ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΕΩΝ

Βασίλης Δ. Ανδριτσάνος
Δρ. Αγρονόμος - Τοπογράφος Μηχανικός ΑΠΘ
Επίκουρος Καθηγητής ΤΕΙ Αθήνας

3ο εξάμηνο

http://eclass.uniwa.gr

Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί

Παρουσιάσεις, Ασκήσεις, Σημειώσεις, Έντυπα, Προδιαγραφές, Κανονισμοί, Αμοιβές

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- **Διαδικασία αποτύπωσης**: Από το *γενικό* στο *ειδικό*
  1. Οριζόντιο και κατακόρυφο δίκτυο ελέγχου
  2. Αποτύπωση της περιοχής
  3. Απόδοση σε χάρτη

- **Υπολογισμοί δικτύων ελέγχου**: καθορισμός μεγέθους και σχήματος (**ανεξάρτητα δίκτυα**), καθορισμός μεγέθους, σχήματος και θέσης (**εξαρτημένα ή ενταγμένα δίκτυα**)

- Καθορισμός μεγέθους, σχήματος και θέσης: ***συντεταγμένες***

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- **Πλεονέκτημα συντεταγμένων**: απλό μαθηματικό μοντέλο αναλυτικής γεωμετρία και τριγωνομετρίας: <u>ευκολία στους αλγόριθμους συνόρθωσης</u>
- **Μειονέκτημα 1**: καθορισμός συστήματος αναφοράς: *συντεταγμένες:* μέγεθος, σχήμα αλλά και θέση. *Μετρήσεις:* μέγεθος, σχήμα
- **Αντιμετώπιση 1**: αυθαίρετο σύστημα ή εξάρτηση από γεωδαιτικό DATUM
- **Μειονέκτημα 2**: Επίδραση των συντεταγμένων από τα σφάλματα των παρατηρήσεων
- **Αντιμετώπιση 2**: Μέθοδοι περιορισμού της επίδρασης των σφαλμάτων των παρατηρήσεων: **Διαδικασία της συνόρθωσης**

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- Ποιά είναι η βέλτιστη μέθοδος υπολογισμού που οδηγεί στις λιγότερο επηρεασμένες από τα σφάλματα των παρατηρήσεων συντεταγμένες;
- **Συνόρθωση των παρατηρήσεων:** βέλτιστη μέθοδος υπολογισμού συντεταγμένων από τις διαθέσιμες μετρήσεις, που οδηγεί σε συντεταγμένες με τη μικρότερη δυνατή επίδραση των σφαλμάτων των παρατηρήσεων, σύμφωνα με κάποιο κατάλληλο κριτήριο

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑ

Μέτρηση ή παρατήρηση: διαδικασία προσδιορισμού αριθμητικής τιμής σε ένα μέγεθος που συνδέεται με το φυσικό σύστημα.

Επανάληψη μέτρησης: διαφορετικό αποτέλεσμα

Σφάλμα: η διαφορά της μέτρησης από την άγνωστη αληθινή τιμή

σφάλμα = μέτρηση - αληθινή τιμή

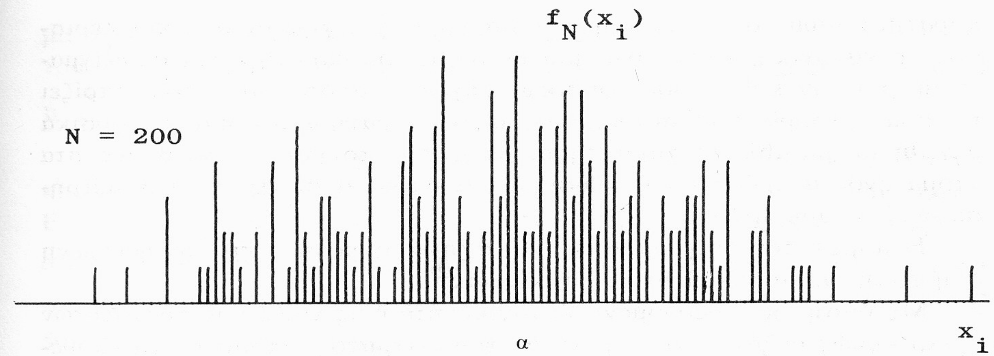
Αληθινή τιμή: άγνωστη. Αρκούμαστε στη δυνατότητα καθορισμού της μέχρι μια τάξη μεγέθους μικρότερη από την τάξη μεγέθους των σφαλμάτων. *Αδυναμία καθορισμού:* επίδραση του σφάλματος

