ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Τμήμα Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ
(ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ)

Βασίλης Δ. Ανδριτσάνος
Δρ. Αγρονόμος - Τοπογράφος Μηχανικός ΑΠΘ

3ο εξάμηνο

http://eclass.uniwa.gr

Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί

Παρουσιάσεις, Ασκήσεις, Σημειώσεις, ΄Εντυπα, Προδιαγραφές, Κανονισμοί, Αμοιβές

ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ

- Απαιτείται η δημιουργία εξισώσεων που να συνδέουν τις παρατηρήσεις μας με τις άγνωστες παραμέτρους
- Εξισώσεις: Ευκλείδια Γεωμετρία (τριγωνομετρία και αναλυτική γεωμετρία)
- **B**est **Linear** **U**nbiased **E**stimation: απαίτηση γραμμικοποίησης σχέσεων
- y = f(x) --> b = Ax + v
- Γραμμικοποίηση μέσω αναπτυγμάτων Taylor (προσεγγιστικές τιμές για τις άγνωστες παραμέτρους, αγνοώντας τους όρους ανώτερης τάξης

$$\mathbf{y}^\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\alpha) \Rightarrow \mathbf{y}^\alpha = \mathbf{y}^\mathbf{o} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}\Big|_\mathbf{o}(\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\mathbf{o}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}!}\frac{\partial^\mathbf{2} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^\mathbf{2}}\Big|_\mathbf{o}(\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\mathbf{o})^\mathbf{2} + \cdots$$

$$\mathbf{y}^\alpha - \mathbf{y}^\mathbf{o} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}\Big|_\mathbf{o}(\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\mathbf{o}) \Rightarrow \mathbf{y}^\mathbf{b} - \mathbf{v} - \mathbf{y}^\mathbf{o} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

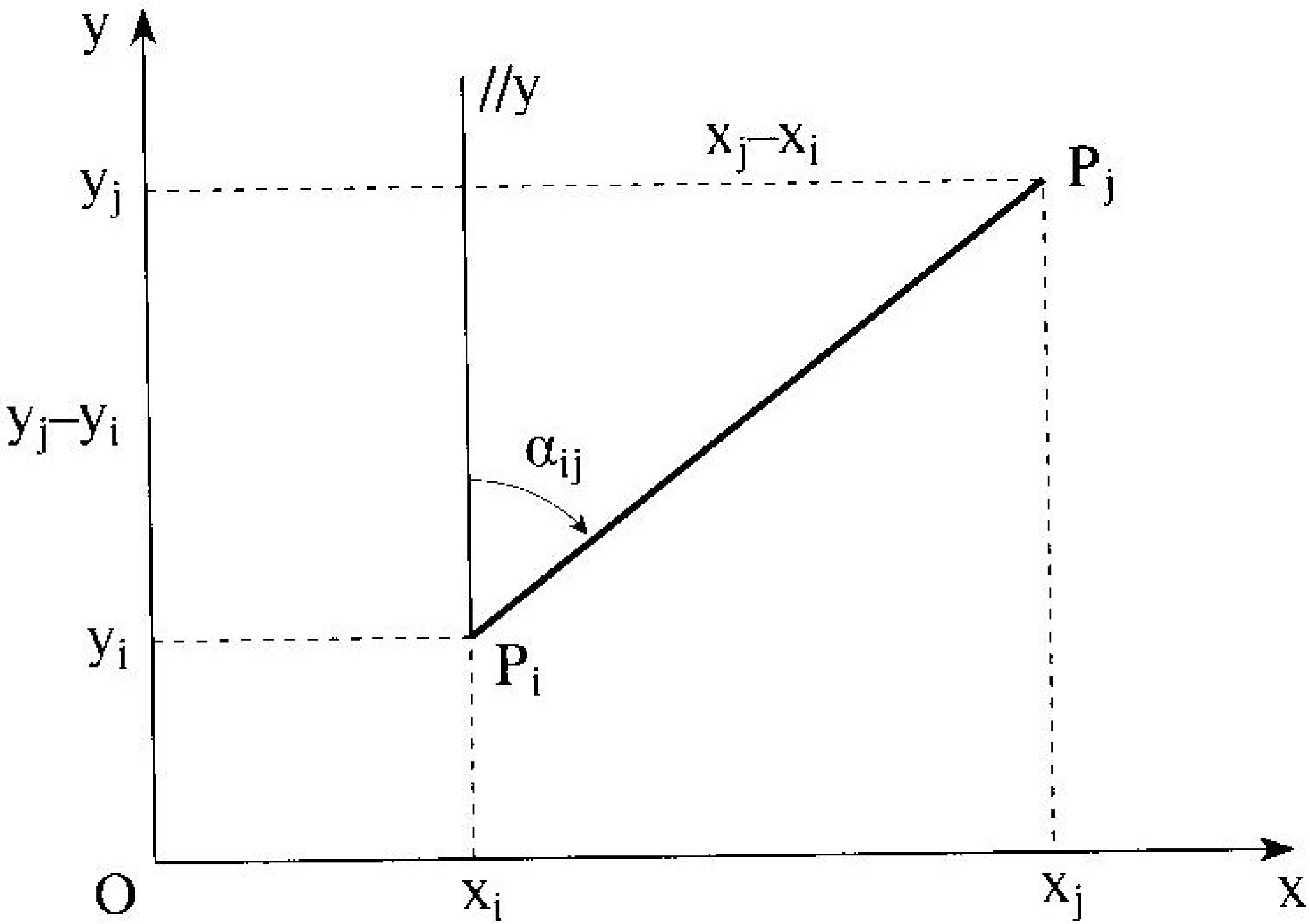
ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ

