

Μάθημα 3

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότεροι ορισμοί και θεωρήματα για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, που θεωρούνται απαραίτητοι για τα επόμενα μαθήματα.

3.1 Ορισμοί

Ορισμός 3.1 - 1 (συνάρτησης). Έστω D και T δύο τυχόντα μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} . Τότε λέγεται *συνάρτηση*, μία **μονοσήμαντη** απεικόνιση, έστω f , του συνόλου D στο T , δηλαδή

$$f : D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T. \quad (3.1 - 1)$$

Το σύνολο D λέγεται πεδίο ορισμού, ενώ το T πεδίο τιμών της συνάρτησης f . Στο εξής μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το D θα συμβολίζεται με $f|D$ ή και $f(x)$, $x \in D$. Το x , που περιγράφει τις τιμές του D , λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y , που ορίζει τις αντίστοιχες τιμές του x στο T , εξαρτημένη μεταβλητή. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απεικόνιση f , περιγράφεται από τη σχέση $f(x)$, που λέγεται τύπος της συνάρτησης.

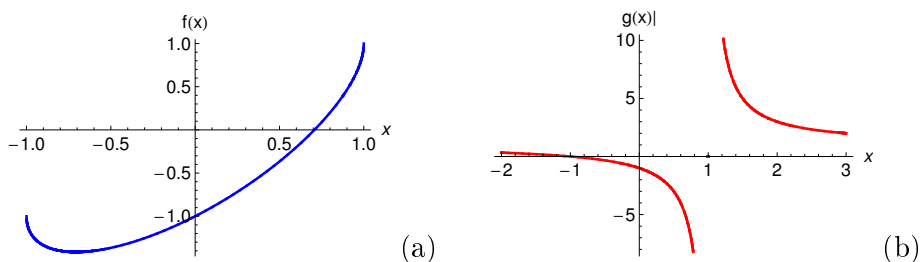
Παράδειγμα 3.1 - 1

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1 - 1, αν $D = \{0, 2, 5\}$, τότε ο τύπος

- $f(x) = x^2$ ορίζει συνάρτηση, επειδή κάθε στοιχείο του D μέσω της f απεικονίζεται σε ένα στοιχείο (μονοσήμαντη απεικόνιση), δηλαδή: $f(0) \rightarrow 0$, $f(2) \rightarrow 4$ και $f(5) \rightarrow 25$, οπότε $T = \{0, 4, 25\}$ ενώ ο
- $g(x) = \pm\sqrt{x}$ δεν ορίζει, επειδή τα στοιχεία του D απεικονίζονται σε δύο στοιχεία, όπως $f(2) \rightarrow \pm\sqrt{2}$, κ.λπ.

Η συνάρτηση είναι δυνατόν να παρασταθεί γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο $D \times T \subseteq \mathbb{R}^2$ από το διάγραμμα της ή τη γραφική της παράσταση G_f (Σχ. 3.1 - 1), όπου

$$G_f = \{(x, f(x)) : \text{για κάθε } x \in D\} \subseteq D \times T. \quad (3.1 - 2)$$



Σχήμα 3.1 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ με $D = [-1, 1]$ και (b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $D = \mathbb{R} - \{1\}$

Αν η συνάρτηση εκφράζεται με τον τύπο $y = f(x)$, τότε θα λέγεται ότι η σχέση που συνδέει τη μεταβλητή y με τη μεταβλητή x , είναι **λυμένη** (explicit) ως προς τη μεταβλητή y . Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η y δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί στη μορφή $y = f(x)$. Στις περιπτώσεις αυτές είναι γνωστή μόνον η σχέση που συνδέει τα x και y , δηλαδή επαληθεύεται μία σχέση της μορφής $f(x, y) = 0$. Τότε λέγεται ότι η συνάρτηση y δίνεται με **πεπλεγμένη** (implicit) μορφή.

Παράδειγμα 3.1 - 2

Αν $y = y(x)$, τότε η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + 2$ εκφράζεται με λυμένη μορφή, ενώ η $e^y - x - y = 0$ με πεπλεγμένη, επειδή η σχέση αυτή δε λύνεται ως προς y .

Προσδιορισμός του πεδίου ορισμού

Στην περίπτωση που ζητείται να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, όταν είναι γνωστός ο τύπος της, πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν τα εξής:

- οι περιορισμοί που υπάρχουν από την ίδια τη συνάρτηση όπως ρίζα, λογάριθμος κ.λπ., έτσι ώστε ο τύπος της να ορίζεται, και
- οι πράξεις που είναι σημειωμένες στον τύπο της συνάρτησης να έχουν έννοια -επιτρεπτές πράξεις- στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Υπενθυμίζεται ότι οι **μη επιτρεπτές πράξεις** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι οι:

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\infty, \quad \infty 0, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0. \quad (3.1 - 3)$$

Παράδειγμα 3.1 - 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

Τότε προφανώς είναι $D = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.1 - 4

Όμοια η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x + 1}{(x - 3)(x^2 + 4)}.$$

Τότε θα πρέπει $(x - 3)(x^2 + 4) \neq 0$. Επειδή $x^2 + 4 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αρκεί $x \neq 3$, δηλαδή $D = \mathbb{R} - \{3\}$.

Πίνακας 3.1 - 1: Παράδειγμα 3.1 - 5

Συνάρτηση	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x		-	-	+
$x + 2$		-	+	+
$x(x + 2)$		+	-	+

Παράδειγμα 3.1 - 5

Όμοια η

$$h(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

Πρέπει

$$\frac{x}{x+2} \geq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x(x+2) \geq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \neq 0.$$

Τότε σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1 - 1 προκύπτει ότι $x < -2$ ή $x \geq 0$. Άρα $D = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

Αντίστροφη συνάρτηση**Ορισμός 3.1 - 2** (αντίστροφης συνάρτησης). Έστω μία συνάρτηση

$$f: D \ni x \longrightarrow f(x) = y \in T$$

και $T^* \subseteq T$. Αν η απεικόνιση f^* με

$$f^*: T \ni y \longrightarrow f^*(y) = x \in D \quad (3.1 - 4)$$

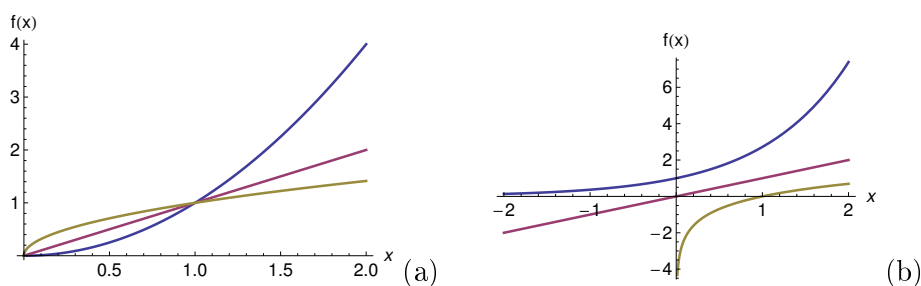
είναι επίσης μονοσήμαντη, τότε ορίζει την **αντίστροφη συνάρτηση** της f , που συμβολίζεται με f^{-1} .

