8.8 Προσεγγιστικός υπολογισμός ολοκληρώματος

8.8.1 Σύνθετος κανόνας του τραπεζίου

Έστω $f \in C^2_{[a,b]}$ όπου με $C^2_{[a,b]}$ συμβολίζεται το σύνολο των συναρτήσεων που είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[a, b]$ και των οποίων υπάρχουν οι παράγωγοι μέχρι και δεύτερης τουλάχιστον τάξη και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ υποδιαιρεθεί σε N το πλήθος υποδιαστήματα πλάτους $h = (b - a)/N$ από τα $N + 1$ σημεία $x_i = a + ih$, όταν $i = 0, 1, \ldots, N$, τότε σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος θα ισχύει [1]

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_N} f(x)\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{8.8 - 1}$$

Είναι γνωστό ότι γεωμετρικά ο αριθμός $I(f)$, όταν η $f(x) > 0$ διαφορετικά θεωρείται η $|f(x)|$, παριστάνει το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου, που ορίζεται από τον άξονα των x, το διάγραμμα της συνάρτησης $y = f(x)$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Στην Εξ. $(8.8 - 1)$, έστω το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx, \quad \text{όταν} \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{8.8 - 2}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία και το Σχήμα 8.8 - 1 το ολοκλήρωμα $(8.8 - 2)$ προσεγγίζεται από το εγγεγραμμένο στην καμπύλη $y = f(x)$ τραπέζιο, που έχει ύψος $h = x_j - x_{j-1}$, βάσεις $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$ και εμβαδόν

$$E_j = \frac{h}{2}\left[f(x_j) + f(x_{j-1})\right]. \tag{8.8 - 3}$$

[1] Για μια εκτενέστερη μελέτη των προσεγγίσεων του ορισμένου ολοκληρώματος ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο Κεφ. 9 του βιβλίου Α. Μπράτσος, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, 2011, ISBN 978-960-351-874-7.

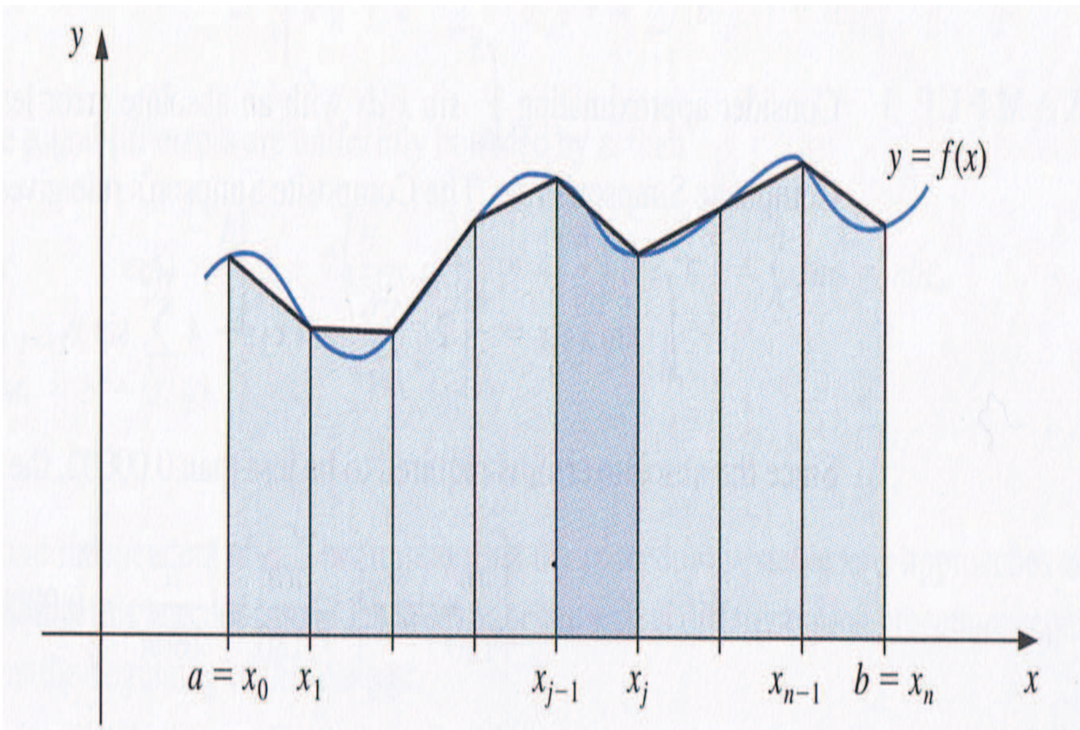

Figure 8.8 - 1: σύνθετος κανόνας του τραπεζίου

Άρα το εμβαδόν E που ορίζεται από την $I(f)$ στην $(8.8-1)$ θα προσεγγίζεται από το άθροισμα $\sum_{j=1}^{N} E_j$, δηλαδή

