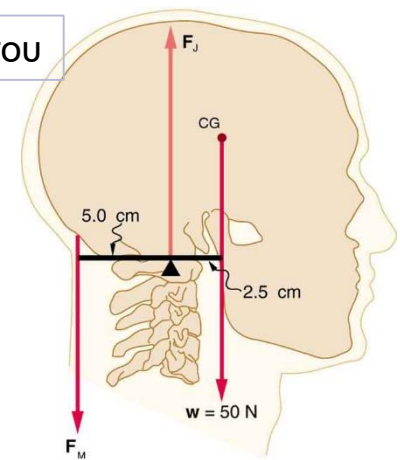
<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.2

Το κέντρο βάρους κεφαλιού $W=40\text{N}$ απέχει 2cm από το υπομόχλιο (άτλαντας- $1^{\text{ος}}$ αυχενικός σπόνδυλος), ενώ οι μύες που εξισορροπούν το κεφάλι απέχουν 4.5cm από το υπομόχλιο. Ποια είναι οι δύναμη F_M που ασκούν οι μύες και η δύναμη F_J που ασκείται στον άτλαντα;

Μοχλός $1^{\text{ου}}$ τύπου



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.3

Αντρας 75kg σηκώνεται στα δάκτυλα του ενός ποδιού. Η ανοδική δύναμη F_A ασκείται μέσω του αχίλλειου τένοντα που απέχει 4cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του αστραγάλου). Το βάρος W ασκείται στη βάση των δακτύλων που απέχουν 12cm από το υπομόχλιο. Ποια είναι οι δύναμη F_A που ασκείται στον αχίλλειο τένοντα και η δύναμη F_P που ασκείται στον αστράγαλο;

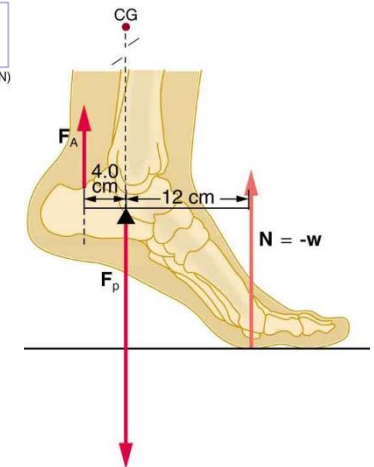
$$\left. \begin{aligned} F_A \cdot (4\text{cm}) &= W \cdot (12\text{cm}) \\ W = m \cdot g &= 75\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 735.75\text{N} \end{aligned} \right\} F_A \cdot (4\text{cm}) - 735.75\text{N} \cdot (12\text{cm}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_A = \frac{735.75\text{N} \cdot (12\text{cm})}{(4\text{cm})} = 2207.25\text{N}$$

$$F_A - F_P + W = 0 \Leftrightarrow F_P = F_A + W = 2207.25\text{N} + 735.75\text{N} = 2943\text{N}$$

Μοχλός 2^{ου} τύπου

$F_1(200\text{ N})$ $F_2(200\text{ N})$



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.4

Άντρας 75kg σηκώνεται στα δάκτυλα και των δύο ποδιών. Η ανοδική δύναμη F_A ασκείται μέσω του αχίλλειου τένοντα που απέχει 4cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του αστραγάλου). Το βάρος W ασκείται στη βάση των δακτύλων που απέχουν 12cm από το υπομόχλιο. Ποια είναι οι δύναμη F_A που ασκείται στον αχίλλειο τένοντα και η δύναμη F_P που ασκείται στον αστράγαλο;

$$F_A \cdot (4\text{cm}) = W \cdot (12\text{cm})$$

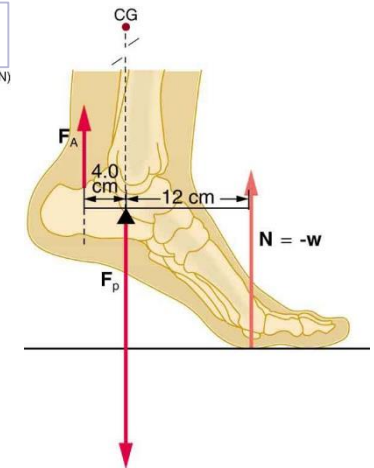
$$W = m \cdot g = \frac{75\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}}{2} = 367.875\text{N}$$

$$\Leftrightarrow F_A = \frac{367.875\text{N} \cdot (12\text{cm})}{(4\text{cm})} = 1103.625\text{N}$$

$$F_A - F_P + W = 0 \Leftrightarrow F_P = F_A + W = 1103.625\text{N} + 367.875\text{N} = 1471.5\text{N}$$