Σημειώσεις 3.1 - 1

- i) Το f^{-1} είναι συμβολισμός και δεν πρέπει να συγχέεται με το $1/f$.

- ii) Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης υπολογίζεται, όταν η εξίσωση $f(x) = y$ λυθεί ως προς x (Παράδειγμα 3.1 - 6). Επειδή όμως τις περισσότερες φορές η λύση της εξίσωσης είναι αδύνατη (Παράδειγμα 3.1 - 7), ο τύπος της και όταν ακόμα είναι γνωστό ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί.
- iii) Το διάγραμμα της f και της f^{-1} εφόσον υπάρχει, είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ (Σχ. 3.1 - 2).
- iv) στην περίπτωση που ισχύει ο Ορισμός 3.1 - 2, δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, λέγεται ότι η f ορίζει μια **αμφιμονοσήμαντη ή ένα προς ένα** απεικόνιση. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.1 - 1. Η συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση τότε και μόνον, όταν η f είναι αμφιμονοσήμαντη.



Σχήμα 3.1 - 2: Ευθεία $y = x$ κόκκινη γραμμή. (a) Συνάρτηση $f(x) = x^2$ μπλε, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ πράσινη καμπύλη, όταν $x > 0$ και (b) e^x μπλε, $\ln x$ πράσινη καμπύλη

Στα παραδείγματα που δίνονται στη συνέχεια, υποτίθεται ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.1 - 6

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad \text{με πεδίο ορισμού} \quad D = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Να υπολογιστεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης.

Λύση. Έστω

$$\frac{2x+1}{x-1} = y \quad \text{οπότε} \quad x = \frac{y+1}{y-2} \quad \text{με} \quad T^* = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Παράδειγμα 3.1 - 7

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - x, \quad \text{όταν το πεδίο ορισμού είναι} \quad D = [0, +\infty).$$

Τότε, επειδή η εξίσωση $e^x - x = y$ δεν λύνεται ως προς x , είναι αδύνατος ο υπολογισμός του τύπου της αντίστροφης συνάρτησης.

Σύνθετη συνάρτηση

Ορισμός 3.1 - 3 (σύνθετης συνάρτησης). Έστω A, B, Γ τρία τυχόντα σύνολα διάφορα του κενού και $g|_A$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το B και $f|_B$ μία συνάρτηση με πεδίο τιμών το Γ . Τότε ορίζεται μία συνάρτηση $h|_A$ με πεδίο τιμών το Γ , που συμβολίζεται με $f \circ g$, από τον τύπο

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad (3.1 - 5)$$

και λέγεται σύνθετη συνάρτηση των f, g .

Είναι προφανές ότι η σύνθεση συναρτήσεων πληροί την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Παράδειγμα 3.1 - 8

Έστω οι συναρτήσεις

$$g(x) = 3x - 1 \quad \text{και} \quad f(x) = \sin x.$$

Τότε ορίζεται η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(3x - 1)$$

όπου για τα πεδία ορισμού είναι $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \mathbb{R}$, ενώ για τα πεδία τιμών $T(g) = \mathbb{R}$ και $T(f) = T(f \circ g) = [-1, 1]$.

Παράδειγμα 3.1 - 9

Όμοια η σύνθεση των συναρτήσεων

$$g(x) = -x^2 \quad \text{και} \quad f(x) = e^x$$

δίνει

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{-x^2}$$

¹όπου $D(f) = D(g) = D(f \circ g) = \mathbb{R}$, ενώ $T(f) = \mathbb{R}$ και $T(g) = T(f \circ g) = (0, +\infty)$.

3.2 Άλγεβρα συναρτήσεων

3.2.1 Ισότητα

Ορισμός 3.2 - 1. Οι συναρτήσεις $f, g|D$ λέγονται **ίσες** και συμβολίζεται αυτό με $f = g$ στο D τότε και μόνον, όταν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$.

Προφανώς η ισότητα είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού D .

3.2.2 Διάταξη

Ορισμός 3.2 - 2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g|D$. Τότε θα είναι $f \leq g$ τότε και μόνον, όταν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in D$.

Η σχέση αυτή είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική, οπότε ορίζει μία **σχέση διάταξης** στο σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού D , η οποία όμως δεν είναι γραμμική. Αντίστοιχα ορίζεται η δυϊκή της σχέση $f \geq g$.

¹Βλέπε Παράγραφο 3.4.6.

3.2.3 Πρόσθεση

Ορισμός 3.2 - 3. Έστω οι συναρτήσεις $f, g|D$. Τότε ορίζεται σαν άθροισμά τους η συνάρτηση $h = f + g|D$, όπου

$$h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \quad (3.2 - 1)$$

Το άθροισμα γενικεύεται για n το πλήθος συναρτήσεις.

Ιδιότητες

- i) αντιμεταθετική $f + g = g + f$ για κάθε $f, g|D$,
- ii) προσεταιριστική $f + (g + h) = (f + g) + h$ για κάθε $f, g, h|D$,
- iii) υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού D , που λέγεται **μηδενική** συνάρτηση και συμβολίζεται με $\tilde{0}$, τέτοια ώστε $\tilde{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει $f + \tilde{0} = \tilde{0} + f = f$ για κάθε $f|D$,
- iv) για κάθε $f|D$ υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση η $-f|D$, που λέγεται **αντίθετη** συνάρτηση της f στο D , τέτοια ώστε $f + (-f) = \tilde{0}$,
- v) στο D ισχύει η ισοδυναμία: αν $f + h = g + h$, τότε $f = g$ για κάθε $f, g, h|D$ (νόμος της διαγραφής στην πρόσθεση),
- v) για κάθε $f, g, X|D$ η εξίσωση $f + X = g|D$ έχει μοναδική λύση την $X = g + (-f)$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται διαφορά της f από την g και συμβολίζεται με $g - f$, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά των δύο συναρτήσεων λέγεται **αφαίρεση**.

