Μάθημα 6

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΑ

6.1 Πίνακες

Η επίλυση διαφόρων προβλημάτων των μαθηματικών και γενικότερα των εφαρμοσμένων επιστημών οδήγησε μεταξύ των άλλων στην ανάγκη ομαδοποίησης των διαφόρων δεδομένων. Κύριος στόχος της ομαδοποίησης αυτής ήταν αφενός εν η εύκολη πρόσβαση σε αυτά και αφετέρου η ευκολία των μεταξύ τους πράξεων. Στην περίπτωση που τα δεδομένα αυτά είναι πραγματικοί ή γενικότερα μιγαδικοί αριθμοί, η παραπάνω ομαδοποίηση γίνεται με την έννοια του πίνακα, μια έννοια που εισάγεται στη συνέχεια αυτού του μαθήματος, ενώ για μία γενικότερη αντιμετώπιση του προβλήματος ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία.

6.1.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.1.1 - 1 (πίνακα). *Λέγεται πίνακας (matrix) τάξης* (m, n) *μία διάταξη* $m\,n$ *στοιχείων από το σύνολο* $\Re$ *ή το* $\mathcal{C}$*, που είναι διατεταγμένα σε* m*-γραμμές και* n*-στήλες, έτσι ώστε κάθε στοιχείο της να ανήκει ακριβώς σε μία γραμμή και μία στήλη.*

Οι πίνακες θα συμβολίζονται στο εξής με κεφαλαία γράμματα, όπως A, B, C κ.λπ., ενώ ένας πίνακας A με στοιχεία από το $\Re$ τάξης (m, n) θα συμβολίζεται με $A \in \Re^{m\times n}$ και με $A \in \mathcal{C}^{m\times n}$, όταν έχει στοιχεία από το $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 6.1.1 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftarrow \text{1η γραμμή} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \\ \quad\;\uparrow \\ \text{1η στήλη} \end{array} \qquad \text{είναι τάξης} \quad (3,2),$$

επειδή έχει 3 γραμμές και 2 στήλες.

Στο παραπάνω παράδειγμα αν τα στοιχεία του πίνακα A συμβολιστούν με το γράμμα, έστω a, τότε για να καθοριστούν τα στοιχεία αυτά στις επί μέρους θέσεις του πίνακα, απαιτούνται δύο δείκτες, που ό ένας να δείχνει τη γραμμή και ο άλλος τη στήλη στην οποία ανήκει το κάθε στοιχείο. Αν δεχθούμε ότι στο εξής ο πρώτος δείκτης, έστω i, θα συμβολίζει τις γραμμές (rows) του πίνακα και ο δεύτερος, έστω j, τις στήλες (columns), τότε ο παραπάνω πίνακας A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = (a_{ij})\,, \quad \text{όταν} \quad \begin{array}{rcl} i & = & 1,\,2,\,3 \text{ και} \\ j & = & 1,\,2. \end{array}$$

Γενικότερα ένας πίνακας A τάξης (m,n) γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \;;\; 1 \leq i \leq m\,,\; 1 \leq j \leq n. \quad (6.1.1 - 1)$$

Αν $n = 1$, δηλαδή υπάρχει μια μόνο στήλη, τότε ο πίνακας λέγεται **πίνακας διάνυσμα** ή απλά **διάνυσμα**.

Παράδειγμα 6.1.1 - 2

Οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{a} = \mathbf{a} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{b} = \mathbf{b}$$

είναι πίνακες διανύσματα τάξης $(2,1)$ και $(3,1)$ αντίστοιχα.

Αν $m = n$, τότε ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός πίνακας** τάξης (n,n) ή εν συντομία τάξης n.

Παράδειγμα 6.1.1 - 3

Οι παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί τάξης 2 και 3 αντίστοιχα. Τότε γράφεται $A \in \Re^{2\times 2}$ και $B \in \Re^{3\times 3}$, όταν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί, αντίστοιχα γράφεται $A \in \mathcal{C}^{2\times 2}$ και $B \in \mathcal{C}^{3\times 3}$, όταν είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} ενός τετραγωνικού πίνακα τάξης n ορίζουν την **κύρια** ή **πρωτεύουσα διαγώνιο**, ενώ τα a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $\ldots$, a_{n1} τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Παρατήρηση 6.1.1 - 1

Στο εξής στις διάφορες εφαρμογές θα χρησιμοποιείται μόνον η κύρια διαγώνιος.

Παράδειγμα 6.1.1 - 4

Στον τετραγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix}$$

τα στοιχεία a_{11}, a_{22}, a_{33} ορίζουν την κύρια και τα a_{13}, a_{22}, a_{31} τη δευτερεύουσα διαγώνιο.