Μοχλός 2^{ου} τύπου

$F_1(200\text{ N})$ $F_2(200\text{ N})$



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.5

Αντρας 75kg σηκώνεται στα δάκτυλα του ενός ποδιού. Η ανοδική δύναμη F_A ασκείται μέσω του αχίλλειου τένοντα που απέχει 4cm+12cm από το υπομόχλιο (βάση των δακτύλων). Το βάρος W ασκείται στη βάση των δακτύλων. Η δύναμη F_P ασκείται στην άρθρωση των αστραγάλων που απέχουν 12 cm από το υπομόχλιο. Ποια είναι οι δύναμη F_A που ασκείται στον αχίλλειο τένοντα και η δύναμη F_P που ασκείται στον αστράγαλο;

$$F_A \cdot (4\text{cm} + 12\text{cm}) - F_P \cdot (12\text{cm}) = 0$$

$$F_A - F_P + W = 0$$

$$W = m \cdot g = 75\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 735.75\text{N}$$

$$F_A \cdot (16\text{cm}) - (F_A + W) \cdot (12\text{cm}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_A \cdot (16\text{cm}) - F_A \cdot (12\text{cm}) - 735.75\text{N} \cdot (12\text{cm}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_A \cdot (16\text{cm} - 12\text{cm}) = 735.75\text{N} \cdot (12\text{cm}) \Leftrightarrow$$

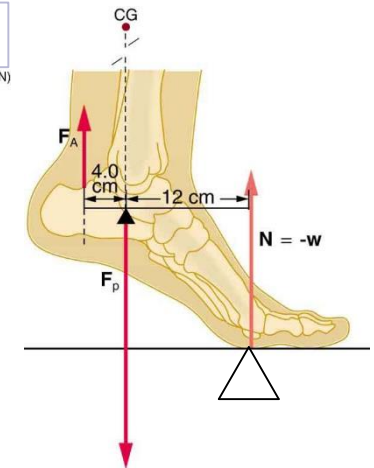
$$\Leftrightarrow F_A \cdot (4\text{cm}) = 735.75\text{N} \cdot (12\text{cm}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_A = \frac{735.75\text{N} \cdot (12\text{cm})}{(4\text{cm})} = 2207.25\text{N}$$

$$F_A - F_P + W = 0 \Leftrightarrow F_P = F_A + W = 2207.25\text{N} + 735.75\text{N} = 2943\text{N}$$

Μοχλός 2^{ου} τύπου

$F_1(200\text{ N})$ $F_2(200\text{ N})$



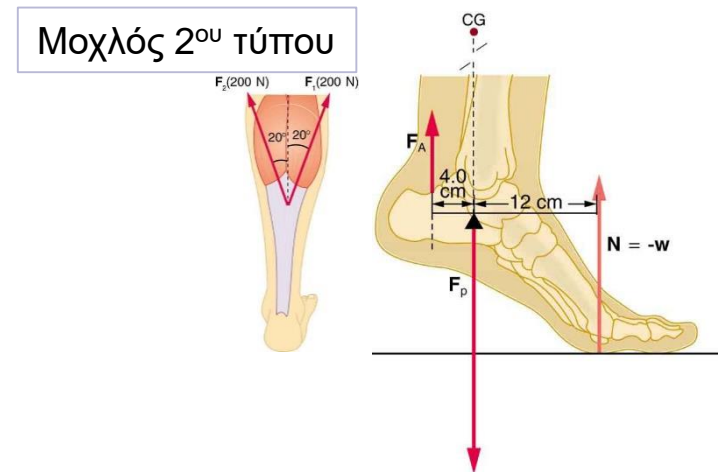
Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.6