- Για να αγνοηθούν οι όροι ανώτερης τάξης της σειράς Taylor πρέπει οι προσεγγιστικές τιμές των συντεταγμένων να είναι κοντά στις πραγματικές
- Αν δεν ισχύει: **σφάλματα γραμμικοποίησης:** εισάγονται στο διάνυσμα των σφαλμάτων **v**
- Αντιμετώπιση: επανάληψη της συνόρθωσης με προσεγγιστικές τιμές τις εκτιμήσεις από την πρώτη φορά
- Προσεγγιστικές: <u>γραφικά</u> μέσω χάρτη ή <u>**υπολογιστικά**</u> χρησιμοποιώντας κάποιες παρατηρήσεις και τα θεμελιώδη προβλήματα (ή το μοντέλο εμπροσθοτομίας και οπισθοτομίας)

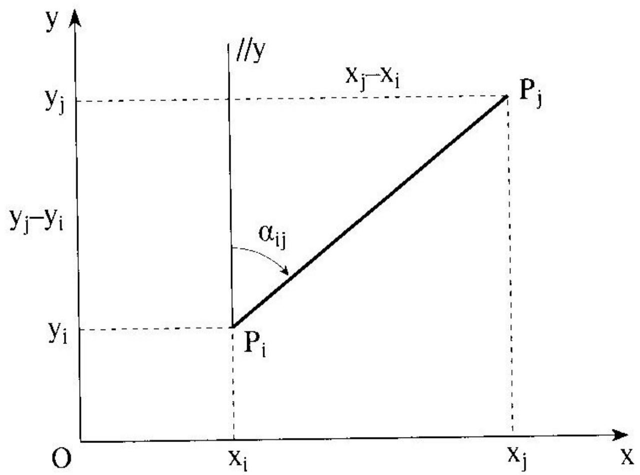
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

1. ***Επιλογή προσεγγιστικών των αγνώστων συντεταγμένων (διάνυσμα x^o)***
2. ***Υπολογισμός των προσεγγιστικών παρατηρήσεων με χρήση του 1.***
3. ***Υπολογισμός ανηγμένων παρατηρήσεων (διάνυσμα b)***
4. ***Αναλυτική παραγώγιση του μαθηματικού μοντέλου για την κατάστρωση του πίνακα σχεδιασμού A. Οι άγνωστες παράμετροι αντικαθίστανται από τις προσεγγιστικές τιμές τους από το βήμα 1.***
5. ***Δημιουργία του πίνακα βάρους P από τις μεταβλητότητες των παρατηρήσεων (συνόρθωση σταθμού)***
6. ***Υπολογισμός του πίνακα N και u***
7. Υπολογισμός του αντιστρόφου **N** (εφαρμογή δεσμέυσεων)
8. Υπολογισμός λύσης και ακρίβειας της