Ορισμός 6.1.1 - 2 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Τότε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ορίζει το* **ίχνος** *(trace) του A, που συμβολίζεται με $\mathrm{tr}\ (A) = \mathrm{trace}\ (A)$, δηλαδή*

$$\mathrm{tr}\ (A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \mathrm{tr}(A) = -1 + 2 + 5 = 6.$$

Ορισμός 6.1.1 - 3 (διαγώνιος πίνακας). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Αν $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$, τότε ο A λέγεται διαγώνιος (diagonal) και συμβολίζεται με $A = diag\,(a_{ii})$; $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Παράδειγμα 6.1.1 - 5

Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι διαγώνιοι, ενώ οι πίνακες

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Η δημιουργία με το MATHEMATICA ενός διαγώνιου πίνακα, έστω του A_2 γίνεται με την παρακάτω εντολή:

```
DiagonalMatrix[{2,0,-1,-2}]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.1 - 4 (μοναδιαίος πίνακας). *Ένας διαγώνιος πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης n θα λέγεται μοναδιαίος (identity) και θα συμβολίζεται με I_n ή απλά I, όταν $a_{ii} = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως οι πίνακες

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{I} = \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{I} = \mathrm{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι μοναδιαίοι, ενώ οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι.

Όμοια η δημιουργία ενός μοναδιαίου πίνακα τάξης, έστω 3, με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

6.1.2 Αλγεβρική δομή

Δίνεται στη συνέχεια η αλγεβρική δομή στο σύνολο των πινάκων.

Ισότητα

Ορισμός 6.1.2 - 1. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Οι πίνακες A και B θα είναι ίσοι τότε και μόνον, όταν $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Άρα, αν

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad \begin{array}{rclcrcl} a & = & -1 & & b & = & 0 \\ c & = & 3 & & d & = & 2. \end{array}$$

Είναι προφανές ότι η ισότητα ορίζει στο σύνολο των πινάκων τάξης (m, n) μία σχέση ισοδυναμίας.

Πίνακες διαφορετικοί

Ορισμός 6.1.2 - 2. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Οι πίνακες A και B θα είναι διαφορετικοί και θα συμβολίζεται αυτό με $A \neq B$ τότε και μόνον, όταν $a_{ij} \neq b_{ij}$ για ένα τουλάχιστον $i = 1, 2, \ldots, m$ ή $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A \neq B.$$

Παρατήρηση 6.1.2 - 1

Η έννοια της διάταξης, δηλαδή της $>$, αντίστοιχα της $<$, δεν ορίζεται στους πίνακες.

Πρόσθεση

Ορισμός 6.1.2 - 3. *Έστω οι πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται σαν άθροισμά τους ο πίνακας $A + B = (c_{ij})$ όμοια τάξης (m, n) όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\ A + B &= \begin{bmatrix} -1+2 & 3+1 \\ -2+3 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της ίδιας τάξης, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

i) αντιμεταθετική (commutative) $\quad A+B=B+A$,

ii) προσεταιριστική (associative) $\quad (A+B)+C=A+(B+C)$,

iii) υπάρχει ένας ακριβώς πίνακας, έστω M, που λέγεται **μηδενικός** (null matrix) και του οποίου τα στοιχεία είναι όλα ίσα με το μηδέν τέτοιος, ώστε $A+M=A$ για κάθε πίνακα A,

iv) για κάθε πίνακα A υπάρχει ακριβώς ένας πίνακας, που λέγεται **αντίθετος** του A και συμβολίζεται με $-A$, έτσι ώστε $A+(-A)=M$.

Άρα, αν

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad -A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix},$$

v) αν $A+X=B+X$, τότε $A=B$ για κάθε πίνακα A, B και X (**νόμος της διαγραφής**),

vi) για κάθε πίνακα A, B και X η εξίσωση $A+X=B$ έχει ακριβώς μία λύση τη $X=B-A$. Η λύση της εξίσωσης λέγεται **διαφορά** του πίνακα B από τον A, ενώ η πράξη με την οποία υπολογίζεται η διαφορά αυτή λέγεται **αφαίρεση**.

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1+(-3) & -2+1 \\ 5+2 & 3+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Ορισμός 6.1.2 - 4. *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m, n) και $\lambda \in \Re$ αντίστοιχα $\lambda \in \mathcal{C}$. Τότε το γινόμενο λA ορίζεται ότι είναι ο πίνακας $\lambda A = \lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ τάξης (m, n) για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Επομένως, αν

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda = 3, \quad \text{τότε} \\
3A &= \begin{bmatrix} 3*2 & 3*(-4) \\ 3*(-5) & 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται αν το λ αντικατασταθεί με ένα βαθμωτό μέγεθος, έστω $\phi(x)$.

Όμοια βάσει του ορισμού και θεωρώντας ότι οι πίνακες είναι της ίδιας τάξης, αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

i) $1A = A$ και $0A = M$,

ii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση πινάκων $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

iii) επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

iv) προσεταιριστική ως προς το γινόμενο αριθμών $\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A$.

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ορισμός 6.1.2 - 5. *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m, n) και ο πίνακας $B = (b_{ij})$ τάξης (n, ρ). Τότε ορίζεται σαν γινόμενό τους ο πίνακας $AB = (c_{ij})$ τάξης (m, p) όπου*

$$
c_{ij} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]\,[b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}]^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.
$$

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε

$$\underset{(2,3)}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}} \; \underset{(3,2)}{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \underset{(2,2)}{\begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) & 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ -1\cdot 4 + 4\cdot 2 + 0\cdot(-3) & -1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω παραδείγματος με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