Άντρας 65kg σηκώνεται στα δάκτυλα του ενός ποδιού. Η ανοδική δύναμη F_A ασκείται μέσω του αχίλλειου τένοντα που απέχει 4cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του αστραγάλου). Το βάρος W ασκείται στη βάση των δακτύλων που απέχουν 12cm από το υπομόχλιο. Ποια είναι οι δύναμη F_A που ασκείται στον αχίλλειο τένοντα και η δύναμη F_P που ασκείται στον αστράγαλο δεδομένου ότι το πέλμα έχει μάζα 1kg και το κέντρο μάζας του απέχει από το υπομόχλιο 5cm;



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

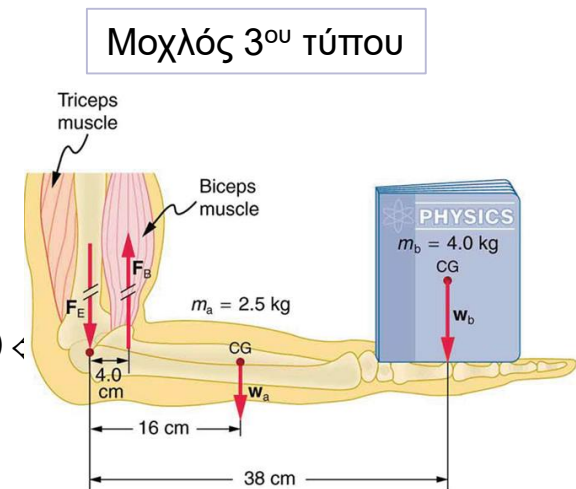
ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.7

Βιβλίο 4kg βρίσκεται σε απόσταση 38cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του αγκώνα) και ισορροπεί στην παλάμη μέσω δύναμης F_B , κάθετη ως προς το αντιβράχιο, που ασκεί ο δικέφαλος. Ο δικέφαλος απέχει 4cm από το υπομόχλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η δύναμη F_B που ασκεί ο δικέφαλος και η δύναμη F_E που ασκείται στον αγκώνα θεωρώντας αμελητέο το βάρος του χεριού.

$$\left. \begin{aligned} F_B \cdot (4\text{cm}) - W \cdot (38\text{cm}) &= 0 \\ W = m \cdot g = 4\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} &= 39.24\text{N} \end{aligned} \right\} F_B \cdot (4\text{cm}) - 39.24\text{N} \cdot (38\text{cm}) = 0 <$$
$$\Leftrightarrow F_B = \frac{39.24\text{N} \cdot (38\text{cm})}{(4\text{cm})} = 372.78\text{N}$$

$$F_E - F_B + W = 0 \Leftrightarrow F_E = F_B - W = 372.78\text{N} - 39.24\text{N} = 333.54\text{N}$$



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

Στο μοντέλο της άσκησης θεωρούμε ότι το αντιβράχιο (πήχης) έχει αμελητέο βάρος, βρίσκεται κάθετα ως προς το βραχιόνιο και ισορροπεί μόνο από την σύσπαση των δικεφάλων μυών, οι οποίοι ενώνονται με την κερκίδα. Η προσέγγιση αυτή είναι ικανοποιητική, αλλά στην πραγματικότητα υπάρχουν και άλλοι μύες που συνεισφέρουν στην κίνηση, ενώ η ανάλυση χρειάζεται να περιλαμβάνει και σενάρια στα οποία το αντιβράχιο βρίσκεται σε διαφορετική από 90° γωνία σε σχέση με το βραχιόνιο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.8

