Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ:1995-96**

Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν.Γ.Μπράτσος

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Να λυθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 9y = e^{-t}$$

όταν $y = y(t)$ και $y(0) = y'(0) = 0$.

ii) Εστω $\vec{F} = x^3 y\vec{i} - 3xyz^2\vec{j} + x^2y^3z\,\vec{k}$. Να υπολογιστεί το πεδίο

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

2ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης $f(t) = t - \pi$ αν $0 < t < 1$ και $f(t+1) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ii) Με ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}\, dt$$

3ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί η μορφή της σειράς Fourier της περιοδικής συνάρτησης $f(t) = t$ αν $-1 < t < 1$ και $f(t+2) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ii) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα.

Αθήνα 8 Φεβρουαρίου 1996

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1995-96**

Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν.Γ.Μπράτσος

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Να λυθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = \sin t$$

όταν $y = y(t)$ με $y \in D_{\mathcal{L}}$ και $y(0) = y'(0) = 0$.

ii) Να οριστεί η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης και να γραφούν οι κυριώτερες ιδιότητές της. Αν $f = r^3$ με $r = |\vec{r}|$ διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί η κλίση της f.

2ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός *Laplace* της περιοδικής συνάρτησης $f(t) = e^t$ όταν $0 < t < 1$ και $f(t+1) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $f(t) = \left(e^{-t}\sin t\right)/t$, να υπολογιστεί με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

3ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = t \text{ αν } -\pi < t < \pi \text{ και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

ii) Εστω η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |t| < 1 \\ 0 & \text{αν } |t| > 1 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συνημιτόνου της συνάρτησης f.

Σημείωση: Ολα τα θέματα είναι **ισόβαθμα**.

Αθήνα 22 Φεβρουαρίου 1996

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1995-96**

Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΡΙΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Να λυθεί με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-t}$$

όταν $y = y(t)$ και $y(0) = y'(0) = 0$.

ii) Εστω $f(x, y, z) = \cos\left(x^2 + y^2\right) - z^2$. Να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right)$.

2ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad 1 < t < 2 \end{cases} \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

ii) Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

όταν $h = \pi / 3$ και να γίνει σύγκριση με τη θεωρητική τιμή -6.28319. Να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία.

3ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = |\sin t|$$

ii) Με τον τύπο του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου για τη συνάρτηση f στα σημεία $(1.0, 0.78)$, $(1.3, 0.65)$ και $(1.6, -0.45)$.

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι **ισόβαθμα**.

Αθήνα 12 Σεπτεμβρίου 1996

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1996-97**
Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ**
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Αν $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ και

$$F(s) = \frac{1}{s\left(s^2 - 9\right)}$$

να υπολογιστεί η $f(t)$.

ii) Εστω $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 - z^2}$. Να υπολογιστεί η κλίση της f.

iii) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{αν } |t| < 1 \\ 0 & \text{αν } |t| > 1 \end{cases}$$

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{αν } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{αν } 0 < t < 1 \end{cases} \quad \text{και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

Στη συνέχεια να γίνει το γραμμικό φάσμα των 3 πρώτων όρων της σειράς. Τι παρατηρείτε;

ii) Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\, dx$$

όταν $h = \pi / 18$. Να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 5 δεκαδικά ψηφία.

3ο

i) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2,\ 1 \le t \le 1.2,\ y(1) = -1 \text{ και } y'(1) = 1 \text{ όταν } l = 0.1$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = -1/t$

ii) Να διατυπωθεί το θεώρημα παρεμβολής του Langrange. Με τον τύπο του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού για τη συνάρτηση f στα σημεία $(3, -2.5), (3.5, 3.2)$ και $(4, 5.3)$.

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι **ισόβαθμα**.

Αθήνα 3 Φεβρουαρίου 1997
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1996 - 97**
Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΝΙΟΥ**
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Να λυθεί με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}$$

όταν $y = y(t)$ και $y(0) = y'(0) = 0$. Εξηγείστε τη γραφική παράσταση της λύσης.

ii) Αποδείξτε τους με κεντρικές διαφορές τύπους προσέγγισης της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου συνάρτησης. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{1/2}$. Χρησιμοποιείστε τους τύπους αυτούς για τον υπολογισμό των $f'(1)$ και $f''(1)$ όταν $h = 0.05$.

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

ii) Να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} e^{-x^2}\, dx$$

όταν $h = 0.1$.

3ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = e^t \text{ όταν } 0 < t < 1 \text{ και } f(t+1) = f(t) \text{ για κάθε } t \in [0, +\infty)$$

ii) Να υπολογιστεί με την διακριτή μέθοδο των ελαχίστων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (0, 1.3), (0.3, 2.3) και (0.5, 3.5). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Σημείωση: Ολα τα θέματα είναι **ισόβαθμα**. Να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 4 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 3 Ιουλίου 1997
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ
Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1996 - 97
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Αν $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ και

$$F(s) = \frac{s+2}{(s-1)\left(s^2+4\right)}$$

να υπολογιστεί η $f(t)$.

ii) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού για τα σημεία $(3, -2.5)$, $(3.5, 3.2)$ και $(4.0, -4)$.

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad 1 < t < 3 \end{cases} \quad \text{και } f(t+4) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζόυ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x^6}$$

όταν $h = 0.1$.