3.2.4 Πολλαπλασιασμός

Ορισμός 3.2 - 4. Έστω οι συναρτήσεις $f, g|D$. Τότε ορίζεται σαν γινόμενό τους η συνάρτηση $h = f \cdot g = f g|D$, όταν

$$h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{για κάθε } x \in D. \quad (3.2 - 2)$$

Όμοια ο πολλαπλασιασμός γενικεύεται για ν το πλήθος συναρτήσεων.

Ιδιότητες

- i) αντιμεταθετική $fg = gf$ για κάθε $f, g|D$,
- ii) προσεταιριστική $f(gh) = (fg)h$ για κάθε $f, g, h|D$,
- iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση $f(g + h) = fg + fh$ για κάθε $f, g, h|D$,
- iv) υπάρχει στο D ακριβώς μία συνάρτηση, που λέγεται **μοναδιαία** συνάρτηση και συμβολίζεται με e , τέτοια ώστε $e(x) = 1$ για κάθε $x \in D$ και για την οποία ισχύει ότι $fe = ef = f$ για κάθε $f|D$,
- v) αν $f|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^* = 1/f|D$, τέτοια ώστε $ff^* = e$,
- vi) στο D ισχύει η ισοδυναμία: αν $fh = gh$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $f = g$ (νόμος της διαγραφής στον πολλαπλασιασμό),
- vii) για κάθε $f, g, X|D$ η εξίσωση $fX = g|D$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$ έχει μοναδική λύση την $X = g/f$.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης αυτής λέγεται πηλίκο της g προς την f και συμβολίζεται με g/f . Η πράξη με την οποία υπολογίζεται το πηλίκο δύο συναρτήσεων, λέγεται **διαίρεση**.

3.3 Είδη συναρτήσεων

3.3.1 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 3.3 - 1. Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x, -x \in D$ ισχύει

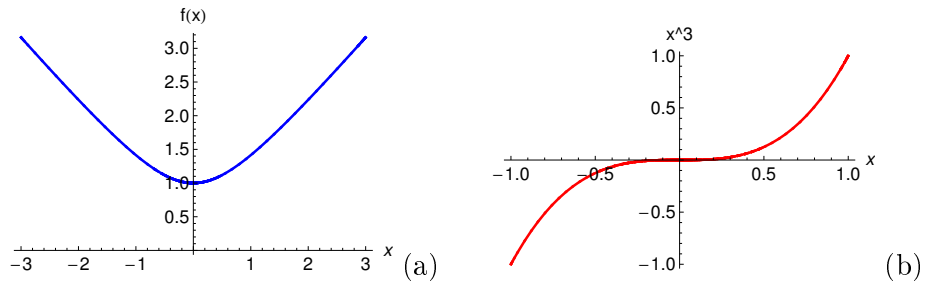
$$f(-x) = f(x). \quad (3.3 - 1)$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας άρτιας συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον άξονα Oy . Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $\cos x$, $(x^2 + 1)^{1/2}$ (Σχ. 3.3 - 1a), κ.λπ.

Ορισμός 3.3 - 2. Μία συνάρτηση $f|D$ λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε x , $-x \in D$ ισχύει

$$f(-x) = -f(x). \quad (3.3 - 2)$$

Χαρακτηριστικό του διαγράμματος μιας περιττής συνάρτησης είναι ότι παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων O . Όμοια παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η x^3 (Σχ. 3.3 - 1b), $\sin x$, κ.λπ.



Σχήμα 3.3 - 1: (a) Συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$ και (b) x^3

Άμεσα προκύπτει από τους παραπάνω ορισμούς ότι:

Πρόταση 3.3 - 1. Αν η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση, τότε το γινόμενο τους είναι περιττή συνάρτηση, ενώ το γινόμενο δύο περιττών ή δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

3.3.2 Μονοτονία συνάρτησης

Ορισμός 3.3 - 3 (μονοτονίας). Έστω η συνάρτηση $f|D$ και $x_1, x_2 \in D$, όπου χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Τότε, αν:

i) $f(x_1) \leq f(x_2)$ η f θα λέγεται **αύξουσα** και θα συμβολίζεται με \uparrow .

ii) $f(x_1) \geq f(x_2)$ η f θα λέγεται **φθίνουσα** και θα συμβολίζεται με \downarrow .

Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση θα λέγεται **μονότονη**.

iii) $f(x_1) < f(x_2)$ η f θα λέγεται γνήσια αύξουσα και θα συμβολίζεται με \uparrow .

iv) $f(x_1) > f(x_2)$ η f θα λέγεται γνήσια φθίνουσα και θα συμβολίζεται με \downarrow .

Στις περιπτώσεις (iii) και (iv) η συνάρτηση θα λέγεται **γνήσια μονότονη**.

Η λεπτομερής εξέταση της μονοτονίας μιας συνάρτησης θα γίνει στο Μάθημα 10.

Σχετικά τώρα με τις μονότονες συναρτήσεις ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 3.3 - 1. Αν μία συνάρτηση $f|D$ είναι γνήσια μονότονη στο D , τότε υπάρχει πάντοτε η αντίστροφη της συνάρτηση $f^{-1}|T$ όπου $T = f(D)$ και είναι του ίδιου είδους μονοτονίας με αυτή.

Θεώρημα 3.3 - 2. Η σύνθεση δύο συναρτήσεων του ίδιου είδους μονοτονίας είναι αύξουσα συνάρτηση, ενώ διαφορετικού είδους μονοτονίας φθίνουσα συνάρτηση.

3.3.3 Περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 3.3 - 4. Μία συνάρτηση $f|\mathbb{R}$ λέγεται περιοδική, αν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ με $\tau \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$f(x + \tau) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3 - 3)$$

Τότε ο τ λέγεται **περίοδος**, ενώ ο ελάχιστος θετικός αριθμός τ για τον οποίο ισχύει η (3.3 - 3) λέγεται **θεμελιώδης περίοδος** και συμβολίζεται με T .