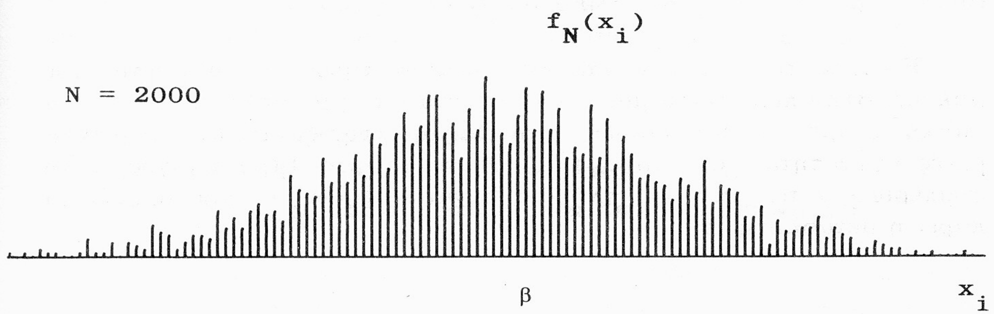
ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

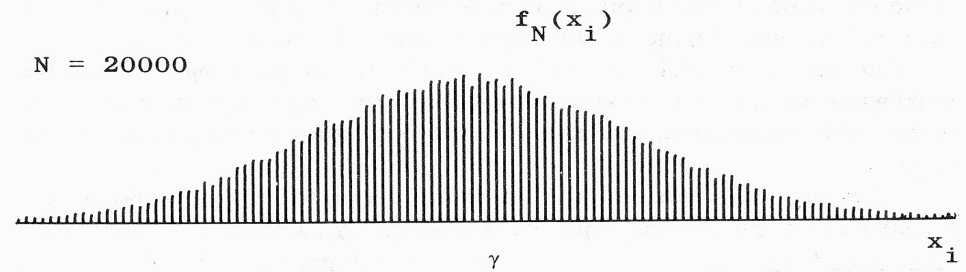
Χονδροειδή σφάλματα: οφείλονται σε ανθρώπινα λάθη (αναγραμματισμοί, λάθη στις σκοπεύσεις). Ελέγχονται εύκολα και απομακρύνονται κατά την προεπεξεργασία των παρατηρήσεων

Συστηματικά σφάλματα: σταθερή τιμή ή συνάρτηση του μεγέθους που μετράμε (κακή βαθμονόμηση οργάνου ή λάθος στο μοντέλο). Τεχνικές απαλοιφής (σκοπεύσεις σε δύο θέσεις τηλεσκοπίου)

Τυχαία σφάλματα: Απρόβλεπτα σφάλματα που η συλλογική συμπεριφορά τους είναι δυνατό να περιγραφεί με τη βοήθεια της θεωρίας των πιθανοτήτων (διαγράμματα συχνοτήτων εμφάνισης)


$f_N(x_i)$
N = 200
x_i
α


$f_N(x_i)$
N = 2000
x_i
β


$f_N(x_i)$
N = 20000
x_i
γ

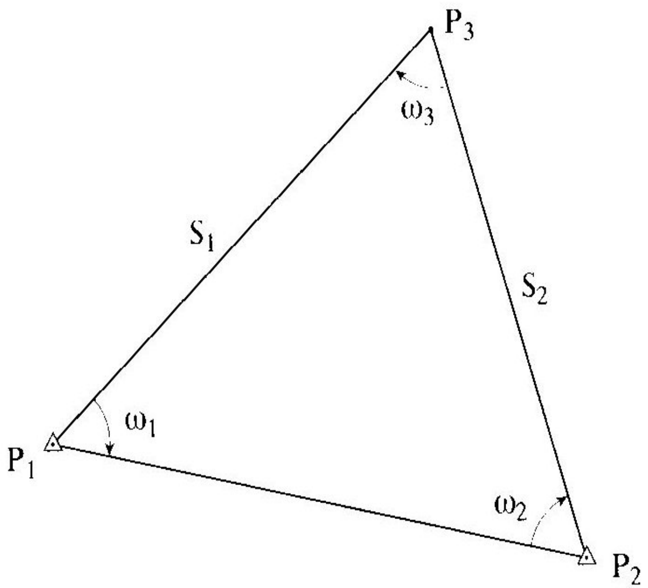
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Όταν οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις τείνουν στο άπειρο η μορφή της συνεχούς καμπύλης που προκύπτει ονομάζεται **κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss**

