



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

ΧΑΡΑΞΕΙΣ

Δ. ΣΤΑΘΑΣ
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ο. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗ
Επιστ. Συνεργάτης Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΜΑΡΤΙΟΣ 1998

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΧΑΡΑΞΕΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

1.1. Εισαγωγή

Χάραξη ονομάζεται η διαδικασία της υλοποίησης ενός Τεχνικού Έργου (Τ.Ε.) σε δοσμένο χώρο. Συνήθως ορίζεται σαν «**η αντίστροφη διαδικασία της αποτύπωσης**». Δηλαδή, ενώ στις αποτυπώσεις, έχοντας δοσμένο το αντικείμενο στο χώρο, με μετρήσεις και υπολογισμούς προσπαθούμε να οδηγηθούμε στην πληρέστερη απεικόνιση - σχεδίαση του, κατά τη διαδικασία της χάραξης προσπαθούμε με-κατάλληλους υπολογισμούς και μετρήσεις να μεταφέρουμε τις διαστάσεις του αντικειμένου (Τ.Ε.) από τα μελετητικά - κατασκευαστικά σχέδια στο έδαφος και να το δημιουργήσουμε στην πραγματικότητα. Πρέπει να τονιστεί ότι και για τις δύο περιπτώσεις (αποτύπωση - χάραξη), κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό, χρησιμοποιούνται κοινά τοπογραφικά όργανα και μέθοδοι.

Η όλη εργασία της χάραξης ενός Τ.Ε. στο έδαφος μπορεί να είναι πολύ απλή έως πολύ σύνθετη, ανάλογα με το αντικείμενο και το έδαφος (μεγάλες κλίσεις, εμπόδια κ.λ.π.). Τελικά η χάραξη οποιουδήποτε έργου ανάγεται στην υλοποίηση στο έδαφος σημείων, διευθύνσεων - αξόνων, καμπυλών (στο οριζόντιο ή κατακόρυφο επίπεδο) και επιπέδων (οριζόντιων ή με δοσμένη κλίση).

1.2. Όργανα που χρησιμοποιούνται στις χαράξεις

Τα όργανα που μπορεί ο Τοπογράφος Μηχανικός να χρησιμοποιήσει ξεκινούν από πολύ απλά (όπως λιναίες, μετροταινίες, ακόντια, ορθόγωνα), περνούν στα κλασικά τοπογραφικά όργανα (θεοδόλιχα, χωροβάτες και όργανα E.D.M.) για να καταλήξουν στα πιο σύγχρονα ηλεκτρονικά όργανα, όπως τα όργανα ολοκληρωμένων δυνατοτήτων (Total Stations) απλά ή αυτοκινούμενα, τους ψηφιακούς χωροβάτες, τους χωροβάτες - laser (που έχουν ειδικά μελετημένα εξαρτήματα και ενσωματωμένες υπολογιστικές ρουτίνες για να αντιμετωπίζουν προβλήματα χαράξεων), καθώς και ειδικά όργανα σχεδιασμένα αποκλειστικά για χαράξεις (laser ευθυγραμμίσεων, πρίσματα μεταφοράς διευθύνσεων κ.λ.π.).

1.3. Ακρίβεια στις χαράξεις

Η ακρίβεια της χάραξης εξαρτάται από το αντικείμενο, και συνήθως ακολουθείται η ακρίβεια με την οποία δίνονται οι διαστάσεις του Τ.Ε. στα κατασκευαστικά σχέδια. Με δεδομένη την απαιτούμενη ακρίβεια, επιλέγονται οι μέθοδοι και τα όργανα για τη χάραξη.

Τα στοιχεία της χάραξης, ανάλογα με την απαιτούμενη ακρίβεια, μπορούν να ληφθούν:

- Από αναλυτικές σχέσεις.
- Γραφικά ή ημιγραφικά από τα κατασκευαστικά σχέδια.
- Από ψηφιοποιητές (digitizers).

1.4. Δίκτυα ελέγχου χαράξεων

Η γενική διαδικασία της χάραξης στο ύπαιθρο ξεκινά από την ίδρυση ενός δικτύου ελέγχου, δηλαδή ενός δικτύου σταθερών σημείων αναφοράς, συναρτήσει των οποίων θα υλοποιηθούν τα χαρακτηριστικά σημεία από τα οποία θα προκύψει στο έδαφος η γεωμετρική μορφή του Τ.Ε.

Οι βασικές αρχές που διέπουν την ίδρυση ενός δικτύου ελέγχου χαράξεως είναι:

- Η θέση των κορυφών του (σημείων αναφοράς) και το σχήμα του να ανταποκρίνονται αφ' ενός μεν στο γεωμετρικό σχήμα του Τ.Ε., αφ' ετέρου δε στις συνθήκες κάτω από τις οποίες εκτελούνται οι εργασίες χάραξης. Έτσι, σαν «δίκτυο ελέγχου», ανάλογα με την περίπτωση, μπορεί να θεωρηθεί:
 - * Μία ευθυγραμμία (ένας άξονας)
 - * Μία πολυγωνομετρική όδευση
 - * Ένα τριγωνομετρικό δίκτυο.
- Η ακρίβεια του δικτύου πρέπει να εξασφαλίζει τις δεδομένες απαιτήσεις ακριβείας που αφορούν στην υλοποίηση των γεωμετρικών διαστάσεων του Τ.Ε. στο έδαφος.

1.5. Απόλυτη - Εσωτερική Ακρίβεια

Στη χάραξη ενός Τ.Ε. η ακρίβεια αναφέρεται:

- Στη θέση του Τ.Ε. σε σχέση με το χώρο που βρίσκεται (απόλυτη ακρίβεια). Αυτό αφορά ουσιαστικά στη συσχέτιση του έργου με το Κρατικό Τριγωνομετρικό Δίκτυο Αναφοράς.
- Στη θέση ενός χαρακτηριστικού σημείου σε σχέση με κάποιους κύριους άξονες του έργου.
- Στις σχετικές θέσεις διαφόρων χαρακτηριστικών σημείων του έργου.
- Στις γεωμετρικές διαστάσεις του Τ.Ε.

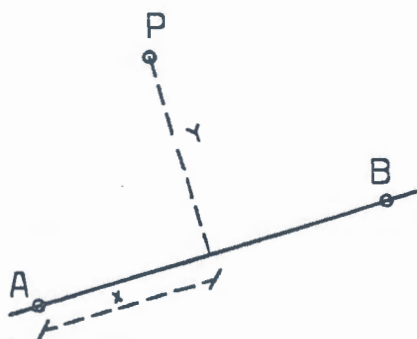
Οι τρεις τελευταίες περιπτώσεις προσδιορίζουν την εσωτερική ακρίβεια της χάραξης.

Ανάλογα με το πρόβλημα, δίνεται περισσότερο βάρος στην επίτευξη της εσωτερικής ακρίβειας ή και στα δύο. Στη χάραξη π.χ. των βασικών αξόνων ενός προκατασκευασμένου οικοδομήματος, εκείνο που παίζει σημαντικότερο ρόλο είναι η επίτευξη της απαιτούμενης εσωτερικής ακρίβειας και όχι τόσο η θέση της κατασκευής στο χώρο. Ενώ στη χάραξη π.χ. του άξονα μιάς σήραγγας, είναι το ίδιο σημαντικό να επιτευχθεί τόσο απόλυτη όσο και εσωτερική ακρίβεια.