Σημείωση 3.3 - 1

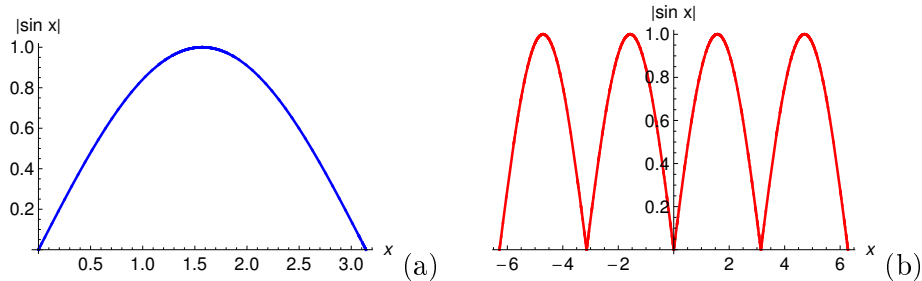
Άμεσα προκύπτει από τον ορισμό ότι οι ιδιότητες και το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης θα είναι γνωστές, όταν μελετηθεί η συνάρτηση σε ένα διάστημα πλάτους T , δηλαδή όσο η θεμελιώδης περίοδος.

Οι περιοδικές συναρτήσεις συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, όπου η μεταβλητή τους t συμβολίζει το χρόνο και μεταβάλλεται σε διαστήματα όπως το $[0, +\infty)$, $[t_1, t_2]$ κ.λπ. Στις περιπτώσεις αυτές λέγεται ότι έχουμε τον περιορισμό της περιοδικής συνάρτησης στα διαστήματα αυτά.

Κατηγορίες περιοδικών συναρτήσεων

Οι περιοδικές συναρτήσεις χωρίζονται στις παρακάτω δύο κατηγορίες:

- i) εκείνες που από το ορισμό τους είναι περιοδικές, δηλαδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως: $\sin x$, $\cos 3x$, $\tan 5x$, $|\sin x|$ που είναι γνωστή σαν ²πλήρης ανόρθωση (Σχ. 3.3 - 3) με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, κ.λπ.



Σχήμα 3.3 - 2: Συνάρτηση (a) $|\sin x|$, όταν $x \in [0, \pi]$ δηλαδή διάστημα πλάτους $T = \pi$ και (b) όταν $x \in [-2\pi, 2\pi]$

- ii) Συναρτήσεις που ορίζονται με κάποια συνθήκη περιοδικότητας. Οι συναρτήσεις αυτές συναντώνται στις εφαρμογές και παραδείγματά τους δίνονται στη συνέχεια.

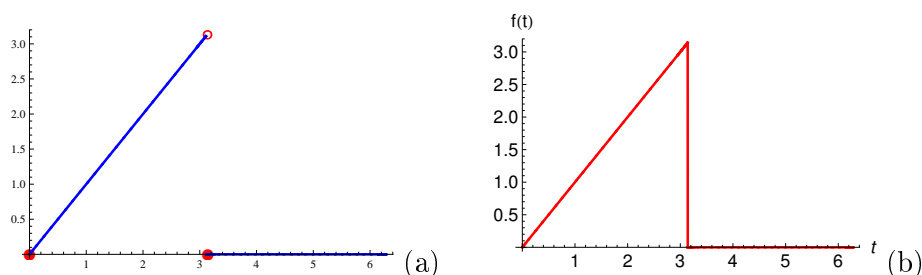
Παράδειγμα 3.3 - 1

Η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{αν } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{αν } \pi \leq t < 2\pi, \end{cases} \quad \text{όταν } \overbrace{f(t + \underbrace{2\pi}_T) = f(t)}^{\text{συνθήκη}} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

²Γενικότερα η συνάρτηση $|\sin \omega x|$ με $\omega > 0$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi/\omega$.

είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$. Στο Σχ. 3.3 - 3a δίνεται το διάγραμμά της στο διάστημα $[0, T]$ πλάτους όσο η θεμελιώδης περίοδος, όπως αυτό παρουσιάζεται στα μαθηματικά, ενώ στο Σχ. 3.3 - 3b όπως στις εφαρμογές.



Σχήμα 3.3 - 3: Παράδειγμα 3.3 - 1

Παράδειγμα 3.3 - 2

Όμοια η

$$g(t) = \begin{cases} e^t & \text{αν } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{αν } 1 \leq t < 2, \end{cases} \quad \text{όταν } \overbrace{f(t + \underbrace{2}_T)}^{\text{συνθήκη}} = f(t) \text{ για κάθε } t \in \mathfrak{R}$$

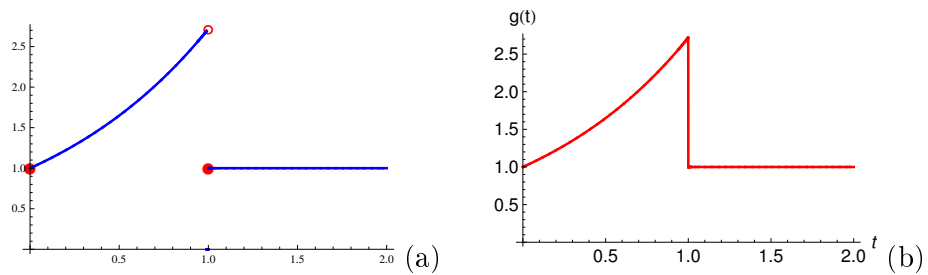
είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ με διάγραμμα στο Σχ. 3.3 - 4a στα μαθηματικά, αντίστοιχα Σχ. 3.3 - 4b στις εφαρμογές.

Παράδειγμα 3.3 - 3

Όμοια οι

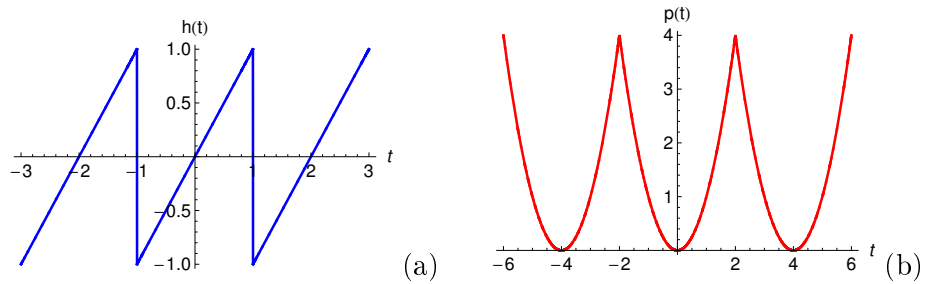
$$h(t) = t, \quad \text{όταν } -1 \leq t < 1 \text{ και } h(t + \underbrace{2}_T) = h(t), \text{ και}$$

$$p(t) = t^2, \quad \text{όταν } -2 \leq t < 2 \text{ και } p(t + \underbrace{4}_T) = p(t)$$



Σχήμα 3.3 - 4: Παράδειγμα 3.3 - 2

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με θεμελιώδη περίοδο $T = 2$ (Σχ. 3.3 - 5a) και $T = 4$ (Σχ. 3.3 - 5b).



