Μάθημα 9

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΜΕΡΟΣ Ι

9.1 Ορισμοί και σχετικά θεωρήματα

9.1.1 Ορισμός παραγώγου

Αρχικά ορίζεται η κλίση μιας συνάρτησης ως εξής:[1]

Ορισμός 9.1.1 - 1 (κλίσης). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ και σημείο $x_0 \in (a,b)$. Τότε για κάθε $x \in (a,b) - \{x_0\}$ με τον τύπο*

$$K_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{9.1.1 - 1}$$

ορίζεται μία συνάρτηση, που λέγεται πηλίκο διαφορών ή κλίση της f στο σημείο x_0.

Αν $x = x_0 + \Delta x$, οπότε

$$\Delta x = x - x_0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b) - \{x_0\}\,, \tag{9.1.1 - 2}$$

τότε ο τύπος $(9.1.1 - 1)$ γράφεται

$$K_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \tag{9.1.1 - 3}$$

[1] Για την κλίση γενικότερα βλέπε επίσης Μάθημα 2 Παράγραφος 2.1.1.

Ορισμός 9.1.1 - 2 (παραγώγου). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ και σημείο $x_0 \in (a,b)$. Τότε θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ τότε και μόνον, όταν η οριακή τιμή*

$$\lim_{x \to x_0} K_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} \qquad (9.1.1 - 4)$$

υπάρχει.

Η $(9.1.1 - 4)$ θα λέγεται τότε η **1ης τάξης** παράγωγος (ή πολλές φορές απλά παράγωγος) της f στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'\,(x_0)$.

Έχοντας υπ' όψιν την $(9.1.1 - 2)$, η $(9.1.1 - 4)$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} f'\,(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} && (9.1.1 - 5) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h}\,. && (9.1.1 - 6) \end{aligned}$$

Ορισμός 9.1.1 - 3. *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ Τότε θα λέγεται ότι η f παραγωγίζεται στο (a,b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος $f'\,(x_0)$ για κάθε $x_0 \in (a,b)$.*

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,y}{dx} = D^1 f(x) = D\,f(x) \qquad (9.1.1 - 7)$$

όπου το σύμβολο (τελεστής) $D = D^1 = \frac{d}{dx}$ θα συμβολίζει στο εξής την 1ης τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Παρατηρήσεις 9.1.1 - 1

Από τους Ορισμούς 9.1.1 - 2 και 9.1.1 - 3 προκύπτουν τα εξής:

i) η $f'\,(x_0)$, εφόσον υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός, ενώ

ii) η $f'\,(x)$ είναι συνάρτηση.

Ορισμός 9.1.1 - 4. *Έστω ότι της συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε θα λέγεται ότι υπάρχει η* **2ης τάξης** *παράγωγος της f στο (a,b) τότε και μόνον, όταν υπάρχει η παράγωγος της $f'(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Στην περίπτωση αυτή συμβολικά γράφεται

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = D^2 f(x) \qquad (9.1.1 - 8)$$

όπου το $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ συμβολίζει τον τελεστή της 2ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x. Διευκρινίζεται ότι $\frac{d^2}{dx^2} \neq \left(\frac{d}{dx}\right)^2$.

Ανάλογα ορίζονται οι παράγωγοι:

3ης τάξης:

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = D^3 f(x) \qquad (9.1.1 - 9)$$

όπου το $D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$ συμβολίζει τον τελεστή της 3ης τάξης παραγώγου μιας συνάρτησης με μεταβλητή x, και γενικά η

ν - τάξης:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{\nu-1} f(x)}{dx^{\nu-1}}\right) = \frac{d^{\nu} f(x)}{dx^{\nu}} = D^{\nu} f(x) \qquad (9.1.1 - 10)$$

όπου όμοια ο τελεστής $D^{\nu} = \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}$ συμβολίζει την ν-τάξης παράγωγο μιας συνάρτησης με μεταβλητή x.

Ειδικά ορίζεται ότι

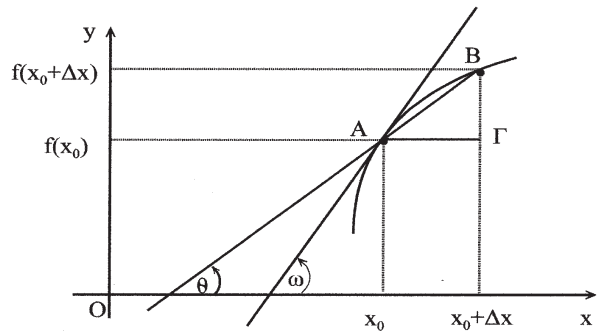
$$f^{(0)}(x) = f(x). \qquad (9.1.1 - 11)$$