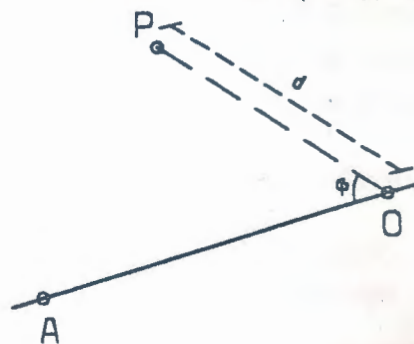
1.6. Υπολοΐση των χαρακτηριστικών σημείων του Τ.Ε.

Με δεδομένο το δίκτυο ελέγχου της χάραξης, τα χαρακτηριστικά σημεία του Τ.Ε. υλοποιούνται στο έδαφος:

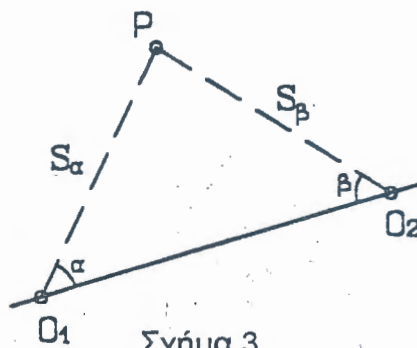
- Μέσω των **ορθογώνιων (καρτεσιανών) συντεταγμένων** τους σε σχέση με κάποιο υλοποιημένο στο έδαφος άξονα αναφοράς (Σχ. 1).
- Μέσω των **πολικών συντεταγμένων** τους, με τη βοήθεια μίας οριζόντιας γωνίας φ ως προς κάποια γνωστή διεύθυνση και μίας απόστασης d από κάποιο σημείο αναφοράς O (Σχ. 2).
- Με εφαρμογή μεθόδου **εμπροσθοτομίας**, με τη βοήθεια δύο οριζοντίων γωνιών α και β ως προς κάποια ευθυγραμμία που ορίζουν δύο σημεία αναφοράς O_1 και O_2 [ή και δύο οριζόντιων αποστάσεων S_α, S_β] (Σχ. 3).



Σχήμα 1
AB= άξονας αναφοράς



Σχήμα 2
AO = γνωστή διεύθυνση αναφοράς



Σχήμα 3

Αν οι προς χάραξη αποστάσεις έχουν προκύψει από τις ορθογώνιες συν/νες (X, Y) δύο σημείων σε κάποια χαρτογραφική απεικόνιση που δίνει σημαντικές παραμορφώσεις στην περιοχή σε σχέση με το μέγεθος της απόστασης, τότε για να χαραχτεί η απόσταση στο έδαφος πρέπει να

εφαρμοστεί η αντίστροφη διόρθωση $k = \frac{S_{απο\ συντεταγμενες}}{S_{εφαρμογης}}$.

Σήμερα, ο πιο διαδεδομένος τρόπος υλοποίησης των χαρακτηριστικών σημείων ενός έργου στο έδαφος είναι οι μέθοδοι των πολικών και των καρτεσιανών συντεταγμένων, με τη χρήση των σύγχρονων ηλεκτρονικών τοπογραφικών οργάνων (με τη βοήθεια και του λογισμικού που διαθέτουν).

Όσον αφορά στον **υψομετρικό προσδιορισμό** των χαρακτηριστικών σημείων, αυτός γίνεται με τη βοήθεια γεωμετρικής χωροστάθμησης ή τριγωνομετρικής υψομετρίας, ξεκινώντας από σημεία με γνωστό υψόμετρο που βρίσκονται ή ιδρύονται στην εγγύς περιοχή του έργου.

Εκείνο που πρέπει να αποφεύγεται, ώστε να μην υπάρξει δυσμενής μετάδοση σφαλμάτων, είναι η χάραξη κάποιου χαρακτηριστικού σημείου από κάποιο άλλο χαρακτηριστικό σημείο. Αυτό βέβαια σε αρκετές περιπτώσεις είναι αναγκαίο να εφαρμοστεί, αλλά θα πρέπει να λαμβάνονται όλα τα αναγκαία μέτρα για την βελτίωση των αποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΧΑΡΑΞΕΙΣ

Τα βασικά προβλήματα χάραξης είναι:

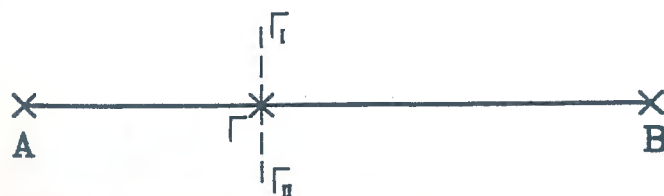
- Χάραξη ευθυγραμμίας
- Χάραξη γωνίας
- Χάραξη καμπυλών

2.1. Χάραξη Ευθυγραμμίας

2.1.1. Χάραξη - πύκνωση ευθυγραμμίας μεταξύ σημείων αμοιβαία ορατών

Αν πρόκειται για ευθυγραμμία μικρού μήκους, οι απαιτήσεις ακριβείας δεν είναι μεγάλες και τα άκρα της είναι αμοιβαία ορατά, τότε η ευθυγραμμία θα χαραχτεί με την βοήθεια ακοντίων.

Αν η ευθυγραμμία έχει μεγάλο μήκος, τα άκρα της είναι αμοιβαία ορατά και οι απαιτήσεις στην ακρίβεια είναι μεγαλύτερες, τότε η χάραξη της γίνεται με την βοήθεια θεοδολίχου. Στο ένα άκρο της ευθυγραμμίας κεντρώνεται το θεοδόλιχο και σκοπεύεται το άλλο άκρο (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

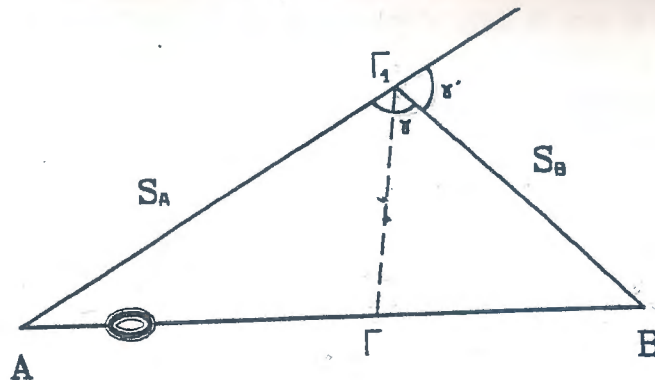
Πακτώνεται η οριζόντια κίνηση του οργάνου και στρέφεται το τηλεσκόπιο περί τον δευτερεύοντα άξονα, ορίζοντας με την σκοπευτική γραμμή του σημεία του εδάφους που ανήκουν στην ευθυγραμμία. Η εργασία επαναλαμβάνεται σε δεύτερη θέση τηλεσκοπίου ορίζοντας πάλι τα ίδια ενδιάμεσα σημεία. Αν υπάρχει διαφορά στη θέση των σημείων (από πρώτη και δεύτερη θέση τηλεσκοπίου) λόγω πιθανών σφαλμάτων του θεοδολίχου, είναι προφανές ότι το μέσον της απόστασης των θέσεων των αντίστοιχων σημείων είναι και οι ζητούμενες θέσεις των ενδιάμεσων σημείων της ευθυγραμμίας.

Ανάλογη εργασία γίνεται και για την επέκταση μιάς ευθυγραμμίας.

Ο έλεγχος της χάραξης των σημείων της ευθυγραμμίας γίνεται με αναγνώσεις του οριζοντίου δίσκου αντίστοιχα.

2.1.2. Χάραξη - πύκνωση ευθυγραμμίας μεταξύ σημείων μη αμοιβαία ορατών

Στην περίπτωση που τα άκρα της ευθυγραμμίας δεν είναι αμοιβαία ορατά ή είναι απρόσιτα σημεία, τότε εργαζόμαστε ως εξής (Σχ. 5):



Σχήμα 5

Τοποθετείται το θεοδόλιχο σε σημείο Γ_1 που εκλέγεται κοντά στην ευθυγραμμία AB και μετρείται η γωνία γ .

