



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ (Τ.Ε.Ι.)
ΑΘΗΝΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2010 - 2011

11 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Λόγω της γραμμικότητας των εξισώσεων παρατήρησης στα χωροσταθμικά δίκτυα η λύση μπορεί να δοθεί είτε
 - α) με τη γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές τιμές για τις άγνωστες, είτε
 - β) με την ειδική περίπτωση κατευθείαν από τις εξισώσεις χωρίς τη χρήση των προσεγγιστικών.

α) Λύση με τη γενική περίπτωση επίλυσης

i. Το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων είναι:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta \hat{H}_1 \\ \delta \hat{H}_3 \end{bmatrix}$$

Με τη χρήση των προσεγγιστικών υψομέτρων μπορούμε να βρούμε τις προσεγγιστικές τιμές των παρατηρήσεων:

$$\mathbf{y}^o = \begin{bmatrix} \Delta H_{43}^o \\ \Delta H_{23}^o \\ \Delta H_{13}^o \\ \Delta H_{14}^o \\ \Delta H_{12}^o \\ \Delta H_{15}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_3^o - H_4 \\ H_3^o - H_2 \\ H_3^o - H_1^o \\ H_4 - H_1^o \\ H_2 - H_1^o \\ H_5 - H_1^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102.572 \\ -225.823 \\ -69.500 \\ -172.072 \\ 156.323 \\ -121.940 \end{bmatrix} \text{ (m)}$$

Από τις εξισώσεις παρατήρησης και τις προσεγγιστικές παρατηρήσεις είναι δυνατός ο υπολογισμός του διανύσματος \mathbf{b} των ανηγμένων παρατηρήσεων, καθώς επίσης και του πίνακα σχεδιασμού \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.7 \\ 1.3 \\ -1.5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ (cm)}$$

Ο πίνακας των βαρών υπολογίζεται στα χωροσταθμικά δίκτυα με στοιχεία κατά τη διαγώνιο (ασυσχέτιστες παρατηρήσεις) τα αντίστροφα των αποστάσεων των

χωροσταθμίσεων σε km. ($p_{ij} = \frac{1}{L_{ij}(\text{km})}$)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.560852 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.422833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.650618 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.576369 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.316256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.510725 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζεται ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.053968 & -0.650618 \\ -0.650618 & 1.634303 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα των κανονικών εξισώσεων και το διάνυσμα \mathbf{u} δίνονται στη συνέχεια:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.557117 & 0.221789 \\ 0.221789 & 0.700176 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1.867181 \\ 2.263491 \end{bmatrix}$$

Η λύση για τις διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των ζητούμενων υψομέτρων και τα τελικά υψόμετρα είναι:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 2.00 \end{bmatrix} (\text{cm}), \quad \hat{\mathbf{x}}^\alpha = \mathbf{x}^o + \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1^\alpha \\ \hat{H}_3^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425.815 \\ 356.320 \end{bmatrix} (\text{m})$$

β) Λύση με την ειδική περίπτωση. Η λύση χωρίς τη χρήση των προσεγγιστικών δίνεται από την ανάπτυξη του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{bmatrix} \Delta H_{43}^b \\ \Delta H_{23}^b \\ \Delta H_{13}^b \\ \Delta H_{14}^b \\ \Delta H_{12}^b \\ \Delta H_{15}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H_4 \\ -H_2 \\ 0 \\ H_4 \\ H_2 \\ H_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}^b = \mathbf{A} \mathbf{x}^\alpha + \mathbf{c},$$

όπου \mathbf{c} είναι το διάνυσμα των σταθερών όρων (εδώ γνωστών υψομέτρων). Περνώντας τώρα στις εξισώσεις παρατήρησης έχουμε:

$$\mathbf{y}^b - \mathbf{c} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^\alpha + \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^\alpha + \mathbf{v}$$

και αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} 356.32 \\ 356.307 \\ -69.487 \\ -425.815 \\ -425.81 \\ -425.83 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^\alpha + \mathbf{v}$$

Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων και ο πίνακας των βαρών είναι οι ίδιοι με την προηγούμενη λύση. Αλλάζει το διάνυσμα \mathbf{u} , αφού είναι διαφορετικό το διάνυσμα \mathbf{b} .

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 642.78305 \\ 305.29165 \end{bmatrix}$$

Τα τελικά υψόμετρα στα σημεία 1 και 3 δίνονται κατευθείαν:

$$\hat{\mathbf{x}}^\alpha = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 425.815 \\ 356.320 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη λύση είναι μία ειδική περίπτωση της γενικής θεωρώντας τις προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων ίσες με μηδέν ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

ΚΑΙ ΟΙ ΔΥΟ ΛΥΣΕΙΣ ΟΔΗΓΟΥΝ ΣΤΑ ΙΔΙΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ii. Πρέπει να βρεθεί πρώτα το διάνυσμα των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων και στη συνέχεια η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς

α) Εάν λύσουμε με τη χρήση των προσεγγιστικών χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}$$

β) Εάν λύσουμε χωρίς τη χρήση των προσεγγιστικών ισχύει:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^\alpha$$

Η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς δίνεται από την εξίσωση:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n - m} = \frac{2.355468}{6 - 2} = 0.589 \text{cm}^2$$

iii. Δεν εμφανίζεται πρόβλημα στην αντιστροφή του πίνακα των κανονικών εξισώσεων λόγω του ορισμού του συστήματος αναφοράς με την ύπαρξη γνωστών υψομέτρων. Γι' αυτό το λόγο και η ορίζουσα είναι διαφορετική του μηδενός.

iv. Ένα υψόμετρο αρκεί να διατηρηθεί σταθερό (να είναι γνωστό) ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στα χωροσταθμικά δίκτυα η αδυναμία βαθμού είναι 1, οπότε ένα γνωστό υψόμετρο αρκεί για να ορισθεί το σύστημα αναφοράς και να υπάρχει μοναδική λύση για το δίκτυο.

2. Θεωρητική