ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

5η παρουσίαση

Βασίλης Δ. Ανδριτσάνος
Δρ. Αγρονόμος – Τοπογράφος Μηχανικός ΑΠΘ

4ο εξάμηνο

http://eclass.survey.teiath.gr

Γεωδαισία

Παρουσιάσεις, Ασκήσεις, Σημειώσεις

5. Φυσική Γεωδαισία –
Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας – Γεωμετρία του πεδίου
Αναπαράσταση του πεδίου – σφαιρική αρμονική ανάπτυξη – Γεωειδές

6. Μετρήσεις στη Γεωδαισία – Δορυφορικές παρατηρήσεις Γεωδαιτική Αστρονομία – Βαρυτημετρία – Επίγειες γεωδαιτικές μετρήσεις

7. Μέθοδοι επίλυσης γεωδαιτικών μετρήσεων – προσδιορισμοί θέσης – βαρύτητα – υψομετρία – αναγωγές στο ελλειψοειδές

8. Αναγωγές στο γεωειδές –
Προβλήματα συνοριακών τιμών – Μοντελοποίηση του πεδίου γήινου πεδίου βαρύτητας

ΟΡΙΣΜΟΣ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

- **Φυσική Γεωδαισία:** Το τμήμα της Γεωδαισίας που ασχολείται με τη χρήση μετρήσεων σχετικών με το *γήινο πεδίο βαρύτητας* με σκοπό, μέσω προηγμένων και συνεχώς εξελισσόμενων τεχνικών:

1. <u>την προσέγγιση του γήινου πεδίου βαρύτητας</u> και διαμέσου αυτού του σχήματος και του μεγέθους της Γης

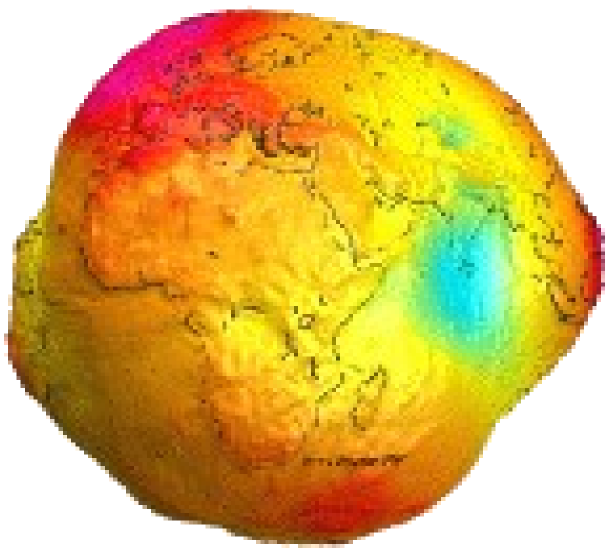
2. <u>την κατανόηση της επιφανειακής και της εσωτερικής δομής</u> του πλανήτη από άποψη γεωμετρίας και πυκνότητας

3. <u>την πρόβλεψη, υπολογισμό και αξιοποίηση των δορυφορικών τροχιών</u> με τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια (μοντέλα πεδίου βαρύτητας)

4. <u>τη βασική έρευνα</u> στη θεωρητική φυσική, τη σεισμολογία, την ωκεανογραφία, τη γεωφυσική και τη γεωδυναμική

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Προσέγγιση του γεωειδούς: ισοδυναμική επιφάνεια του γήινου πεδίου βαρύτητας που σε πρώτη προσέγγιση ταυτίζεται με τη μέση στάθμη των θαλασσών σε παγκόσμια κλίμακα.



ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΗ
(διαστημικές και δορυφορικές μέθοδοι)

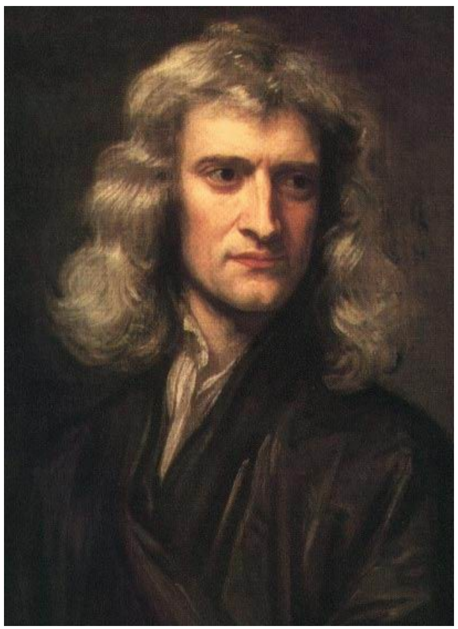
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ
(γεωμετρικές μέθοδοι και προσδιορισμός συντεταγμένων)

ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

ΦΥΣΙΚΗ
(μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας - γεωειδές)

(ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΗ)
ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΗ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ
(Αστρονομικές παρατηρήσεις)

5η ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 15ος αιώνας μ.Χ. - 17ος αιώνας μ.Χ.



Sir Isaac Newton
1643 – 1727

- 1687: Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης: θεωρητική απόδειξη της ελλειψοειδούς προσέγγισης πεπλατυσμένης στους πόλους
- Βαρυτημετρικές, αστρονομικές και γεωμετρικές παρατηρήσεις απέδειξαν τη θεωρία
- Γεωμετρική επιπλάτυνση

$$f = \frac{a-b}{a}$$

6η ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 18ος αιώνας μ.Χ. - 19ος αιώνας μ.Χ.

Alexis Clairaut
1713 – 1765

- 1738: γεωμετρική επιπλάτυνση από καθαρά δυναμικά μεγέθη

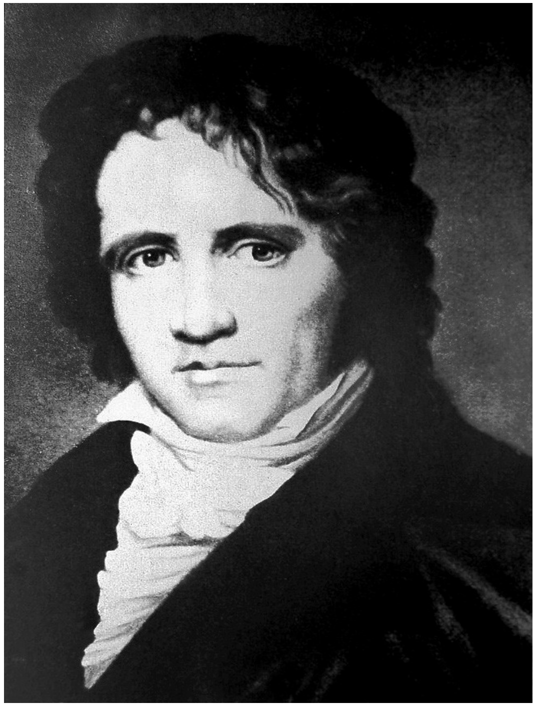
$$f \approx \frac{5}{2}m - \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} \qquad m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a}$$

- Η γεωμετρική επιπλάτυνση μπορεί να προκύψει από μετρήσεις βαρήτητας
- Εισαγωγή του γήινου πεδίου βαρύτητας στον ορισμό

6η ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 18ος αιώνας μ.Χ. - 19ος αιώνας μ.Χ.