Η κανονική κατανομή είναι η κατανομή που συναντάται ως επί το πλείστον στη φύση

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- Περισσότερες μετρήσεις (5) από τις άγνωστες παραμέτρους (2) → υπερεκτιμήσιμο μοντέλο → πλεονάζουσες παρατηρήσεις: **βαθμοί ελευθερίας**



i	ω_i^b (grad)	S_i^b (m)	x_i (m)	y_i (m)
1	79.4362	2943.720	26608.425	−14450.071
2	52.4051	3806.697	29745.486	−12847.711
3	68.1597			

		x (m)	y (m)
ω_1	ω_2	26170.770	−11538.965
ω_1	ω_3	26170.791	−11539.100
ω_1	S_1	26170.784	−11539.065
ω_1	S_2	26170.789	−11539.100
ω_2	ω_3	26170.870	−11539.001
ω_2	S_1	26170.967	−11539.039
ω_2	S_2	26170.827	−11538.988
ω_3	S_1	26170.821	−11539.059
ω_3	S_2	26170.782	−11539.112
S_1	S_2	26170.799	−11539.062

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

Πλεονασμός παρατηρήσεων → οδηγεί στην ασυμβατότητα μοντέλου

- Κάθε ζεύγος παρατηρήσεων οδηγεί σε διαφορετικές συντεταγμένες
- Διαφέρουν μεταξύ τους λόγω των σφαλμάτων των μετρήσεων
- Δεν περιορίζεται η επίδραση των σφαλμάτων

➔ Πρέπει να βρεθούν οι βέλτιστες παρατηρήσεις βάσει <u>ενός κριτηρίου</u>, π.χ., *τις συνθήκες κατά την περίοδο των μετρήσεων*

➔ ***Μειονέκτημα***: <u>αυθαίρετη</u> επιλογή του βέλτιστου και <u>μη αξιοποίηση όλων των παρατηρήσεων</u>

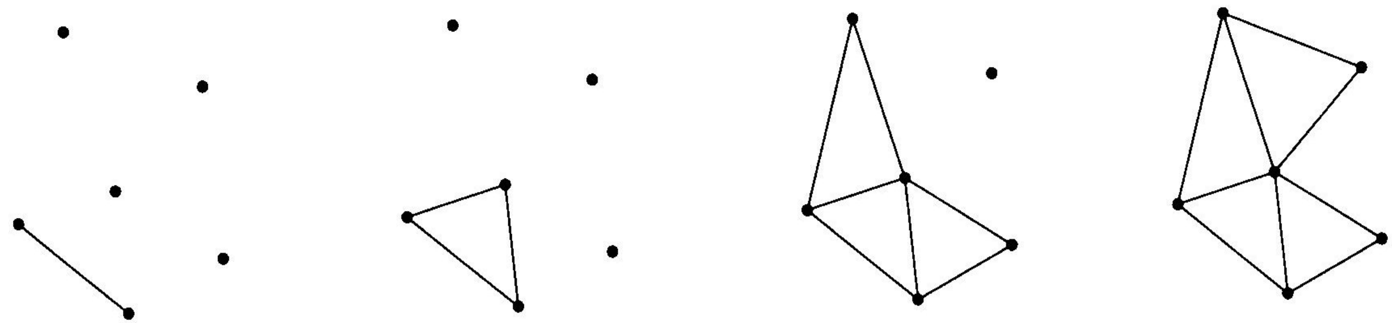
✔ Άλλες λύσεις αξιοποίησης όλων των παρατηρήσεων: μέσες τιμές, γωνιακές διορθώσεις: περιορισμός των σφαλμάτων αλλά όχι στο μέγιστο δυνατό βαθμό