9.1.2 Γεωμετρική σημασία παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)|\,(a,b)$. Τότε όπως είναι γνωστό, αν Oxy είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, το σύνολο των σημείων του επιπέδου

$$G_f = \{(x, f(x))\,, \quad x \in (a,b)\} \subseteq \Re^2 \qquad (9.1.2 - 1)$$

ορίζει το διάγραμμα της συνάρτησης f. Έστω τώρα τα σημεία $x_0 \in (a,b)$ και $x_0 + \Delta x \in (a,b)$, όταν το Δx δίνεται από την $(9.1.1 - 2)$, με αντίστοιχα



Σχήμα 9.1.2 - 1: γεωμετρική σημασία παραγώγου

σημεία στο διάγραμμα της f τα $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ και $B\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$. Η ευθεία AB λέγεται τότε και τέμνουσα του διαγράμματος στα A, B. Στο Σχ. 9.1.2 - 1 είναι $AB=\Delta x$ και $\Gamma B=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\Delta y$. Η κλίση ή διαφορετικά ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB θα δίνεται τότε από τη σχέση[2]

$$\lambda=\tan\theta=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

οπότε η εξίσωση της τέμνουσας ευθείας θα είναι

$$y-f\left(x_0\right)=\lambda\left(x-x_0\right). \qquad (9.1.2 - 2)$$

Ο τύπος $(9.1.2-2)$ τότε για όλα τα Δx με $\Delta x\neq 0$ και $x_0+\Delta x\in D$ ορίζει το σύνολο όλων των ευθειών που τέμνουν το διάγραμμα της f στο σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

[2]Βλέπε επίσης Μάθημα 2 Παράγραφος 2.1.1.

Έστω τώρα ότι το Δx τείνει στο μηδέν, δηλαδή το σημείο $\mathit{\Gamma}$ τείνει στο A. Τότε το σημείο B κινούμενο επί του διαγράμματος της f τείνει να συμπέσει με το σημείο A, η κάθετη πλευρά $\mathit{\Gamma}B$ του τριγώνου $AB\mathit{\Gamma}$ τείνει να λάβει μία οριακή τιμή, έστω dy, ενώ η τέμνουσα ευθεία AB τείνει να γίνει η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ έχουμε στην περίπτωση αυτή ότι[3]

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \tan\omega &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d\,f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \qquad (9.1.2 \text{ - } 3) \end{aligned}$$

όπου $\tan\omega$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Άρα έχει αποδειχθεί η πρόταση:

Πρόταση 9.1.2 - 1 (γεωμετρική σημασία παραγώγου). *Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)\,|\,(a,b)$ στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ή διαφορετικά με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.*

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της **εφαπτόμενης ευθείας** θα δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (9.1.2 \text{ - } 4)$$

ενώ της **κάθετης ευθείας** του διαγράμματος της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, εφόσον $(x_0, f(x_0)) \neq 0$, από τον

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (9.1.2 \text{ - } 5)$$

Παράδειγμα 9.1.2 - 1

Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου σε αυτή της παραβολής $y = x^{1/2}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 9$.

Λύση. Επειδή $x_0 = 9$ είναι $y_0 = \sqrt{x_0} = 3$. Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{οπότε} \quad f'(x_0) = \frac{1}{6}.$$

[3] Ο συμβολισμός dx οφείλεται στον Leibniz. Στα μαθηματικά συμβολίζει το **απειροστό** ή το ελάχιστο δυνατό x. Τότε στο απειροστό αυτό dx αντιστοιχεί η απειροστή μεταβολή dy της συνάρτησης $y = f(x)$.

Επομένως σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.2-4)$ έχουμε για την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ότι

$$y-3=\frac{1}{6}\,(x-9), \quad \text{δηλαδή} \quad x-6y+9=0,$$

ενώ από τον τύπο $(9.1.2-4)$ για την εξίσωση της κάθετης ότι

$$y-3=-6\,(x-9), \quad \text{δηλαδή} \quad 6x+y-57=0.$$

Διαφορικό συνάρτησης

Από την $(9.1.2-3)$, εφόσον υπάρχει η $f'\,(x_0)$, προκύπτει τότε ότι

$$d\,f(x)|_{x=x_0}=f'\,(x_0)\;dx. \tag{9.1.2 - 6}$$

Η $(9.1.2-6)$, όταν ισχύει για κάθε $x_0 \in (a,b)$, ορίζει το **διαφορικό 1ης τάξης** της συνάρτησης $f(x)$. Επομένως

$$dy=d\,f(x)=f'(x)\,dx \quad \text{για κάθε} \quad x\in(a,b). \tag{9.1.2 - 7}$$

Γεωμετρικά το διαφορικό 1ης τάξης ισούται με την οριακή τιμή της πλευράς $\mathit{\Gamma B}$ (Σχ. 9.1.2 - 1), όταν το σημείο $\mathit{\Gamma}$ τείνει στο A.