Carl Friedrich Gauss
1777 – 1855

- Τριγωνισμοί Αννόβερο και Πρωσία
- Υπολογιστικές μέθοδοι στηριζόμενες στη συνόρθωση των παρατηρήσεων
- Πρώτη αμφισβήτηση της καταλληλότητας του ελλειψοειδούς μοντέλου



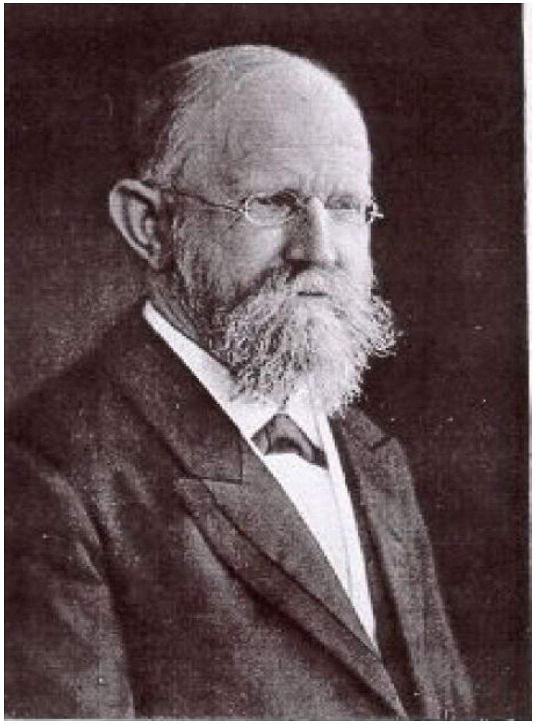
Friedrich W. Bessel
1784 – 1846

6η ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 18ος αιώνας μ.Χ. - 19ος αιώνας μ.Χ.

Pierre-Simon Laplace
1749 – 1827

- *"…η απόκλιση μεταξύ της κατακορύφου (νήματος της στάθμης) που αναφέρονται οι φυσικές παρατηρήσεις και της καθέτου στο ελλειψοειδές μοντέλο δεν μπορεί να αγνοηθεί…"*
- Ασυμφωνίες στις μετρήσεις τόξων για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του ελλειψοειδούς
- Πρώτος διαχωρισμός της φυσικής επιφάνειας, της μαθηματικής επιφάνειας (γεωειδές) και της επιφάνειας αναφοράς που την προσεγγίζει (ελλειψοειδές)

6η ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 18ος αιώνας μ.Χ. - 19ος αιώνας μ.Χ.



Friedrich R. Helmert
1843 – 1917

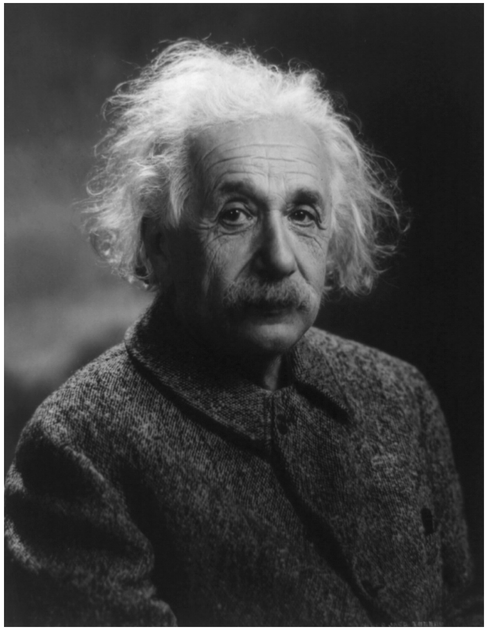
- Πρώτος Γεωδαιτικός Συγγραφέας: "Μαθηματική και Φυσική Θεωρία της Γεωδαισίας" (1880)
- Εισαγωγή των αποκλίσεων της κατακορύφου στον υπολογισμό των παραμέτρων του ελλειψοειδούς μοντέλου.

6η ΠΕΡΙΟΔΟΣ: 18ος αιώνας μ.Χ. - 19ος αιώνας μ.Χ.

George G. Stokes
1819 - 1903

- Πρώτη κλειστή σχέση για τον υπολογισμό του γεωειδούς από μετρήσεις βαρύτητας πάνω στην γήινη επιφάνεια
- Πρώτη λύση του *Γεωδαιτικού Προβλήματος Συνοριακών Τιμών (Geodetic Boundary Value Problem)*

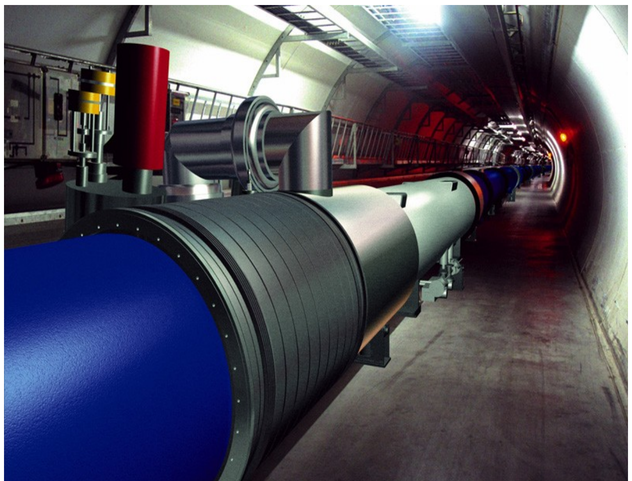
20ος αιώνας: ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

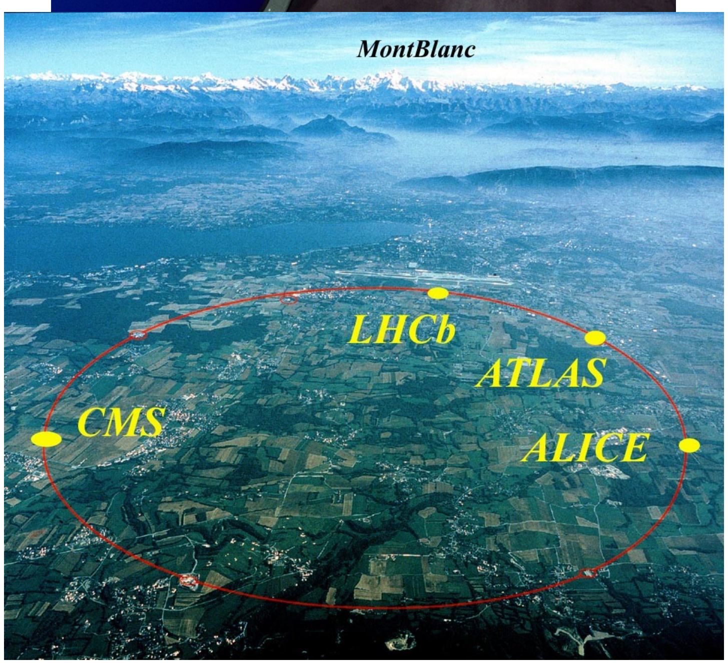


Albert Einstein
1879 – 1955

- **Βαρύτητα:** *ιδιότητα του ίδιου του χώρου* και όχι δύναμη ανάμεσα σε δύο σώματα
- Η ύλη προκαλεί *καμπύλωση* του χωροχρόνου: βαρύτητα
- Αναπαράσταση με επίπεδο ελαστικό φύλλο
- **Θεωρία του ενοποιημένου πεδίου:** κοινή περιγραφή όλων των δυνάμεων της φύσης (ηλεκτρομαγνητισμός, ασθενής και ισχυρή πυρηνική δύναμη και βαρυτική έλξη)