✔ ***Μειονέκτημα***: κανένα κριτήριο βέλτιστης εκτίμησης

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- **Συνόρθωση**: χρήση όλων των παρατηρούμενων παραμέτρων και “βελτίωσή” τους βάσει συγκεκριμένων κριτηρίων
- Για να ικανοποιούν το <u>μαθηματικό μοντέλο</u> περιγραφής του φυσικού συστήματος οι παρατηρήσεις “διορθώνονται” ώστε να καθίστανται *συμβατές*
- **Παραμετρικός βαθμός** δικτύου (ή φυσικού συστήματος γενικότερα) είναι ένας ελάχιστος αριθμός r παραμέτρων-παρατηρήσεων του συστήματος ανεξαρτήτων μεταξύ τους (καμία δεν προκύπτει από τις υπόλοιπες)
- *Σχήμα τριγώνου*: 2 παράμετροι π.χ., 2 γωνίες (βαθμός 2)
- *Σχήμα και μέγεθος τριγώνου*: 3 παράμετροι π.χ., 2 γωνίες και μία πλευρά
- Σε κάθε σημείο που προσθέτουμε στο απλό τρίγωνο για την ίδρυση ενός δικτύου χρειάζονται 2 ακόμη παράμετροι

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ



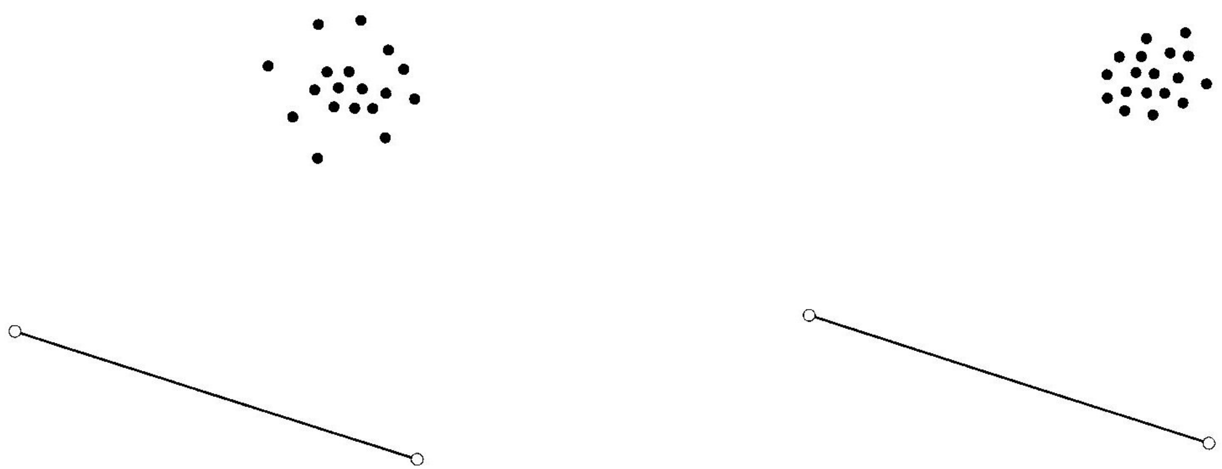
- **Παραμετρικός βαθμός δικτύου Ν κορυφών (σχήμα και μέγεθος** - γωνίες και αποστάσεις): 3 + 2(Ν - 3) = **2Ν - 3**
- **Παραμετρικός βαθμός δικτύου Ν κορύφών (μόνο σχήμα** - μόνο μετρήσεις γωνιών): 2 + 2(Ν - 3) = **2Ν - 4**
- ***Μικτό δίκτυο***: *μέτρηση τουλάχιστον 2Ν - 3 γωνιών και πλευρών για να οριστεί το σχήμα και το μεγεθός του*
- ***Τριγωνομετρικό δίκτυο***: *μέτρηση τουλάχιστον 2Ν - 4 γωνιών για να οριστεί το σχήμα του*

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία της συνόρθωσης χρειάζονται n>r παρατηρήσεις
- **Βαθμοί ελευθερίας του δικτύου** (f = n - r): είναι οι επιπλέον παρατηρήσεις
- Οι παρατηρήσεις (n>r) αντικαθίστανται από **συμβιβαστές τιμές:** *κάθε υποσύνολο καταλήγει στις ίδιες τιμές για τις συντεταγμένες των κορυφών*
- **Τοπογραφικά δίκτυα**: εκτός από τις *n παρατηρήσεις* έχουμε και *m άγνωστες παραμέτρους (συντεταγμένες)*
- **Συνόρθωση**: εκτίμηση των τιμών των *n παρατηρήσεων* και των *m αγνώστων παραμετρών*
- Το πόσο κοντά είναι οι εκτιμήσεις αυτές στις αληθινές τιμές εξαρτάται από **την ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων**