Υποθέτοντας τώρα ότι υπάρχουν στο (a,b) οι παράγωγοι της f μέχρι και ν-τάξης, είναι δυνατόν να οριστεί επαγωγικά το ν-τάξης διαφορικό της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής:

$$d^{\nu}y=d\left(d^{\nu-1}y\right)=f^{(\nu)}(x)dx^{\nu} \tag{9.1.2 - 8}$$

για κάθε $\nu=2,\,3,\,\ldots$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της καθέτου των παρακάτω καμπυλών στα έναντι σημεία

i) $y=x^3+2x^2-4x-3$ στο $x_0=-2$,

ii) $y=(x-1)^{1/3}$ στο $x_0=1$,

iii) $y=\tan 2x$ στο $x_0=0$,

iv) $y=e^{1-x^2}$ στο σημείο τομής με την ευθεία $y=1$,

v) $y=\sin^{-1}\left[(x-1)/2\right]$ στο σημείο τομής με τον άξονα των x,

vi) $y=\cos^{-1}3x$ στο σημείο τομής με τον άξονα των y.

2. Να υπολογιστεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης $y=x^2-7x+3$ είναι παράλληλη στην ευθεία $5x+y-3=0$.

3. Να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες της καμπύλης

$$y=3x^4+4x^3-12x^2+20$$

είναι παράλληλες στον άξονα των x.

9.1.3 Κανόνες παραγώγισης

Δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης[4].

Πρόταση 9.1.3 - 1 (παράγωγος σταθεράς συνάρτησης). *Έστω η συνάρτηση $f\,|\,\Re$ όπου $f(x)=c$ σταθερά για κάθε $x\in\Re$. Τότε*

$$f'(x)=0 \quad \textit{για κάθε} \quad x\in\Re.$$

Πρόταση 9.1.3 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f,\ g\,|\,(a,b)$ είναι παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε ισχύει*

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x\in(a,b). \qquad (9.1.3\text{ - }1)$$

[4] Ο αναγνώστης για μια εκτενέστερη μελέτη του μαθήματος παραπέμπεται στη βιβλιογραφία και στο βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Πόρισμα 9.1.3 - 1 (γενίκευση παραγώγου αθροίσματος). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f_1, \ldots, f_\nu \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$[f_1(x) + \ldots + f_\nu(x)]' = f_1'(x) + \ldots + f_\nu'(x) \qquad (9.1.3 - 2)$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Πρόταση 9.1.3 - 3 (παράγωγος γινομένου). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f, g \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε ισχύει*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in (a,b). \qquad (9.1.3 - 3)$$

Πόρισμα 9.1.3 - 2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις* $f, g, h \,|\, (a,b)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε*

$$\begin{aligned}[f(x)\,g(x)\,h(x)]' &= f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) \\ &\quad + f(x)\,g(x)\,h'(x) \qquad (9.1.3 - 4)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (a,b)$.

Η Πρόταση 9.1.3 - 3 επίσης γενικεύεται.

Επειδή προφανώς ισχύει

$$(\lambda f(x))' = \lambda f'(x), \quad \text{όταν} \quad \lambda \in \Re \text{ σταθερά},$$

από τις Προτάσεις 9.1.3 - 1 - 9.1.3 - 3 προκύπτει η παρακάτω **γραμμική ιδιότητα**

$$[k\,f(x) + \lambda g(x)]' = k\,f'(x) + \lambda\,g'(x) \qquad (9.1.3 - 5)$$

για κάθε $x \in (a,b)$, που επίσης γενικεύεται.

Πρόταση 9.1.3 - 4 (παράγωγος πηλίκου). *Αν η συνάρτηση* $f \,|\, (a,b)$ *παραγωγίζεται στο* (a,b) *και επί πλέον υπάρχει* $x_0 \in (a,b)$, *έτσι ώστε* $f'(x_0) \neq 0$, *τότε*

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]'_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x)}. \qquad (9.1.3 - 6)$$

Πόρισμα 9.1.3 - 3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f,\, g\,|\,(a,b)$ είναι παραγωγίσιμες στο (a,b) και επί πλέον $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε ισχύει*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \in (a,b). \qquad (9.1.3 - 7)$$

Πόρισμα 9.1.3 - 4. *Αν η $f\,|\,(a,b)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (a,b), τότε*

$$[f^{\,\nu}(x)]' = \nu f^{\,\nu-1}(x) f'(x) \qquad (9.1.3 - 8)$$

για κάθε $x \in D$ με $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του τύπου $(9.1.3-8)$ προκύπτει ή επαγωγικά ή από τον τύπο $(9.1.3-4)$, αν τεθεί