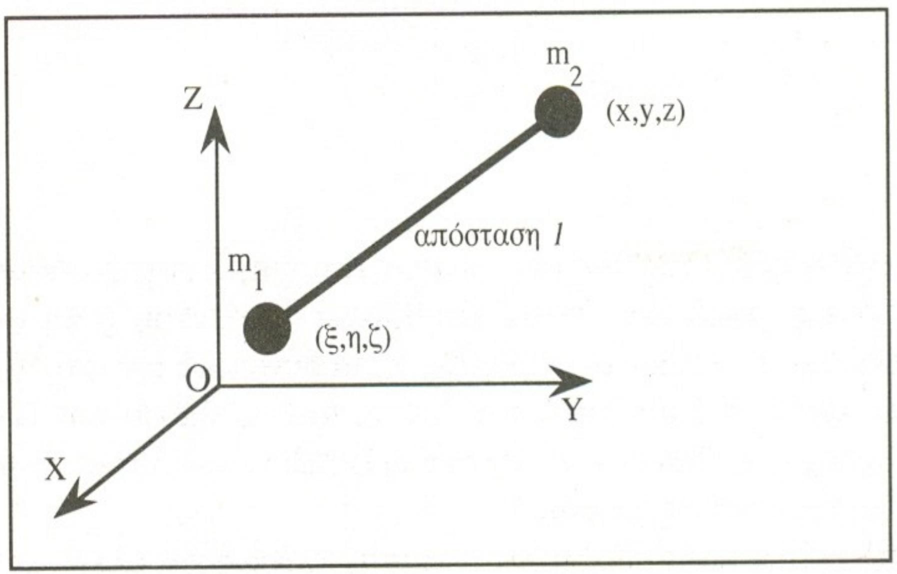
ΝΕΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟΨΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑ





- **Βαρύτητα:** δύναμη ασθενής. Ειδικός εξοπλισμός για τη μελέτη της
- 2009: CERN – Γενεύη: Μεγάλος Επιταχυντής Αδρονίων (Large Hadron Collider – LHC)
- Ποιά είναι τα αίτια που προκαλούν τη βαρύτητα;
- Είναι η πρώτη δύναμη που παρατηρήθηκε στη φύση, αλλά και εκείνη που αδυνατεί να ελέγξει ο άνθρωπος

ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ

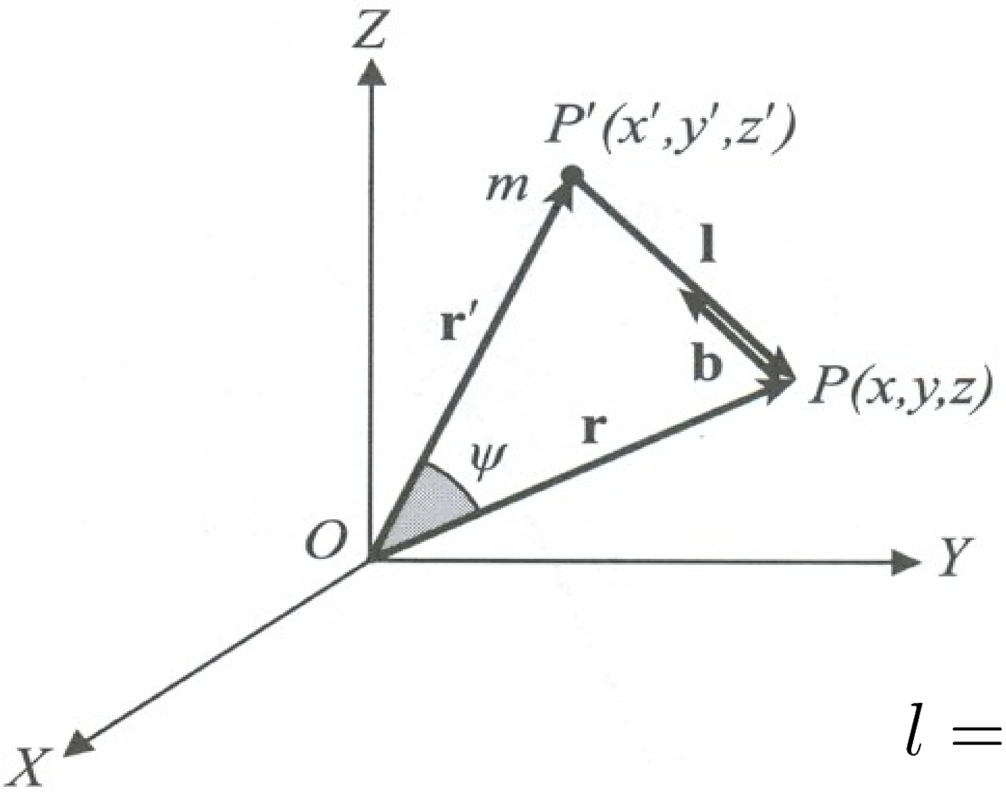


- Νόμος του Νεύτωνα ανάμεσα σε δύο μάζες m1 και m2 με συντεταγμένες (ξ, η, ζ) και (x, y, z) αντίστοιχα.
- $G = 6.673 \times 10^{-10}\, m^3 kg^{-1} sec^{-2}$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{l^2}$$

$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ



- Όταν η μία μάζα αντικατασταθεί με τη μονάδα μάζας, τότε

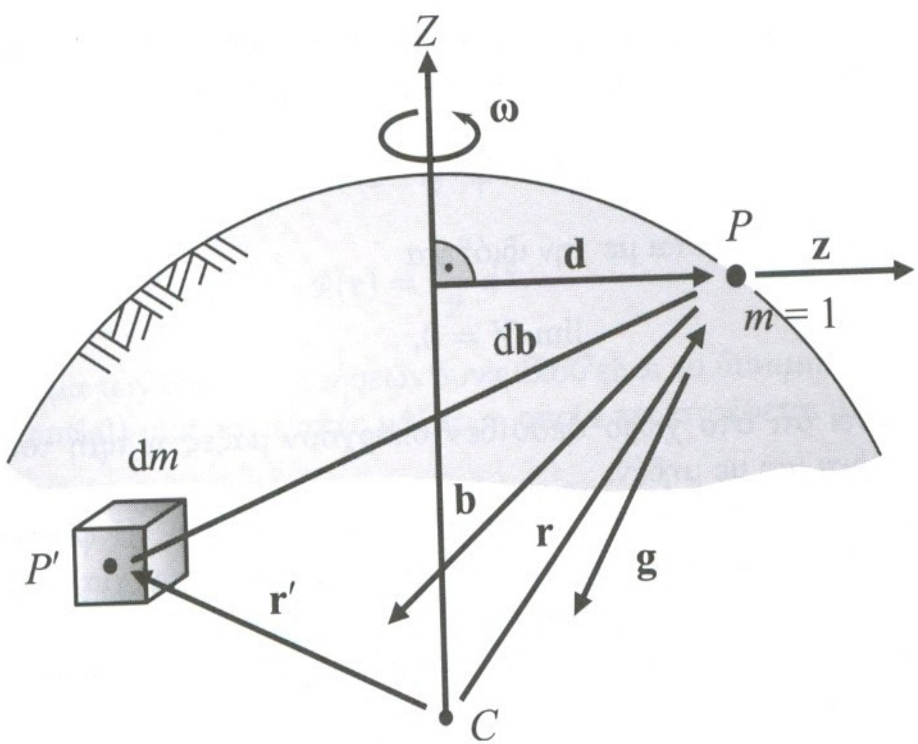
$$b = G\frac{m}{l^2}$$

- b: η δύναμη που ασκεί η μονάδα μάζας σε σημείο απόστασης l

$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} + \mathbf{z} \qquad \mathbf{z} = \omega^2 \mathbf{d}$$



- **g: επιτάχυνση της βαρύτητας**
- **b: επιτάχυνση των ελκτικών δυνάμεων**
- **z: φυγόκεντρη επιτάχυνση**
- $\omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ rad/sec
- Μονάδα SI: m/sec^2
- 1 Gal = 1 cm/sec^2
- 1 mGal = 10^{-5} m/sec^2
- Διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας: *η διεύθυνση της κατακορύφου*

