



ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Έστω $AM = 99999$. Οι προβολικές συντεταγμένες της αρχής και του τέλους της σήραγγας στην $TM87$ είναι: $A(526199.999 \text{ m}, 4510399.999 \text{ m})$, $T(539299.999 \text{ m}, 4510499.999 \text{ m})$. Από τις προβολικές συντεταγμένες των A και T μπορεί να υπολογιστεί η προβολική απόσταση της σήραγγας στο χάρτη της $TM87$:

$$\bar{s}_{TM87} = \sqrt{(\mathcal{E}_T - \mathcal{E}_A)^2 - (\mathcal{N}_T - \mathcal{N}_A)^2} \Rightarrow \bar{s}_{TM87} = 13100.382\text{m}$$

Για να υπολογιστεί το μήκος της γεωδαισιακής γραμμής S_{AT} πάνω στο ΕΕΠ πρέπει να βρεθεί ο συντελεστής γραμμικής παραμόρφωσης m_{AT} από τις προβολικές συντεταγμένες των σημείων:

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_A + \mathcal{E}_T}{2} = 532749.999\text{m}$$

$$\mathcal{E}'_m = \mathcal{E}_m - 500000 = 32749.999\text{m}$$

Στην προβολή $TM87$ ο συντελεστής γραμμικής παραμόρφωσης στον κεντρικό μεσημβρινό είναι $m_o = 0.9996$:

$$m_{ij} = m_o \left(1 + \frac{\mathcal{E}'_m{}^2}{2m_o^2 R_m^2} \right) = 0.999613217551$$

Επομένως το μήκος της γεωδαισιακής γραμμής πάνω στο ΕΕΠ είναι:

$$\bar{s}_{TM87} = m_{AT} S_{AT} \Rightarrow S_{AT} = \frac{\bar{s}_{TM87}}{m_{AT}} = 13105.451\text{m}$$

Το μήκος της χορδής στο ΕΕΠ δίνεται από την εξίσωση:

$$S_x = 2R \sin \frac{S_{AT}}{2R} \Rightarrow S_x = 13105.448\text{m} \quad (\text{προσοχή: το όρισμα του ημιτόνου είναι ακτίνια!!})$$

και η ζητούμενη οριζόντια απόσταση:

$$s_o = S_x \sqrt{\left(1 + \frac{h_A}{R}\right) \left(1 + \frac{h_T}{R}\right)} = S_x \sqrt{\left(1 + \frac{H_A + N_A}{R}\right) \left(1 + \frac{H_T + N_T}{R}\right)} = 13106.270\text{m}$$

2. Θεωρητική

3. Θεωρητική

4. Για $m=0$ η συνάρτηση Legendre μετατρέπεται σε πολυώνυμο Legendre και ισχύει:

$$P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} t^{n-2j}$$

Για $n=3$ έχουμε $k=1$ και επομένως:

$$P_{30}(t) = \frac{1}{2^3} \left[\frac{(-1)^0 (2 \cdot 3 - 2 \cdot 0)!}{0!(3-0)!(3-2 \cdot 0)!} t^{3-2 \cdot 0} + \frac{(-1)^1 (2 \cdot 3 - 2 \cdot 1)!}{1!(3-1)!(3-2)!} t^{3-2 \cdot 1} \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} t \right] = \frac{1}{8} (20t^3 - 12t) = 0.324759526412$$