3ο

i) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t}$$

όταν $1 \le t \le 1.2$ και $l = 0.1$ με αρχική συνθήκη $y(1) = 1.09182$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t$.

ii) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = e^t \text{ όταν } 0 < t < 1 \text{ και } f(t+1) = f(t) \text{ για κάθε } t \in [0, +\infty)$$

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι **ισόβαθμα**. Να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 11 Σεπτεμβρίου 1997
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1996 - 97**

Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

1ο

i) Αν $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ και

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)\left(s^2+4\right)}$$

να υπολογιστεί η $f(t)$.

ii) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού για τα σημεία (2 , 0.5), (3 , 1.2) και (4 , -2.5).

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = t \text{ αν } -1<t<1 \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{1.6} \frac{dx}{1+x^5}$$

όταν $h = 0.1$. Να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 5 δεκαδικά ψηφία.

3ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |t|<1 \\ 0 & \text{αν } |t|>1 \end{cases}$$

ii) Να υπολογιστούν με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (0, 1.2), (0.1, 1.6), (0.2, 2.5) και (0.5, 3.0). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \text{ και } b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα.

Αθήνα 9 Ιανουαρίου 1998

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1997 - 98**

Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Αν $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$ και

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^2\left(s^2+1\right)}$$

να υπολογιστεί η $f(t)$.

ii) Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού για τα σημεία (1 , 2.5), (2 , 3.4) και (3 , 5.0).

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = t \text{ αν } -1 < t < 1 \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{1.6} e^{-x^2}\, dx$$

όταν $h = 0.1$. Να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 5 δεκαδικά ψηφία.

3ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{αν } |t| < 1 \\ 0 & \text{αν } |t| > 1 \end{cases}$$

ii) Να υπολογιστούν με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (1, 2.5), (0, 4.5), (6, 4.5) και (-4, 5.0). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2} \text{ και } b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλες τις πράξεις να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 5 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 5 Φεβρουαρίου 1998

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1997 - 98**

Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο. **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος

<u>ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

1ο

i) Να λυθεί με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = \sin t \text{ όταν } y = y(t) \text{ και } y(0) = y'(0) = 0$$

ii) Εστω $\vec{F} = x^2 y^3 \vec{i} - x z^4 \vec{j} + 5 x y z \vec{k}$. Να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

iii) Να διατυπωθεί το θεώρημα ύπαρξης και να γραφεί χωρίς απόδειξη ο τύπος παρεμβολής του Langrange. Στη συνέχεια με τον τύπο του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο 2ου που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x)$ στα σημεία $(1, 0.4)$, $(-1.3, 0.8)$ και $(1.5, 0.1)$.

2ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = e^{-t} \text{ αν } 0 < t < 1 \text{ και } f(t+1) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} \frac{dx}{1 + x^4}$$

όταν $h = 0.1$. Να γίνει σύγκριση με τη θεωρητική τιμή *0.58548*.

3ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί η μορφή της σειράς Fourier της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = -t, \ -\pi < t < \pi \text{ και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

ii) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 0.4, \ y(0) = 0$$

όταν $l = 0.1$

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλες τις πράξεις να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 5 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 19 Φεβρουαρίου 1998

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1997 - 98**

Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΣΕΠΤΕΜΡΙΟΥ**

<u>ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

1ο

i) Να λυθεί με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' + 5y = e^{t}$$

όταν $y = y(t)$ και $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

ii) Να οριστεί ο στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου. Άί $f(x, y, z) = \ln\left(2x^2 + y^2 - 4z^2\right)$, ία υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right)$.

2ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = |\sin t|$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του Simpson να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης σφάλματος

$$erf(1.2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.2} e^{-x^2} dx$$

όταν $h = 0.2$.

3ο

i) Να υπολογιστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (1.0, 5.5), (2.0, 6.5), (3.0, 8.5), (8.0, 9.5). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

ii) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ αν } & 0 < t < 1 \\ 0 \text{ αν } & 1 < t < 2 \end{cases} \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλες τις πράξεις να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 10 Σεπτεμρίου 1998

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1998 - 99**

Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ**

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Να υπολογιστεί με χρήση ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt$$

Αν $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ και $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)\left(s^2+1\right)}$ να υπολογιστεί η $f(t)$.

ii) Να οριστεί η κλίση πεδίου και να γραφούν οι ιδιότητές της. Αν $f(x,y,z) = \sin\left(x^2+y^2\right) - z^2$,να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla} f\right)$.

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = t \text{ αν } -1 < t < 1 \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

Στη συνέχεια να γίνει το γραμμικό φάσμα των τριών πρώτων όρων της σειράς.

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_1^{1.6} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$$

όταν $h = 0.1$.

3ο

i) Να οριστεί η διαιρεμένη διαφορά k τάξης. Ποιά σχέση συνδέει τη διαιρεμένη διαφορά και την παράγωγο μιας συνάρτησης. Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$. Να υπολογιστεί με τον τύπο παρεμβολής του Newton η τιμή $f(1.5)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$ και $x_2 = 1.6$.

ii) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = -1 \quad \text{και} \quad y'(1) = 1 \quad \text{όταν} \quad l = 0.1$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = -1/t$.