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

$$V = G\frac{m}{l}$$

$$\Phi = \frac{\omega^2}{2}d^2$$

$$W = V + \Phi$$

- Για την απλούστευση των υπολογισμών χρησιμοποιείται, αντί του διανυσματικού μεγέθους της επιτάχυνσης, *το βαθμωτό πεδίο του δυναμικού*
- Το δυναμικό της βαρύτητας είναι το άθροισμα δύο συναρτήσεων δυναμικού (έλξης και φυγοκεντρικού)
- *Εκφράζει το έργο το οποίο απαιτείται για τη μετατόπιση της μονάδας της μάζας στο πεδίο βαρύτητας*

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\mathbf{g} = \nabla W$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Z}$$

- Ο **τελεστής ανάδελτα** (*nabla*) δίνει την *κλίση* μιας βαθμωτής συνάρτησης
- Η **κλίση του δυναμικού** της βαρύτητας ταυτίζεται με το **διάνυσμα της επιτάχυνσης** της βαρύτητας
- Οι **συνιστώσες του διανύσματος της βαρύτητας** προς ορισμένες διευθύνσεις προκύπτουν από τις **μερικές παραγώγους του δυναμικού** ως προς τις διευθύνσεις αυτές

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ POISSON – LAPLACE

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = -4\pi G\rho$$

$$\Delta V = 0$$

- ρ: η πυκνότητα των γήινων μαζων
- Στο χώρο *έξω από τις μάζες* (ρ=0) ισχύει η **εξίσωση Laplace** και το δυναμικό έλξης είναι <u>μία αρμονική συνάρτηση</u> (αρχή της ανάπτυξης σε σειρά)
- Στο χώρο *εντός των μαζών* ισχύει η **εξίσωση Poisson** και το δυναμικό έλξης <u>παύει να είναι μία αρμονική συνάρτηση</u>

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ POISSON – LAPLACE

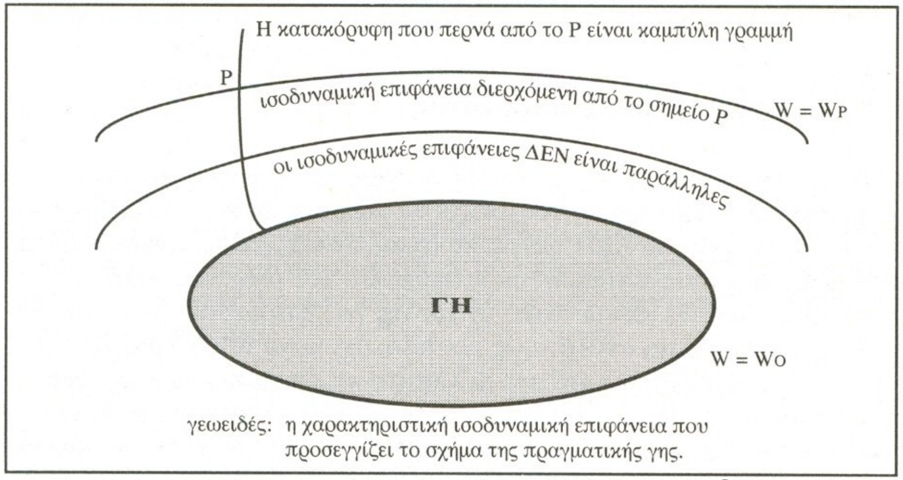
$$\Delta\Phi = 2\omega^2$$

$$\Delta W = \Delta(V+\Phi) = -4\pi G\rho + 2\omega^2$$

$$\Delta W = 2\omega^2$$

- *Το φυγοκεντρικό δυναμικό Φ δεν είναι μία αρμονική συνάρτηση*
- *Το δυναμικό της βαρύτητας W δεν είναι αρμονική συνάρτηση αλλά* ισχύουν οι **γενικευμένες συναρτήσεις Poisson** (εντός των μαζών) και **Laplace** (εκτός των μαζών)

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



- <u>Ισοδυναμικές επιφάνειες</u>: επιφάνειες *σταθερού δυναμικού της βαρύτητας*. Επιφάνειες ισορροπίας
- <u>Κατακόρυφες</u>: καμπύλες γραμμές που τέμνουν τις ισοδυναμικές επιφάνειες κάθετα
- **Οι ισοδυναμικές επιφάνειες δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους**
- Η ισοδυναμική επιφάνεια, η οποία προσεγγίζει βέλτιστα τη μέση στάθμη των θαλασσών καλείται **γεωειδές** (geoid)
- Το γεωειδές είναι η **επιφάνεια αναφοράς** για τον ορισμό των συστημάτων υψών

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Σε αντιστοιχία με την γεωμετρική γεωδαισία, *στη φυσική γεωδαισία το ΕΕΠ χρησιμοποιείται ως μοντέλο, όχι μόνο του σχήματος αλλά και του πεδίου βαρύτητας*: διαδικασία γραμμικοποίησης: ένα **κανονικό** μέρος (μοντέλο) και ένα **διαταρακτικό** μέρος (διαφορά πραγματικότητας από μοντέλο)

- Παραδοχές ελλειψοειδούς μοντέλου φυσικής γεωδαισίας

1. Μάζα ίση με τη μάζα της πραγματικής Γης
2. Περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα
3. Ισοδυναμική επιφάνεια του κανονικού πεδίου βαρύτητας

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Το σχήμα και το πεδίο του ΕΕΠ ορίζονται πλήρως από τέσσερις παραμέτρους:

a, b, GM, ω

- Σε αναλογία με τα δυναμικά του πραγματικού πεδίου της Γης: V, Φ, W = V + Φ, ορίζονται για το **κανονικό πεδίο βαρύτητας του ΕΕΠ**:
- **$V_{ΕΕΠ}$: δυναμικό έλξης ΕΕΠ**
- **Φ: φυγοκεντρικό δυναμικό (ίδιο με της πραγματικής Γης)**
- **$U = V_{ΕΕΠ} + Φ$: δυναμικό της κανονικής βαρύτητας**

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Επάνω στο ΕΕΠ υπολογίζεται η κανονική βαρύτητα γ με την κλειστή **σχέση του Somigliana**

$$\gamma_{EE\Pi} = \frac{a\gamma_a \cos^2\phi + b\gamma_b \sin^2\phi}{\sqrt{(a\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2}}$$

- γ_α : η κανονική βαρύτητα στον ισημερινό
- γ_b : η κανονική βαρύτητα στους πόλους

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Μετά από συστάσεις (recommendations) των συνελεύσεων της **Διεθνούς ΄Ενωσης Γεωδαισίας και Γεωφυσικής (IUGG)**
- Σκοπός: συγκρίσιμα αποτελέσματα Γεωδαισίας – Αστρονομίας – Γεωφυσικής
- 1924: Μοντέλο της Γης: Διεθνές ελλειψοειδές του Hayford (a = 6378388 m, f = 1/297.0)
- 1930: Διεθνής τύπος βαρύτητας Cassinis 1930

$$\gamma_o = 9.78049(1 + 0.0052884\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)$$

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- 1967: Λουκέρνη IUGG – GRS67

$$\gamma_o = 9.78031846(1 + 0.0053024\sin^2\varphi - 0.0000059\sin^2 2\varphi)$$

- 1980: Καμπέρα IUGG – GRS80

$$\gamma_o = 9.78032677\frac{1 + 0.001931851353\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - 0.0066943800229\sin^2 2\varphi}}$$

