6.5 Τύπος του Taylor

6.5.1 Προσέγγιση των παραγώγων συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα προσδιοριστούν τύποι προσέγγισης των τιμών των παραγώγων μιας συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της [1].

Είναι γνωστό ότι, αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού D, όπου D είναι ένα κλειστό διάστημα στο οποίο η f είναι συνεχής και έχει παραγώγους μέχρι και $n+1$ τάξη συνεχείς συναρτήσεις, τότε αν $\xi \in D$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = P_n(x,\xi) \end{aligned} \tag{6.40 - 1}$$

για κάθε $\xi \in D$, όταν $P_n(x,\xi)$ είναι το **πολυώνυμο του Taylor** βαθμού n της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο ξ και $f(\xi)$, $f'(\xi)$, ..., $f^{(n)}(\xi)/n!$ οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Αν $\xi = 0$ το πολυώνυμο του Taylor γράφεται

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = P_n(x,0) \end{aligned} \tag{6.40 - 2}$$

που είναι γνωστό σαν το **πολυώνυμο του Maclaurin**

Έστω τώρα ότι στον τύπο $(6.40-1)$ τα x και ξ αντικαθίστανται από τα $x+h$ και x αντίστοιχα με $h>0$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x+h) &\approx f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n \\ &\approx f(x) + \frac{h}{1!}\,\frac{d\,f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\,\frac{d^n f(x)}{dx^n}\,. \end{aligned} \tag{6.40 - 3}$$

[1] Για μια εκτενέστερη μελέτη των προσεγγίσεων των παραγώγων συνάρτησης ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στα Κεφ. 9 και 11 του βιβλίου Α. Μπράτσος, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, 2011, ISBN 978-960-351-874-7.

Από την $(6.40-3)$ θεωρώντας μόνον τους δύο πρώτους όρους στο δεξιό μέλος προκύπτει

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\mathcal{O}(h). \qquad (6.40 - 4)$$

Η $(6.40-4)$ ορίζει την **προς τα εμπρός πρώτης τάξης προσέγγιση** της $d\,f(x)/dx$, όταν το $\mathcal{O}(h)$ συμβολίζει γενικά τους όρους αλγεβρικής παράστασης με δυνάμεις του h βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 1.

Όμοια αντικαθιστώντας όπου h το $-h$, η $(6.40-3)$ δίνει

$$\begin{aligned} f(x-h) \;\; &\approx \;\; f(x)-\frac{h}{1\,!}\,\frac{d\,f(x)}{dx}+\frac{h^2}{2\,!}\,\frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &\qquad +\ldots+(-1)^n\,\frac{h^n}{n\,!}\,\frac{d^nf(x)}{dx^n} \end{aligned} \qquad (6.40 - 5)$$

από την οποία έχουμε

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+\mathcal{O}(h) \qquad (6.40 - 6)$$

που ορίζει την **ανάδρομη πρώτης τάξης προσέγγιση** της $d\,f(x)/dx$.

Θεωρώντας τώρα τις εκφράσεις των $(6.40-3)$ και $(6.40-5)$ μέχρι και του όρου h^3 στο δεξιό μέλος και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \qquad (6.40 - 7)$$

που ορίζει την **κεντρική δεύτερης τάξης προσέγγιση** της $d\,f(x)/dx$.

Όμοια θεωρώντας τις $(6.40-3)$ και $(6.40-5)$ μέχρι και του όρου h^4 και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=h^2\,\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{h^4}{12}\,\frac{d^4f(x)}{dx^4}+\mathcal{O}\left(h^6\right),$$

οπότε

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+\mathcal{O}\left(h^2\right) \qquad (6.40 - 8)$$

που είναι γνωστή σαν η **κεντρική δεύτερης τάξης προσέγγιση** της $d^2f(x)/dx^2$.

Αντικαθιστώντας τώρα το h με $2h$ και το $-h$ με $-2h$ στις $(6.40-3)$ και $(6.40-5)$, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)=4h^2\,\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{16h^4}{12}\,\frac{d^4f(x)}{dx^4}+\mathcal{O}\left(h^6\right).$$

Τότε

$$\begin{aligned}\frac{d^4f(x)}{dx^4} &= \frac{1}{h^4}\left[f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)\right.\\ &\quad \left.-4f(x-h)+f(x-2h)\right]+\mathcal{O}\left(h^2\right) \qquad (6.40\text{ - }9)\end{aligned}$$

που ορίζει την **πέντε σημείων κεντρική δεύτερης τάξης προσέγγιση** της $d^4f(x)/dx^4$.

Παράδειγμα 6.5-1

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$. Ζητείται να γίνει προσέγγιση των παραγώγων

$$f'(x_0)\,\text{και}\quad f''(x_0)\,,\quad \text{όταν}\quad x_0=1$$

και $h=0.1,\quad 0.01,\quad$ και $\quad 0.001$. Οι θεωρητικές τιμές των παραγώγων είναι

$$f'(x_0)=-2\,x_0\,e^{-x_0^2}=f'(1)\approx -0.7357589\quad \text{και}\quad f''(x_0)=f''(1)\approx 0.7357589.$$

Λύση. Οι τύποι $(6.40-4)$ και $(6.40-8)$ στην περίπτωση αυτή γράφονται

$$\begin{aligned}f'(x_0) &\approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{e^{-(x_0+h)^2}-e^{-x_0^2}}{h},\\ f''(x_0) &\approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=\frac{e^{-(x_0+h)^2}-2e^{-x_0^2}+e^{-(x_0-h)^2}}{h^2},\end{aligned}$$

οπότε προκύπτουν τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.5 - 1.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας τους τύπους $(6.40-4)$ και $(6.40-8)$ η πρώτης και η δεύτερης τάξης παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

Table 6.5 - 1: Παράδειγμα 6.5-1: προσέγγιση παραγώγων

h	$f'(1)$	απόλυτο σφάλμα	$f''(1)$	απόλυτο σφάλμα
0.100	-0.6968216	0.03893726	0.7296463	0.6112551E-02
0.010	-0.7320559	0.370301E-02	0.7356976	0.6131136E-04
0.001	-0.7353908	0.368124E-04	0.7357583	0.6131437E-06

$i)\quad \ln(e^{2x}-2)$

$ii)\quad x\ln x$

$iii)\quad x-(\ln x)^x$

$iv)\quad e^{x/3}+x^2.$

στο σημείο $x_0 = 1.5$, όταν $h = 0.1$, 0.01 και 0.0025.

2. Όμοια των συναρτήσεων

$i)\quad x\cos x - x^2\sin x$

$ii)\quad \tan x$

στο σημείο $x_0 = \pi/4$.