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλες τις πράξεις όταν απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 4 Φεβρουαρίου 1999

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ: 1998 - 99**

Σ.Τ.ΕΦ. - Τ.Ι.Ο.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ**

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1ο

i) Να γραφούν χωρίς απόδειξη οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Αν $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ και

$$F(s) = \frac{s}{(s+4)\left(s^2+6s+13\right)}$$

να υπολογιστεί η $f(t)$.

ii) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t},\ \text{όπου}\ 0 \le t \le 0.2,\ \text{με}\ y(0) = 0\ \text{και}\ l = 0.1$$

2ο

i) Με τον τύπο του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία

(2 , 3.5), (4 ,5.0) και (6 , 7.5)

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson, να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$S(0.8) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{0.8} \sin x^2\, dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Δείξτε ότι η σειρά Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης, έστω f, γράφεται

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(n\,\omega\,t + \varphi_n\right) \qquad \text{σειρά ημιτόνου}$$

Δώστε τη φυσική σημασία των C_n και φ_n. Στη συνέχεια να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση $f(t)$, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad -1 < t < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \end{cases}$

ii) Να οριστεί ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές του. Εστω $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - z^2$. Να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right)$.

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλες τις πράξεις όταν απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 19 Φεβρουαρίου 1999

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ : 1998 - 99**

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 1999 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να λυθεί με χρήση του μετασχηματισμού Laplace η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2y' + y = e^{-5t}$$

όταν $y = y(t)$ και $y(0) = y'(0) = 0$. Τι παρατηρείτε στη γραφική παράσταση της λύσης;

ii) Αποδείξτε τους με κεντρικές διαφορές τύπους προσέγγισης της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου συνάρτησης. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$. Χρησιμοποιείστε τους παραπάνω τύπους για να υπολογίσετε τις $f'(1)$ και $f''(1)$ όταν $h = 0.01$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τη θεωρητική τιμή.

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

Στη συνέχεια να γίνει το γραμμικό φάσμα των 3 πρώτων όρων της σειράς. Τι παρατηρείτε;

ii) Να αποδείξετε τον τύπο του απλού κανόνα του τραπεζίου για τον αριθμητικόν υπολογισμού της τιμής ενός ολοκληρώματος. Στη συνέχεια με το σύνθετο κανόνα του Simpson να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} e^{-x^2}\, dx \qquad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Με τη μέθοδο του Euler και του Taylor βαθμού $v = 2$ να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2,\ 1 \le t \le 1.2,\ y(1) = -1 \text{ και } y'(1) = 1 \text{ όταν } l = 0.1$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = -1/t$.

ii) Να υπολογιστεί με την διακριτή μέθοδο των ελαχίστων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (0, 1.5), (1.5, 2.4), (2.5, 5.0) και (3.5,-4.0). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Σημείωση: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλους τους υπολογισμούς να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 18 Ιουνίου 1999

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΟ ΕΤΟΣ : 1998 - 99**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της περιοδικής συνάρτησης

$$f(t)=t \text{ αν } 0<t<1 \text{ και } f(t+1)=f(t) \text{ για κάθε } t\geq 0$$

ii) Να οριστεί ο στροβιλισμός ενός πεδίου και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές του. Εστω $\vec{F}=3y^4z^2\,\vec{i}+4x^3z^2\,\vec{j}-3x^2y^2\,\vec{k}$. Να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$.

2ο

i) Να γίνει το διάγραμμα και να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases}-t & \text{αν } 0<t<1\\ 0 & \text{αν } 1<t<2\end{cases} \quad \text{και } f(t+2)=f(t) \text{ για κάθε } t\in R$$

Στη συνέχεια να γίνει το γραμμικό φάσμα των 3 πρώτων όρων της σειράς. Τι παρατηρείτε;

ii) Να αποδείχθεί ο τύπος του σύνθετου κανόνα του Simpson για τον αριθμητικόν υπολογισμού της τιμής ενός ολοκληρώματος. Στη συνέχεια με τον αυτό να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6}\frac{dx}{1+x^4}$$

όταν $h=0.1$ και να σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή *0.585476*.

3ο

i) Να οριστεί η διαιρεμένη διαφορά k- τάξης και να δοθεί η μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής βάσει αυτής. Ποιά σχέση συνδέει τη διαιρεμένη διαφορά και την παράγωγο μιας συνάρτησης. Εστω η συνάρτηση $f(x)=e^x-e^{x^2}$. Να υπολογιστεί μία προσέγγιση της τιμής $f(1.5)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0=1$, $x_1=1.3$ και $x_2=1.6$.

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης

$$f(t)=\begin{cases}e^t & \text{αν } |t|<1\\ 0 & \text{αν } |t|>1\end{cases}$$

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλους τους υπολογισμούς να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 18 Σεπτεμβρίου 1999
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 1999 - 2000**

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2000 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i)Να υπολογιστούν με την διακριτή μέθοδο των ελαχίστων το πολυώνυμο 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (1.0, 5.5), (2.0, 6.5), (3.0, 8.5), (8.0, 9.5) και το σφάλμα της προσέγγισης. Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

ii) Να οριστεί η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές της. Αν $f = r^3$ με $r = |\vec{r}|$ διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί η κλίση της f.

2ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και να γίνει το γραμμικό φάσμα των τριών πρώτων όρων της περιοδικής συνάρτησης $f(t)$ που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$$f(t) = t^2 \quad \text{όταν} \quad -\pi < t < \pi$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx$$

όταν $h = 0.1$.