ΤΟ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

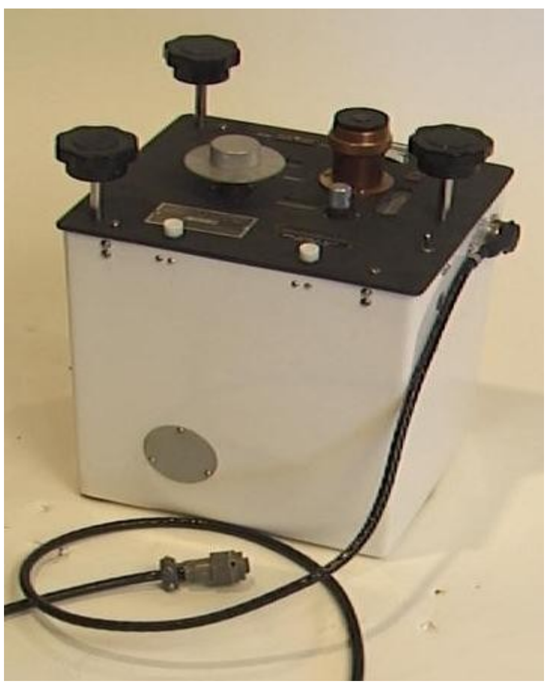
- Κατά την κλασική γεωδαιτική τακτική το πεδίο της γήινης βαρύτητας διαχωρίζεται σε ένα "κανονικό" μέρος (μοντέλο) και ένα "υπόλοιπο" (μη-κανονικό) μέρος: **διαταρακτικό δυναμικό**
- Ίδια λογική: Γεωμετρική γεωδαισία: **Αποχή γεωειδούς** – "*διαταραχή*" από το μοντέλο (ΕΕΠ - ελλειψοειδές υψόμετρο) και την πραγματικότητα (γήινη επιφάνεια - ορθομετρικό υψόμετρο)

$$\mathrm{T} = \mathrm{W} - \mathrm{U}$$

- Το κανονικό μέρος U υπολογίζεται βάσει αναλυτικών σχέσεων για το δυναμικού του ΕΕΠ που χρησιμοποιείται ως μοντέλο

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Η διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας **g** υλοποιείται με την οριζοντίωση των τοπογραφικών οργάνων (μετρηση ξ, η)
- Το μέγεθος του **g** (ένταση της βαρύτητας) μετράται με τη βοήθεια των βαρυτημέτρων



ΑΝΩΜΑΛΙΑ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Για την προσέγγιση του γεωειδούς χρησιμοποιείται η **ανωμαλία της βαρύτητας**, δηλ. η *διαφορά* μεταξύ **πραγματικής (μετρήσιμης) βαρύτητας** στο γεωειδές και **κανονικής βαρύτητας στο ελλειψοειδές**
- Ανάγκη αναγωγών της μετρήσιμης βαρύτητας από την επιφάνεια της Γης που παρατηρείται στην επιφάνεια αναφοράς του γεωειδούς: **Αναγωγές της βαρύτητας**
- Έστω Ρο σημείο του γεωειδούς και Qo το αντίστοιχο σημείο του ελλειψοειδούς

$$\Delta g_{P_o} = g_{P_o} - \gamma_{Q_o}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

- **Συνδέει** *διαταρακτικές* ποσότητες του γεωειδούς με τις *κανονικές* ποσότητες του ελλειψοειδούς μοντέλου
- Αποτελεί μια <u>συνοριακή συνθήκη</u>: από **ανωμαλίες βαρύτητας στην επιφάνεια του γεωειδούς** είναι δυνατή η προσέγγιση του διαταρακτικού πεδίου βαρύτητας και της ίδιας της επιφάνειας του γεωειδούς (*προβλήματα συνοριακών τιμών*)

$$\Delta g_{P_o} \approx -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{R}$$

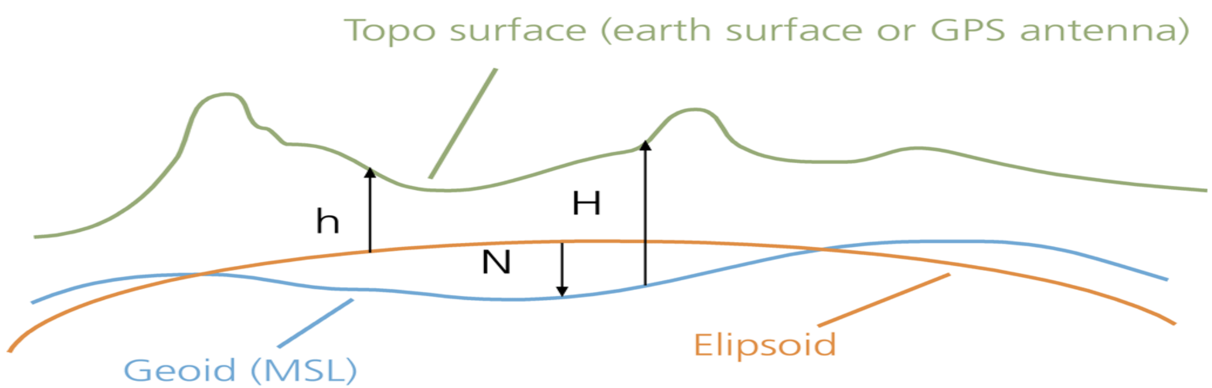
$$N \approx \frac{T_{P_o}}{\gamma_{Q_o}}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΥΨΩΝ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

- Ελλειψοειδή υψόμετρα: άμεσα μετρήσιμα από δορυφορικές μεθόδους

$$h = \frac{U_o - U_P}{\bar{\gamma}} \qquad \bar{\gamma} = \frac{1}{h}\int_0^P \gamma dh$$

h=H+N



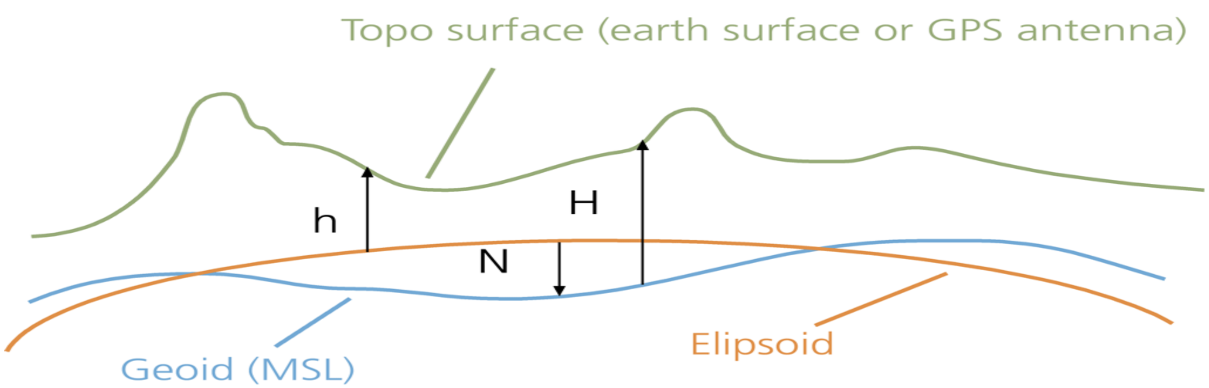
h=elipsoid height
H=orthometric height
N=geoid height

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΥΨΩΝ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