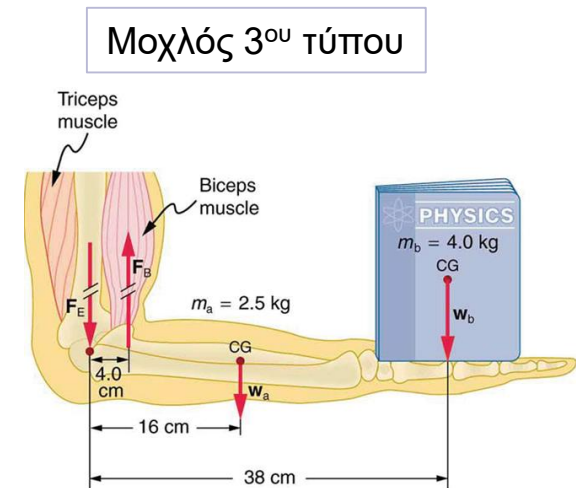
Βιβλίο 4kg βρίσκεται σε απόσταση 38cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του αγκώνα) και ισορροπεί στην παλάμη μέσω δύναμης F_B , κάθετη ως προς το αντιβράχιο, που ασκεί ο δικέφαλος. Ο δικέφαλος απέχει 4cm από το υπομόχλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η δύναμη F_B που ασκεί ο δικέφαλος και η δύναμη F_E που ασκείται στον αγκώνα θεωρώντας μάζα χεριού στα 2.5kg με απόσταση 16cm από το υπομόχλιο.

$$\left. \begin{aligned} F_B \cdot (4\text{cm}) - W_{hand} \cdot (16\text{cm}) - W_{book} \cdot (38\text{cm}) &= 0 \\ W_{book} &= m_{book} \cdot g = 4\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 39.24\text{N} \\ W_{hand} &= m_{hand} \cdot g = 2.5\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 24.525\text{N} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_B \cdot (4\text{cm}) - 24.525\text{N} \cdot (16\text{cm}) - 39.24\text{N} \cdot (38\text{cm}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_B = \frac{24.525\text{N} \cdot (16\text{cm}) + 39.24\text{N} \cdot (38\text{cm})}{(4\text{cm})} = 470.88\text{N}$$

$$F_E - F_B + W_{hand} + W_{book} = 0 \Leftrightarrow F_E = F_B - W_{hand} - W_{book} = 470.88\text{N} - 24.525\text{N} - 39.24\text{N} = 407.115\text{N}$$



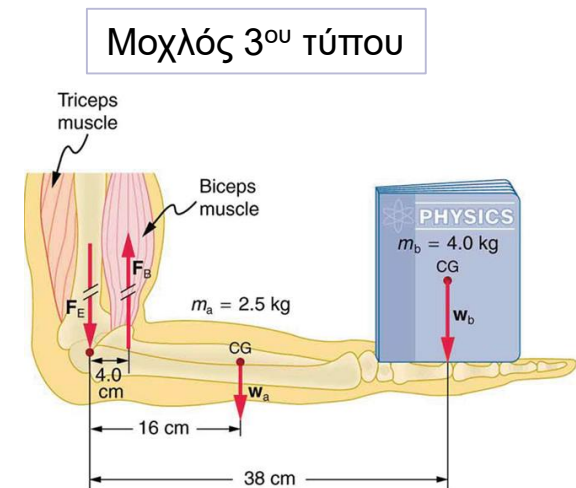
Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.9

Βιβλίο 6kg βρίσκεται σε απόσταση 38cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του αγκώνα) και ισορροπεί στην παλάμη μέσω δύναμης F_B , κάθετη ως προς το αντιβράχιο, που ασκεί ο δικέφαλος. Ο δικέφαλος απέχει 3.5cm από το υπομόχλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η δύναμη F_B που ασκεί ο δικέφαλος και η δύναμη F_E που ασκείται στον αγκώνα θεωρώντας μάζα χεριού στα 3kg με απόσταση 16cm από το υπομόχλιο.



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.10α

Πατέρας σηκώνει το παιδί του με το πόδι. Το παιδί έχει μάζα 10kg, βρίσκεται σε απόσταση 20cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του γονάτου) και ισορροπεί μέσω δύναμης F_Q η οποία ασκείται από τους μύς του ποδιού. Η F_Q βρίσκεται υπό γωνία 30° ως προς το μηριαίο οστό και απέχει 2cm από το υπομόχλιο. Να βρεθεί η δύναμη F_Q θεωρώντας μάζα ποδιού στα 4kg με απόσταση 20cm από το υπομόχλιο.