Αν μπορούν να μετρηθούν οι αποστάσεις S_A και S_B , τότε το σημείο Γ της AB ορίζεται στη διχοτόμο της γωνίας $A\Gamma_1B$ και σε απόσταση $\Gamma_1\Gamma$ που δίνεται από τη σχέση (2.1):

$$\Gamma_1\Gamma = \frac{2S_A S_B \cos \frac{\gamma}{2}}{S_A + S_B} \quad (2.1)$$

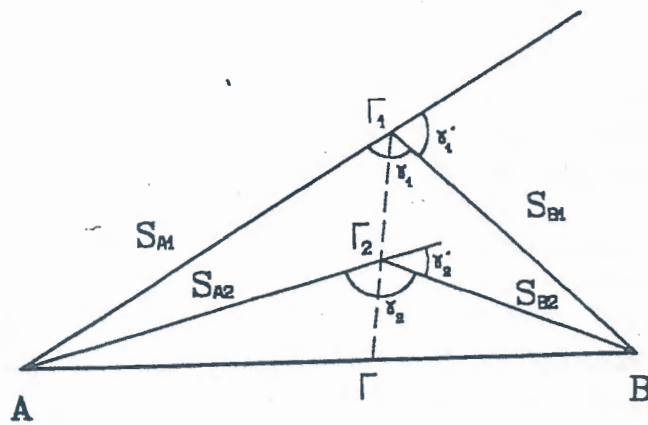
Οι αποστάσεις S_A και S_B μπορούν να μετρηθούν με E.D.M. ή Ταχυμετρικά. Ενδεικτικά αναφέρεται, για να γίνει αντιληπτή η ακρίβεια που επιτυγχάνεται με αυτή τη διαδικασία, ότι για $\sigma_{S_A} = \sigma_{S_B} = \pm 0.20 \text{ m}$, $S_A = S_B$ και $\gamma = 195^\circ$, τότε $\sigma_{\Gamma_1\Gamma} = \pm 0.20 \text{ mm}$.

Αν το σημείο Γ_1 εκλεγεί πολύ κοντά στην AB (γωνία γ' πολύ μικρή), μπορεί να θεωρηθεί χωρίς μεγάλο σφάλμα ότι: $S_{AB} = S_A + S_B$ και το ύψος $\Gamma_1\Gamma$ υπολογίζεται από τη σχέση (2.2):

$$\Gamma_1\Gamma = \frac{S_A S_B}{S_A + S_B} \sin \gamma$$

$$\Gamma_1\Gamma = \frac{S_A S_B}{S_A + S_B} \cdot \frac{\gamma'}{\rho} \quad (2.2)$$

Στην περίπτωση που τα σημεία A και B είναι απρόσιτα, εφαρμόζονται οι γνωστές μέθοδοι έμμεσου υπολογισμού μήκους ή μπορεί ακόμη να εργαστούμε και ως εξής (Σχ. 6):



Σχήμα 6

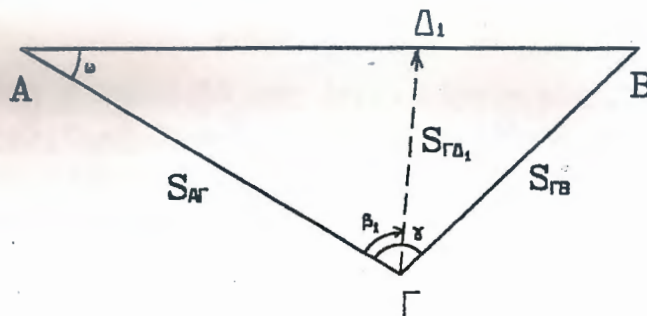
Εκλέγονται δύο σημεία Γ_1 και Γ_2 κοντά στην ευθυγραμμία AB και μετρώνται οι γωνίες γ_1 και γ_2 και η απόσταση $\Gamma_1\Gamma_2$. Σύμφωνα με τη σχέση (2.2) θα έχουμε:

$$\Gamma_1\Gamma = \frac{S_{A_1}S_{B_1}}{S_{A_1} + S_{B_1}} \cdot \frac{\gamma_1'}{\rho} \quad \text{και} \quad \Gamma_2\Gamma = \frac{S_{A_2}S_{B_2}}{S_{A_2} + S_{B_2}} \cdot \frac{\gamma_2'}{\rho}$$

Μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί $S_{A_1} = S_{A_2}$ και $S_{B_1} = S_{B_2}$, άρα $\frac{\Gamma_1\Gamma}{\Gamma_2\Gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_2'}$, οπότε υπολογίζεται το μήκος $\Gamma_2\Gamma$:

$$\begin{aligned} \Gamma_2\Gamma &= \Gamma_1\Gamma - \Gamma_1\Gamma_2 \\ \Gamma_2\Gamma &= \frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} \Gamma_2\Gamma - \Gamma_1\Gamma_2 \\ \Gamma_2\Gamma &= \Gamma_1\Gamma_2 \frac{\gamma_2'}{\gamma_1' - \gamma_2'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Αν ληφθούν υπόψη οι δυνατότητες των σύγχρονων γεωδαιτικών οργάνων, για τη χάραξη μιάς ευθυγραμμίας μπορεί να εφαρμοστεί η μεθοδολογία που αναπτύσσεται παρακάτω και δίνεται σχηματικά στο Σχ. 7, ανεξάρτητα από την περίπτωση (προσιτά ή απρόσιτα άκρα):



Σχήμα 7

- Επιλέγεται, ως «στάση οργάνου», ένα σημείο Γ από το οποίο φαίνονται τα δύο άκρα της προς χάραξη ευθυγραμμίας Α και Β.
- Από το Γ μετρώνται όλα τα απαραίτητα στοιχεία για να προκύψουν τα οριζόντια μήκη (ή τα ανηγμένα στη σφαίρα αν είναι αναγκαίο) S_{AG} και S_{GB} καθώς και η οριζόντια γωνία γ .
- Στην περίπτωση που τα σημεία Α και Β έχουν γνωστές συντεταγμένες σε κάποιο σύστημα αναφοράς, προσδιορίζονται οι συντεταγμένες του σημείου Γ εφαρμόζοντας εμπροσθοτομία με πλευρές, ενώ παράλληλα υπάρχει έλεγχος με την επιπλέον μέτρηση που έχει γίνει της γωνίας γ . Αν τα Α και Β δεν έχουν ορισμένες συντεταγμένες, επιλύεται το τρίγωνο ΑΒΓ, υπολογίζεται το μήκος S_{AB} και δίνονται στα Α και Β συντεταγμένες σε αυθαίρετο σύστημα αναφοράς (π.χ. $X_A = 0.00$, $Y_A = 0.00$ και $X_B = S_{AB}$, $Y_B = 0.00$), οπότε προσδιορίζονται πάλι οι συντεταγμένες του Γ στο ίδιο σύστημα.
- Με γνωστές σε ενιαίο σύστημα αναφοράς τις συντεταγμένες των Α, Β και Γ, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν το μήκος S_{AG} (και το S_{BG}) και οι γωνίες διεύθυνσης a_{AB} και a_{AG} , καθώς και η γωνία ω (Σχ. 7): $\omega = a_{AG} - a_{AB}$.
- Τελικά, σε κάθε τυχαίο σημείο Δ_i , που ανήκει στην προς χάραξη ευθυγραμμία ΑΒ, αντιστοιχεί η πολική (οριζόντια) γωνία β_i και η οριζόντια απόσταση $S_{G\Delta_i}$, όπου:

$$S_{G\Delta_i} = \frac{\sin \omega \cdot S_{AG}}{\sin(\omega + \beta_i)} \quad (2.4)$$

Ετσι, το κάθε ένα από τα σημεία Δ_i , χαράζεται από το σημείο Γ, βάσει των πολικών του συντεταγμένων (β_i , $S_{G\Delta_i}$) [οι διαδικασίες χάραξης οριζόντιας γωνίας αναφέρονται στα επόμενα].