- Ορθομετρικά υψόμετρα: μετρούνται κατά μήκος της κατακορύφου

$$H = \frac{W_o - W_P}{\bar{g}} \qquad \bar{g} = \frac{1}{H}\int_0^P g\,dH$$

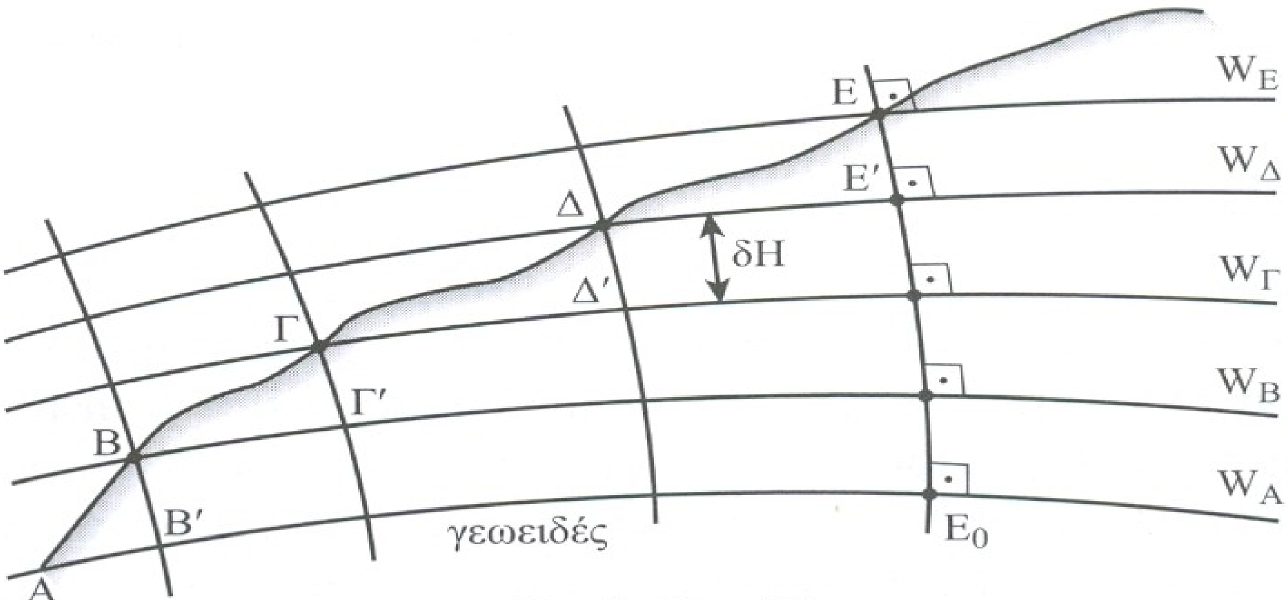
h=H+N



h=elipsoid height
H=orthometric height
N=geoid height

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΥΨΩΝ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

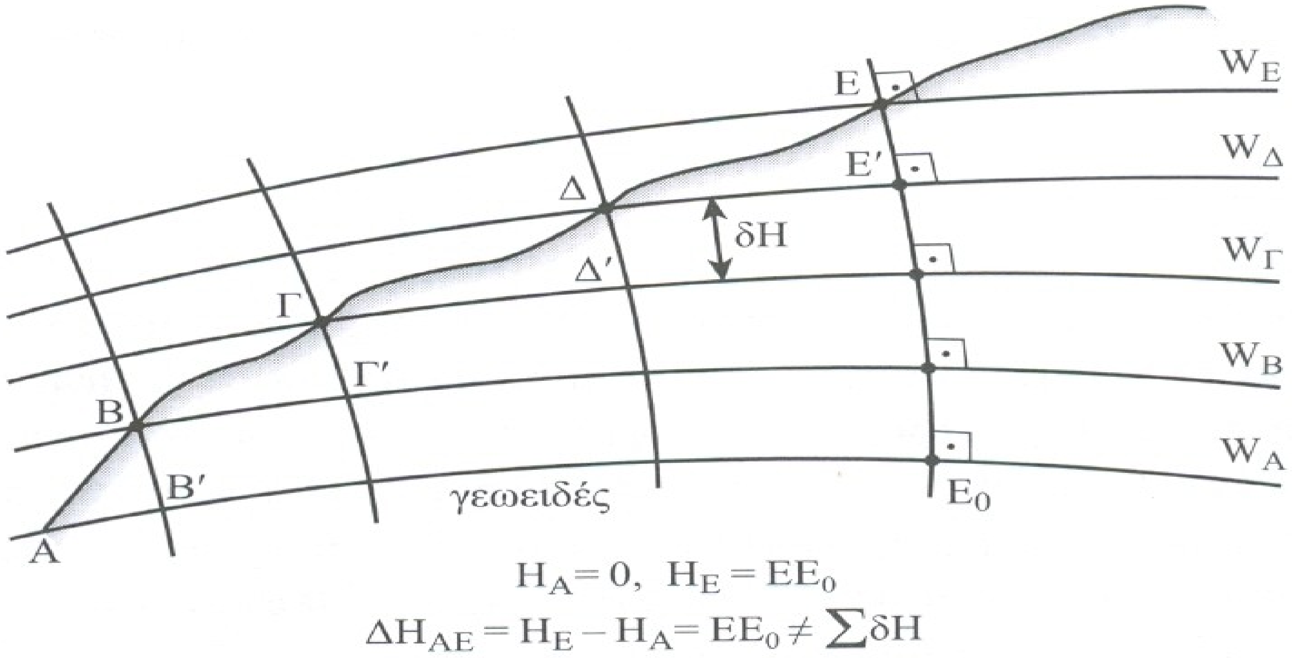
- **Επίδραση της βαρύτητας στην γεωμετρική χωροστάθμηση:** λόγω της *μη παραλληλότητας* των χωροσταθμικών επιφανειών το αποτέλεσμα της χωροστάθμησης κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι *διάφορο του μηδενός*



$$H_A = 0,\ \ H_E = EE_0$$

$$\Delta H_{AE} = H_E - H_A = EE_0 \neq \sum \delta H$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΥΨΩΝ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΗΤΑ



$$\Delta H_{AE} = H_E - H_A \neq \sum(\delta H)$$

$$\sum(\delta H) = (BB') + (\Gamma\Gamma') + (\Delta\Delta') + (EE')$$

- Ανάλογα με το δρόμο της όδευσης προκύπτει διαφορετική υψομετρική διαφορά: εισαγωγής της **ορθομετρικής διόρθωσης**

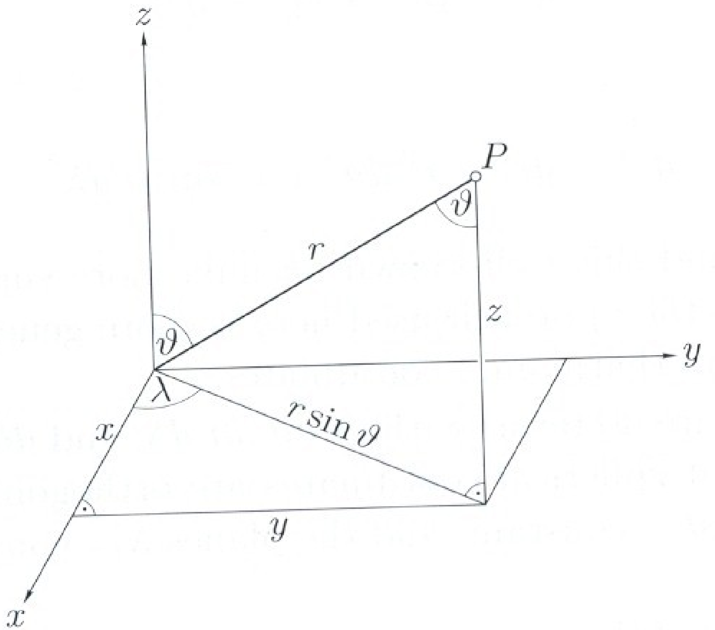
ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΑ

- Οι **αρμονικές συναρτήσεις** είναι οι *λύσεις της εξίσωσης του Laplace*
- Η απλούστερη αρμονική συνάρτηση είναι το *αντίστροφο της απόστασης μεταξύ δύο σημείων*

$$\Delta\left(\frac{1}{l}\right) = \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\right) = 0$$