3ο

i) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 0.30 \le t \le 0.31, \quad y(0.3) = -3.33 \quad \text{όταν} \quad l = 0.01$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = -1/t$. Στη συνέχεια να γραφεί η μορφή του αλγόριθμου της λύσης υου προβλήματος για τη μέθοδο του Taylor 3ου βαθμού. Ποιές επι πλέον αρχικές συνθήκες απαιτούνται;

ii) Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\tan x}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί η τιμή $f(\pi/4)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = \pi/9$, $x_1 = \pi/6$ και $x_2 = \pi/3$.

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλους τους υπολογισμούς να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 10 Φεβρουαρίου 2000

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 1999 - 2000**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2000 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\sqrt{\pi}\, x^2\right)$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί η τιμή $f(\pi/4)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = \pi/6$, $x_1 = \pi/3$ και $x_2 = \pi/2$.

ii) Να οριστεί ο τελεστής Laplace. Αν $f = \ln r$ με $r = |\vec{r}|$ διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί το $\nabla^2 f$.

2ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και να γίνει το γραμμικό φάσμα των τριών πρώτων όρων της περιοδικής συνάρτησης $f(t)$ που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$$f(t) = -1 \quad \text{όταν} \quad -\pi < t < \pi$$

ii) Αποδείξτε τους με κεντρικές διαφορές τύπους προσέγγισης της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου συνάρτησης. Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$. Χρησιμοποιείστε τους παραπάνω τύπους για να υπολογίσετε τις $f'(1)$ και $f''(1)$ όταν $h = 0.01$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τη θεωρητική τιμή.

3ο

i) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t}$$

όταν $1 \le t \le 1.2$ και $l = 0.1$ με αρχική συνθήκη $y(1) = 1.09182$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t$.

ii) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν } t < 0,\, t > 1 \end{cases}$$

<u>**Σημείωση:**</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλους τους υπολογισμούς να γίνεται στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 24 Φεβρουαρίου 2000
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 1999 - 2000**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2000 **ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ**

1ο

i) Με τη μέθοδο του Taylor βαθμού $\nu = 2$ να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2,\ 1 \le t \le 1.2,\ y(1) = -1 \text{ και } y'(1) = 1 \text{ όταν } l = 0.1$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική λύση $y(t) = -1/t$.

ii) Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-1/2}\, e^{\sqrt{x}}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί η τιμή $f(0.23)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.2$ και $x_2 = 0.3$.

2ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 < t < \pi \\ -t & \text{αν} \quad -\pi < t < 0 \end{cases} \text{ και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

ii) Αν $f = 1/r$ με $r = |\vec{r}|$ διάνυσμα θέσης,, να υπολογιστεί το $\nabla^2 f$.

3ο

i) Να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων με το οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές του πολυωνύμου 2ου βαθμού που προσεγγίζει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα σημεία (1.0, 5.5), (2.0, 6.5), (3.0, 8.5) και (8.0, 9.5). Τι παρατηρείτε;

ii) Αποδείξτε τον τύπο υπολογισμού της τιμής ενός ολοκληρώματος με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου. Στη συνέχεια με τον τύπο αυτό να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx$$

όταν $h = 0.1$.

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλα τα θέματα όπου απαιτείται να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 22 Ιουνίου 2000

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 1999 - 2000**

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να λυθεί με τη μέθοδο του Euler το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -y + t^2 + 1$$

όπου $0 \le t \le 0.1$, αρχική συνθήκη $y(0) = 5$, $l = 0.1$ και θεωρητική λύση $y(t) = 2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$.

ii) Η εξίσωση $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $[1,2]$ την 1.365230013. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η ρίζα αυτή με τη μέθοδο του Newton. Αρχική τιμή 1.5. Η μέθοδος να σταματήσει στην 5η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;

2ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν } 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{και } f(t + 2\pi) = f(t) \text{ για κάθε } t \in R$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι οι συντελεστές στην εκθετική μορφή της σειράς Fourier όταν η f είναι περιττή περιοδική συνάρτηση με θελιώδη περίοδο T δίνονται από τον τύπο

$$c_n = -\frac{2i}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt \quad \text{όπου } i = \sqrt{-1}$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson, να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος του Fresnel

$$S(0.6) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{0.6} \sin x^2\, dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Να υπολογιστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το πολυώνυμο του 1ου βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα (3, 1.5), (4, 4.0), (-1, 5.5) και (-6, 3.0). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Ποιά είναι η μορφή του συστήματος των κανονικών εξισώσεων στην περίπτωση που γίνεται προσέγγιση με πολυώνυμο 2ου βαθμού στα παραπάνω δεδομένα.

ii) Να οριστεί η απόκλιση ενός πεδίου. Αν $\vec{F} = yz^2\,\vec{i} - 3xz^2\,\vec{j} + 2xyz\,\vec{k}$, $\vec{G} = 3x\,\vec{i} + 4z\,\vec{j} - xy\,\vec{k}$ και $f(x,y,z) = x^3y^2z$, να υπολογισθούν τα $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right)$ και $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right)$.