```
A={{3,1,2},{-1,4,0}};
B={{4,1},{2,1},{-3,2}};
A.B//MatrixForm
```

Θεωρώντας ότι οι πίνακες έχουν τάξη, τέτοια ώστε να είναι δυνατόν να οριστούν οι αντίστοιχες πράξεις, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητες

i) προσεταιριστική

$$A(BC) = (AB)C,$$

ii) επιμεριστική (distributive) ως προς την πρόσθεση πινάκων

$$A(B+C) = AB + AC \text{ και } (B+C)A = BA + CA,$$

iii) προσεταιριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),$$

iv) στο σύνολο των τετραγωνικών πινάκων τάξης n, υπάρχει ακριβώς ένα ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, που είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n ή εν συντομία I, δηλαδή

$$A\,\mathrm{I} = \mathrm{I}\,A = A \quad \text{για κάθε τετραγωνικό πίνακα } A.$$

Επομένως, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

v) Η σχέση $AB = M$, όπου M ο μηδενικός πίνακας, δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι $A = M$ ή $B = M$, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων αφήνεται σαν άσκηση.

Παρατήρηση 6.1.2 - 2

Γενικά δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $AB \neq BA$.

6.1.3 Δύναμη πίνακα

Σύμφωνα με τον ορισμό του γινομένου των πινάκων και την προσεταιριστική ιδιότητά του η δύναμη ενός πίνακα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 6.1.3 - 1. *Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Τότε επαγωγικά ορίζεται η δύναμη A^ν ως εξής:*

$$A^\nu = A^{\nu-1}A \quad \text{για κάθε } \nu = 2, 3, \dots ,$$

όταν $A^1 = A$. Ειδικά ορίζεται ότι $A^0 = \mathrm{I}$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.

Παράδειγμα 6.1.3 - 1

Αν

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \\
A^2 &= A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -15 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Στο Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 υπολογίζονται οι παραπάνω δυνάμεις με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.1.3 - 1 (πρόγραμμα υπολογισμού δύναμης πίνακα)

```
A={{1,3},{-2,0}};
MatrixForm[A]
MatrixPower[A,2]//MatrixForm                    (2η δύναμη του A)
MatrixPower[A,3]//MatrixForm                    (3η δύναμη του A)
```

Παράδειγμα 6.1.3 - 2

Όμοια, αν

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \\
A^2 &= A\,A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

και γενικά

$$A^{\nu} = A^{\nu-1}A = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu-1} & 0 \\ 0 & 3^{\nu-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{\nu} & 0 \\ 0 & 3^{\nu} \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και $\nu,\ \mu = 1,\ 2,\ \ldots$ ισχύουν

i) $A^{\nu}A^{\mu} = A^{\nu+\mu}$,

ii) $(A^{\nu})^{\mu} = A^{\nu\mu}$.

Παρατήρησεις 6.1.3 - 1

i) Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.3 - 1 η δύναμη πίνακα με διαφορετικό αριθμό γραμμών και στηλών δεν ορίζεται.

ii) Δυνάμεις με αρνητικούς ή και κλασματικούς εκθέτες δεν ορίζονται.

6.1.4 Πίνακες ειδικής μορφής

Δίνονται τώρα οι ορισμοί πινάκων ειδικής μορφής που είναι χρήσιμοι στα επόμενα.

Ορισμός 6.1.4 - 1 (διαγώνια ορισμένος). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται διαγώνια ορισμένος (diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ορισμός 6.1.4 - 2 (αυστηρά διαγώνια ορισμένος). *Έστω $A = (a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται αυστηρά διαγώνια ορισμένος (strictly diagonally dominant), όταν*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{για κάθε } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{array}{l} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| \\ |a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}| \end{array},$$

δηλαδή ο A είναι διαγώνια ορισμένος, ενώ στον πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ισχύει} \quad \begin{array}{l} |b_{11}| > |b_{12}| + |b_{13}| \\ |b_{22}| > |b_{21}| + |b_{23}| \\ |b_{33}| > |b_{31}| + |b_{32}| \end{array},$$

οπότε ο B είναι αυστηρά διαγώνια ορισμένος.

Ορισμός 6.1.4 - 3 (θετικός). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \Re^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται θετικός (positive), όταν $a_{ij} > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 4 (μη αρνητικός). *Έστω $A = (a_{ij}) \in \Re^{m\times n}$. Τότε ο A λέγεται μη αρνητικός (non-negative), όταν $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Ορισμός 6.1.4 - 5 (ανάστροφος). *Έστω ο πίνακας $A = (a_{ij})$ τάξης (m, n). Τότε ορίζεται σαν ανάστροφος (transpose) πίνακας ο $A^T = (b_{ij})$ τάξης (n, m) όπου $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Άρα οι γραμμές του A είναι οι στήλες του A^T.

Παράδειγμα 6.1.4 - 2

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{τότε} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός του παραδείγματος με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
A={{1,-4,2},{3,-2,5}};Transpose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 6 (συμμετρικός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \Re^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός (symmetric), όταν $A = A^T$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 3

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ τότε προφανώς } \quad A^T = A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται ως εξής:

```
A={{1,3,5},{3,-5,2},{5,2,4}};
SymmetricMatrixQ[A]                                  (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 7 (αντισυμμετρικός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A = (a_{ij}) \in \Re^{n\times n}$ λέγεται αντισυμμετρικός (skew-symmetric), όταν $A = -A^T$.*

Παρατήρηση 6.1.4 - 1

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν $A^T = (b_{ij})$, πρέπει $b_{ij} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αλλά από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα προκύπτει ότι $b_{ij} = a_{ji}$, οπότε $a_{ji} = -a_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε όμως για $i = j$ θα είναι $a_{ii} = -a_{ii}$, δηλαδή $a_{ii} = 0$. Επομένως τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν, ενώ τα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρική θέση ως προς την κύρια διαγώνιο είναι αντίθετα.

Ορισμός 6.1.4 - 8 (συζυγής). *Αν $A = (a_{ij}) \in \mathcal{C}^{m\times n}$, τότε ορίζεται σαν συζυγής (conjugate) ο πίνακας $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathcal{C}^{m\times n}$.*

Άρα ο $\overline{A}$ αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του A.

Παρατήρηση 6.1.4 - 2

Αν είναι $A = \overline{A}$, τότε προφανώς ο A έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, ενώ, αν είναι $A = -\overline{A}$, ο A έχει στοιχεία φανταστικούς αριθμούς.

Ορισμός 6.1.4 - 9 (συζυγής ανάστροφος). *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{C}^{m\times n}$. *Τότε ορίζεται σαν συζυγής ανάστροφος (conjugate transpose)* $A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \overline{A^T}$ *ή Ερμιτιανός ανάστροφος (Hermitian transpose)* A^H *ο πίνακας*

$$A^H = A^* = (\overline{a}_{ji}) \in \mathcal{C}^{n\times m}.$$

Συνεπώς οι γραμμές του A είναι στήλες του A^H και επιπλέον ο A^H αποτελείται από τα συζυγή μιγαδικά στοιχεία του A.

Παράδειγμα 6.1.4 - 4

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}, \text{ τότε}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1-i & i & 0 \\ 2 & 3+2i & -i \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A^H = (\overline{A})^T = \overline{A^T} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
A={{1+I,-I,0},{2,3-2I,I}};
Conjugate[A]//MatrixForm
ConjugateTranspose[A]//MatrixForm
```

Ορισμός 6.1.4 - 10 (Ερμιτιανός). *Ο τετραγωνικός πίνακας* A *με* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{C}^{n\times n}$ *λέγεται Ερμιτιανός (Hermitian), όταν* $A^H = A$.

Άμεσα προκύπτει τότε ότι $a_{ii} = \overline{a}_{ii}$ για κάθε με $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή ότι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 6.1.4 - 5

Σύμφωνα με τον ορισμό, αν

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}, \text{ τότε } A^H=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}=A.$$

Ο έλεγχος με το MATHEMATICA γίνεται με την εντολή:

```
A={{1,I,1+I},{-I,-5,2-I},{1-I,2+I,3}};
HermitianMatrixQ[A]                                  (true)
```

Ορισμός 6.1.4 - 11 (αντιερμιτιανός). *Ο τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ λέγεται αντιερμιτιανός (skew-Hermitian), όταν $A^H=-A$.*

Παράδειγμα 6.1.4 - 6

Αν

$$A=\begin{bmatrix} i & 4+i \\ -4+i & 2i \end{bmatrix}, \quad \text{τότε } A^H=-A.$$

Ορισμός 6.1.4 - 12 (τριγωνικός άνω). *Έστω $A=(a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω ή δεξιά τριγωνικός (upper triangular) και συμβολίζεται συνήθως με R ή συνήθως με U, όταν $a_{ij}=0$ για κάθε $i>j$.*

Άρα στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία που βρίσκονται αριστερά και κάτω της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με το μηδέν.

Ορισμός 6.1.4 - 13 (αυστηρά τριγωνικός άνω). *Έστω $A=(a_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε ο A λέγεται άνω τριγωνικός (strictly upper triangular), όταν $a_{ij}=0$ για κάθε $i\geq j$.*

Όμοια ορίζεται ο κάτω ή αριστερά τριγωνικός (lower triangular) πίνακας, όταν $a_{ij}=0$ για κάθε $i<j$ και συμβολίζεται συνήθως με L, αντίστοιχα ο καθαρά κάτω τριγωνικός, όταν $a_{ij}=0$ για κάθε $i\leq j$.

Άρα οι πίνακες

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

είναι άνω, αντίστοιχα κάτω τριγωνικοί, ενώ οι

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ & 0 & 1 & -3 \\ & & 0 & -2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ αντίστοιχα } \tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 3 & 0 & & \\ -3 & 2 & 0 & \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

είναι αυστηρά άνω, αντίστοιχα αυστηρά κάτω τριγωνικοί.

Οι παρακάτω εντολές δημιουργούν με το MATHEMATICA έναν άνω τριγωνικό αντίστοιχα έναν καθαρά άνω τριγωνικό πίνακα τάξης 3:

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
UpperTriangularize[A]//MatrixForm
UpperTriangularize[A,1]//MatrixForm
```

Όμοια έναν κάτω τριγωνικό, αντίστοιχα έναν καθαρά κάτω τριγωνικό πίνακα

```
A={{a11,a12,a13},{a21,a22,a23},{a31,a32,a33}};
LowerTriangularize[A]//MatrixForm
LowerTriangularize[A,-1]//MatrixForm
```

Η παρακάτω εντολή δημιουργεί έναν κάτω τριγωνικό πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο

```
A={{a11,a12,α13},{α21,α22,α23},{α31,α32,α33}};
LowerTriangularize[A,-1]
+IdentityMatrix[3]//MatrixForm
```

Ασκήσεις

1. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 3, δείξτε ότι

i) $\operatorname{tr}(kA + \lambda B) = k \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$, όταν k, λ σταθερές,

ii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\ \operatorname{tr}(B)$,

iii) $\operatorname{tr}\left(A^T\right) = \operatorname{tr}(A)$.

2. Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2. Εξετάστε αν ισχύει $(AB)^2 = A^2B^2$ και δικαιολογήστε την απάντησή σας. Στη συνέχεια υπολογίστε τα αναπτύγματα $(A+B)^2$ και $(A+B)^3$.

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2 και $AB = BA$ δείξτε ότι

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2, \quad (AB)^2 = B^2A^2.$$

4. Έστω $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Re^3$ αντίστοιχα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^3$. Δείξτε ότι[1]

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

5. Αν A, $B \in \Re^{3\times 3}$ δείξτε ότι

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ με $\lambda \in \Re$

iii) $\left(A^T\right)^T = A$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

6. Όμοια, αν A, $B \in \mathcal{C}^{3\times 3}$ ότι

i) $(A+B)^H = A^H + B^H$

ii) $(\lambda A)^H = \overline{\lambda} A^H$ με $\lambda \in \mathcal{C}$

iii) $\left(A^H\right)^H = A$

iv) $(AB)^H = B^H A^H$.

7. Αν $A \in \Re^{n\times n}$, δείξτε ότι οι πίνακες $A + A^T$, AA^T είναι συμμετρικοί και ο $A - A^T$ αντισυμμετρικός, ενώ αν $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας $A + A^H$ είναι Ερμιτιανός και ο $A - A^H$ αντιερμιτιανός.

8. Να δειχθεί ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας A με $A \in \Re^{n\times n}$ γράφεται ως

$$A = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A + A^T\right),$$

ενώ αν $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$, τότε

$$A = \frac{1}{2}\left(A - A^H\right) + \frac{1}{2}\left(A + A^H\right).$$

[1] Βλέπε εσωτερικό γινόμενο Μάθημα 1 Παράγραφος 1.5.

9. Δείξτε ότι όλα τα στοιχεία ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί.