Σχήμα 3.3 - 5: Παράδειγμα 3.3 - 3

Το Πρόγραμμα 3.3 - 1 δίνει το Σχ. 3.3 - 3 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 3.3 - 1

```
Plot[Piecewise[{{t, 0 < t < Pi}, {0, Pi < t < 2 Pi}},
{t, 0, 2Pi},
PlotStyle -> Thick, ColorFunction -> Function[Blue],
AxesLabel -> {t, "f(t)"},
BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

Ιδιότητες

Σχετικά με τις περιοδικές συναρτήσεις ισχύουν:

- i) το διάγραμμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδο λέγεται **κύμα**,

- ii) αν η μεταβλητή μιας περιοδικής συνάρτησης συμβολίζει το διάστημα, τότε η περίοδος της λέγεται **μήκος κύματος** και συμβολίζεται με λ ,
- iii) κάθε περιοδική συνάρτηση $f(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T γίνεται περιοδική με θεμελιώδη περίοδο 2π , θέτοντας

$$t = \frac{2\pi}{T}x, \quad (3.3 - 4)$$

- iv) αν T είναι η θεμελιώδης περίοδος, τότε ορίζεται ως **συχνότητα** ν ο αριθμός

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (3.3 - 5)$$

και ως **κυκλική συχνότητα** ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.3 - 6)$$

- v) ορίζεται σαν **αρμονική** κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(t) = a \cos(\omega t + \theta) \quad \text{ή} \quad f(t) = a \sin(\omega t + \theta). \quad (3.3 - 7)$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 3.3 - 2. Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων με την ίδια κυκλική συχνότητα, έστω ω , είναι επίσης αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα.

Απόδειξη. Έστω οι αρμονικές συναρτήσεις $f(t) = \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ και $g(t) = \alpha_2 \cos(\omega t + \theta_2)$. Τότε, αν $h(t) = f(t) + g(t)$, είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= \alpha_1 \cos(\omega t + \theta_1) + \alpha_2 \sin(\omega t + \theta_2) \\ &= (\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \sin \theta_2) \cos \omega t + (-\alpha_1 \sin \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2) \sin \omega t \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t = B \left(\frac{A}{B} \cos \omega t + \sin \omega t \right) \\ &= B (\tan \phi \cos \omega t + \sin \omega t) = C \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \sin(\omega t + \phi), \quad (3.3 - 8)$$

όπου $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$ με $\tan \varphi = A/B$, όταν $B \neq 0$ και $-\pi \leq \varphi < \pi$. Από την (3.3 – 8) προκύπτει ότι το άθροισμα είναι όμοια μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω . ■

Παράδειγμα 3.3 - 4

Το άθροισμα των αρμονικών συναρτήσεων $f(t) = \sin t$ και $g(t) = \sqrt{3} \cos t$, όπου $\omega = 1$, δίνει

$$h(t) = \sin t + \sqrt{3} \cos t = 2 \left(\frac{1}{2} \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right) = 2 \cos \left(t - \frac{\pi}{6} \right),$$

δηλαδή μία αρμονική συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω .

Πρόταση 3.3 - 3. Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που η κάθε μία έχει κυκλική συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο μιας συχνότητας, έστω ω_0 , είναι μία περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση με συχνότητα τη μικρότερη συχνότητα των αρμονικών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.3 - 4. Το άθροισμα δύο ή περισσότερων αρμονικών συναρτήσεων, που οι συχνότητές τους έχουν ανά δύο πηλίκο ρητό αριθμό, είναι περιοδική - γενικά μη αρμονική - συνάρτηση.

3.4 Κατηγορίες συναρτήσεων

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες κατηγορίες συναρτήσεων με τις πλέον βασικές ιδιότητές τους.

3.4.1 Πολυωνυμική

Ορισμός 3.4 - 1 Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$P(x) = P_\nu(x) = a_\nu x^\nu + \dots + a_1 x + a_0, \quad (3.4 - 1)$$

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, \dots, \nu$ και $\nu = 1, 2, \dots$ λέγεται **πολυωνυμική** βαθμού ν .

Τότε είναι $D = \mathbb{R}$, ενώ το T προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν.

Ορισμός 3.4 - 2 Κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.4 - 2)$$

όταν $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 0, 1, \dots, n$ και $n = 1, 2, \dots$ λέγεται **πολυωνυμική εξίσωση** βαθμού n , ενώ κάθε τιμή, έστω x^* , που την επαληθεύει **ρίζα** της εξίσωσης.

3.4.2 Ρητή

Ορισμός 3.4 - 3 Λέγεται **ρητή** κάθε συνάρτηση που είναι δυνατόν να παρασταθεί σαν το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \dots + \beta_1 x + \beta_0} \quad (3.4 - 3)$$

όπου $n, m = 1, 2, \dots$ με $a_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$ και $j = 0, 1, \dots, m$.