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΑΖΙΜΟΥΘΙΟΥ



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΑΖΙΜΟΥΘΙΟΥ



$$\alpha_{ij} = \arctan\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)$$

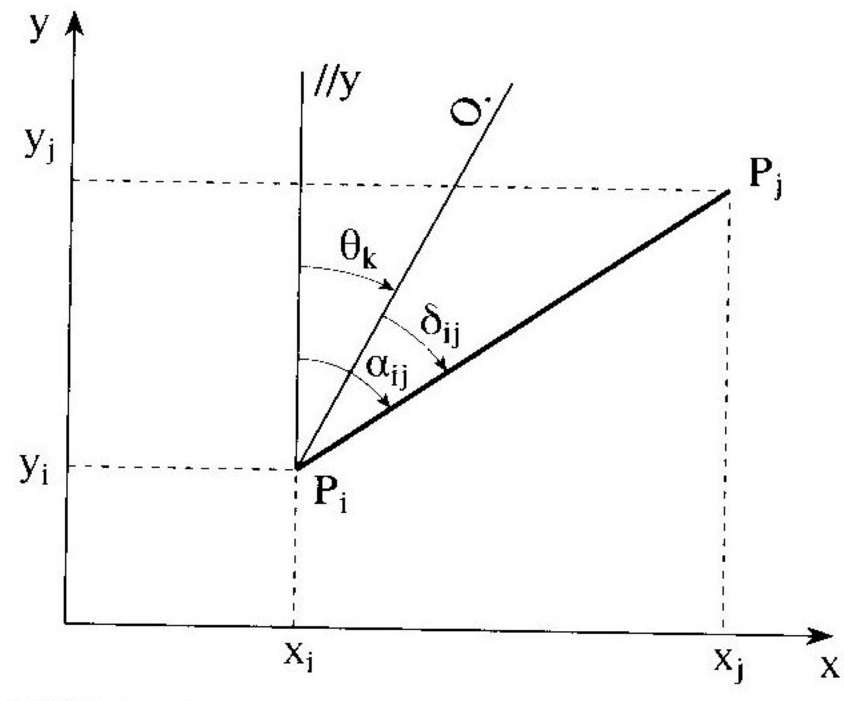
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{o} + \left.\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_i}\right|_{o}(x_i - x_i^{o}) + \left.\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_i}\right|_{o}(y_i - y_i^{o}) + \left.\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j}\right|_{o}(x_j - x_j^{o}) + \left.\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_j}\right|_{o}(y_j - y_j^{o})$$

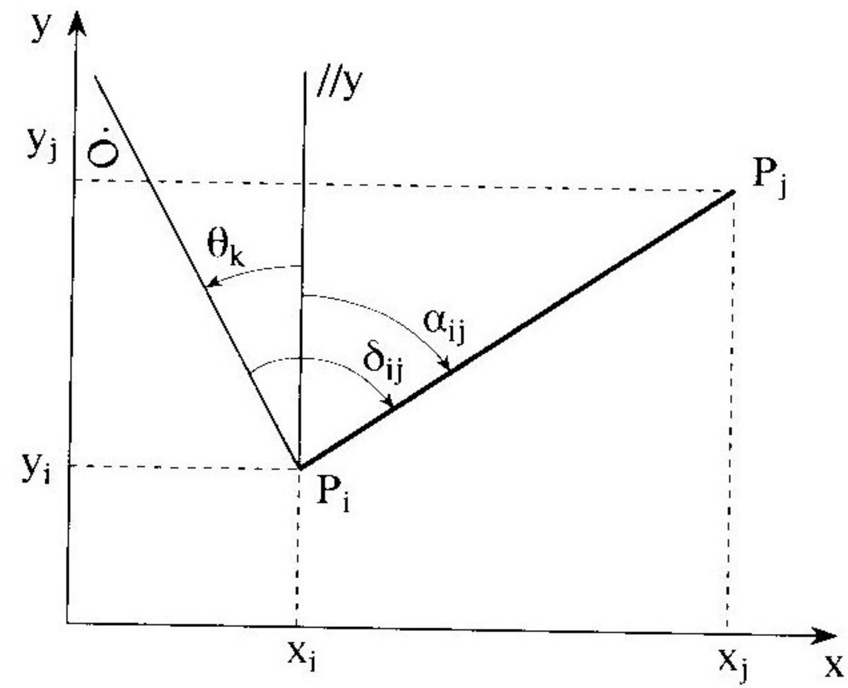
$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{y_j - y_i}{S_{ij}^2}$$