- Είναι εύκολο να υπολογιστούν και οι καρτεσιανές συντεταγμένες του τυχαίου σημείου Δ_i , στο ίδιο σύστημα αναφοράς με αυτό των Α, Β και Γ:

$$X_{\Delta_i} = X_G + S_{G\Delta_i} \cdot \sin a_{G\Delta_i} \quad (2.5\alpha)$$

$$Y_{\Delta_i} = Y_G + S_{G\Delta_i} \cdot \cos a_{G\Delta_i} \quad (2.5\beta)$$

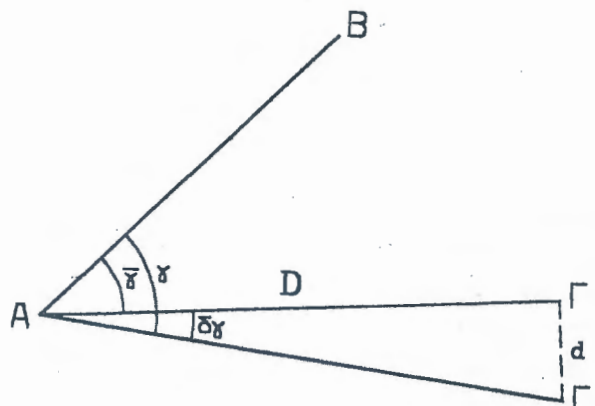
όπου: $a_{G\Delta_i} = a_{AG} + \beta_i + 200 - \varepsilon \cdot 400$

2.2. Χάραξη γωνίας

Αν η γωνία που θέλουμε να χαράξουμε είναι ορθή, οι αποστάσεις είναι μικρές και δεν υπάρχει μεγάλη κλίση, τότε η χάραξη της γωνίας μπορεί να γίνει με ορθόγωνο, εφόσον μας ικανοποιεί η ακρίβεια του.

Η χάραξη μίας οποιασδήποτε γωνίας γίνεται με θεοδολίχο, κατά τα γνωστά, σε δύο θέσεις τηλεσκοπίου ή σε αρκετές περιόδους για μεγαλύτερη ακρίβεια (π.χ. σήραγγες).

Στην περίπτωση που η προς χάραξη γωνία δίνεται με ακρίβεια μεγαλύτερη από αυτή της απόδοσης του θεοδολίχου που διατίθεται, καθώς και όταν η γωνία χαράσσεται μετρώντας την σε πολλές περιόδους, τότε η $\bar{\gamma} \neq \gamma$ (όπου γ = η ζητούμενη γωνία).



Σχήμα 8

Εστω γ η προς χάραξη γωνία (Σχ. 8). Το θεοδόλιχο κεντρώνεται στην κορυφή A της γωνίας και σκοπεύεται το σημείο B (η AB είναι μία από τις πλευρές της ζητούμενης γωνίας). Κατόπιν το τηλεσκόπιο στρέφεται και ορίζεται το σημείο Γ'. Η γωνία ΒΑΓ' μετριέται αρκετές φορές και είναι ΒΑΓ' = $\bar{\gamma}$ όπου $\bar{\gamma}$ είναι:

- περίπου η ζητούμενη γωνία για θεοδόλιχο μικρότερης απόδοσης
- η μέση τιμή της γωνίας που χαραχτήκε.

Γενικά ισχύει $\bar{\gamma} \neq \gamma$ επομένως η πλευρά ΑΓ πρέπει να στραφεί κατά $\delta\gamma = \gamma - \bar{\gamma}$. Υπολογίζεται η απόσταση ΓΓ' = d, κάθετη στην ΑΓ':

$$\boxed{d = D \cdot \tan \delta\gamma}$$

$$d = D \frac{\delta\gamma^{cc}}{\rho^{cc}} \quad (2.6)$$

Επί της καθέτου ΓΓ' που χαράσσεται με ορθόγωνο ή θεοδόλιχο, μετράμε την απόσταση ΓΓ' = d, ορίζοντας το σημείο Γ και επομένως την ζητούμενη γωνία.

Για πολύ μικρή τιμή του $d \approx 2 - 3$ cm, μπορεί να οριστεί το σημείο Γ και χωρίς χάραξη της καθετότητας.

Παράδειγμα:

$$\gamma = 125.3773^g$$

Βρέθηκε	$\gamma = 125.3681^g$
Αρα	$\delta\gamma = 92^{cc}$
Εκλέγεται	$D = 100$ m
Αρα	$d = 0.014$ m

2.3. Χάραξη καμπυλών

Κατά την εφαρμογή κυρίως των μελετών οδοποιίας και των μελετών σιδηρογραμμικών γραμμών, σηράγγων κ.λ.π., η χάραξη καμπυλών είναι μια ενδιαφέρουσα εργασία για τον Τοπογράφο Μηχανικό.

Οι καμπύλες που χρησιμοποιούνται, ανήκουν σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Στις κυκλικές καμπύλες (σε οριζόντιο ή κατακόρυφο επίπεδο).
- Στις κλωθοειδείς καμπύλες.

Οι κυκλικές καμπύλες είναι τόξα περιφερειών κύκλων, επομένως έχουν σταθερή ακτίνα καμπυλότητας, ενώ οι κλωθοειδείς είναι καμπύλες των οποίων οι καμπυλότητα μεταβάλλεται ανάλογα προς το μήκος τους (μετρημένο από σταθερό σημείο).

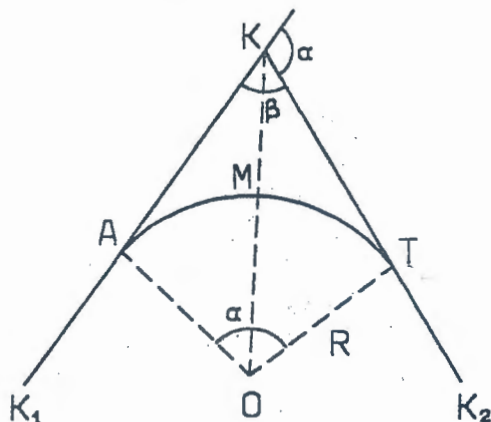
2.4. Κυκλικές Καμπύλες σε οριζόντιο επίπεδο

Στην κατηγορία των κυκλικών καμπυλών ανήκουν οι απλές, οι σύνθετες και οι αντίρροπες καμπύλες.

Εδώ θα αναφερθούμε μόνο στα βασικότερα στοιχεία για τη χάραξη κυκλικών τόξων σε οριζοντιογραφία. Η εκλογή της μεθόδου χάραξης εξαρτάται από την τοποθέτηση του προβλήματος, τα στοιχεία που δίδονται, την τοπογραφία του εδάφους κ.λ.π.

2.4.1. Απλή Κυκλική Καμπύλη

Η απλή κυκλική καμπύλη (Σχ. 9) αποτελείται από ένα μόνο τόξο κύκλου που στα άκρα του εφάπτεται με δύο (τεμνόμενες) ευθυγραμμίες.