<u>Σημείωση:</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλα τα θέματα όπου απαιτείται να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 22 Ιουνίου 2000

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2000 - 2001**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2001 **ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ**

1ο

i) Να λυθεί με τη μέθοδο του Taylor τάξης $n = 2$ το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = -\frac{2}{t} + t^2 e^t$$

όπου $1 \le t \le 1.1$, αρχική τιμή $y(1) = 0$ και $l = 0.1$.

ii) Ο προσδιορισμός μιας πολλαπλής ρίζας μιας εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι δυνατόν να γίνει από την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - p\,\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

όταν p η πολλαπλότητα της ρίζας (μέθοδος του Schroder). Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο αυτή για τον υπολογισμό της ρίζας της εξίσωσης $x^2 + 2xe^{2x} + e^{4x} = 0$

με αρχική τιμή $x_0 = 0$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 5η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;

2ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = |\sin t|$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι οι συντελεστές στην εκθετική μορφή της σειράς Fourier όταν η f είναι περιττή περιοδική συνάρτηση με θελιώδη περίοδο T δίνονται από τον τύπο

$$c_n = -\frac{2i}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \quad \text{όπου} \quad i = \sqrt{-1}$$

ii) Με τον κανόνα των Gauss-Legendre για 3 σημεία να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \quad \text{όταν } x_0 = -0.774597,\ A_0 = 0.555556,\ x_1 = 0,\ A_1 = 0.888889$$

3ο

i) Να διατυπωθεί το θεώρημα παρεμβολής του Langrange. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα του Langrange επαληθεύουν τη σχέση $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} το σύμβολο του Kronecker. Αν $f(3.0) = 0.15$, $f(3.2) = 2.50$ και $f(3.4) = 5.14$, με τον τύπο παρεμβολής του Langrange να προσδιοριστεί η τιμή $f(3.1)$.

ii) Να οριστεί η κλίση πεδίου και να γραφούν χωρίς απόδειξη οι κυριότερες ιδιότητές της. Εστω $f(x,y,z) = \ln\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$. Να υπολογιστούν τα πεδία $\vec{\nabla} f$ και $\nabla^2 f$.

<u>**Σημείωση:**</u> Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλα τα θέματα όπου απαιτείται να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 1 Φεβρουαρίου 2001

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2000 - 2001**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2001 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i)Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x} - e^{-x}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί μία προσέγγιση της τιμής $f(1.5)$ στα 5 δεκαδικά ψηφία, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.4$ και $x_2 = 1.6$.

ii) Δείξτε ότι $\vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}\right) = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$. Εστω $\vec{F} = x y^3 \vec{i} - x z^4 \vec{j} + x y z \vec{k}$. Να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

2ο

i) Εστω η εξίσωση $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ που γράφεται και

$$x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Να προσδιοριστεί μία ρίζα της με τη μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων και τη μέθοδο του Newton. Δίνεται ότι $x_0 = 2$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 4η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;

ii) Με το σύνθετο κανόνα του Simpson να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.6} \frac{dx}{1 + x^4}$$

όταν $h = 0.1$. Να γίνει στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στα 6 δεκαδικά ψηφία και σύγκριση με τη θεωρητική τιμή *0.585476*.

3ο

i) Δείξτε ότι η σειρά Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης, έστω f, γράφεται

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(n \omega t + \varphi_n\right) \qquad \text{σειρά ημιτόνου}$$

Δώστε τη φυσική σημασία των C_n και φ_n. Αν $f(t) = t$, $0 < t < \pi$ και $f(t + \pi) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η σειρά Fourier της f.

ii) Με τη μέθοδο του Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t}, \; 0 \le t \le 0.2, \; y(0) = 0 \text{ όταν } l = 0.1$$

<u>Σημείωση</u>: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλα τα θέματα όπου απαιτείται να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 15 Φεβρουαρίου 2001
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2000 - 2001**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2001 **ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ**

1ο

i) Να δοθεί ο ορισμός των διαιρεμένων διαφορών. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x} - e^{-x^2}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί μία προσέγγιση της τιμής $f(1.5)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.4$ και $x_2 = 1.6$.

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson, να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος του Fresnel

$$S(0.6) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{0.6} \sin x^2 \, dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

2ο

i) Δείξτε ότι η σειρά Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης, έστω f, γράφεται

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(n\,\omega\, t + \varphi_n\right)$$

Δώστε τη φυσική σημασία των C_n και φ_n. Αν $f(t) = t$, $0 < t < 1$ και $f(t+1) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, να υπολογιστούν οι τρεις πρώτοι όροι της παραπάνω μορφής της σειράς της f.

ii) Η εξίσωση $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, έχει μία πραγματική ρίζα την 1.365230013. Με αρχική τιμή 1.5, να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η ρίζα αυτή με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και τη μέθοδο του Newton, όταν για την πρώτη μέθοδο η εξίσωση γράφεται $x = \left[10/(4+x)\right]^{1/2}$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 5η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;

3ο

i) Να οριστεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός ενός πεδίου. Δείξτε ότι η απόκλιση του στροβιλισμού είναι μηδέν. Αν $F(x,y,z) = 3y^4z^2\vec{i} + 4x^3z^2\vec{j} - 3x^2y^2\vec{k}$, να υπολογιστεί η απόκλιση του πεδίου.