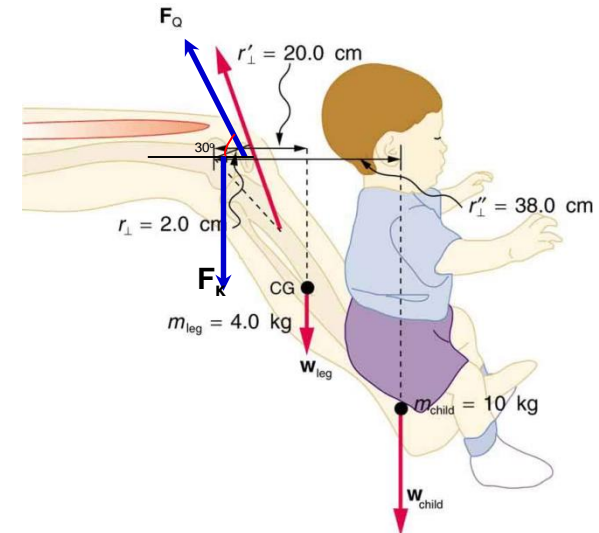
$$\left. \begin{aligned} F_{Qy} \cdot (2\text{cm}) - W_{leg} \cdot (20\text{cm}) - W_{child} \cdot (38\text{cm}) &= 0 \\ W_{leg} = m_{leg} \cdot g = 4\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} &= 39.24\text{N} \\ W_{child} = m_{child} \cdot g = 10\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} &= 98.1\text{N} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{Qy} \cdot (2\text{cm}) - 39.24\text{N} \cdot (20\text{cm}) - 98.1\text{N} \cdot (38\text{cm}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{Qy} = \frac{39.24 \cdot (20\text{cm}) + 98.1 \cdot (38\text{cm})}{(2\text{cm})} = 2256.3\text{N}$$

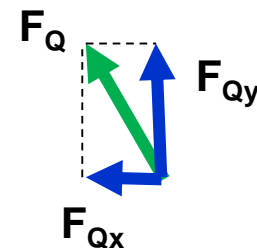
$$F_{Qy} - F_K - W_{leg} - W_{child} = 0 \Leftrightarrow F_K = F_{Qy} - W_{leg} - W_{child} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_K = 2256.3\text{N} - 39.24\text{N} - 98.1\text{N} = 2118.96\text{N}$$



Πηγή:

<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>



ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.10β

Πατέρας σηκώνει το παιδί του με το πόδι. Το παιδί έχει μάζα 10kg, βρίσκεται σε απόσταση 20cm από το υπομόχλιο (άρθρωση του γονάτου) και ισορροπεί μέσω δύναμης F_Q η οποία ασκείται από τους μύς του ποδιού. Η F_Q βρίσκεται υπό γωνία 30° ως προς το μηριαίο οστό και απέχει 2cm από το υπομόχλιο. Να βρεθεί η δύναμη F_Q θεωρώντας μάζα ποδιού στα 4kg με απόσταση 20cm από το υπομόχλιο.

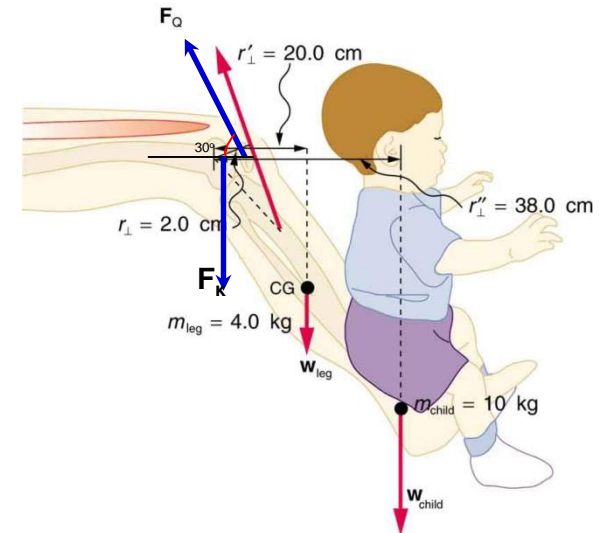
Υπολογίζω την F_Q

$$\sin(\theta) = \frac{\text{απέναντι - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_{Qy}}{F_Q} \Leftrightarrow F_{Qy} = F_Q \times \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{προσκείμενη - κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_{Qx}}{F_Q} \Leftrightarrow F_{Qx} = F_Q \times \cos(\theta)$$