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_\nu(x) = f(x).$$

■

9.1.4 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα 9.1.4 - 1. *Έστω οι συναρτήσεις $y = f(w)\,|\,D_1$ και $w = g(x)\,|\,D_2$ όπου $g\,(D_2) \subseteq D_1$ και D_1, D_2 ανοικτά διαστήματα και η προκύπτουσα σύνθετη συνάρτηση $F(x) = (f \circ g)\,(x) = f(g(x))$ για κάθε $x \in D_2$. Έστω επίσης ότι για ένα σημείο $x_0 \in D_2$ υπάρχουν οι παράγωγοι $g'\,(x_0) = w_0'$ και $y_0' = f'\,(w_0)$. Τότε υπάρχει και η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $F(x)|D_2$ στο σημείο $x_0 \in D_2$ και ισχύει*

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(w)}{dw}\right|_{w=w_0} \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = y_0'\; w_0'. \qquad (9.1.4 - 1)$$

Σημείωση 9.1.4 - 1

Ο τύπος $(9.1.4-1)$ είναι γνωστός σαν ο **αλυσιδωτός κανόνας** (chain rule) παραγώγισης.

Οι παράγωγοι των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων δίνονται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη στον Πίνακα 9.1.4 - 1.

Πίνακας 9.1.4 - 1: παραγώγων των κυριότερων σύνθετων συναρτήσεων

α / α	Συνάρτηση	Παράγωγος
1	$f^a(x)$	$af'(x)f^{a-1}(x)$
2	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
3	$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
4	$\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$
5	$\cos f(x)$	$-f'(x)\sin f(x)$
6	$\tan f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
7	$\cot f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
8	$\tan^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
9	$\sin^{-1} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
10	$\cos^{-1} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
11	$\sinh f(x)$	$f'(x)\cosh f(x)$
12	$\cosh f(x)$	$f'(x)\sinh f(x)$
13	$\tanh f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\tanh^2 f(x)\right]$
14	$\coth f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sinh^2 f(x)} = f'(x)\left[1-\coth^2 f(x)\right]$

Παράδειγμα 9.1.4 - 1

Έστω
$$f(x) = e^{-x^2}.$$
Τότε σύμφωνα με το τύπο (2) του Πίνακα 9.1.4 - 1 θα είναι
$$f'(x) = \left(-x^2\right)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},$$
ενώ σύμφωνα και με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου
$$f''(x) = (-2x)'e^{-x^2} - 2x\left(e^{-x^2}\right)' = -2\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}.$$

Όμοια υπολογίζεται ότι
$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -4x\,e^{-x^2}\left(-3+2x^2\right), \quad \text{και} \\ f^{(4)}(x) &= 4e^{-x^2}\left(3-12x^2+4x^4\right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 2

Έστω $f(x) = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2$. Όμοια από τους τύπους (1) και (4) προκύπτει ότι
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,(\sin 3x)^{2-1}\,(\sin 3x)' = 2\sin 3x\,\cos 3x\,(3x)' \\ &= 3\cdot\overbrace{2\sin 3x\,\cos 3x}^{\sin 6x} = 3\sin 6x, \quad \text{και} \\ f''(x) &= (3\sin 6x)' = 3\,(6x)'\sin 6x = 18\sin 6x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 3

Έστω
$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{όπου} \quad -1 < x < 1.$$
Από τον τύπο (3) και την Πρόταση 9.1.3 - 4 έχουμε
$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$
και
$$f''(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2},$$

ενώ σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου είναι

$$f^{(3)}(x) = 2\,\frac{x'\left(1-x^2\right)^2 - \overbrace{\left[\left(1-x^2\right)^2\right]'}^{2\left(1-x^2\right)^2(-2x)}}{\left(1-x^2\right)^4} = -\frac{2\left(1+3x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 4

Έστω

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{1/3}.$$

Τότε σύμφωνα με το τύπο (1) είναι

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{-2/3}\left(1-x^2\right)' = -\frac{2}{3}x\left(1-x^2\right)^{-2/3}.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 5

Αν

$$f(x) = \ln(1+x) + \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

να υπολογιστεί η $f'(1)$.

Λύση. Σύμφωνα με τους τύπους (3) και (9) έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,,$$

οπότε

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 6

Να υπολογιστεί η 2ης τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \tan^{-1} 2x$.