ii) Να υπολογιστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, το πολυώνυμο $y = ax + b$, που προσεγγίζει τα σημεία $\left(x_i, h\left(x_i\right)\right)$, όταν x_i= 1, 3, -1, -2 και $h(x) = e^{-x^2}$. Δίνεται ότι

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Σημείωση: Ολα τα θέματα είναι ισόβαθμα. Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 28 Ιουνίου 2001
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2000 - 2001**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να οριστεί η απόκλιση διανυσματικού πεδίου. Δείξτε ότι η απόκλιση πληροί τη γραμμική ιδιότητα. Αν $\vec{F}(x,y,z) = yz^2\vec{i} - 3xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ και $f(x,y,z) = xyz$ να υπολογιστεί το πεδίο $\vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)$.

ii) Να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων, σύμφωνα με το οποίο υπολογίζεται με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, που προσεγγίζει τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ στα σημεία $\left(x_i, g\left(x_i\right)\right)$, όταν x_i= -2, -1, 0, 2.

2ο

i) Να δοθεί ο ορισμός των διαιρεμένων διαφορών. Να γραφεί χωρίς απόδειξη η σχέση που συνδέι τη διαιρεμένη διαφορά με την παράγωγο. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης, έστω f, στα σημεία $(-3, -2.4)$, $(-1, 1.5)$, $(0, 2.5)$ και $(1.5, -1)$.

ii) Να αποδειχθεί ο τύπος υπολογισμού ενός ολοκληρώματος με το σύνθετο κανόνα του Simpson. Στη συνέχεια με τον τύπο αυτό να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$erf(0.6) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0.6} e^{-x^2}\,dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης, που ο περιορισμός της στη θεμελιώδη περίοδο είναι $f(t) = -t$ με $-1 < t < 1$.

ii) Ο προσδιορισμός μιας πολλαπλής ρίζας μιας εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι δυνατόν να γίνει από την επαναληπτική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - p\,\frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)}$$

όταν p η πολλαπλότητα της ρίζας (μέθοδος του Schroder). Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο αυτή για τον υπολογισμό της ρίζας της εξίσωσης

$$f(x) = \left(x + e^{2x}\right)^2 = 0$$

Αρχική τιμή $x_0 = 0$. Η διαδικασία να σταματήσει στην 5η επανάληψη. Τι παρατηρείτε;

<u>**Σημείωση:**</u> Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 6 Σεπτεμβρίου 2001
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2001 - 2002**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**
ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Χρήστος Π. Κίτσος

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2002 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να οριστεί η κλίση και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές της. Έστω $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - z^2$. Να υπολογιστεί η κλίση της f στο σημείο $(-1,0,1)$.

ii) Να οριστεί ο μετασχηματισμός Fourier και να γραφεί η συνθήκη ύπαρξής του. Δείξτε ότι αν $F_1(w) = \mathscr{F}\left[f_1(t)\right]$, $F_2(w) = \mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$ και $\kappa, \lambda \in R$, τότε ισχύει η γραμμική ιδιότητα

$$\mathscr{F}\left[\kappa f_1(t) + \lambda f_2(t)\right] = \kappa F_1(w) + \lambda F_2(w)$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad |t| < 3 \\ 0 & \text{αν} \quad |t| > 3 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της f.

2ο

i) Να διατυπωθεί το θεώρημα παρεμβολής του Langrange και να δοθούν οι κυριότερες διαφορές της προσέγγισης μιας συνάρτησης με τον τύπο του Langrange και του Taylor. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\sqrt{x}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί η τιμή $f(\pi/4)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = \pi/6$, $x_1 = \pi/3$ και $x_2 = \pi/2$.

ii) Να αποδειχθεί ο τύπος υπολογισμού ενός ολοκληρώματος με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου. Στη συνέχεια με τον τύπο αυτό να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^{0.6} \left(1 + x^6\right)^{-1/2} dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Να δοθεί ο ορισμός της αξιοπιστίας ενός συστήματος $R(t)$. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση πυκνότητας $f(t) = \theta\, e^{-\theta t}$ με $\theta > 0$. Ποιά είναι η συνάρτηση αξιοπιστίας; Δείξτε ότι το πηλίκο $f(t)/R(t)$ είναι σταθερό.

ii) Σύστημα έχει δύο συνιστώσες Σ_1 και Σ_2, που συνδέονται εν σειρά. Αν ο χρόνος ζωής της κάθε συνιστώσας είναι εκθετική συνάρτηση με παραμέτρους θ_1 και θ_2 αντίστοιχα, ποιά είναι η αξιοπιστία του όλου συστήματος (εφαρμογή για $\theta_1 = 3$ έτη και $\theta_2 = 4$ έτη). Ποιά η διαφορά όταν οι συνιστώσες Σ_1 και Σ_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα;

<u>Σημείωση:</u> Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 24 Ιανουαρίου 2002
Α. Μπράτσος

Χρ. Κίτσος

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2001 - 2002**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2002 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να οριστεί η κλίση και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές της. Έστω $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - z^2$. Να υπολογιστεί η κλίση της f στο σημείο $(-1,0,1)$.

ii) Να οριστεί ο μετασχηματισμός Fourier και να γραφεί η συνθήκη ύπαρξής του. Δείξτε ότι αν $F_1(w) = \mathscr{F}\left[f_1(t)\right]$, $F_2(w) = \mathscr{F}\left[f_2(t)\right]$ και $\kappa, \lambda \in R$, τότε ισχύει η γραμμική ιδιότητα

$$\mathscr{F}\left[\kappa f_1(t) + \lambda f_2(t)\right] = \kappa F_1(w) + \lambda F_2(w)$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad |t| < 3 \\ 0 & \text{αν} \quad |t| > 3 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της f.