10. Να δειχθεί ότι κάθε Ερμιτιανός πίνακας, έστω A, γράφεται στη μορφή $A = B + iD$, όπου B είναι ένας συμμετρικός και D ένας αντισυμμετρικός πίνακας.

11. Αν A, B αντιερμιτιανοί πίνακες, δείξτε ότι ο πίνακας $kA+\lambda B$ είναι όμοια αντιερμιτιανός για κάθε k, $\lambda \in \Re$.

12. Αν ο A είναι ένας αντιερμιτιανός πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας iA είναι Ερμιτιανός, ενώ ο A^ν είναι Ερμιτιανός, αν ο ν είναι άρτιος και αντιερμιτιανός, αν ο ν είναι περιττός αριθμός.

13. Να προσδιοριστούν τα α, β και γ, έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\beta \\ 3-5i & 0 & \gamma \\ i & 2+4i & 2 \end{bmatrix}$$

να είναι Ερμιτιανός.

14. Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες του Pauli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

επαληθεύουν τις σχέσεις $A^2 = B^2 = C^2 = I$, $BC = -CB = iA$, $CA = -AC = iB$ και $AB = -BA = iC$.

6.2 Ορίζουσες

Η έννοια της ορίζουσας είναι θεμελιώδους σημασίας για τα προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, επειδή η γνώση της δίνει λύση σε πολλά από αυτά, όπως είναι μελέτη ύπαρξης λύσης γραμμικών συστημάτων κ.λπ., ενώ έχει και άλλες γενικότερες εφαρμογές στις θετικές επιστήμες.

6.2.1 Ορισμός

Ορισμός 6.2.1 - 1 (ορίζουσας). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε η ορίζουσα (determinant) του A συμβολίζεται με $|A|$ ή* det (A) *και ισούται με τον αριθμό* [2]

$$\det\,(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}, \qquad (6.2.1 - 1)$$

όταν $i = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n, *αντίστοιχα* [3]

$$\det\,(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, M_{ij}, \qquad (6.2.1 - 2)$$

όταν $j = 1$ *ή* $2, \ldots$ *ή* n *και* M_{ij} *είναι η* **ελάσσονα ορίζουσα** *(minor determinant) του στοιχείου* a_{ij} *που προκύπτει, όταν διαγραφεί η* i*-γραμμή και η* j*-στήλη του πίνακα* A.

Όταν $n = 2$ η ορίζουσα ισούται με

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (6.2.1 - 3)$$

ενώ για $n = 1$ είναι $|A| = a_{11}$.

Οι τύποι $(6.2.1 - 1)$ και $(6.2.1 - 2)$ είναι γνωστοί σαν **τύποι του Laplace**. Η ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} λέγεται και 1η ελάσσονα ορίζουσα (first minor), ενώ αυτή που προκύπτει με διαγραφή δύο γραμμών και δύο στηλών 2η ελάσσονα (second minor) κ.λπ. Η τάξη της ορίζουσας ορίζεται ίση με την τάξη του πίνακα A, δηλαδή ίση με n, ενώ προφανώς η τάξη της πρώτης ελάσσονας ορίζουσας είναι $n - 1$.

Επομένως σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2.1 - 1 το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 3ης τάξης ως προς τα στοιχεία της 1ης γραμμής $(i = 1)$ σε ορίζουσες 2ης τάξης και στη συνέχεια ο υπολογισμός της σύμφωνα με την $(6.2.1 - 3)$ θα είναι

$$|A| \quad = \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[2] Ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή.
[3] Ανάπτυγμα ως προς την 1η στήλη.

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{1+1}\, a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}\, a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}\, a_{13}M_{13} \\
&= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 6.2.1 - 1

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$$
|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.
$$

Λύση. Διαδοχικά έχουμε

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - (-3) \cdot 1 = 27, \\
|B| &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 0) + 5(2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1) + 3(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 54.
\end{aligned}
$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας με το MATHEMATICA γίνεται με τις εντολές:

```
A={{3,-5,3},{2,1,-1},{1,0,4}};
Det[A]
```

6.2.2 Ιδιότητες των οριζουσών

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) *Αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές, τότε η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 2

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = A^T.$$

ii) *Αν αντιμετατεθούν δύο γραμμές ή δύο στήλες, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 3

Εναλλαγή 1ης και 2ης γραμμής:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

iii) *Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι ίσες ή ανάλογες, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν* (η εφαρμογή αφήνεται σαν άσκηση).

iv) *Όταν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης πολλαπλασιαστούν με τον ίδιον αριθμό, τότε και η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτόν.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 4