Λύση. Αρχικά σύμφωνα με το τύπο (8) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}\,,$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.3 - 4 έχουμε

$$f''(x) = -2\,\frac{\overbrace{\left(1+4x^2\right)'}^{4\cdot 2x}}{(1+4x^2)^2} = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2}\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 7

Να υπολογιστεί η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 2^x$.
Λύση. Από την ταυτότητα

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \text{με } a > 0 \text{ και } x \in \Re,$$

προκύπτει ότι

$$f'(x) = \left(e^{x\ln 2}\right)' = (x\ln 2)'\ e^{x\ln 2} = 2^x \ln 2.$$

Όμοια $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2$ και γενικά

$$f^{(\nu)}(x) = 2^x(\ln 2)^\nu \quad \text{με} \quad \nu = 1,\,2,\,\ldots\,.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 8

Έστω $f(x) = \mathrm{sech}x$. Τότε, επειδή $\mathrm{sech}x = \frac{1}{\cosh x}$, σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.3 - 4 έχουμε

$$f'(x) \quad = \quad -\frac{(\cosh x)'}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\cosh x}\,\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\mathrm{sech}x\ \tanh x.$$

Παράδειγμα 9.1.4 - 9

Έστω $f(x) = \tanh 2x$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο (13) είναι

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{\cosh^2 2x} = \frac{2}{\cosh^2 2x} = 2\,\mathrm{sech}^2 2x.$$

Αν $x = 0$, είναι

$$f'(0) = 2\left(\frac{2}{e^{2\cdot 0} + e^{-2\cdot 0}}\right)^2 = 2\cdot 1 = 2.$$

9.1.5 Διωνυμικός τελεστής

Ορισμός 9.1.5 - 1 (διωνυμικός συντελεστής). *Το σύμβολο* $\binom{\nu}{k}$ *που παριστάνει το πλήθος όλων των διαφόρων μεταξύ τους συνδυασμών των* ν *στοιχείων ανά* k, *λέγεται διωνυμικός συντελεστής (binomial coefficient) και ορίζεται από τη σχέση*

$$\binom{\nu}{k} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k = 0; \;\; \nu = 1,\, 2,\, \ldots \\ \dfrac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} & \text{αν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu. \end{cases} \tag{9.1.5 - 1}$$

Ο διωνυμικός συντελεστής διαβάζεται ν ως προς k ή αναλυτικότερα οι συνδυασμοί των ν ως προς k.

Γενικότερα η $(9.1.5-1)$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 9.1.5 - 2 (γενίκευση διωνυμικού συντελεστή).

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad k = 0; \;\; a \in \Re \\ \dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} & \text{αν} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots \\ & \quad\;\; \text{και} \;\; a \in \Re. \end{cases} \tag{9.1.5 - 2}$$

Επειδή σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.5-1)$ είναι

$$\binom{0}{0} = 1, \;\; \binom{a}{0} = 1 \text{ με } a \in \Re, \;\; \binom{k}{k} = 1 \text{ με } k = 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{9.1.5 - 3}$$

η $(9.1.5-2)$ θα παριστάνει πάντοτε πραγματικό αριθμό.

Ιδιότητες

Αποδεικνύεται ότι:

I.

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!} = \binom{\nu}{\nu-k} \quad \text{αν } \nu = 0, 1, \ldots \;\; \text{με } k \leq \nu. \tag{9.1.5 - 4}$$

II.
$$\binom{\nu}{k}+\binom{\nu}{k+1}=\binom{\nu+1}{k+1}. \qquad (9.1.5 - 5)$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι:[5]

Πρόταση 9.1.5 - 1 (τύπος του Leibniz). *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν παραγώγους μέχρι και ν-τάξη, τότε ισχύει*

$$[f(x)g(x)]^{(\nu)}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}f^{(\nu-k)}(x)\,g^{(k)}(x), \qquad (9.1.5 - 6)$$

όταν $\nu=1,\,2,\,\ldots$.

Παράδειγμα 9.1.5 - 1

Σύμφωνα με τον τύπο του Leibniz έχουμε

$$\begin{aligned}\left(x^4e^x\right)^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\left(x^4\right)^{(3-k)}\left(e^x\right)^k\\ &= \binom{3}{0}\left(x^4\right)^{(3)}\left(e^x\right)^{(0)}+\binom{3}{1}\left(x^4\right)^{(3-1)}\left(e^x\right)^{(1)}\\ &\quad+\binom{3}{2}\left(x^4\right)^{(3-2)}\left(e^x\right)^{(2)}+\binom{3}{3}\left(x^4\right)^{(3-3)}\left(e^x\right)^{(3)}\\ &= \left(24x+24x^2+12x^3+x^4\right)e^x.\end{aligned}$$

[5] Βλέπε βιβλιογραφία και βιβλίο Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 6.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)$	$\ln(\sin\omega\, x)$	$viii)$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
$ii)$	$e^{-x}\,(2\sin 2x-\cos 2x)$	$ix)$	$x^{\nu}2^{-x}$
$iii)$	$\cos^3\omega\, x$	$x)$	$(1-x^{-2})$
$iv)$	$\ln\left(ax^2+bx+c\right)$	$xi)$	$\sqrt{1+\ln x}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$
$v)$	$\dfrac{x}{x+1}+x^2\tan 2x$	$xii)$	$\ln\left(1+x^2\right)$
$vi)$	$\sin^2 a\, x$	$xiii)$	$\tan^{-1}(\ln x)+\ln\left(\tan^{-1}x\right)$
$vii)$	$\cos x^2+\ln^2 5x$	$xiv)$	$\ln\left[\tan\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]-\left(\sin^{-1}x\right)^2.$

