ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ (Τ.Ε.Ι.) ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΕ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΤΕ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2013 – 2014
13 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. *Για τον υπολογισμό του πίνακα σχεδιασμού **A** καταστρώνεται ο ακόλουθος βοηθητικός πίνακας:*

i	j	$x_j^o - x_i^o$ (m)	$y_j^o - y_i^o$ (m)	S_{ij}^o (m)	$\frac{x_j^o - x_i^o}{S_{ij}^o}$	$\frac{y_j^o - y_i^o}{S_{ij}^o}$
P	1	208.69	-1457.65	1472.513	0.141724	-0.989906
P	2	-2245.77	324.74	2269.127	-0.989707	0.143112
P	2	-1856.95	3446.71	3915.108	-0.474304	0.880361

*Επομένως ο πίνακας **A** υπολογίζεται ως:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{x_1^o - x_P^o}{S_{P1}^o} & -\frac{y_1^o - y_P^o}{S_{P1}^o} \\ \left(\frac{y_2^o - y_P^o}{(S_{P2}^o)^2} - \frac{y_3^o - y_P^o}{(S_{P3}^o)^2}\right)\rho & \left(\frac{x_3^o - x_P^o}{(S_{P3}^o)^2} - \frac{x_2^o - x_P^o}{(S_{P2}^o)^2}\right)\rho \\ \left(\frac{y_2^o - y_P^o}{(S_{P2}^o)^2} - \frac{y_1^o - y_P^o}{(S_{P1}^o)^2}\right)\rho & \left(\frac{x_1^o - x_P^o}{(S_{P1}^o)^2} - \frac{x_2^o - x_P^o}{(S_{P2}^o)^2}\right)\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.141724 & 0.989906 \\ -1.030008 & 2.005447 \\ 4.681229 & 3.389414 \end{bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα των βαρών των παρατηρήσεων υπολογίζεται η μεταβλητότητα της παρατήρησης της απόστασης βάσει της ακρίβειας του οργάνου.

$$\sigma_{\mathrm{S_{P1}}}^2 = 0.2^2 + (3 \cdot 10^{-6} \cdot 147248.0)^2 \mathrm{cm}^2 = 0.2351 \mathrm{cm}^2,$$

ενώ η μεταβλητότητα των γωνιακών παρατηρήσεων είναι: $\sigma_\omega^2 = 15^2 cc^2$

Η αναλυτική μορφή του πίνακα των βαρών είναι:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.2351} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{225} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{225} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2535 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0044 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0044 \end{bmatrix}$$

ii. *Το διάνυσμα **u = A^TPb** έχει διαστάσεις 2X1 αφού οι διαστάσεις του **A** είναι 3X2 (παρατηρήσεις Χ άγνωστοι), του **P** 3X3 (όσες οι παρατηρήσεις) και του **b** είναι 3X1 (όσες και οι παρατηρήσεις). Για τους ίδιους λόγους ο πίνακας **N** των κανονικών εξισώσεων είναι τετραγωνικός 2X2, όσες ακριβώς και οι άγνωστες παράμετροι του προβλήματος. Ο πίνακας **N** είναι δυνατό να αντιστραφεί: λόγω των 6 γνωστών συντεταγμένων το σύστημα αναφοράς του προβλήματος έχει ορισθεί και επομένως υπάρχει λύση στη συνόρθωση. Η ορίζουσα του **N** είναι διάφορη από το 0 και είναι δυνατός ο υπολογισμός του αντιστρόφου.*

iii. *Επειδή το δίκτυο είναι μικτό, ο αριθμός των ελάχιστων δεσμεύσεων είναι 3, ίσος με την αδυναμία βαθμού του δικτύου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι γνωστές παράμετροι (συντεταγμένες) είναι 6, 3 περισσότερες από τις ελάχιστες δεσμεύσεις. Επομένως ακολουθήθηκαν πλεονάζουσες δεσμεύσεις.*

2.

i) Το σφάλμα κλεισίματος του βρόγχου υπολογίζεται ως εξής:

$$\mathrm{w} = \sum \Delta \mathrm{h_i} = 13.152 - 33.844 + 20.697 = 0.005\mathrm{m} = 5\mathrm{mm}$$