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

- **Βέλτιστη μέθοδος υπολογισμού:** εκτιμήσεις συντεταγμένων λιγότερο επηρεασμένες από τα σφάλματα των μετρήσεων
- **Βέλτιστη μέθοδος υπολογισμού:** μέτρηση του "μεγέθους" των σφαλμάτων (ακρίβεια) και της επίδρασής τους στα αποτελέσματα (αξιοπιστία)



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

- Το κριτήριο που πλεονεκτεί και χρησιμοποιείται στις τοπογραφικές εργασίες ειναι το **κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων**

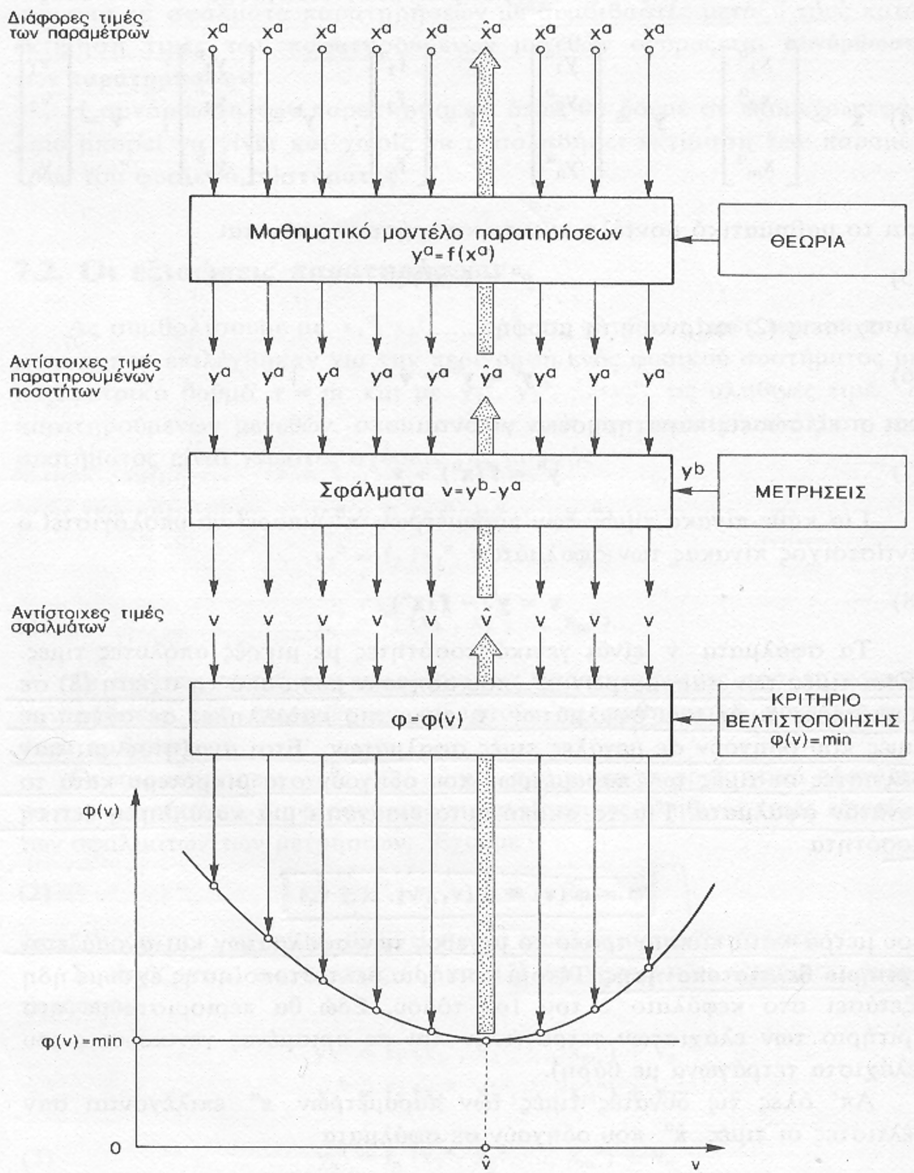
$$\mathbf{v} = \mathbf{y^b} - \mathbf{y^a}$$

$$\phi = \mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2 + \cdots + \mathrm{v}_\mathrm{n}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v}_\mathrm{i}^2 = \min \qquad \mathbf{v^T v} = \min$$

$$\phi = \mathrm{p}_1\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{p}_2\mathrm{v}_2^2 + \cdots + \mathrm{p}_\mathrm{n}\mathrm{v}_\mathrm{n}^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}_\mathrm{i}\mathrm{v}_\mathrm{i}^2 = \min$$

$$\mathbf{v^T P v} = \min$$

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ



Σχήμα 1: Σχηματικό διάγραμμα της βέλτιστης εκτίμησης παραμέτρων με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