Σχήμα 9

Οι ευθυγραμμίες K_1K και K_2K συνδέονται με ένα κυκλικό τόξο ακτίνας R (Σχ. 9). Τα σημεία K_1 , K , K_2 μπορεί να είναι και κορυφές μιάς οδευσης. Τα σημεία K , A , T και M είναι:

K = το σημείο τομής των ευθυγραμμιών.

A και T = τα σημεία επαφής του κυκλικού τόξου με τις ευθυγραμμίες (αρχή και τέλος αντίστοιχα του τόξου).

M = το μέσον του κυκλικού τόξου.

Τα σημεία **A**, **M** και **T** είναι τα λεγόμενα **πρωτεύοντα σημεία** του κυκλικού τόξου.

Η γωνία α στο σημείο **K** λέγεται **γωνία εκτροπής** και είναι ίση με την επίκεντρη γωνία AOT , όπου **O** είναι το κέντρο του τόξου. Είναι δε:

$$\alpha = 200^g - \beta \quad (2.7)$$

Οι αποστάσεις **KA** και **KT** είναι τα μήκη επί των εφαπτομένων και ισχύει:

$$KA = KT = R \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad (2.8)$$

Το μήκος του κυκλικού τόξου **AT** υπολογίζεται από τη σχέση:

$$AT = R \cdot \alpha \quad (\text{η γωνία } \alpha \text{ σε rad}) \quad (2.9)$$

Η χορδή **AT** του κυκλικού τόξου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$AT = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \quad (2.10)$$

Η απόσταση της κορυφής **K** από το κέντρο του κύκλου είναι:

$$OK = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad (2.11)$$

Η χάραξη ενός κυκλικού τόξου, αφού υπολογιστούν τα στοιχεία χάραξης, αρχίζει από την υλοποίηση στο έδαφος:

- των πρωτευόντων σημείων
- των δευτερευόντων σημείων
- άλλων χαρακτηριστικών σημείων, αν υπάρχει ανάγκη.

2.4.1.1. Χάραξη πρωτευόντων σημείων τόξου κύκλου.

Στις περισσότερες περιπτώσεις χάραξης κυκλικού τόξου γνωστά στοιχεία από την μελέτη του έργου είναι η **ακτίνα R** του τόξου, **οι εφαπτόμενες** και η **κορυφή K** (π.χ. δύο διαδοχικές πλευρές μιάς όδευσης με κοινή κορυφή το **K**).

Για την χάραξη των πρωτευόντων σημείων είναι αναγκαίο να υπολογιστούν μήκη και γωνίες που εξαρτώνται κάθε φορά από τα σημεία που θα χρησιμοποιηθούν σαν στάσεις οργάνου.

Βασικά μήκη και γωνίες για τα πρωτεύοντα σημεία ενός κυκλικού τόξου είναι τα **KA**, **KT**, **KM** και α , β αντίστοιχα.

⇒ Προσδιορισμός των A και T (Σχ. 10)

Υπολογίζεται η γωνία εκτροπής α (η γωνία β μετριέται στο έδαφος για έλεγχο). Πάνω στις εφαπτόμενες, με αρχή το K , μετράμε τις αποστάσεις KA και KT ορίζοντας τα A και T αντίστοιχα ($KA = KT = R \tan \frac{\alpha}{2}$).

⇒ Προσδιορισμός του μέσου M του κυκλικού τόξου (Σχ. 10)

Η θέση του σημείου M μπορεί να προσδιοριστεί με διάφορους τρόπους.

- Πάνω στη διχοτόμο KO της γωνίας AKT μετράμε το μήκος KM :

$$KM = KO - R$$

$$KM = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} - R$$

$$KM = R \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) \quad (2.12)$$

- Στο μέσο B της χορδής AT φέρνουμε κάθετη, μετρώντας πάνω σ' αυτήν το μήκος BM :

$$BM = R - OB$$

$$BM = R - R \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$BM = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2.13)$$

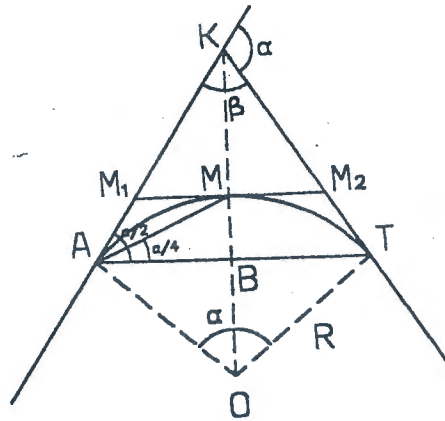
- Με πολικές συντεταγμένες από το σημείο A . Με κέντρο το A και αρχή την KA χαράζουμε γωνία ίση με $\frac{\alpha}{4}$ και πάνω στη διεύθυνση αυτή μετράμε μήκος AM :

$$AM = 2R \sin \frac{\alpha}{4} \quad (2.14)$$

Για επαλήθευση, η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί από το σημείο T .

- Φέρνουμε την εφαπτόμενη M_1M_2 και ορίζουμε το μέσον της M . Τα σημεία M_1 και M_2 ορίζονται επί των εφαπτομένων μετρώντας από τα σημεία A και T αντίστοιχα τα μήκη AM_1 και TM_2 :

$$AM_1 = M_1M = MM_2 = M_2T = R \tan \frac{\alpha}{4} \quad (2.15)$$



Σχήμα 10

2.4.1.2. Χάραξη Δευτερευόντων Σημείων κυκλικού τόξου

Τα δευτερεύοντα σημεία χαράσσονται με βάση την εφαπτόμενη KA (ή KT):

- Με ορθογώνιες συντεταγμένες (Σχ. 11)

$$X = R \sin \omega \quad (2.16\alpha)$$

$$Y = R(1 - \cos \omega) \quad (2.16\beta)$$

$$\text{ή} \quad Y = R - \sqrt{R^2 - X^2} \quad (2.16\gamma)$$

$$\text{ή} \quad Y = \frac{X^2}{2R} + \frac{X^4}{8R^3} + \frac{X^6}{16R^5} + \dots \quad (2.16\delta)$$

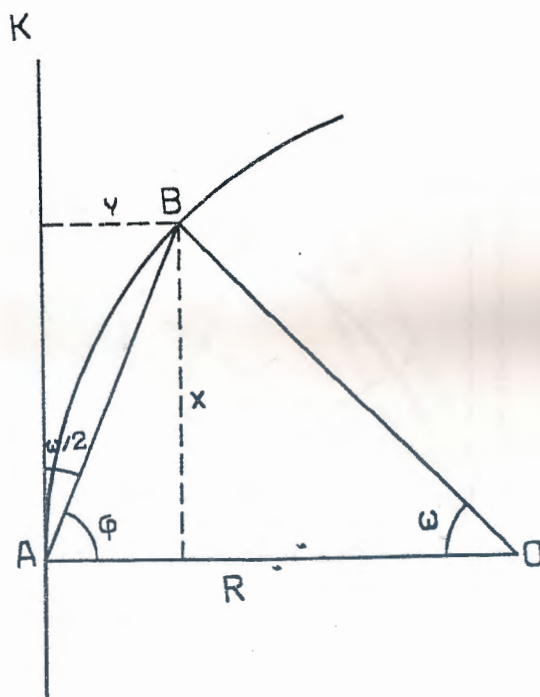
(αναπτύσσοντας την σχέση 2.14γ σε σειρά)

γνωρίζοντας την επίκεντρη γωνία ω που αντιστοιχεί στο προς χάραξη σημείο B.