2ο

i) Να διατυπωθεί το θεώρημα παρεμβολής του Langrange και να δοθούν οι κυριότερες διαφορές της προσέγγισης μιας συνάρτησης με τον τύπο του Langrange και του Taylor. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\sqrt{x}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί η τιμή $f(\pi/4)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = \pi/6$, $x_1 = \pi/3$ και $x_2 = \pi/2$.

ii) Να αποδειχθεί ο τύπος υπολογισμού ενός ολοκληρώματος με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου. Στη συνέχεια με τον τύπο αυτό να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^{0.6} \left(1 + x^6\right)^{-1/2} dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Δείξτε ότι στην εκθετική μορφή της σειράς Fourier, όταν η f είναι περιττή περιοδική συνάρτηση με θεμελιώδη περίοδο T, οι συντελεστές δίνονται από τον τύπο

$$c_n = -\frac{2i}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \quad \text{όπου} \quad i = \sqrt{-1}$$

Στη συνέχεια να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(t) = |\sin t|$.

ii) Να υπολογιστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων το πολυώνυμο να υπολογιστεί το πολυώνυμο $y = ax + b$, που προσεγγίζει τα δεδομένα (3, 1.5), (4, 4.0), (-1, 5.5) και (-6, 3.0). Δίνεται

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^n y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

Να διατυπωθεί η γενική μορφή του προβλήματος της προσέγγισης ενός συνόλου δεδομένων με ένα πολυώνυμο με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων και να γραφεί η μορφή του συστήματος των κανονικών εξισώσεων.

Σημείωση: Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 24 Ιανουαρίου 2002

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2001 - 2002**

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2002 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

Αποδείξτε τον με κεντρικές διαφορές τύπο προσέγγισης της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης, έστω f, σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν $f(t) = \left(1 + t^2\right)^{-1/2}$ χρησιμοποιώντας αυτόν τον προσεγγιστικό τύπο, να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της f στο σημείο $t = 1$ όταν $h = 0.1$ και $h = 0.05$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή της παραγώγου. Τι παρατηρείτε; Στη συνέχεια υπολογίστε με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου και του Simpson το ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{1.6} f(t)\, dt \text{ όταν } h = 0.1$$

2ο

i) Με τον κανόνα των Gauss-Legendre για 4 σημεία να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{1.2} \left(1 + x^3\right)^{-1/2} dx$$

Δίνεται ότι $x_0 = -0.861136$, $A_0 = 0.347854$, $x_1 = -0.339981$ και $A_1 = 0.652145$.

ii) Να οριστεί η απόκλιση και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές της. Εστω $\vec{F} = x\, y\, \vec{i} + 2\left(x^2 - y^2 x^4\right)\vec{j} - 5\, y^2 z^3\, \vec{k}$. Να υπολογιστεί η απόκλιση.

3ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \\ -t & \text{αν} \quad -1 < t < 0 \end{cases} \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

ii) Με τον τύπο του Newton να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία

(5 , 2.5), (6 , 3.0), (7, 4.0) και (7.5 , 5.0)

<u>**Σημείωση:**</u> Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 28 Φεβρουαρίου 2002

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2001 - 2002**

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2002 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Με τη μέθοδο Euler να υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = \sin t + e^{-t}$$

όταν $1 \le t \le 1.01$ με $l = 0.01$ και αρχική συνθήκη $y(1) = 1.09182$. Να να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική λύση $y(t) = 2 - e^{-t} - \cos t$.

ii) Να γίνει το διάγραμμα και να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{αν } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{αν } t < 0 \text{ ή } t > 1 \end{cases}$$

2ο

i) Αποδείξτε τον τύπο ολοκλήρωσης του σύνθετου κανόνα Simpson. Αν $f(t) = e^{t^2}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτόν υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{1.6} f(t)\, dt \text{ όταν } h = 0.1$$

ii) Να οριστεί ο τελεστής Laplace. Αν $f = \ln r$ με $r = |\vec{r}|$ διάνυσμα θέσης, να υπολογιστεί το $\nabla^2 f$.

3ο

i) Να γραφεί το σύστημα των κανονικών εξισώσεων με το οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές του πολυωνύμου 2ου βαθμού που προσεγγίζει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τα σημεία (1.5,4.5), (2.0, 5.5), (2.5, 6.5) και (3.0, 7.5). Τι παρατηρείτε;

ii) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = -t \text{ αν } -1 < t < 1 \text{ και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

<u>**Σημείωση:**</u> Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 5 Ιουλίου 2002

Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2001 - 2002**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad -1 < t < 0 \\ t & \text{αν} \quad 0 < t < 1 \end{cases} \quad \text{και } f(t+2) = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

ii) Να υπολογιστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, το πολυώνυμο $y = ax + b$, που προσεγγίζει τα σημεία $\left(x_i, h\left(x_i\right)\right)$, όταν x_i= 1, 3, -1, -2 και $h(x) = e^{-x^2}$. Δίνεται ότι