- Ο πίνακας **P** στα τοπογραφικά δίκτυα είναι συνήθως διαγώνιος: <u>παρατηρήσεις ασυσχέτιστες μεταξύ τους αλλά διαφορετικής ακρίβειας</u>
- Μεγαλύτερο βάρος: μεγαλύτερης ακρίβειας παρατηρήσεις
- Προκειμένου να υπολογίζουμε τα βάρη χρειαζόμαστε **ένα μέτρο της ακρίβειας των παρατηρήσεων**
- Χρήση της θεωρίας των σφαλμάτων: σφάλματα δειγματικές τιμές τυχαίων μεταβλητών: **τυχαία σφάλματα** (συνάρτηση κατανομής Gauss - κανονική κατανομή)
- $E\{\mathbf{v}\} = 0$ προσδοκία (μέση τιμή απείρου δείγματος)
- $E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \mathbf{C}$ πίνακας συμμεταβλητοτήτων
- Τοπογραφικά δίκτυα: $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$ βέλτιστη εκτίμηση

ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Ακρίβεια: η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων στις μετρήσεις και στις εξαγόμενες από αυτές ποσότητες

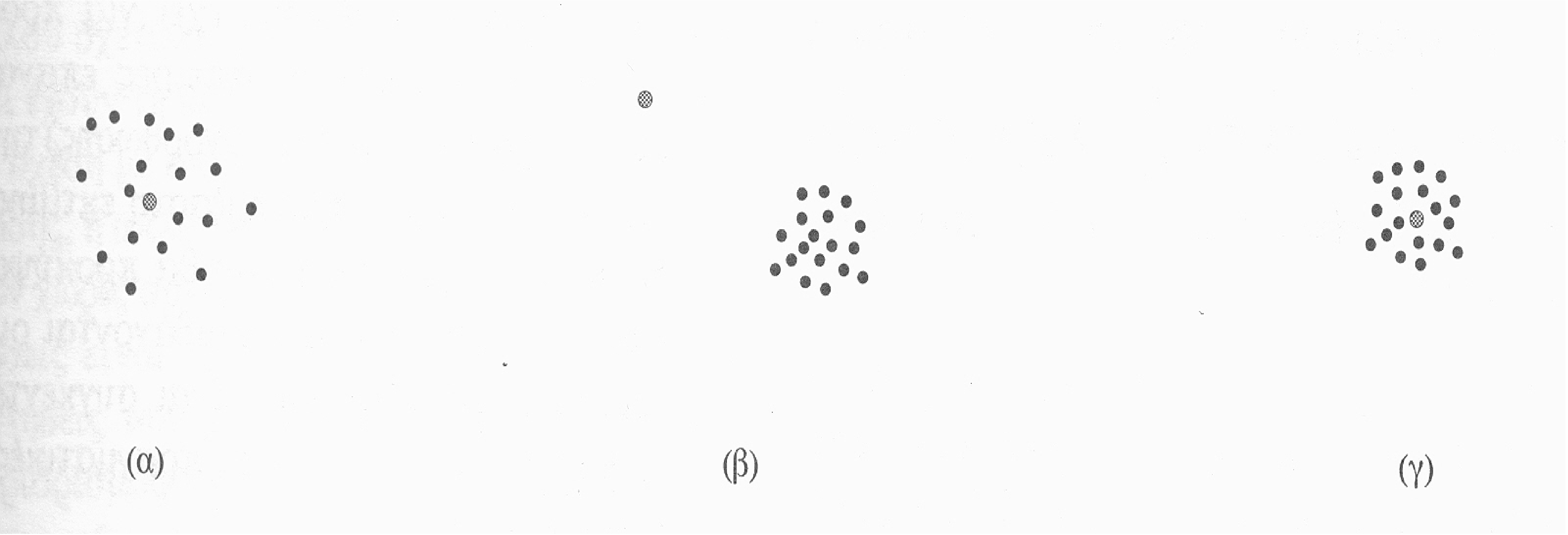
Αξιοπιστία: η επίδραση των χονδροειδών και συστηματικών σφαλμάτων και η ικανότητα περιορισμού τους