- Με πολικές συντεταγμένες (Σχ. 11)

Γνωρίζοντας την επίκεντρη γωνία ω που αντιστοιχεί στο προς χάραξη σημείο B, με κορυφή το A και άξονα την AK χαράζεται η πολική γωνία $\frac{\omega}{2}$ και λαμβάνεται οριζόντια απόσταση AB η οποία υπολογίζεται από το τρίγωνο ABO:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \omega} &= \frac{R}{\sin \phi} = \frac{R}{\sin(100^\circ - \frac{\omega}{2})} = \frac{R}{\cos \frac{\omega}{2}} \\ \frac{AB}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} &= \frac{R}{\cos \frac{\omega}{2}} \\ AB &= 2R \sin \frac{\omega}{2} \quad (2.17) \end{aligned}$$



Σχήμα 11

Και στις δύο περιπτώσεις (ορθογώνιες και πολικές συντεταγμένες), η επίκεντρη γωνία ω εκλέγεται ουσιαστικά από τον αριθμό των δευτερευάντων (ενδιαμέσων) σημείων που θέλουμε να τοποθετήσουμε μεταξύ των A, M και T. Έτσι, αν π.χ. θέλουμε να παρεμβάλουμε 3 σημεία μεταξύ των A και M ώστε $A1 = 12 = 23 = 3M$, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω θα είναι ίση με

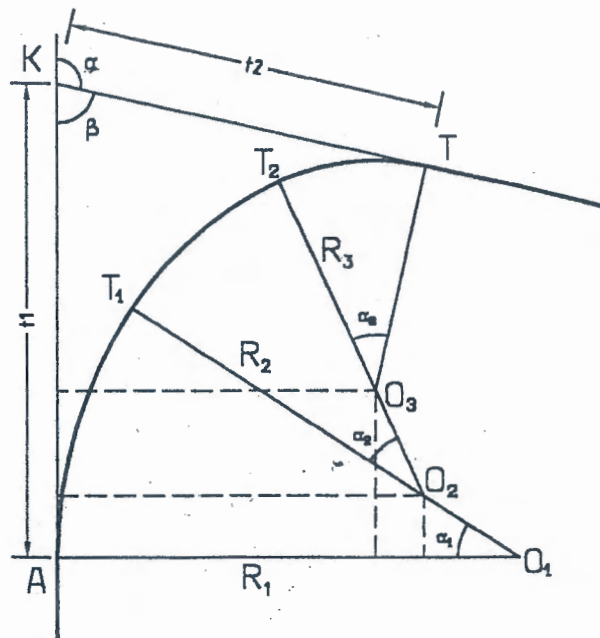
$$\omega = \frac{\alpha}{8}$$

2.4.2. Σύνθετη Κυκλική Καμπύλη (ΣΚΚ)

Η ΣΚΚ αποτελείται από 2 ή περισσότερες διαδοχικές απλές καμπύλες, με διαφορετικές ακτίνες αλλά με ομόθετες καμπυλότητες (Σχ. 12). Οι καμπύλες αυτές συνδέονται μεταξύ τους έχοντας κοινή εφαπτομένη στα σημεία επαφής του T_i

2.4.2.1. Υπολογισμός στοιχείων χάραξης ΣΚΚ

Σε μια ΣΚΚ που αποτελείται από i κυκλικά τόξα ακτίνων R_1, R_2, \dots, R_i , θα ισχύουν πάντα μόνο 3 μαθηματικές συνθήκες που προκύπτουν από το κλειστό πολύγωνο που αποτελούν οι εφαπτόμενες AK και KT, η αρχική ακτίνα R_1 , η τελική ακτίνα R_i και τα ευθύγραμμα τμήματα $O_1O_2 = R_1 - R_2$, $O_2O_3 = R_2 - R_3$, $O_{i-1}O_i = R_{i-1} - R_i$.



Σχήμα 12

Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του πολυγώνου αυτού είναι:

$$\sum \gammaωνιων = (n-2)200^g = \alpha_1 + (200^g + \alpha_2) + (200^g + \alpha_3) + \dots + (200^g + \alpha_i) + 100^g + \beta + 100^g$$

$$(n-2)200^g = (n-3)200^g + \beta + \sum \alpha_i$$

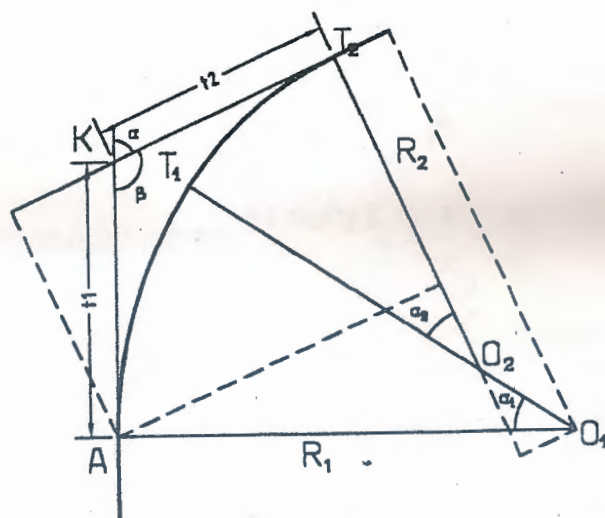
$$\sum \alpha_i = 200^g - \beta = \alpha \quad (1^{\text{η}} \text{ συνθήκη}) \quad (2.18)$$

Οι επόμενες 2 συνθήκες δίνονται από τις ορθές προβολές των πλευρών του κλειστού πολυγώνου προς δύο τυχαίες διευθύνσεις, π.χ. την εφαπτόμενη $KA = t_1$ και την κάθετη σ' αυτήν ακτίνα R_1 . Ισχύει:

$$t_1 = (R_1 - R_2) \sin \alpha_1 + (R_2 - R_3) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + R_i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i) + t_2 \cos \beta \quad (2^{\text{η}} \text{ συνθήκη}) \quad (2.19)$$

$$R_1 = (R_1 - R_2) \cos \alpha_1 + (R_2 - R_3) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots + R_i \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i) + t_2 \sin \beta \quad (3^{\text{η}} \text{ συνθήκη}) \quad (2.20)$$

Από την επίλυση των παραπάνω τριών εξισώσεων συνθήκης προσδιορίζονται μόνο τρία από τα στοιχεία χάραξης μιάς ΣΚΚ. Τα υπόλοιπα θα πρέπει να δίνονται από τη μελέτη.



Σχήμα 13

Στην περίπτωση του σχήματος 13, την ΣΚΚ αποτελούν 2 κυκλικά τόξα. Αν θεωρηθεί ορθογώνιο σύστημα αναφοράς αυτό που ορίζεται από την εφαπτόμενη KT_2 και την ακτίνα O_2T_2 , οι τρεις συνθήκες του κλειστού πολυγώνου, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.18), (2.19) και (2.20), έχουν την μορφή:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 200^g - \beta$$

$$t_2 = t_1 \cos \beta + R_1 \sin \beta - (R_1 - R_2) \sin \alpha_2 \quad (2.21)$$

$$R_2 = t_1 \sin \beta - R_1 \cos \beta - (R_1 - R_2) \cos \alpha_2$$

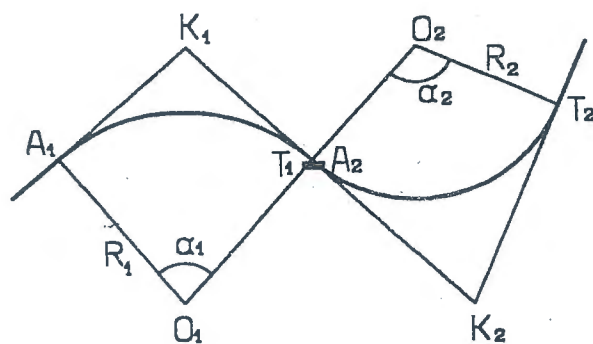
Στις παραπάνω εξισώσεις (2.21), εμφανίζονται 7 άγνωστοι:

- * οι γωνίες $\beta, \alpha_1, \alpha_2$
- * οι εφαπτόμενες t_1, t_2
- * οι ακτίνες R_1, R_2

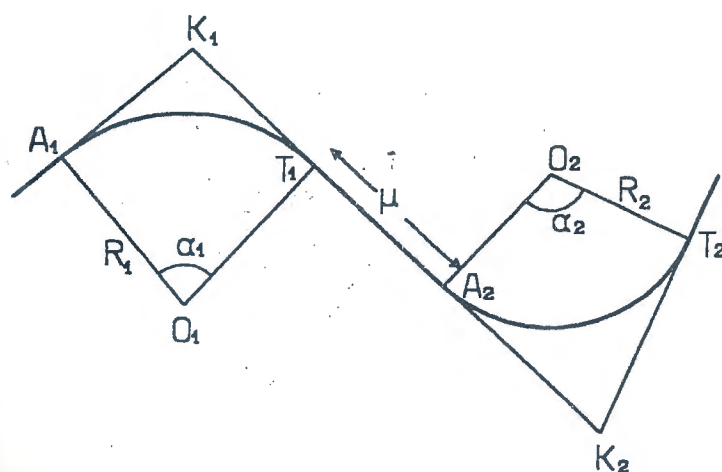
Από τους αγνώστους αυτούς, τρεις μπορούν να υπολογιστούν, ενώ οι υπόλοιποι τέσσερις πρέπει να δίνονται από τη μελέτη (ή να μπορούν να μετρηθούν άμεσα στο ύπαιθρο).

2.4.3. Αντίρροπες Κυκλικές Καμπύλες (ΑΚΚ)

Οι ΑΚΚ αποτελούνται επίσης από διαδοχικές κυκλικές καμπύλες, αλλά με αντίθετες καμπυλότητες. Μπορούν να εφάπτονται στο σημείο $T_1 \equiv A_2$ (Σχ. 14) ή να παρεμβάλλεται μεταξύ τους ευθύγραμμο τμήμα (Σχ. 15).



Σχήμα 14



Σχήμα 15

2.4.3.1. Χάραξη ΑΚΚ

Η χάραξη της ΑΚΚ ξεκινάει με τον προσδιορισμό των πρωτεύοντων σημείων A_1 , M_1 , T_1 και A_2 , M_2 , T_2 . Ο ορισμός και η υλοποίηση τους είναι συνάρτηση των δεδομένων της μελέτης, δηλαδή αν $R_1 = R_2$ ή $R_1 \neq R_2$ ή αν η ΑΚΚ περιλαμβάνει ή όχι ευθύγραμμο τμήμα ($\mu \neq 0$ ή $\mu = 0$ αντίστοιχα).

Η χάραξη ξεκινάει από τον ορισμό της θέσης της κοινής εφαπτομένης K_1K_2 . Αφού οριστούν οι θέσεις των σημείων K_1 και K_2 , μετρίεται η απόσταση K_1K_2 , προσδιορίζονται τα T_1 και A_2 ($K_1K_2 = K_1T_1 + \mu + A_2K_2$) και χαράσσονται οι γωνίες θλάσης β_1 και β_2 . Με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα (παρ. 2.4.1.1. και 2.4.1.2.), υλοποιούνται τα υπόλοιπα πρωτεύοντα και δευτερεύοντα σημεία της ΑΚΚ.

2.5. Κλωθοειδής Καμπύλη

2.5.1. Μαθηματική εξίσωση κλωθοειδούς καμπύλης

Η κλωθοειδής είναι μεταβατική καμπύλη της οποίας η καμπυλότητα μεταβάλλεται ανάλογα με τη μήκος της, που μετρίεται από κάποιο σταθερό σημείο. Η γενική της εξίσωση έχει τη μορφή:

$$L = \alpha^2 \frac{1}{R} \quad \text{ή} \quad L \cdot R = \alpha^2 \quad (2.22)$$

όπου: $\alpha^2 = \text{συντελεστής αναλογίας}$

Η σχέση αυτή είναι ανεξάρτητη συστήματος αναφοράς. Σαν σταθερά λαμβάνεται το α^2 προκειμένου οι μονάδες να είναι ίδιες. Κάθε κλωθοειδής χαρακτηρίζεται από την παράμετρο α , όπως ακριβώς κάθε κύκλος χαρακτηρίζεται από την ακτίνα R .

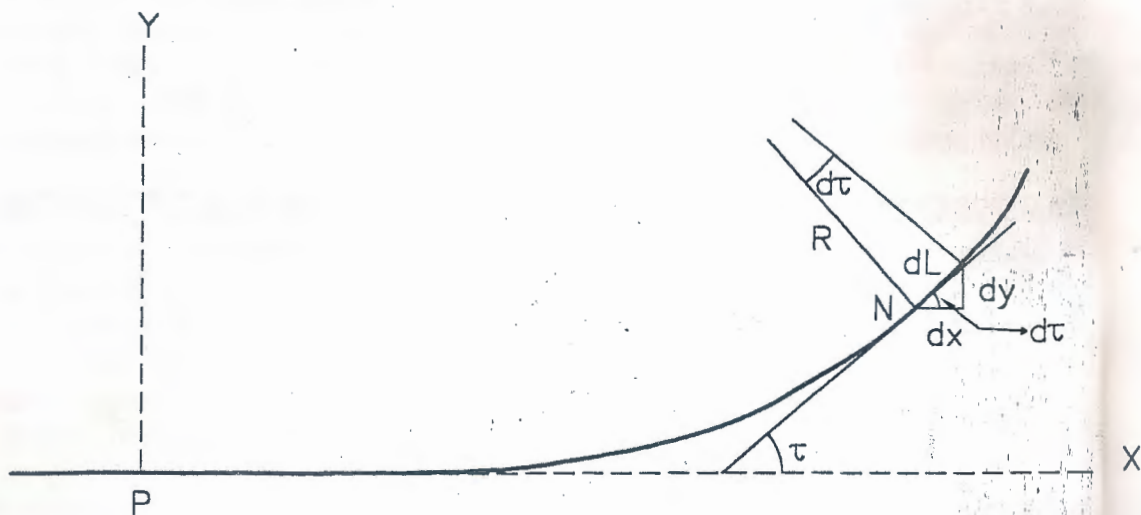
Ο ορισμός της καμπυλότητας σαν:
$$K = \frac{1}{R} = \frac{d\tau}{dL} \quad (2.23)$$

δίνει τη σχέση που συνδέει το μήκος με τη γωνία στροφής της εφαπτομένης στη κλωθοειδή. Στο Σχ. 16 φαίνεται η γεωμετρική παράσταση της σχέσης:

$$dL = R \cdot d\tau \quad (2.24)$$

για μοναδιαία αύξηση dL του μήκους της καμπύλης. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.22) την (2.24), έχουμε:

$$L = \alpha^2 \frac{d\tau}{dL} \Rightarrow L \cdot dL = \alpha^2 \cdot d\tau \quad (2.25)$$