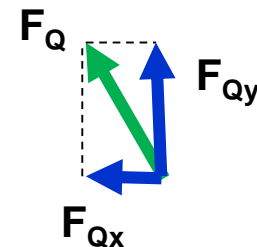
$$F_{Qy} = F_Q \times \sin(\theta) \Leftrightarrow F_Q = \frac{F_{Qy}}{\sin(\theta)} = \frac{F_{Qy}}{\sin(\theta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_Q = \frac{2256.3N}{\sin(30)} = \frac{2256.3N}{0.5} = 4512.6N$$



Πηγή:

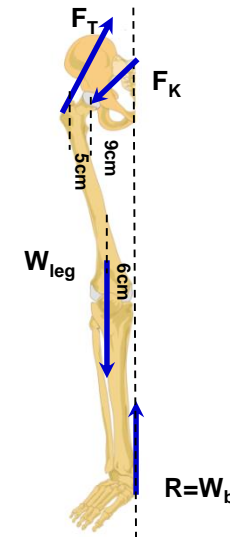
<https://opentextbc.ca/physicstestbook2/chapter/forces-and-torques-in-muscles-and-joints/>



ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.11α

Ανθρωπος στέκεται στο ένα πόδι ή βαδίζει αργά. F_T είναι η δύναμη που ασκείται από τους ισχιακούς απαγωγούς μύες και σχηματίζει 60° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, F_K η δύναμη που ασκείται από το λαγόνιο οστό στο μηριαίο οστό και σχηματίζει 70° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, W_{leg} το βάρος του ποδιού του οποίου η μάζα είναι 12kg και R η αντίδραση στο πέλμα του ποδιού που είναι ίση με το βάρος του ανθρώπου W_b του οποίου η μάζα είναι 75kg . Να βρεθεί η δύναμη F_T και F_K δεδομένες τις αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα.



$$-F_{Ky} \cdot (5\text{cm}) - W_{leg} \cdot (8\text{cm}) + R \cdot (14\text{cm}) = 0$$

$$W_{leg} = m_{leg} \cdot g = 12\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 117.72\text{N}$$

$$R = W_{body} = m_{body} \cdot g = 75\text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 735.75\text{N}$$

$$\Leftrightarrow -F_{Ky} \cdot (5\text{cm}) - 117.72\text{N} \cdot (8\text{cm}) + 735.75\text{N} \cdot (14\text{cm}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{Ky} = \frac{735.75\text{N} \cdot (14\text{cm}) - 117.72\text{N} \cdot (8\text{cm})}{(5\text{cm})} = 1871.748\text{N}$$

$$F_{Ty} - F_{Ky} - W_{leg} + R = 0 \Leftrightarrow F_{Ty} = F_{Ky} + W_{leg} - R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{Ty} = 1871.748\text{N} + 117.72\text{N} - 735.75\text{N} = 1253.718\text{N}$$

Πηγή:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Human_leg_bones_labeled.svg

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.11β

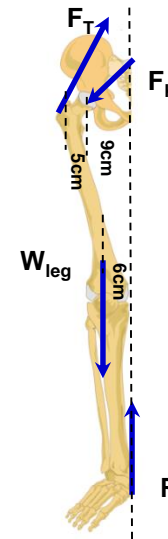
Ανθρωπος στέκεται στο ένα πόδι ή βαδίζει αργά. F_T είναι η δύναμη που ασκείται από τους ισχιακούς απαγωγούς μύες και σχηματίζει 60° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, F_K η δύναμη που ασκείται από το λαγόνιο οστό στο μηριαίο οστό και σχηματίζει 70° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, W_{leg} το βάρος του ποδιού του οποίου η μάζα είναι 12kg και R η αντίδραση στο πέλμα του ποδιού που είναι ίση με το βάρος του ανθρώπου W_b του οποίου η μάζα είναι 75kg. Να βρεθεί η δύναμη F_T και F_K δεδομένες τις αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Υπολογίζω την F_T

$$F_{Ty} = F_T \times \sin(\theta) \Leftrightarrow F_T = \frac{F_{Ty}}{\sin(\theta)} = \frac{1253.718N}{\sin(60)} \Leftrightarrow F_T = \frac{1253.718N}{0.866} = 1447.711N$$