ΠΟΙΟΤΗΤΑ = ΑΚΡΙΒΕΙΑ + ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ

Ακρίβεια = εσωτερική ακρίβεια: πόσο κοντά μεταξύ τους είναι η επαναλαμβανόμενες μετρήσεις για το ίδιο μέγεθος

Αξιοπιστία = εξωτερική ακρίβεια: πόσο κοντά στην πραγματική τιμή βρίσκονται οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις

ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ



ΜΕΤΡΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ

Διασπορά m^2 και μέση τυπική απόκλιση m

$$m^2 = \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2 \qquad m = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

Μπορεί οι μέσες τιμές μεταξύ δύο δειγμάτων να είναι οι ίδιες όμως **μεγαλύτερη ακρίβεια** παρουσιάζει το δείγμα που έχει τη **μικρότερη διασπορά ή μέση τυπική απόκλιση**

Μέση τιμή = πραγματική (**ανεπηρέαστες** μετρήσεις): μέσο τετραγωνικό σφάλμα (rms - root mean square)

Σε κάθε νέα σειρά μετρήσεων νέα μέση τιμή και διασπορά

ΜΕΤΡΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ (2)

Εισάγοντας την έννοια του απείρου δείγματος έχουμε

Προσδοκία μ και μεταβλητότητα σ^2

Ανεπηρέαστη εκτίμηση της μεταβλητότητας

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

Αναφέρεται σε μία μεμονωμένη μέτρηση από το σύνολο των n μετρήσεων.
Όταν ο αριθμος n είναι μεγάλος οι τιμες m^2 και σ^2 ταυτίζονται

Μεταβλητότητα αναφοράς ή μεταβλητότητα της μονάδας βάρους

ΜΕΤΡΑ ΑΚΡΙΒΕΙΑΣ (3)

Μεταβλητότητα και **τυπική απόκλιση της μέσης τιμής**

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{y}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n} \qquad \hat{\sigma}_{\bar{y}} = \pm\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Τυπικό σφάλμα των (n) παρατηρήσεων

Τοπογραφικές εφαρμογές: Αντί της σ^2 γνωρίζουμε μια αρχική τιμή της σ_o^2 από τους κατασκευαστές των οργάνων: κριτήριο της αξιολόγησης της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ (1)

Τοπογραφικές εφαρμογές: προσδιορισμός *παραμέτρων από μετρήσεις*, π.χ. συντεταγμένων από μετρήσεις διευθύνσεων και αποστάσεων ή γωνιών από μετρήσεις διευθύνσεων

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Ζητούμενο: προσδιορισμός της ακρίβειας των **y** από τη γνωστή ακρίβεια των μετρημένων **x**

Πρόβλημα υπολογισμού του πίνακα συμ-μεταβλητοτήτων Cyy από το γνωστό πίνακα σύμ-μεταβλητοτήτων Cxx.

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ (2)

Η γραμμικοποίηση της σχέσης σύνδεσης των μετρήσεων με τις προσδιοριζόμενες παραμέτρους βασίζεται στην ανάπτυξη σε σειρά Taylor, κρατώντας μόνο τους πρώτους όρους της σειράς

$$\mathbf{C_{yy}} \approx \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C_{xx}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\mathbf{T}}$$

Η απλούστερη μορφή που χρησιμοποιείται στην τοπογραφία και θεωρεί τις *μετρήσεις ασυσχέτιστες μεταξύ τους* δίνεται σε αναλυτική μορφή

$$\sigma_{y_i}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_{x_k}^2 \qquad \sigma_{y_i y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \sigma_{x_k}^2$$

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ (3)

Σε περίπτωση που μετρήσεις και άγνωστες παράμετροι δεν μπορούν να διαχωριστούν τότε ισχύει ο νόμος για πλεγμένες συναρτήσεις της μορφής:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C_{yy}} \approx \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C_{xx}} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\mathbf{T}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-\mathbf{1}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ο προσδιορισμός της οριζόντιας διεύθυνσης d και της υψομετρικής διαφοράς h ανάμεσα σε δύο σημεία από μετρήσεις της κεκλιμένης απόστασης s και της γωνίας ύψους υ

$$d = s\cos v \qquad h = s\sin v$$

$$\sigma_d^2 = \left(\frac{\partial d}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 = \frac{d^2}{s^2}\sigma_s^2 + h^2\sigma_v^2$$

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 = \frac{h^2}{s^2}\sigma_s^2 + d^2\sigma_v^2$$

$$\sigma_{dh} = \frac{\partial d}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial s}\sigma_s^2 + \frac{\partial d}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial v}\sigma_v^2$$

ΕΙΔΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

- **Συνόρθωση**: "διόρθωση" των παρατηρήσεων με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με βάρη, χρησιμοποιώντας βάρη αντίστροφα των μεταβλητοτήτων των παρατηρήσεων

- Δύο μέθοδοι: **εξισώσεων παρατηρήσεων και εξισώσεων συνθηκών**

- Εξισώσεις παρατηρήσεων: Παρατηρήσεις συναρτήσει αγνώστων (συντεταγμένων, υψόμετρα κορυφών): σύνδεση παρατήρησης με τις άγνωστες παραμέτρους

- Εξισώσεις συνθηκών: Απευθείας συνόρθωση των παρατηρήσεων χωρίς να περάσουμε μέσα από τις άγνωστες παραμέτρους: *περιπτώσεις που είναι αδύνατος ο διαχωρισμός παρατηρήσεων και αγνώστων*

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

$$\mathbf{y}^{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\alpha})$$

- Γενίκη περίπτωση: μη γραμμικές σχέσεις: γραμμικοποίηση κατά Taylor
- Χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους

$$\mathbf{y}^{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\mathbf{o}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}}\right|_{\mathbf{o}} (\mathbf{x}^{\alpha} - \mathbf{x}^{\mathbf{o}})$$

$$\mathbf{y}^{\alpha} = \mathbf{y}^{\mathbf{o}} + \mathbf{A}\mathbf{x}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

$$\mathbf{v} = \mathbf{y}^{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^{\alpha} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{y}^{\mathbf{b}} - \mathbf{y}^{\mathbf{o}}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

- Ο πίνακας **Α** ονομάζεται **πίνακας σχεδιασμού**: για τον υπολογισμό του αρκούν μόνο οι προσεγγιστικές τιμές των συντεταγμένων, ο αριθμός και το πλήθος των παρατηρήσεων.
- Η τελική λύση δίνεται από το **σύστημα των κανονικών εξισώσεων**

$$\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

$$\hat{\mathbf{x}}^{\alpha} = \mathbf{x}^{\mathbf{o}} + \hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{y}}^{\alpha} = \mathbf{y}^{\mathbf{o}} + \hat{\mathbf{y}}$$

- Πρόβλημα στη λύση αποτελεί η αντιστροφή του πίνακα **N:** παρουσιάζει αδυναμία βαθμού (ορίζουσα = 0)
- Οφείλεται στη χρησιμοποίηση των συντεταγμένων ως αγνώστων: **πρόβλημα σχεδιασμού μηδενικής τάξης**
- Οι παρατηρήσεις από μόνες τους δεν μπορούν να ορίσουν το σύστημα αναφοράς των συντεταγμένων
- Χρειάζεται η χρήση κάποιων συνθηκών για τις συντεταγμένες: **δεσμεύσεις**
- Με τη χρήση κατάλληλων δεσμεύσεων ορίζεται το σύστημα αναφοράς, αντιστρέφεται ο **N** (**$\mathbf{N}^{\mathbf{g}}$**) και προκύπτει η λύση

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ (ΑΚΡΙΒΕΙΑ)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{n} - \mathrm{m}}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}\mathbf{N}^{\mathbf{g}}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}^2(\mathbf{A}\mathbf{N}^{\mathbf{g}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2(\mathbf{P}^{-\mathbf{1}} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{\mathbf{g}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

1. Επιλογή προσεγγιστικών των αγνώστων συντεταγμένων (διάνυσμα $\mathbf{x^o}$)
2. Υπολογισμός των προσεγγιστικών παρατηρήσεων με χρήση του 1.
3. Υπολογισμός ανηγμένων παρατηρήσεων (διάνυσμα **b**)
4. Αναλυτική παραγώγιση του μαθηματικού μοντέλου για την κατάστρωση του πίνακα σχεδιασμού **Α.** Οι άγνωστες παράμετροι αντικαθίστανται από τις προσεγγιστικές τιμές τους από το βήμα 1.
5. Δημιουργία του πίνακα βάρους **P** από τις μεταβλητότητες των παρατηρήσεων (συνόρθωση σταθμού)
6. Υπολογισμός του πίνακα **N** και **u**
7. Υπολογισμός του αντιστρόφου **N** (εφαρμογή δεσμέυσεων)
8. Υπολογισμός λύσης και ακρίβειας της