Τότε $D = \mathbb{R} - \{\text{πραγματικές ρίζες του παρανομαστή}\}$, ενώ όμοια το T προσδιορίζεται, εφόσον αυτό είναι δυνατόν. Οι ρίζες του παρανομαστή λέγονται και **πόλοι** της $R(x)$.

3.4.3 Πεπλεγμένη

Ορισμός 3.4 - 4 Λέγεται **πεπλεγμένη** (*implicit*) κάθε συνάρτηση που ορίζεται από μία αλγεβρική σχέση μεταξύ των y και x και η οποία δεν είναι λυμένη ως προς y , δηλαδή μία σχέση της μορφής

$$F(x, y(x)) = 0 \quad (3.4 - 4)$$

όπου η F είναι ένα πολώνυμο τόσο ως προς y όσο και ως προς x , η οποία και όταν ακόμα λυθεί ως προς y , θα περιέχει στην αναλυτική της έκφραση και ριζικά.

Ενδεικτικά δίνονται οι συναρτήσεις $y^2 = ax^2 + bx + c$, $x^3 + y^3 - 3ax = 0$, $y = x + (1 + x^2)^{1/2}$ κ.λπ. Οι ρητές συναρτήσεις είναι μία ειδική κατηγορία των πεπλεγμένων συναρτήσεων.

3.4.4 Τριγωνομετρικές

Ημίτονο: $\sin x$

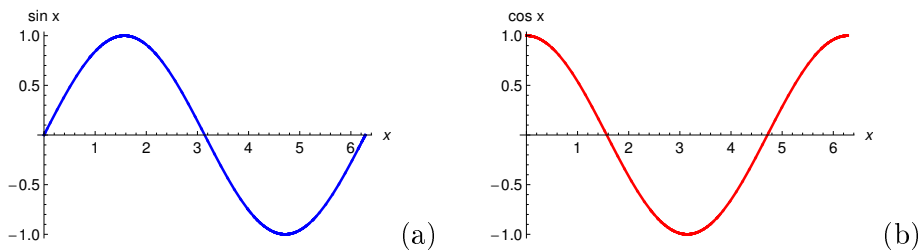
Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$ και τιμών $T = [-1, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, περιττή, γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, δηλαδή στο I και IV τεταρτημόριο και γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, δηλαδή στο II και III τεταρτημόριο (Σχ. 3.4 - 1a).

$$\text{Βασική ταυτότητα: } \sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a \end{cases} \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

Συνημίτονο: $\cos x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R}$ και τιμών $T = [-1, 1]$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = 2\pi$, άρτια, γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in [0, \pi]$, δηλαδή στο I και II τεταρτημόριο και γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in [\pi, 2\pi]$, δηλαδή στο III και IV τεταρτημόριο (Σχ. 3.4 - 1b).

$$\text{Βασική ταυτότητα: } \cos x = \cos a \iff x = 2k\pi \pm a \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$



Σχήμα 3.4 - 1: (a) Συνάρτηση $\sin x$ και (b) $\cos x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$

Εφαπτομένη: $\tan x$

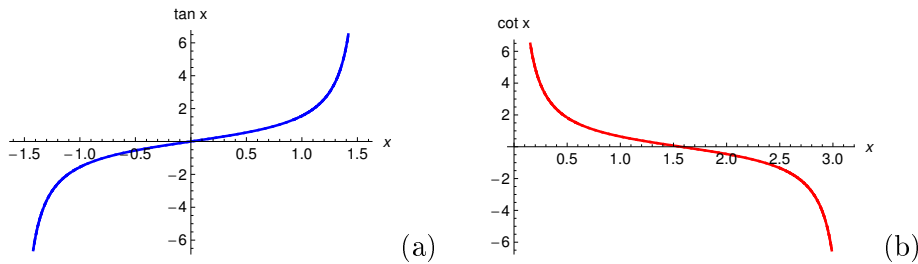
Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\}; k \in \mathbb{Z}$ και τιμών $T = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.4 - 2a).

$$\text{Βασική ταυτότητα: } \tan x = \tan a \iff x = k\pi + a \text{ με } k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεφαπτομένη: $\cot x$

Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$ και τιμών $T = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο $T = \pi$, περιττή και γνήσια φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της (Σχ. 3.4 - 2b).

Βασική ταυτότητα: $\cot x = \cot a \iff x = k\pi + a$ με $k \in \mathbb{Z}$.



Σχήμα 3.4 - 2: (a) Συνάρτηση $\tan x$, όταν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και (b) $\cot x$, όταν $x \in (0, \pi)$

3.4.5 Αντίστροφες τριγωνομετρικές

Τόξο ημιτόνου: $\sin^{-1} x$ ή $\arcsin x$

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $[-\pi/2, \pi/2]$, είναι γνήσια αύξουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 - 1 αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.4 - 3a)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \sin^{-1} x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.4 - 5)$$

Τόξο συνημιτόνου: $\cos^{-1} x$ ή $\arccos x$

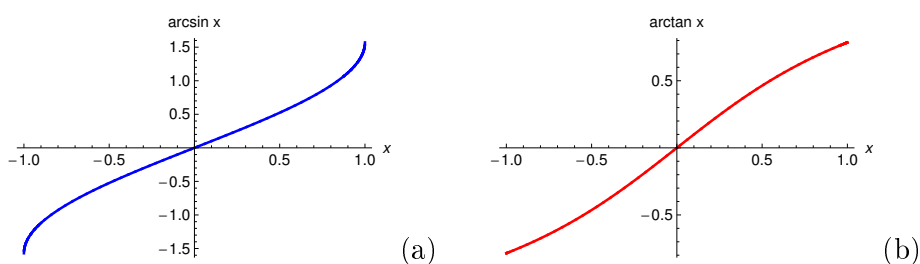
Όμοια η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ με πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ είναι γνήσια φθίνουσα και έχει πεδίο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cos^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} \quad (3.4 - 6)$$

Τόξο εφαπτομένης: $\tan^{-1} x$ ή $\arctan x$

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι γνήσια αύξουσα με πεδίο τιμών \mathbb{R} , οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση (Σχ. 3.4 - 3b)

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \tan^{-1} x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.4 - 7)$$



Σχήμα 3.4 - 3: (a) Συνάρτηση $\sin^{-1} x$ και (b) $\tan^{-1} x$, όταν $x \in [-1, 1]$

Τόξο συνεφαπτομένης: $\cot^{-1} x$ ή $\operatorname{arccot} x$

Η συνάρτηση $f(x) = \cot x$ όμοια με πεδίο ορισμού το $(0, \pi)$ είναι γνήσια φθίνουσα με πεδίο τιμών \mathbb{R} , οπότε αντιστρέφεται και ορίζει τη συνάρτηση

$$y = g(x) = f^{-1}(x) = \cot^{-1} x \iff \begin{cases} x = \cos y \\ 0 < y < \pi \end{cases} \quad (3.4 - 8)$$

3.4.6 Εκθετική