2. Να υπολογιστούν οι 2ης τάξης παράγωγοι των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

3. Όμοια οι 2ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων $f(x)$

$i)$	$\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	$v)$	$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
$ii)$	$\tan^{-1}3x$	$vi)$	$\sin^2 3x$
$iii)$	xe^{-x^2}	$vii)$	x^x
$iv)$	$(1+x^2)\tan^{-1}x$	$viii)$	$a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right).$

4. Όμοια οι ν-τάξης παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

$i)$	e^{-3x}	$vi)$	$\ln x$
$ii)$	$a_\nu x^\nu+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+a_1x+a_0$	$vii)$	$x^{1/2}$
$iii)$	$\dfrac{1}{1-x}$	$viii)$	$\dfrac{1}{1+x}$
$iv)$	$\sin^2\omega x$	$ix)$	$\cos\omega x$
$v)$	$\ln(ax+b)$	$x)$	$\dfrac{1+x}{1-x}\,.$

5. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η παράγωγος μιας περιττής είναι άρτια συνάρτηση.

6. Δείξτε ότι η παράγωγος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι όμοια περιοδική συνάρτηση.

7. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις επαληθεύονται από τις έναντι συναρτήσεις

i) $L\dfrac{d\,i}{d\,t} + Ri = E$ από την $i = i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$,

ii) $L\dfrac{d^2 i}{d\,t^2} + R\dfrac{d\,i}{d\,t} + \dfrac{i}{C} = 0$ από την $i = i(t) = (c_1 + tc_2)\, e^{-Rt/(2L)}$,

όταν $R^2 = 4L/C$,

iii)

$$x^2 y'' + (1 - 2\nu)xy' + \left(1 + \nu^2\right) y = 0$$

από την $y = x^\nu\,[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$.

8. Το πολυώνυμο του Hermite H_n βαθμού n ορίζονται από τον τύπο

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\ \frac{d^n\left(e^{-t^2}\right)}{d\,t^n}\,; \quad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{9.1.5 - 7}$$

όπου $H_0(t) = 1$. Δείξτε ότι:

$H_1(t) = 2t$ $\qquad$ $H_3(t) = 8t^3 - 12t$

$H_2(t) = 4t^2 - 2$ $\qquad$ $H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$.

9. Το πολυώνυμο του Laguerre L_n βαθμού n ορίζεται από τον τύπο

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n\,!}\,\frac{d^n\left(t^n\, e^{-t}\right)}{d\,t^n}\,; \quad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{9.1.5 - 8}$$

με $L_0(t) = 1$. Δείξτε ότι:

$L_1(t) = 1 - t$ $\qquad$ $L_3(t) = 1 - 3t + \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{6}t^3$

$L_2(t) = 1 - 2t + \dfrac{1}{2}t^2$ $\qquad$ $L_4(t) = 1 - 4t + 3t^2 - \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{24}t^4.$

10. Το πολυώνυμο του Legendre P_n βαθμού n ορίζεται από τον τύπο του Rodrigues ως εξής:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\ n!}\,\frac{d^n\left(t^2 - 1\right)^n}{d\,t^n}\,;\ n = 0,\, 1,\, \ldots \ \text{όπου}\ t \in [-1, 1] \tag{9.1.5 - 9}$$

με $P_0(t) = 1$. Δείξτε ότι:

$P_1(t) = t$ $\qquad$ $P_3(t) = \dfrac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right)$

$P_2(t) = \dfrac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right)$ $\qquad$ $P_4(t) = \dfrac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)$.

11. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Leibniz να υπολογιστούν οι παράγωγοι ν-τάξης των συναρτήσεων

$i)$ $\quad x^\nu e^x$ $\qquad$ $iv)$ $\quad \dfrac{e^x}{x}$

$ii)$ $\quad x^2 e^{-4x}$ $\qquad$ $v)$ $\quad \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

$iii)$ $\quad (1 - x^2)\cos x$ $\qquad$ $vi)$ $\quad x^3 \ln x$.

12. Όμοια της συνάρτησης $x^{\nu-1}\ln(1+x)$ όπου $\nu = 2, 3, \ldots$.

13. Να δειχθεί ότι η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{1/x}$ με $x \neq 0$ είναι της μορφής

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu P_{\nu-1}(x) x^{-2\nu} e^{1/x}$$

όπου $P_{\nu-1}(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu - 1$.