Σχήμα 16

Η (2.25) παριστάνει την εξίσωση της κλωθοειδούς σε μορφή παραγώγου. Ολοκληρώνοντας την (2.25), λαμβάνεται το μήκος της καμπύλης σαν συνάρτηση της γωνίας στροφής της εφαπτομένης:

$$\frac{L^2}{2} = \alpha^2 \cdot \tau + c \quad (2.26)$$

όπου: $c = \eta$ σταθερά του ολοκληρώματος

Επειδή για $L = 0$ είναι επίσης και $\tau = 0$, από την (2.26) προκύπτει ότι και $c = 0$, άρα:

$$L^2 = 2\alpha^2 \cdot \tau \quad (2.27)$$

$$\tau = \frac{L^2}{2\alpha^2} = \frac{L}{2R} \quad (2.28)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.28) τα διάφορα μεγέθη, προκύπτουν απλές και ακριβείς σχέσεις που συνδέουν μεταξύ τους τα πρωτεύοντα στοιχεία R , L και τ της κλωθοειδούς:

$$\alpha^2 = LR = 2\tau R^2 = \frac{L^2}{2\tau} \quad (2.29)$$

$$L = \frac{\alpha^2}{R} = 2\tau R = \alpha\sqrt{2\tau} \quad (2.30)$$

$$R = \frac{\alpha^2}{L} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\tau}} = \frac{L}{2\tau} \quad (2.31)$$

$$\tau = \frac{L}{2R} = \frac{\alpha^2}{2R^2} = \frac{L^2}{2\alpha^2} \quad (2.32)$$

2.5.2. Ορθογώνιες Συντεταγμένες των σημείων της Κλωθοειδούς

Από το μοναδιαίο τρίγωνο του Σχ. 16, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \tau \cdot dL \\ dy &= \sin \tau \cdot dL \end{aligned} \quad (2.33)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις της μεταβλητής L ή της τ .

Για μεν την πρώτη περίπτωση έχουμε:

$$dx = \cos \tau \cdot dL = \cos \frac{L^2}{2\alpha^2} dL \quad (2.34)$$

$$dy = \sin \tau \cdot dL = \sin \frac{L^2}{2\alpha^2} dL$$

Ενώ για τη δεύτερη περίπτωση έχουμε:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \tau \cdot dL = \alpha\sqrt{2} \cdot \cos \tau \cdot d\sqrt{\tau} = \frac{\alpha \cos \tau}{\sqrt{2} \sqrt{\tau}} d\tau \\ dy &= \sin \tau \cdot dL = \alpha\sqrt{2} \cdot \sin \tau \cdot d\sqrt{\tau} = \frac{\alpha \sin \tau}{\sqrt{2} \sqrt{\tau}} d\tau \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις (2.34) και (2.35), μετά από προσεγγίσεις (αναπτύσσοντας σε σειρά τον κάθε όρο και ολοκληρώνοντας χωριστά τον κάθε ένα απ' αυτούς), προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

⇒ Ως προς την μεταβλητή L :

$$\begin{aligned} X &= L - \frac{L^5}{40\alpha^4} + \frac{L^9}{345\alpha^2} - \dots \\ Y &= \frac{L^3}{6\alpha^2} - \frac{L^7}{336\alpha^6} + \frac{L^{11}}{42240\alpha^{10}} - \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

⇒ Ως προς την μεταβλητή τ :

$$\begin{aligned} X &= \alpha\sqrt{2}\tau \left(1 - \frac{\tau^2}{10} + \frac{\tau^4}{216} - \frac{\tau^6}{9360} + \dots \right) \\ Y &= \alpha\sqrt{2}\tau \left(\frac{\tau}{3} - \frac{\tau^3}{42} + \frac{\tau^5}{1320} - \frac{\tau^7}{75600} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.5.3. Η κλωθοειδής σαν μεταβατική καμπύλη μεταξύ ευθείας και κυκλικού τόξου

Οι γεωμετρικές συνθήκες απαιτούν από την οδική αρτηρία που αποτελείται από κυκλικές καμπύλες και ευθύγραμμα τμήματα την τήρηση της συνθήκης ότι η μεταβολή της καμπυλότητας σε όλο το μήκος να είναι ομαλή και συνεχής. Επίσης, στα σημεία επαφής οι συνορεύουσες καμπύλες πρέπει να έχουν κοινή εφαπτομένη και κοινό κέντρο καμπυλότητας. Η κλωθοειδής καμπύλη πληροί όλες τις παραπάνω προϋποθέσεις, γι' αυτά και χρησιμοποιείται σαν μεταβατική καμπύλη μεταξύ ευθείας και κυκλικού τόξου.

Στο σημείο επαφής P (Σχ. 17) η ακτίνα καμπυλότητας R της κλωθοειδούς απειρίζεται, άρα στο σημείο αυτό η κλωθοειδής ταυτίζεται με την ευθεία. Η κλωθοειδής προεκτείνεται ως το σημείο A , όπου η ακτίνα καμπυλότητας της ταυτίζεται με την ακτίνα καμπυλότητας του αμέσως επόμενου κυκλικού τόξου. Στο σημείο A η κλωθοειδής και το κυκλικό τόξο έχουν κοινή εφαπτομένη και κοινό κέντρο καμπυλότητας. Έτσι δεν διαταράσσεται η συνθήκη της ομαλούς και συνεχούς μεταβολής της καμπυλότητας.

Λαμβάνοντας το σημείο P σαν αρχή ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς και την εφαπτομένη στο P σαν ημιάξονα των X , θα έχουμε για τυχαίο σημείο, άρα και για το σημείο A , τις συν/νες X και Y που δίνονται από τις σχέσεις (2.36). Ένα μέρος των στοιχείων που αντιπροσωπεύουν την κλωθοειδή υπολογίζονται εύκολα από τις σχέσεις (2.29) έως (2.32), ενώ τα υπόλοιπα εύκολα προκύπτουν από το Σχ. 17.

- Τετμημένη του κέντρου καμπυλότητας O : $X_O = X_A - R \sin \tau$ (2.38)

- Τεταγμένη του κέντρου καμπυλότητας O : $Y_O = Y_A + R \cos \tau$ (2.39)

- Εκτροπή ε : $\varepsilon = Y_A - R(1 - \cos \tau)$ (2.40)

- V : $V = Y_A \tan \tau$ (2.41)

- T : $T = X_A + Y_A \tan \tau$ (2.42)

- U : $U = Y_A \cot \tau$ (2.43)

- T_D : $T_D = X_A - Y_A \cot \tau$ (2.44)

- N : $N = \frac{Y_A}{\cos \tau}$ (2.45)

Οι πολικές συντεταγμένες τυχαίου σημείου i της κλωθοειδούς δίνονται από τις σχέσεις:

$$C = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{Y_i}{X_i} \quad (2.46)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A.L. Allan, J.R. Hollwey, J.H.B. Maynes, A. Amin: *«Practical Field Surveying and Computations»* / Heinemann, London, 1980.
2. Ο. Αραμπατζή: *«Γενικές Αρχές Χαράξεων Τεχνικών Εργων»* / Ενότητα στο τεύχος: *«Σημειώσεις Ειδικών Θεμάτων Γεωδαισίας»*, Αθήνα, Μάρτιος 1994.
3. Ο. Αραμπατζή: *«Χαράξεις Καμπυλών»* / Ενότητα στο τεύχος: *«Σημειώσεις Ειδικών Θεμάτων Γεωδαισίας»*, Αθήνα, Μάρτιος 1994.
4. A. Bannister, S. Raymond: *«Surveying - 4th edition»* / Pitman, London.
5. W. Irvine: *«Surveying for Construction - 2nd edition»* / Mc Graw - Hill, U.K., 1980.
6. Χ. Μπιλλήρης: *«Σημειώσεις Τεχνικής Γεωδαισίας»* / Εργ. Γεν. Γεωδαισίας, 1981.
7. Δ. Σταθάς, Μ. Κούλη-Κίτσου: *«Στοιχεία Χαράξεων»* / Αθήνα, Μάιος 1990.
8. Β. Ψαριανός: *«Σχεδιασμός και Εφαρμογή Συγκοινωνιακών Εργων - Σημειώσεις»* / Αθήνα, 1992