Ορισμός 3.4 - 5. Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a^x$ όπου $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ λέγεται **εκθετική**. Ειδικά όταν $a = 1$ είναι $f(x) = 1$.

Προφανώς είναι $D = \mathbb{R}$, ενώ $T = (0, +\infty)$, δηλαδή οι τιμές της εκθετικής συνάρτησης είναι πάντοτε θετικές.

Ιδιότητες

Έστω $a, b \in (0, +\infty)$ και $x, y \in \mathfrak{R}$. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$$i) \quad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$v) \quad a^x = 1 \iff x = 0 \text{ με } a \neq 1,$$

$$ii) \quad a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$vi) \quad a > b \implies \begin{cases} a^x > b^x & ; x > 0 \\ a^x < b^x & ; x < 0 \end{cases},$$

$$iii) \quad (ab)^x = a^x b^x$$

$$vii) \quad a^x = a^y \iff x = y \text{ με } a \neq 1,$$

$$iv) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$viii) \quad x > y \implies \begin{cases} a^x > a^y & ; a > 1 \\ a^x < a^y & ; a < 1 \end{cases}.$$

Μονοτονία

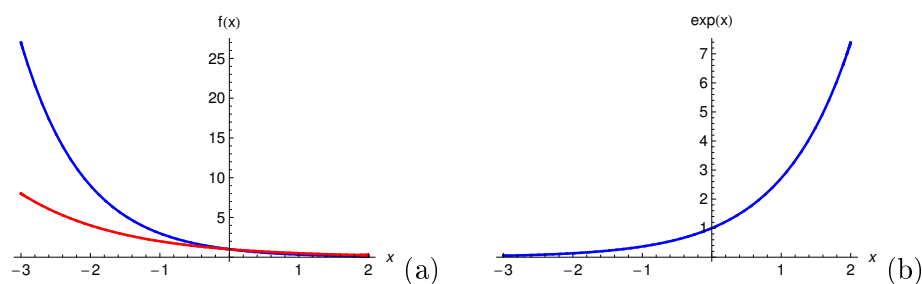
Αποδεικνύεται ότι, όταν:

I) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα (Σχ. 3.4 - 4 a),

II) $a > 1$, είναι γνήσια αύξουσα. Ειδικά, όταν $a = e$, όπου e είναι ο γνωστός υπερβατικός αριθμός έχουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \quad (3.4 - 9)$$

που είναι μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση (Σχ. 3.4 - 4 b).



Σχήμα 3.4 - 4: (α) Συνάρτηση a^x με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (b) η e^x , όταν $x \in [-3, 2]$

Σημείωση 3.4 - 1

Η συνάρτηση e^x πολλές φορές στις εφαρμογές συμβολίζεται με $\exp(x)$.

3.4.7 Λογαριθμική

Αποδεικνύεται ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.4 - 1. Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a με $a \neq 1$ και κάθε $y \in \mathbb{R}$ με $y > 0$, υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x , έτσι ώστε $a^x = y$.

Ορισμός 3.4 - 6. Ο μονοσήμαντα ορισμένος πραγματικός αριθμός y για τον οποίον ισχύει $a^y = x$ όπου $a > 0$, $a \neq 1$ και $x > 0$ λέγεται **λογάριθμος** του x με βάση a και συμβολίζεται με $\log_a x$.

Παρατηρήσεις 3.4 - 1

- Προφανώς $D = (0, +\infty)$, ενώ $T = \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $\log_a x$ είναι η αντίστροφη της a^x .
- Ειδικά, όταν $a = e$, ορίζεται ο **φυσικός** ή **νεπέριος** λογάριθμος, που συμβολίζεται συνήθως με $\ln x$ (Σχ. 3.4 - 5 b).

Προφανώς τότε ισχύει η ταυτότητα

$$a^x = e^{x \ln a}. \quad (3.4 - 10)$$

Όταν $a = 10$, ορίζεται ο δεκαδικός λογάριθμος, που συμβολίζεται με $\log x = \log_{10} x$.

Ιδιότητες

Έστω $a > 0$ με $a \neq 1$ και $x, y > 0$. Τότε:

$$i) \quad a^{\log_a x} = x \qquad v) \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$ii) \quad \log_a x = \log_a y \iff x = y \qquad vi) \quad \log_a x^b = b \log_a x; \quad b \in \mathfrak{R},$$

$$iii) \quad \log_a 1 = 0, \log_a a = 1 \qquad vii) \quad \log_a x > \log_a y \iff$$

$$iv) \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \begin{cases} x > y & ; \quad a > 1 \\ x < y & ; \quad a < 1 \end{cases}.$$

Άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων iv, v και vi είναι ότι, αν $xy > 0$, τότε:

$$viii) \quad \log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|,$$

$$ix) \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a |x| - \log_a |y|,$$

$$x) \quad \log_a x^\nu = \nu \log_a x, \quad \text{όταν } x > 0 \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

xi) Ισχύει ο παρακάτω τύπος αλλαγής βάσης

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}. \qquad (3.4 - 11)$$

Μονοτονία

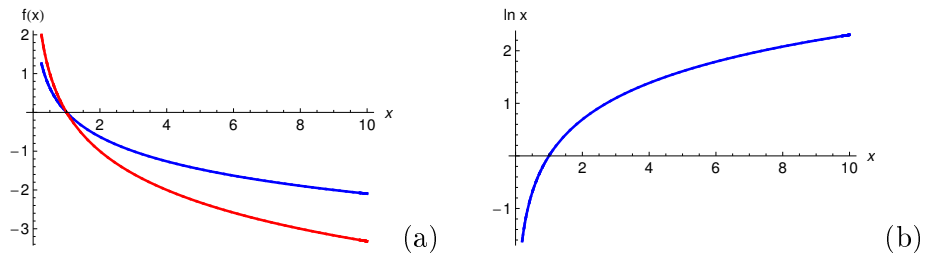
Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 - 1, όταν

a) $0 < a < 1$, η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα (Σχ. 3.4 - 5 a),

b) $a > 1$, είναι γνήσια αύξουσα (Σχ. 3.4 - 5 b).

3.4.8 Υπερβολικές

Οι υπερβολικές συναρτήσεις (hyperbolic functions) ορίζονται βάση των συναρτήσεων e^x και e^{-x} . Χρησιμοποιούνται στην περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων, που αναφέρονται στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, τη μεταφορά θερμότητας, τις κυματομορφές soliton κ.λπ. Οι συναρτήσεις αυτές είναι:



Σχήμα 3.4 - 5: (α) Συνάρτηση $\log_a x$ με $a = \frac{1}{3}$ μπλε, $a = \frac{1}{2}$ κόκκινη καμπύλη και (β) η $\ln x$, όταν $x \in (0, 10]$

Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \mid \Re \quad (\text{Σχ. 3.4 - 6a}). \quad (3.4 - 12)$$

Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \mid \Re \quad (\text{Σχ. 3.4 - 6b}). \quad (3.4 - 13)$$

Υπερβολική εφαπτομένη

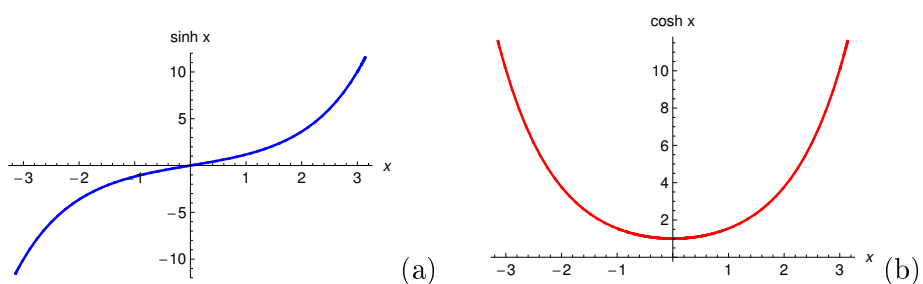