14. Όμοια ότι η ν-τάξης παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{-1/2}$ είναι της μορφής

$$f^{(\nu)}(x) = \left(1 + x^2\right)^{-\nu-1/2}\ P_n(x)$$

όπου $P_\nu(x)$ πολυώνυμο βαθμού ν.

9.1.6 Τύποι των Taylor και Maclaurin

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ένα πολυώνυμο ν-βαθμού. Τότε

$$f(x) = P_\nu(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots + a_\nu(x - a)^\nu,$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad \ldots, \quad a_\nu = f^{(\nu)}(a).$$

Άρα, όταν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, έχουμε

$$f(x) = P_\nu(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2\,!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu\,!}(x - a)^\nu.$$

Γενικότερα, όταν έχουμε γενικά μία συνάρτηση $f\,|\,(a,b)$ με γνωστές τις τιμές των παραγώγων της σε ένα σημείο $\xi \in (a,b)$, αποδεικνύεται ότι ισχύει ο παρακάτω **τύπος του Taylor**

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1\,!}(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2\,!}(x-\xi)^2 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(\nu)}(\xi)}{\nu\,!}(x-\xi)^\nu \end{aligned} \tag{9.1.6 - 1}$$

όπου το 2ο μέλος της (9.1.6−1) είναι το ν - βαθμού πολυώνυμο του Taylor, που προσεγγίζει την f, ενώ οι αριθμοί $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $\ldots$, $f^{(\nu)}(\xi)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Όταν $\xi = 0$, ο τύπος $(9.1.6 - 1)$ γράφεται στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 \\ &= + \ldots + \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu\,!}x^\nu \end{aligned} \tag{9.1.6 - 2}$$

που είναι γνωστός σαν **τύπος του Maclaurin**, ενώ οι αριθμοί $f(0)$, $f'(0)$, $\ldots$, $f^{(\nu)}(0)$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Παράδειγμα 9.1.6 - 1

Με τον τύπο Maclaurin να υπολογιστεί το πολυώνυμο ν - βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = e^{-ax}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-ax} & f(0) = 1 \\ f'(x) = -a\,e^{-ax} \;\; f'(0) = -a & \\ f''(x) = a^2 e^{-ax} & f''(0) = a^2 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu a^\nu e^{-ax} & f^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu a^\nu . \end{array}$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{-ax} &\approx 1 - ax + \frac{a^2}{2\,!}\,x^2 - \ldots + (-1)^\nu\,\frac{a^\nu}{\nu\,!}\,x^\nu \\ &= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k\,\frac{a^k}{k\,!}\,x^k . \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.1.6 - 2

Όμοια με τον τύπο Taylor για $\xi = 1$ το πολυώνυμο ν-βαθμού που προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

Λύση. Έχουμε

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\
f'(x) = x^{-1} & f'(1) = 1 \\
\ldots & \ldots \\
f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3x^{-4} = -3\,!\,x^{-4} & f^{(4)}(1) = -3\,! \\
\ldots & \ldots \\
f^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)\,!\,x^{-\nu} & f^{(\nu)}(1) = (-1)^{\nu-1}\,(\nu-1)\,!\,.
\end{array}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\ln x &\approx x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \ldots + (-1)^{\nu-1}\,\frac{(x-1)^{\nu}}{\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{k-1}\,\frac{(x-1)^k}{k}. \qquad (9.1.6 - 3)
\end{aligned}
$$

Θα πρέπει επίσης στο σημείο αυτό να γραφεί ότι το πολυώνυμο του Taylor αντίστοιχα του Maclaurin, όταν χρησιμοποιείται για την προσέγγιση μιας συνάρτησης, παρουσιάζει κυρίως τα παρακάτω μειονεκτήματα:

i) δεν έχει ακρίβεια που να αυξάνεται πάντοτε ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου,

ii) απαιτείται η γνώση του κέντρου ξ,

iii) απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων, κάτι που όμως δεν είναι εύκολο να γίνεται πάντοτε.

Άσκηση

Δείξτε τα αναπτύγματα του Πίνακα 9.1.6 - 1.