- Αποδεικνύεται ότι και *η συνάρτηση του δυναμικού έλξης έξω από τις μάζες είναι και αυτή αρμονική συνάρτηση και μπορεί να εκφραστεί ως σειρά*

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΑ



- Το δυναμικό έλξης της Γης μπορεί να γραφτεί σε συνάρτηση με τις **πλήρως κανονικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις Legendre Pnm** και τους **πλήρως κανονικοποιημένους αρμονικούς συντελεστές Cnm, Snm**

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\right]$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ LEGENDRE

- Οι συναρτησεις Legendre υπολογίζονται για **βαθμό n και τάξη m<=n**
- Στην περίπτωση που **m=0** οι *συναρτήσεις Legendre* μετατρέπονται στα *πολυώνυμα Legendre* Pn(t)

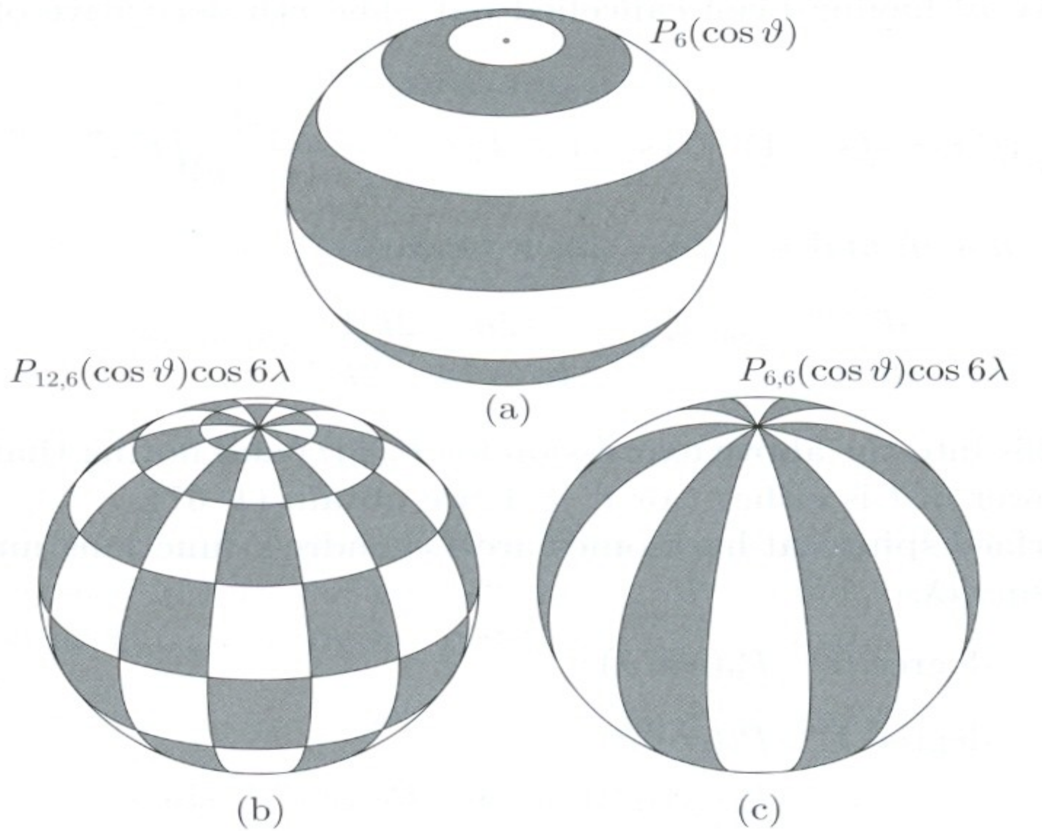
$$t = \cos\theta$$

$$P_{nm}(t) = \frac{(1-t^2)^{m/2}}{2^n} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-m-2j)!} t^{n-m-2j}$$

$k = (n-m)/2$ ή $k = (n-m-1)/2$

Χρησιμοποιείται όποιο από τα δύο *k δίνει ακέραιο αποτέλεσμα*

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ LEGENDRE



- Όταν m=0 οι αρμονικές ονομάζονται **αρμονικές ζώνης**
- Όταν n=m οι αρμονικές ονομάζονται **αρμονικές τομέα**
- Σε κάθε άλλη περίπτωση ονομάζονται **τραπεζοειδείς αρμονικές**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ LEGENDRE

- Οι συναρτήσεις Legendre λόγω της *αρμονικότητάς* τους είναι κατάλληλες για την περιγραφή της αρμονικής συνάρτησης του δυναμικού έλξης
- Ανάλογα με το μέγεθος των συντελεστών Cnm, Snm και το *βαθμό και την τάξη ανάπτυξης* αποδίδονται οι <u>λεπτομέρειες του γήινου πεδίου στο σφαιρικό μοντέλο</u>
- Μια απλοποιημένη μορφή αντίστοιχη της εύρεσης των συντελεστών Cnm και Snm είναι η *βέλτιστη προσαρμογή ευθείας* σε γνωστά σημεία: Α*πό γνωστές τιμές βαρύτητας πάνω στη γήινη επιφάνεια προσεγγίζουμε τους κατάλληλους συντελεστές για την καλύτερη δυνατή περιγραφή του γήινου πεδίου και του σχήματος της Γης (<u>πρόβλημα συνοριακών τιμών – Geodetic Boundary Value Problem</u>)*
- Όπως θα δούμε οι συναρτήσεις που συνδέονται με το πεδίο είναι δυνατό να αναλυθούν *αρμονικά στη σφαίρα* (ή στο ελλειψοειδές – ελλειψοειδείς αρμονικές)

ΠΛΗΡΩΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ LEGENDRE

$$\bar{P}_{n0}(t) = \sqrt{2n+1}P_{n0}(t)$$

$$\bar{P}_{nm}(t) = \sqrt{2(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_{nm}$$

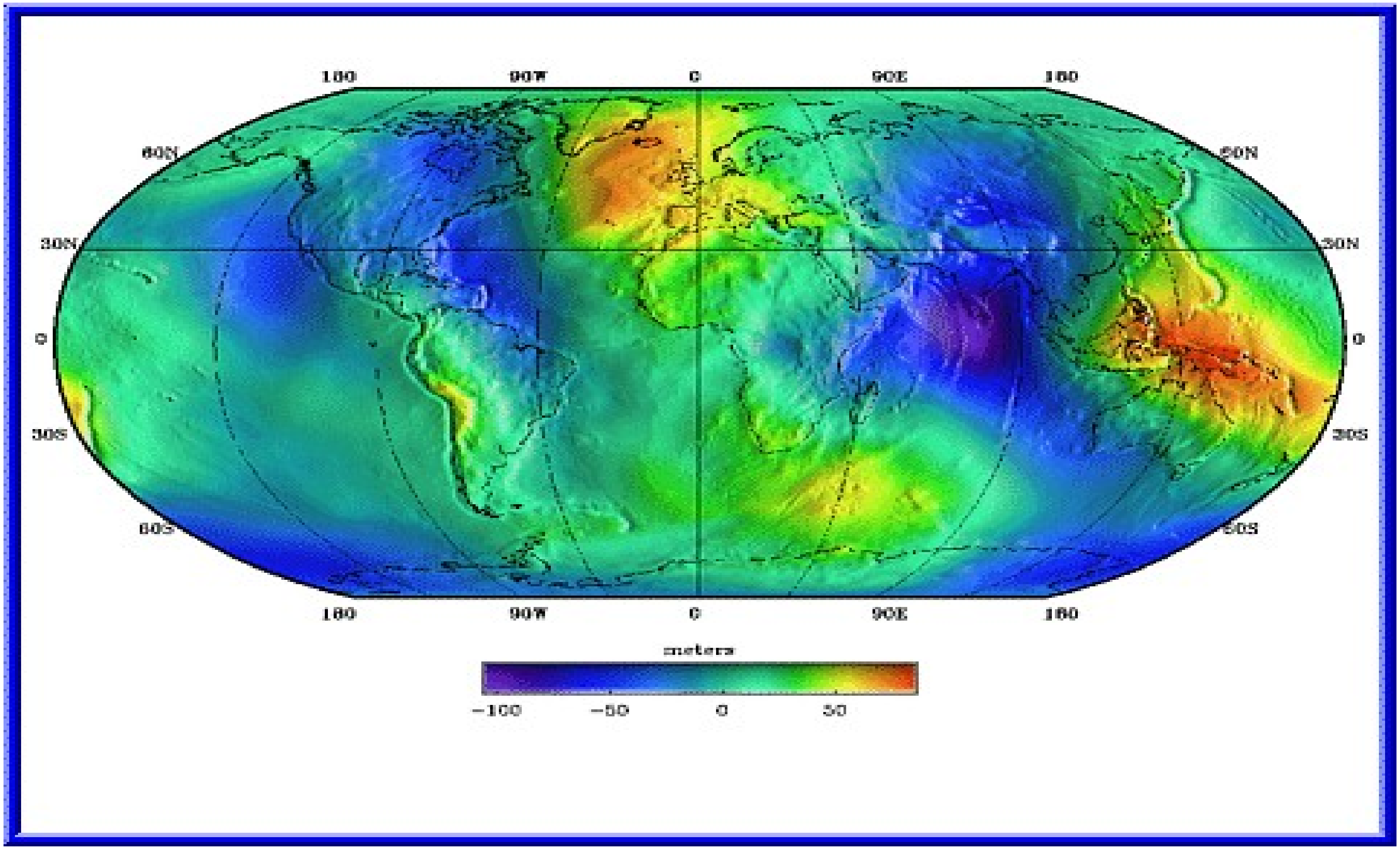
$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\right]$$