Η τυπική απόκλιση του σφάλματος κλεισίματος υπολογίζεται:

$$\sigma_{\mathrm{w}} = \sigma_{\mathrm{o}}\sqrt{\mathrm{L}} = 2\sqrt{1.184} = 2.176\mathrm{mm}$$
$$|\mathrm{z}| = \left|\frac{\mathrm{w}}{\sigma_{\mathrm{w}}}\right| = \frac{5}{2.176} = 2.298$$

Από τον πίνακα των εκατοστιαίων σημείων της κανονικής κατανομής προσδιορίζεται το όριο $z^{\alpha/2}$

$$\mathrm{z}^{\alpha/2} = 1.96$$

Επειδή δεν ισχύει η ανισότητα $|\mathrm{z}| \leq \mathrm{z}^{\alpha/2}$ τότε ο έλεγχος κλεισίματος του βρόγχου για το συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας δεν ισχύει.

ii) Το μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα κλεισίματος για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας στο συγκεκριμένο βρόγχο μπορεί να βρεθεί αντιστρέφοντας τη σχέση:

$$|\mathrm{z}| = \left|\frac{\mathrm{w}}{\sigma_{\mathrm{w}}}\right| \leq 1.96 \Rightarrow |\mathrm{w_{max}}| = |\sigma_{\mathrm{w}}| \cdot 1.96 \Rightarrow |\mathrm{w_{max}}| = 2.176 \cdot 1.96 \Rightarrow |\mathrm{w_{max}}| = 4.265\mathrm{mm}$$

iii) Οι γραμμικές εξισώσεις παρατήρησης του προβλήματος γράφονται ως εξής:

$$\Delta \mathrm{h}_{12}^{\mathrm{b}} = \mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1 + \mathrm{v}_{12} \Rightarrow \Delta \mathrm{h}_{12}^{\mathrm{b}} - \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_1 = \mathrm{v}_{12} \Rightarrow 0.006 = \mathrm{v}_{12}$$
$$\Delta \mathrm{h}_{23}^{\mathrm{b}} = \mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_2 + \mathrm{v}_{23} \Rightarrow \Delta \mathrm{h}_{23}^{\mathrm{b}} + \mathrm{H}_2 = \mathrm{H}_3 + \mathrm{v}_{12} \Rightarrow 3.684 = \mathrm{H}_3 + \mathrm{v}_{23}$$
$$\Delta \mathrm{h}_{31}^{\mathrm{b}} = \mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_3 + \mathrm{v}_{31} \Rightarrow \Delta \mathrm{h}_{31}^{\mathrm{b}} - \mathrm{H}_1 = -\mathrm{H}_3 + \mathrm{v}_{31} \Rightarrow -3.685 = -\mathrm{H}_3 + \mathrm{v}_{31}$$

*και σε μορφή πινάκων **b = Ax + v** οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:*

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.006 \\ 3.684 \\ -3.685 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{H}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{12} \\ \mathrm{v}_{23} \\ \mathrm{v}_{31} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας των βαρών των παρατηρήσεων δίνεται:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.382} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.478} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.324} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6178 & 0 & 0 \\ 0 & 2.092 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0864 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων (ουσιαστικά ένα στοιχείο αφού μία είναι και η άγνωστη παράμετρος) υπολογίζεται:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A^T P A} = 5.1784$$

*και το διάνυσμα **u**:*

$$\mathbf{u} = \mathbf{A^T P b} = 19.0803$$

Η εκτίμηση του υψομέτρου είναι:

$$\hat{\mathrm{H}}_3 = \mathbf{x} = \mathbf{N^{-1}u} = \frac{19.0803}{5.1784} = 3.6846\mathrm{m}.$$

Το διάνυσμα των εκτιμήσεων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.006 \\ -0.0006 \\ -0.0004 \end{bmatrix},$$

και η εκτίμηση της a-posteriori μεταβλητότητας αναφοράς:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{n} - \mathrm{m}} = 47.744\mathrm{mm}^2$$

iv) Ο χωροβάτης δε μέτρησε με την ακρίβεια που δίνει ο κατασκευαστής γιατί δεν ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_{\mathrm{o}}^2} = \frac{47.744\mathrm{mm}^2}{4\mathrm{mm}^2} = 11.936,$$

$$0.025 = \frac{1}{\mathrm{F}_{\infty,2}^{0.025}} = \mathrm{F}_{2,\infty}^{0.975} \leq 11.936 \leq \mathrm{F}_{2,\infty}^{0.025} = 3.68.$$

3. Θεωρητική