ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ (Τ.Ε.Ι.)
ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2011 – 2012
16 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1.

*Για να προχωρήσουμε στη λύση καταστρώνουμε το βοηθητικό πίνακα εύρεσης των στοιχείων του **A** και το **b**.*

i	j	$x_j^o - x_P^o$ (m)	$y_j^o - y_P^o$ (m)	S_{Pj}^o (m)	$\mathbf{b} = \mathbf{S^b} - \mathbf{S^o}$ (cm)	$-\dfrac{x_j^o - x_P^o}{S_{Pj}^o}$	$-\dfrac{y_j^o - y_P^o}{S_{Pj}^o}$
P	1	-944.606	-678.858	1163.241	16.2	0.812047	0.583592
P	2	818.749	792.018	1139.141	-7.4	-0.718742	-0.695276
P	3	290.013	-1338.500	1369.558	10.1	-0.211757	0.977323

*Επομένως ο πίνακας **A** και το διάνυσμα **b** υπολογίζονται ως:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.812047 & 0.583592 \\ -0.718742 & -0.695276 \\ -0.211757 & 0.977323 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.2 \\ -7.4 \\ 10.1 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα των βαρών των παρατηρήσεων υπολογίζονται οι μεταβλητότητες των παρατηρήσεων των αποστάσεων βάσει της ακρίβειας του οργάνου.

$$\begin{aligned} \sigma^2_{S_{P1}} &= 0.3^2 + (5 \cdot 10^{-6} \cdot 116340.3)^2 cm^2 &&= 0.42838 cm^2 \\ \sigma^2_{S_{P2}} &= &&= 0.41437 cm^2 \\ \sigma^2_{S_{P3}} &= &&= 0.55899 cm^2 \end{aligned}$$

Η αναλυτική μορφή του πίνακα των βαρών είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.42838} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.41437} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.55899} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.334376 & 0 & 0 \\ 0 & 2.413302 & 0 \\ 0 & 0 & 1.788941 \end{bmatrix}$$

*Ο υπολογισμός του πίνακα των κανονικών εξισώσεων **N** πραγματοποιείται ως εξής:*

$$\mathbf{N} = \mathbf{A^T P A} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$N_{11} = A_{11}^2 \cdot P_{11} + A_{21}^2 \cdot P_{22} + A_{31}^2 \cdot P_{33} = 2.866241$$
$$N_{22} = A_{12}^2 \cdot P_{11} + A_{22}^2 \cdot P_{22} + A_{32}^2 \cdot P_{33} = 3.670377$$
$$N_{12} = N_{21} = A_{11} \cdot A_{12} \cdot P_{11} + A_{21} \cdot A_{22} \cdot P_{22} + A_{31} \cdot A_{32} \cdot P_{33} = 1.942025$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A^T P A} = \begin{bmatrix} 2.866241 & 1.942025 \\ 1.942025 & 3.670377 \end{bmatrix}$$ *και*

$$\mathbf{u} = \mathbf{A^T P b} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$*, όπου*

$$u_1 = A_{11} \cdot P_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot P_{22} \cdot b_2 + A_{31} \cdot P_{33} \cdot b_3 = 39.718610$$
$$u_2 = A_{12} \cdot P_{11} \cdot b_1 + A_{22} \cdot P_{22} \cdot b_2 + A_{32} \cdot P_{33} \cdot b_3 = 52.144745$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A^T P b} = \begin{bmatrix} 39.718610 \\ 52.144745 \end{bmatrix}$$

*Η ορίζουσα του **N** είναι: det(**N**) = 6.748724*

*και είναι διάφορη του μηδενός, οπότε ο πίνακας **N** αντιστρέφεται. Αυτό είναι αναμενόμενο από τη στιγμή που το σύστημα αναφοράς έχει ορισθεί μέσω των γνωστών τριγωνομετρικών 1, 2 και 3.*