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \mid \Re \quad (\text{Σχ. 3.4 - 7a}). \quad (3.4 - 14)$$

Υπερβολική συνεφαπτομένη

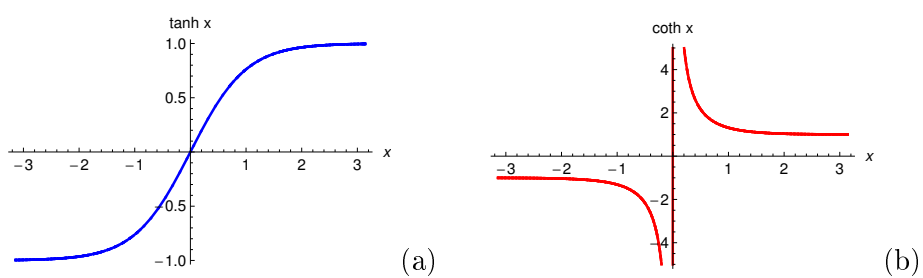
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \mid \Re - \{0\} \quad (\text{Σχ. 3.4 - 7b}). \quad (3.4 - 15)$$

3.4.9 Υπερβατικές

Οι συναρτήσεις της κατηγορίας αυτής δεν επαληθεύουν καμία αλγεβρική εξίσωση και η αναλυτική έκφραση επιτυγχάνεται με απεριόριστα μεγάλο αριθμό αλγεβρικών



Σχήμα 3.4 - 6: (a) Συνάρτηση $\sinh x$ και (b) $\cosh x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$



Σχήμα 3.4 - 7: (a) Συνάρτηση $\tanh x$ και (b) $\coth x$, όταν $x \in [-\pi, \pi]$

όρων. Είναι προφανές ότι η εκθετική, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές και οι αντίστροφές των συναρτήσεις είναι υπερβατικές.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

i) $\sqrt{3x^2 - 5x + 4}$

vii) $\ln(x^2 - x - 2)$

ii) $\tan(\sin 2x)$

viii) $\cosh \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

iii) $\frac{x}{|x+3|}$

ix) $\frac{3x^2 + 4x - 5}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{2x^2 - 54}}$

iv) $\sin^{-1} 3x$

x) $\coth \frac{x-1}{x+1}$

v) $\sqrt{\frac{1-x}{(x-2)(x+5)}}$

xi) $(x+1)^{1/x}$

vi) $\tan^{-1} 5x$

xii) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sin x)$. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού, τιμών και να γίνει το διάγραμμά της.

3. Όμοια της συνάρτησης $f(x) = \ln[\cos(x/2)]$.

4. Δείξτε ότι:

i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$

ii) $\sinh(-x) = -\sinh x, \cosh(-x) = \cosh x, \tanh(-x) = -\tanh x,$

iii) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$

iv) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$

v) $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}.$

5. Δείξτε ότι οι αντίστροφες συναρτήσεις των υπερβολικών συναρτήσεων δίνονται από τους τύπους:

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \begin{cases} \cosh_+^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \cosh_-^{-1} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ (\text{δίτιμη συνάρτηση}) \end{cases}$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των και βάσει αυτού το πεδίο τιμών των υπερβολικών συναρτήσεων.

6. Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x)$, να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος T και να γίνει το διάγραμμα για τις περιοδικές από αυτές στη θεμελιώδη περίοδο

$$i) \sin 3x \qquad ii) \sin |x| \qquad iii) |\sin \omega x|$$

$$iv) |\cos \omega x| \qquad v) \cos x^2 \qquad vi) |\tan 2x|.$$

7. Να γίνει η γραφική παράσταση των παρακάτω περιοδικών συναρτήσεων, όταν ο περιορισμός τους στη θεμελιώδη περίοδο είναι:

$$i) f(t) = e^{-t} \quad \text{αν} \quad 0 \leq t < \pi,$$

$$ii) f(t) = 4\pi^2 - t^2 \quad \text{αν} \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

$$iii) f(t) = \begin{cases} t & \text{αν} \quad \pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad 0 \leq t < \pi, \end{cases}$$

$$iv) f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν} \quad -\pi/2 \leq t < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad 0 \leq t < \pi/2, \end{cases}$$

$$v) f(t) = |\sin t|$$

$$vi) f(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{αν} \quad -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & \text{αν} \quad 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

8. Να δειχθεί ότι, αν μία συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T , τότε

$$i) f(t) = f(t + kT), \quad \text{όταν} \quad k \in Z,$$

ii) η $f(kt)$ με $k \neq 0$ είναι όμοια περιοδική με θεμελιώδη περίοδο T/k .

9. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιοδικές με περίοδο τ , τότε και η συνάρτηση $h = kf + \lambda g$ όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι όμοια περιοδική.

³Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος στο σύνολό του ή τμημάτων του χωρίς τη γραπτή άδεια του Καθ. Α. Μπράτσου.

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: <http://users.teiath.gr/bratsos/>

Βιβλιογραφία

- [1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978-960-351-874-7.
- [2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960-351-453-5/978-960-351-453-4.
- [3] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978-960-524-184-1.
- [4] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960-418-087-8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- <http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://eom.springer.de/>