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

2ο

i) Να διατυπωθεί το θεώρημα παρεμβολής του Langrange. Δείξτε ότι $l_i\left(x_j\right) = \delta_{ij}$, όταν δ_{ij} το σύμβολο του Kronecker. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + x^4\right)$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί μία προσέγγιση της τιμής $f(1.9)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.5$ και $x_2 = 3.2$.

ii) Με τον κανόνα των Gauss-Legendre για 4 σημεία να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^4} \quad \text{όταν } x_0 = -0.861136,\ A_0 = 0.347854,\ x_1 = -0.339981,\ A_1 = 0.652145$$

3ο

i) i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Τι παρατηρείτε:

ii) Να οριστεί ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου και να δειχθεί ότι ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν. Έστω $\vec{F} = 6xy\,\vec{i} + 3\left(x^2 - y^2 x^2\right)\vec{j} - 2y^3 z\,\vec{k}$. Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός του.

__**Σημείωση:**__ Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 13 Σεπτεμβρίου 2002
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ **ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2002 - 2003**
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος**
ΕΠ. ΣΥΝΕΡΓΑΤΗΣ: Δρ Μ. Μαρκάκης

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2003 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{αν} \quad 0 \le t < \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{αν} \quad \dfrac{1}{2} < t \le 1 \end{cases} \quad \text{και } f(t+2)=f(t) \text{ για κάθε } t\in\mathbb{R}$$

Υπολογίστε την τιμή σύγκλισης της σειράς στα σημεία ασυνεχείας της. Στη συνέχεια δείξτε ότι η σειρά Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης, έστω g, γράφεται

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(n\,\omega\, t+\varphi_n\right) \qquad \text{σειρά ημιτόνου}$$

και δώστε τη φυσική σημασία των C_n και φ_n.

2ο

i) Να διατυπωθεί το θεώρημα παρεμβολής του Langrange. Δείξτε ότι $l_i\left(x_j\right)=\delta_{ij}$, όταν δ_{ij} το σύμβολο Kronecker. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^4\right)$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί μία προσέγγιση της τιμής $f(1.9)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0=1.5$, $x_1=2.5$ και $x_2=3.2$.

ii) Με τον κανόνα των Gauss-Legendre για 4 σημεία να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{0.5}^{1}\frac{e^x}{1+x^4}\,dx \quad \text{όταν } x_0=-0.861136,\ A_0=0.347854,\ x_1=-0.339981,\ A_1=0.652145$$

3ο

i) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t)=\begin{cases} t\,e^{t} & \text{αν} \quad -1\le t\le 1 \\ 0 & \text{αν} \quad t<-1 \text{ ή } t>1 \end{cases}$$

ii) Να οριστεί η κλίση και ο στροβιλισμός ενός πεδίου. Δείξτε ότι ο στροβιλισμός της κλίσης είναι μηδέν. Αν $f(x,y,z)=\sin\left(x^2+y^2\right)-3z^2$ να υπολογιστεί η κλίση της στο σημείο $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4},1\right)$.

<u>Σημείωση:</u> Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 23 Ιανουαρίου 2003
Ο Καθηγητής

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ : 2002 - 2003
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Δρ Αθαν. Γ. Μπράτσος
ΕΠ. ΣΥΝΕΡΓΑΤΗΣ: Δρ Μ. Μαρκάκης

ΘΕΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2003 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΙΑΤΡΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ

1ο

i) Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier και να γίνει το γραμμικό φάσμα των τριών πρώτων όρων της περιοδικής συνάρτησης $f(t)$, που ο περιορισμός στη θεμελιώδη περίοδο είναι

$$f(t) = -t \quad \text{όταν} \quad -1 < t < 1$$

ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-1/2}\, e^{\sqrt{x}}$. Με τον τύπο παρεμβολής του Newton να υπολογιστεί η τιμή $f(0.5)$, όταν τα σημεία παρεμβολής είναι $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.4$ και $x_2 = 0.9$.

2ο

i) Να υπολογιστεί με τη διακριτή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το πολυώνυμο 1ου βαθμού, που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = e^{x} - e^{x^2}$ στα σημεία $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 2.0$ και $x_4 = 2.5$. Δίνεται ότι

$$a = \frac{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{και} \quad b = \frac{\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

ii) Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{1.6} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^6}\, dx \quad \text{όταν } h = 0.1$$

3ο

i) Αποδείξτε τον με κεντρικές διαφορές τύπο προσέγγισης της δεύτερης παραγώγου μιας συνάρτησης, έστω f, σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν $f(t) = \left(1 + t^2\right)^{-1/2}$ χρησιμοποιώντας αυτόν τον προσεγγιστικό τύπο, να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της f στο σημείο $t = 1$ όταν $h = 0.01$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή της παραγώγου.

ii) Να οριστεί η κλίση και να γραφούν οι κυριότερες ιδιότητές της. Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy + y^2 z^2$. Να υπολογιστεί η κλίση της στο σημείο $(1, -2, 1)$.

<u>Σημείωση:</u> Σε όλα τα θέματα, όπου απαιτείται, να γίνεται στρογγυλοποίηση στα 6 δεκαδικά ψηφία.

Αθήνα 6 Φεβρουαρίου 2003
Ο Καθηγητής