Επομένως

$$\mathbf{N^{-1}} = \frac{1}{|det(\mathbf{N})|} \begin{bmatrix} 3.670377 & -1.942025 \\ -1.942025 & 2.866241 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.543862 & -0.287762 \\ -0.287762 & 0.424709 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\hat{x}} = \mathbf{N^{-1} u} = \begin{bmatrix} 6.60 \\ 10.72 \end{bmatrix} (cm)$$

Η τελική λύση για τις συντεταγμένες δίνεται από:

$$\mathbf{\hat{x}^a} = \mathbf{\hat{x}} + \mathbf{x^o} = \begin{bmatrix} 2836.066 \\ 2009.107 \end{bmatrix} \mathrm{m}$$

Η εκτίμηση της εκ των υστέρων (a-posteriori) μεταβλητότητας αναφοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathbf{\hat{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A\hat{x}} = \begin{bmatrix} 16.2 \\ -7.4 \\ 10.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11.62 \\ -12.20 \\ 9.08 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\hat{v}} = \begin{bmatrix} 4.58 \\ 4.8 \\ 1.02 \end{bmatrix} \mathrm{cm}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{\hat{v}^T P \hat{v}}}{\mathrm{n - m}} = \frac{106.4305}{3-2} = 106.4305 \mathrm{cm}^2$$

Ο έλεγχος της αξιοπιστίας του δικτύου σχετίζεται με το μονόπλευρο έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $\mathrm{H_o} : \hat{\sigma}^2 = 1$ *έναντι της εναλλακτικής* $\mathrm{H_a} : \hat{\sigma}^2 > 1$. *Ελέγχεται η ποσότητα:*

$$\hat{\sigma}^2 \leq \mathrm{F}^{\alpha}_{\mathrm{f},\infty} = \mathrm{F}^{0.05}_{1,\infty} = 3.00$$

Επειδή η ανισότητα δεν ικανοποιείται, ισχύει η εναλλακτική έναντι της μηδενικής υπόθεσης και κάποιες από τις παρατηρήσεις του δικτύου μας είναι ύποπτες για την ύπαρξη χονδροειδών σφαλμάτων.

2. *Θεωρητική. Ο παραμετρικός βαθμός ενός κατακόρυφου δικτύου 25 κορυφών είναι N-1 = 24.*

3. *Το δίκτυο έχει συνολικά 20 κορυφές από τις οποίες οι 15 είναι νέες.*
   ι) Το συγκεκριμένο δίκτυο δεν αντιμετωπίζει αδυναμία βαθμού γιατί το σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων έχει ορισθεί πλήρως με τη χρησιμοποίηση 5 γνωστών κορυφών (10 συντεταγμένων με ελάχιστες τις 3).
   ιι) Η στρατηγική του ελέγχου δεν είναι σωστή. Δεσμεύοντας περισσότερες συντεταγμένες από τις ελάχιστες δεν μπορούμε να έχουμε εικόνα για την ποιότητα των παρατηρήσεών μας, αφού η πλεονάζουσα πληροφορία παραμορφώνει το δίκτυο επηρεάζοντας και τις παρατηρήσεις. Για το λόγο αυτόν δεν μπορούμε να είμαστε σιγουροί ότι η αποτυχία του ελέγχου οφείλεται αποκλειστικά σε σφάλματα των παρατηρήσεων, αφού μπορεί να οφείλεται και σε λανθασμένες τιμές των γνωστών σημείων.
   *ιιι) Ο πίνακας **A** έχει τόσες γραμμές όσες οι παρατηρήσεις (30+45=75) και στήλες όσες οι άγνωστοι (15×2=30), άρα **A (75 × 30)**. Ο πίνακας των βαρών είναι ένας διαγώνιος τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων όσες και οι παρατηρήσεις, άρα **P (75×75)**. Το διάνυσμα των ανηγμένων παρατηρήσεων έχει τόσες γραμμές όσες και οι παρατηρήσεις, άρα **b (75×1)**. Τέλος, ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων είναι τετραγωνικός διαστάσεων ίσων με τον αριθμό των αγνώστων παραμέτρων. Επομένως, **N(30×30)**.*