Πίνακας 9.1.6 - 1: των κυριότερων αναπτυγμάτων κατά Maclaurin

α/α	συνάρτηση	ανάπτυγμα
1	$\tan x$	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+\dots$
2	$\tanh x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}+\dots$
3	$\tanh x$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}+\dots$
4	$\sin^{-1} x$	$x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5}+\dots$
5	$e^{\sin x}$	$1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^5}{15}+\dots$
6	$e^{\cos x}$	$e\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{31x^6}{720}+\dots\right)$
7	$e^x \sin x$	$x+x^2+\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}-\dfrac{x^5}{90}+\dots$
8	$e^x \cos x$	$1+x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}+\dots$
9	$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$
10	$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!}$
11	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$
12	a^x	$\sum_{k=0}^{\nu}\dfrac{(x\ln a)^k}{k\,!}$
13	$\sin^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1}\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)\,!}x^{2k}$
14	$\cos^2 x$	$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k}\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)\,!}x^{2k}$
15	$\tanh^{-1} x$	$\sum_{k=0}^{\nu}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$
16	$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\nu}x^k$

9.1.7 Παράγωγος συνάρτησης με παραμετρική μορφή

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει την παρακάτω παραμετρική μορφή:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad \text{όταν } t \in [a, b] \tag{9.1.7 - 1}$$

όπου οι συναρτήσεις φ, ψ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες για κάθε $x \in (a, b)$[6]. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει ο παρακάτω τύπος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \tag{9.1.7 - 2}$$

Παράδειγμα 9.1.7 - 1

Έστω η παραμετρική συνάρτηση

$$\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 2\sin t. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο $(9.1.7 - 2)$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos t}{-3\sin t} = -\frac{2}{3}\cot t.$$

Απαλείφοντας το t προκύπτει η έλλειψη

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Άσκηση

Των παρακάτω παραμετρικών συναρτήσεων να γίνει η γραφική παράσταση και στη συνέχεια η πρώτης τάξης παράγωγος dy/dx

[6] Για γεωμετρικές εφαρμογές των παραμετρικών παραστάσεων βλέπε Μάθημα 1.

$$i)\ \begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= t^2 \end{aligned} \qquad v)\ \begin{aligned} x &= \sin^{-1} t \\ y &= \left(1-t^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$ii)\ \begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin^2 t \end{aligned} \qquad vi)\ \begin{aligned} x &= t^{1/2} \\ y &= t^{1/3} \end{aligned}$$

$$iii)\ \begin{aligned} x &= a\,(\sin t - t\cos t) \\ y &= a\,(\cos t + t\sin t) \end{aligned} \qquad vii)\ \begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned} \quad \text{αν } t = \frac{\pi}{4}$$

$$iv)\ \begin{aligned} x &= a\,(t - \sin t) \\ y &= a\,(t - \cos t) \end{aligned} \qquad viii)\ \begin{aligned} x &= \ln\left(1+t^2\right) \\ y &= t^2 \end{aligned} \quad \text{αν } t = 0.$$

9.1.8 Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Όταν η σχέση μεταξύ της ανεξάρτητης μεταβλητής x και της συνάρτησης y δίνεται με τη μορφή

$$f(x,y) = 0, \qquad (9.1.8 - 1)$$

τότε λέγεται ότι έχουμε μία **πεπλεγμένη** συνάρτηση (implicit function). Η εύρεση της παραγώγου μιας πεπλεγμένης συνάρτησης στις απλούστερες των περιπτώσεων είναι δυνατόν να υπολογιστεί ως εξής:

i) υπολογίζεται η παράγωγος με μεταβλητή x στο αριστερό μέλος της $(9.1.8-1)$, θεωρώντας το y ως συνάρτηση του x, δηλαδή υπολογίζεται η παράγωγος

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 0\,, \qquad (9.1.8 - 2)$$

ii) λύνεται η $(9.1.8-2)$ ως προς y'.

Παράδειγμα 9.1.8 - 1

Έστω η συνάρτηση

$$x\,y + e^y = 0, \quad \text{όταν} \quad y = y(x).$$

Τότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$x'y + x\,y' + y'e^y = 0 \quad ή \quad y + (x + e^y)\,y' = 0$$

οπότε λύνοντας ως προς y' προκύπτει ότι

$$y' = -\frac{y}{x + e^y}\,.$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι 1ης τάξης παράγωγοι των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων $y = y(x)$

$i)$	$x^3 + y^3 = a^3$	$vii)$	$\tan y = xy$
$ii)$	$a\cos^2(x + y) = \beta$	$viii)$	$x^3 + x^2y + y^2 = 0$
$iii)$	$xy = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)$	$ix)$	$e^y = x + y.$

[7]

E-mail: bratsos@teiath.gr URL: http://users.teiath.gr/bratsos/

Βιβλιογραφία

[1] Μπράτσος, Α. (2011), Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 978–960–351–874–7.

[2] Μπράτσος, Α. (2002), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Α. Σταμούλη, Αθήνα, ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος Θ. (2008), Μιγαδικές Συναρτήσεις, Εκδόσεις Ζήτη, ISBN 978–960–456–092–9.

[4] Finney R. L., Giordano F. R. (2004), Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 978–960–524–184–1.

[5] Spiegel M., Wrede R. (2006), Ανώτερα Μαθηματικά, Εκδόσεις Τζιόλα, ISBN 960–418–087–8.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/