Πολλαπλασιασμός 1ης γραμμής ή 2ης στήλης: αν

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

τότε

$$3|A| = \begin{vmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3\cdot 2 \\ 4 & 3\cdot 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) = -15.$$

v) *Αν τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης είναι άθροισμα m προσθετέων, τότε η ορίζουσα αναλύεται σε άθροισμα m άλλων οριζουσών* (όμοια η εφαρμογή αφήνεται σαν άσκηση).

vi) *Αν σε μία γραμμή ή στήλη προστεθούν μία ή περισσότερες γραμμές ή στήλες που η καθεμία πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, η ορίζουσα που προκύπτει είναι ίση με την αρχική.*

Παράδειγμα 6.2.2 - 5

$$\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6+1\cdot 7 & 21-3\cdot 7 & -30+5\cdot 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1-1 & -3-0 & 5-5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 42.$$

vii) *Όταν μία γραμμή ή μία στήλη είναι γραμμική έκφραση των άλλων γραμμών ή στηλών, τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν* (όμοια η εφαρμογή αφήνεται σαν άσκηση).

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

$i)\ \begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix}$ $\qquad iv)\ \begin{vmatrix} 16 & 22 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 12 & 25 & 2 \end{vmatrix}$

$ii)\ \begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $\qquad v)\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$iii)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ $\qquad vi)\ \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης 2, αντίστοιχα 3, δείξτε ότι

$$|AB| = |A||B|.$$

3. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n δείξτε ότι

$ii)\ \left|A^T\right| = |A|$ $\qquad iii)\ |\lambda A| = \lambda^n |A|$ με $\lambda \in \Re$.

4. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας άνω αντίστοιχα κάτω τριγωνικός πίνακας τάξης 4, δείξτε ότι

$$|A| = \prod_{i=1}^{4} a_{ii}.$$

3. Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός Ερμιτιανού πίνακα τάξης 2, αντίστοιχα 3 είναι πραγματικός αριθμός.

6.3 Αντίστροφος πίνακας

6.3.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.3.1 - 1 (αλγεβρικού συμπληρώματος). *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n. Τότε το αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του στοιχείου a_{ij} ορίζεται ως ο αριθμός*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij} \tag{6.3.1 - 1}$$

όπου M_{ij} *η ελάσσονα ορίζουσα του* a_{ij}.

Ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων συμβολίζεται τότε με C και είναι επίσης τάξης n.

Παράδειγμα 6.3.1 - 1

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Αρχικά υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}M_{11} &= \ \ a_{22} &= \ \ 4, \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}M_{12} &= -a_{21} &= -2, \\ C_{21} &= (-1)^{2+1}M_{21} &= -a_{12} &= -1, \\ C_{22} &= (-1)^{2+2}M_{11} &= \ \ a_{11} &= \ \ 3. \end{aligned}$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο υπολογισμός με το MATHEMATICA για έναν πίνακα τάξης 2 γίνεται με τις εντολές:

```
A={{a11,a12},{α21,α22}};
Needs[Combinatorica];Cofactor[A,{i,j}]
```

Ορισμός 6.3.1 - 2 (συμπληρωματικού πίνακα). *Ορίζεται σαν συμπληρωματικός πίνακας (adjugate ή adjoint matrix) του τετραγωνικού πίνακα A τάξης n και συμβολίζεται με $\operatorname{adj}(A) = C^T$, ο πίνακας*

$$\operatorname{adj}\,(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (6.3.1 - 2)$$

όταν C_{ij} τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

Παράδειγμα 6.3.1 - 2

Να υπολογιστεί ο συμπληρωματικός πίνακας του A του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.

Λύση. Σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 6.3.1 - 3 (αντίστροφου πίνακα). *Ο τετραγωνικός πίνακας A τάξης n θα είναι αντιστρέψιμος (invertible ή nonsingular) τότε και μόνον, όταν υπάρχει άλλος τετραγωνικός πίνακας ίδιας τάξης, που συμβολίζεται με A^{-1}, έτσι ώστε*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n = \mathrm{I}. \qquad (6.3.1 - 3)$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση ο A θα λέγεται **μη αντιστρέψιμος** (singular).