- Οι πλήρως κανονικοποιημένες συναρτήσεις Legendre **χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη γεωδυναμικών μοντέλων βαρύτητας**, όπου υπολογίζονται οι συντελεστές Cnm, Snm μέχρι ένα ανώτερο βαθμό και τάξη

ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

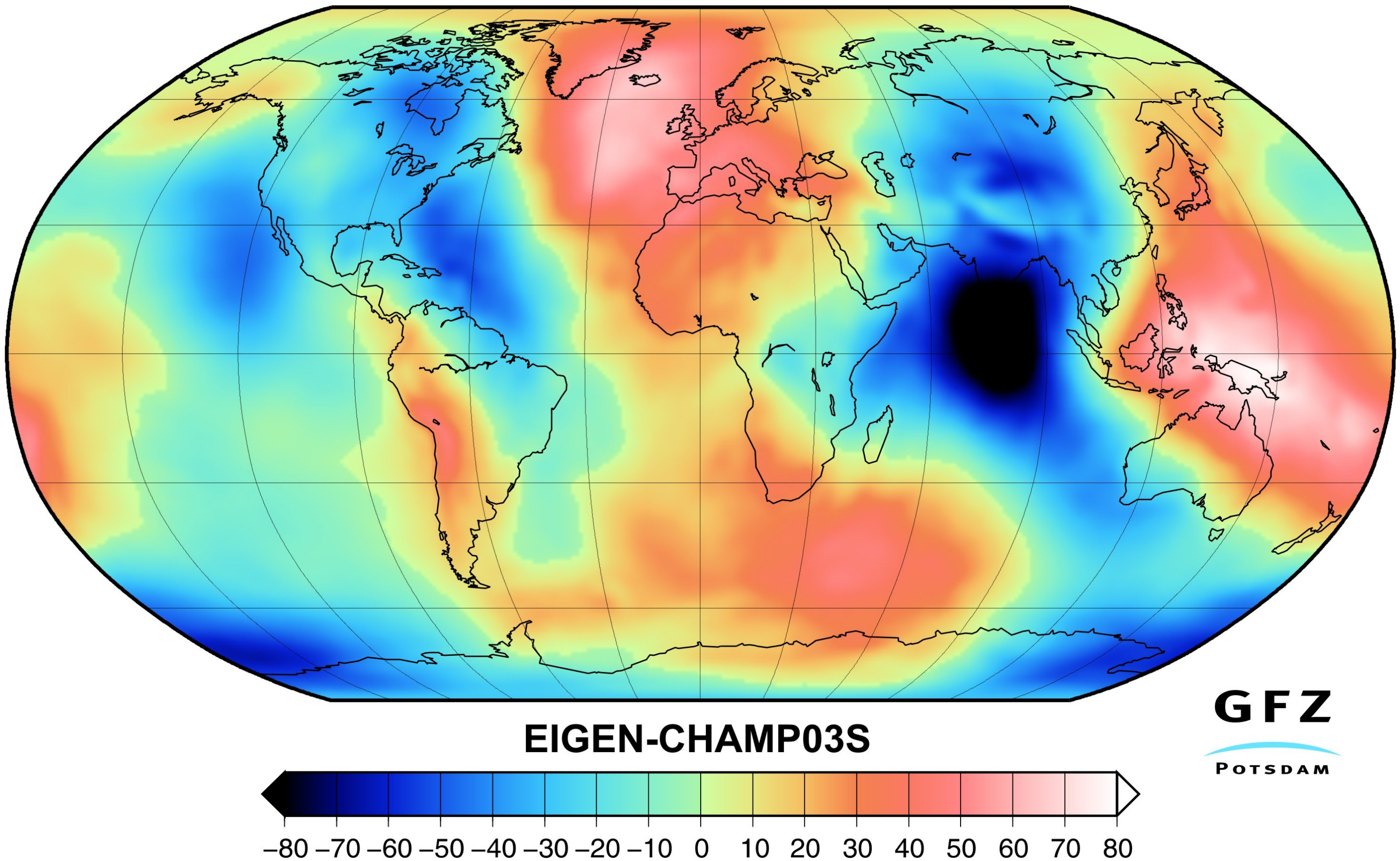
- Υπολογίζονται με τη βοήθεια *δορυφορικών* δεδομένων (παρατηρήσεις δορυφορικών τροχιών) και *επίγειων* δεδομένων βαρύτητας: **Μοντέλα συνδυασμού**
- Όταν χρησιμοποιούνται αποκλειστικά δορυφορικά δεδομένα τα μοντέλα αναπτύσσονται μέχρι ένα *περιορισμένο βαθμό* (π.χ., έως n = 100)
- <u>Σύγχρονο μοντέλο:</u> **EGM2008** (n = 2190): Μοντέλο συνδυασμού δορυφορικών και επίγειων δεδομένων με χρήση και των τελευταίων δορυφορικών αποστολών για το πεδίο βαρύτητας (GRACE + CHAMP)
- Αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας και του γεωειδούς σε παγκόσμια κλίμακα.
- Με αναφορά το EGM2008 και με επεξεργασίες τοπικών χαρακτηριστικών είναι πλέον δυνατή η προσέγγιση του γεωειδούς από μετρήσεις βαρύτητας με ακρίβειες της τάξης των λίγων εκατοστών (2 – 5 εκ.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ



EGM96 (n=m=360)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ



EIGEN-CHAMP03S (n=m=120)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Ορισμός και ιστορική αναδρομή της Φυσικής Γεωδαισίας
- Παγκόσμια Έλξη
- Επιτάχυνση και δυναμικό της βαρύτητας
- Γεωμετρία του πεδίου
- Γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς της βαρύτητας
- Συστήματα υψών και βαρύτητα
- Αρμονική ανάλυση στη σφαίρα
- Συναρτήσεις Legendre
- Μοντέλα βαρύτητας