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \sum_{j=1}^{N} E_j \\ &= \frac{h}{2}\left\{f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)\right\}+\frac{h}{2}\left\{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right\} \\ &\quad +\ldots+\frac{h}{2}\left\{f\left(x_{N-1}\right)+f\left(x_N\right)\right\}. \end{aligned}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα $I(f)$ προσεγγίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$I(f) \approx \frac{h}{2}\left\{f\left(x_0\right)+2\left[f\left(x_1\right)+\ldots+f\left(x_{N-1}\right)\right]+f\left(x_N\right)\right\} \qquad (8.8\text{ - }4)$$

που είναι γνωστός σαν ο τύπος του **σύνθετου κανόνα του τραπεζίου** (composite trapezoidal rule). Το σφάλμα $e=e(f)$ της ολοκλήρωσης αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή ισούται με

$$e(f)=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\zeta), \quad \text{όταν} \quad \zeta \in [a,b]. \qquad (8.8\text{ - }5)$$

Παράδειγμα 8.8-1

Ζητείται να υπολογιστεί με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{όταν} \quad h=0.1. \qquad (8.8\text{ - }6)$$

Η θεωρητική τιμή είναι $I=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^{1.2} \approx 1.015\,973$.

Λύση. Αν $a_0=x_0=0$ και $b=x_{12}=1.2$, τότε από τον τύπο $(8.8-4)$ προκύπτει

$$I \approx \frac{h}{2}\left\{f\left(x_0\right)+2\left[f\left(x_1\right)+\ldots+f\left(x_{11}\right)\right]+f\left(x_{12}\right)\right\}=\mathit{1.015\,711}$$

όπου το σφάλμα της ολοκλήρωσης είναι $e=|1.015\,973-1.015\,711|=0.000262$.

Στον Πίνακα 8.8 - 1 δίνονται οι τιμές $(x_i, f(x_i))$ των παραπάνω υπολογισμών, ενώ στον Πίνακα 8.8 - 2 τα σφάλματα υπολογισμού του ολοκληρώματος $(8.8-6)$ για διάφορες τιμές του h.

Table 8.8 - 1: Παράδειγμα 8.8-1: οι τιμές $(x_i, f(x_i))$

x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$
0.0	0.100 000	0.7	0.819 2319
0.1	0.995 037	0.8	0.780 8688
0.2	0.980 580	0.9	0.743 2941
0.3	0.957 826	1.0	0.707 1068
0.4	0.928 476	1.1	0.672 6728
0.5	0.894 427	1.2	0.640 1844
0.6	0.857 492		

Table 8.8 - 2: Παράδειγμα 8.8-1: τα σφάλματα υπολογισμού του ολοκληρώματος $(8.8-6)$ για τις διάφορες τιμές του h

h	Σφάλμα
0.1000	2.62E-04
0.0500	6.55E-05
0.0100	2.62E-06
0.0010	2.55E-08
0.0001	5.06E-10

Ασκήσεις

1. Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου, όταν $h = 0.1$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad \text{και} \qquad \int_0^{0.7} \frac{dx}{1+x^4}\,.$$

2. Είναι γνωστό ότι

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου, όταν $h = 0.1$, αντίστοιχα $h = 0.2$ και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη θεωρητική τιμή.

3. Με το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx,$$

όταν $h = 0.1$ και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή του ολοκληρώματος.

4. Όμοια του ολοκληρώματος

$$\int_0^{0.5} \left(1 - x^2\right)^{3/2}\,dx,$$

όταν $h = 0.1$, 0.05 και να γίνει σύγκριση του αποτελέσματος με τη θεωρητική τιμή του *0.439 919*.