Υπολογίζω την F_{Tx}

$$F_{Tx} = F_T \times \cos(\theta) \Leftrightarrow F_{Tx} = 1447.711N \times \cos(60) \Leftrightarrow F_{Tx} = 723.855N$$



Πηγή:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Human_leg_bones_labeled.svg

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.11γ

Ανθρωπος στέκεται στο ένα πόδι ή βαδίζει αργά. F_T είναι η δύναμη που ασκείται από τους ισχιακούς απαγωγούς μύες και σχηματίζει 60° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, F_K η δύναμη που ασκείται από το λαγόνιο οστό στο μηριαίο οστό και σχηματίζει 70° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, W_{leg} το βάρος του ποδιού του οποίου η μάζα είναι 12kg και R η αντίδραση στο πέλμα του ποδιού που είναι ίση με το βάρος του ανθρώπου W_b του οποίου η μάζα είναι 75kg. Να βρεθεί η δύναμη F_T και F_K δεδομένες τις αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα.

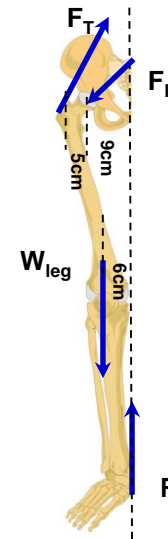
Υπολογίζω την F_{Kx}

$$F_{Tx} - F_{Kx} = 0 \Leftrightarrow F_{Tx} = F_{Kx} = 723.855N$$

Υπολογίζω την F_K

$$F_{Kx} = F_K \times \cos(\theta) \Leftrightarrow F_K = \frac{F_{Kx}}{\cos(70)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_K = \frac{723.855N}{\cos(70)} = 2116.410N$$



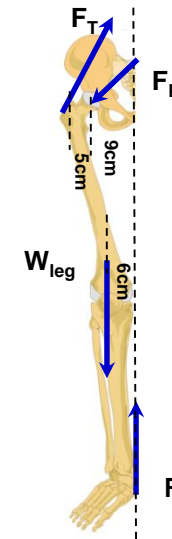
Πηγή:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Human_leg_bones_labeled.svg

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΣΥΝΘΕΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ο μηχανισμός του μοχλού: Αριθμητικό παράδειγμα 5.12

Ανθρωπος στέκεται στα δύο πόδια. F_T είναι η δύναμη που ασκείται από τους ισχιακούς απαγωγούς μύες και σχηματίζει 60° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, F_K η δύναμη που ασκείται από το λαγόνιο οστό στο μηριαίο οστό και σχηματίζει 70° γωνία με το οριζόντιο επίπεδο, W_{leg} το βάρος του ποδιού του οποίου η μάζα είναι 12kg και R η αντίδραση στο πέλμα του ποδιού που είναι ίση με το βάρος του ανθρώπου W_b του οποίου η μάζα είναι 75kg. Να βρεθεί η δύναμη F_T και F_K δεδομένες τις αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα.



Πηγή:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Human_leg_bones_labeled.svg

ΓΛΩΣΣΑΡΙ - ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ

Πηγή: Διαδικτυακή πηγή από την οποία ανακτήθηκαν τα δεδομένα (π.χ. εικόνες, γραφήματα, πίνακες)

Εκπαιδευτική προβολή: Διαδικτυακό βίντεο που περιγράφει βασικές αρχές λειτουργίας και εφαρμογές

Ασκήσεις: Άλυτες ασκήσεις για μελέτη στο σπίτι