Πρόταση 6.3.1 - 1. *Ο αντίστροφος πίνακας του A, όταν υπάρχει, είναι μονοσήμαντα ορισμένος.*

Απόδειξη. Έστω A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$ δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του A. Τότε $A\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}A = \mathrm{I}$, οπότε

$$A^{-1} = A^{-1}\mathrm{I} = A^{-1}\left(A\tilde{A}^{-1}\right) = \left(A^{-1}A\right)\tilde{A}^{-1} = \mathrm{I}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}.$$

■

6.3.2 Υπολογισμός αντίστροφου πίνακα

Σχετικά με τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.2 - 1. *Έστω A αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A). \tag{6.3.2 - 1}$$

Πόρισμα 6.3.2 - 1. *Ο τετραγωνικός πίνακας A θα είναι αντιστρέψιμος, αν $|A| \neq 0$, ενώ αν $|A| = 0$ μη αντιστρέψιμος.*

Παράδειγμα 6.3.2 - 1

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας του Παραδείγματος 6.3.1 - 1.
Λύση. Είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ενώ σύμφωνα με το Παράδειγμα 6.3.1 - 2

$$\mathrm{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $|A| = 10$, σύμφωνα με τον τον τύπο $(6.3.2 - 1)$ θα είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Στο παρακάτω πρόγραμμα δίνονται οι εντολές υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα του Παραδείγματος 6.3.2 - 1 με το MATHEMATICA.

Πρόγραμμα 6.3.2 - 1 (αντίστροφου πίνακα)

```
A={{3,1},{2,4}};MatrixForm[A]
Inverse[A]//MatrixForm                          (αντίστροφος του A)
```

Παράδειγμα 6.3.2 - 2

Όμοια του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Επειδή $|A| = 10 \neq 0$ σύμφωνα με το Πόρισμα 6.3.2 - 1 υπάρχει ο A^{-1}. Αρχικά ο A γράφεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A (βλέπε επίσης Παράδειγμα 6.3.1 - 1). Διαδοχικά έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^{1+1}\, M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = -4 \\
C_{12} &= (-1)^{1+2}\, M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -15 \\
C_{13} &= (-1)^{1+3}\, M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -8
\end{aligned}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = 10$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\, M_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\, M_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\, M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\, M_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -6.$$

Άρα

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -15 & -8 \\ 10 & 5 & 0 \\ -8 & -15 & -6 \end{bmatrix},$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο 6.3.1 - 2 είναι

$$\mathrm{adj}\,(A) = C^T = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Τότε από την 6.3.2 - 1 προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\,\mathrm{adj}\,(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -1.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.8 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

6.3.3 Σχετικές προτάσεις

Πρόταση 6.3.3 - 1. *Αν A, B αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}. \tag{6.3.3 - 2}$$

Απόδειξη. Επειδή οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, από την $(6.3.2-1)$ αντικαθιστώντας όπου A το $A\,B$ διαδοχικά έχουμε

$$A\,A^{-1} = \mathrm{I} \quad ή \quad A\,B\,(A\,B)^{-1} = \mathrm{I}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα από αριστερά με A^{-1} προκύπτει ότι

$$\overbrace{A^{-1}\,A}^{\mathrm{I}}\,B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}\,\mathrm{I} = A^{-1} \quad ή \quad B\,(A\,B)^{-1} = A^{-1}$$

και όμοια από αριστερά με B^{-1} τελικά

$$\overbrace{B^{-1}\,B}^{\mathrm{I}}\,(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad ή \quad (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1},$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 6.3.3 - 2. *Αν A_1, A_2, $\ldots$, A_n αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε*

$$(A_1\,A_2\,\cdots\,A_{n-1}\,A_n)^{-1} = A_n^{-1}\,A_{n-1}^{-1}\,\cdots\,A_2^{-1}\,A_1^{-1}. \tag{6.3.3 - 3}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 6.3.3 - 3. *Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες τάξης n, τότε*

i) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$ *ii)* $\operatorname{adj}(A)\,A = |A|\mathrm{I} = A$

iii) $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ *iv)* $\operatorname{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\operatorname{adj}(A);\ \ \lambda \in \Re.$

Πρόταση 6.3.3 - 4. *Αν ο πίνακας A με $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ είναι Ερμιτιανός, τότε και ο $\operatorname{adj}(A)$ είναι όμοια Ερμιτιανός.*

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι πίνακες των

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. Όμοια των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Δείξτε ότι

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

4. Αν A αντιστρέψιμος πίνακας, δείξτε ότι ο πίνακας είναι όμοια λA είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ για κάθε $\lambda \in \Re$ με $\lambda \neq 0$.

5. Αν $A = \operatorname{diag}(a_{ii})$ με $a_{ii} \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(a_{ii}^{-1}\right).$$

[4]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[2] Ξένος Θ. (2004), Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 960–431–904–3.

[3] Σχοινάς Χρ. (2009), Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας, Εκδόσεις Γκιούρδας, ISBN 960–387–748–4.

[4] Don, E., Schaum's Outlines – Mathematica (2006), Εκδόσεις Κλειδάριθμος, ISBN 978–960–461–000–6.

[5] Lipschutz S., Lipson M.L., Θεωρία και προβλήματα στη Γραμμική Άλγεβρα, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–805–093–6.

[6] Strang G., (2005), Γραμμική Άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960–730–970–7.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/