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_i} = -\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_j} = \frac{x_j - x_i}{S_{ij}^2}$$

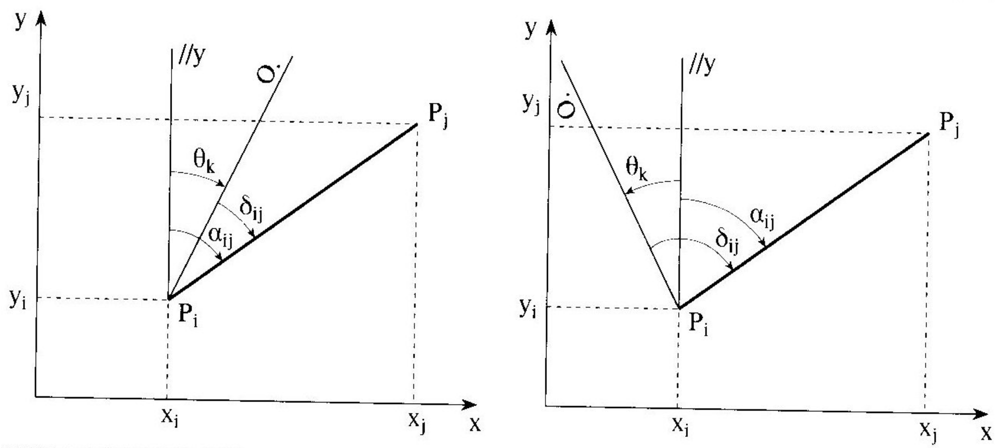
$$\frac{\partial[\arctan(u(x))]}{\partial x} = \frac{1}{1 + u(x)^2}\frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ





ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ

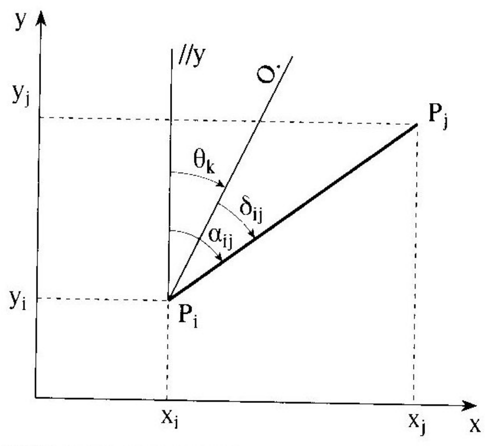


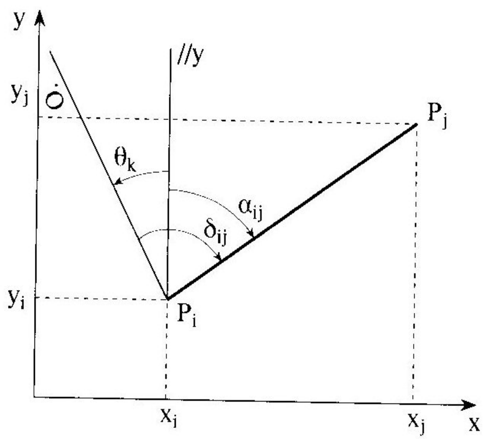
$$\delta_{\mathrm{ij}} = \alpha_{\mathrm{ij}} - \theta_{\mathrm{k}} = \arctan\left(\frac{\mathrm{x_j} - \mathrm{x_i}}{\mathrm{y_j} - \mathrm{y_i}}\right) - \theta_{\mathrm{k}}$$

- Κάθε σειρά διευθύνσεων προσθέτει μία άγνωστη παράμετρο στο πρόβλημα της συνόρθωσης, τη διόρθωση της προσεγγιστικής τιμής της **σταθεράς προσανατολισμού:** “ανεπιθύμητη” άγνωστη παράμετρος

$$\theta_{\mathrm{k}}^{\mathrm{o}} = \arctan\left(\frac{\mathrm{x_j^o} - \mathrm{x_i^o}}{\mathrm{y_j^o} - \mathrm{y_i^o}}\right) - \delta_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{b}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ

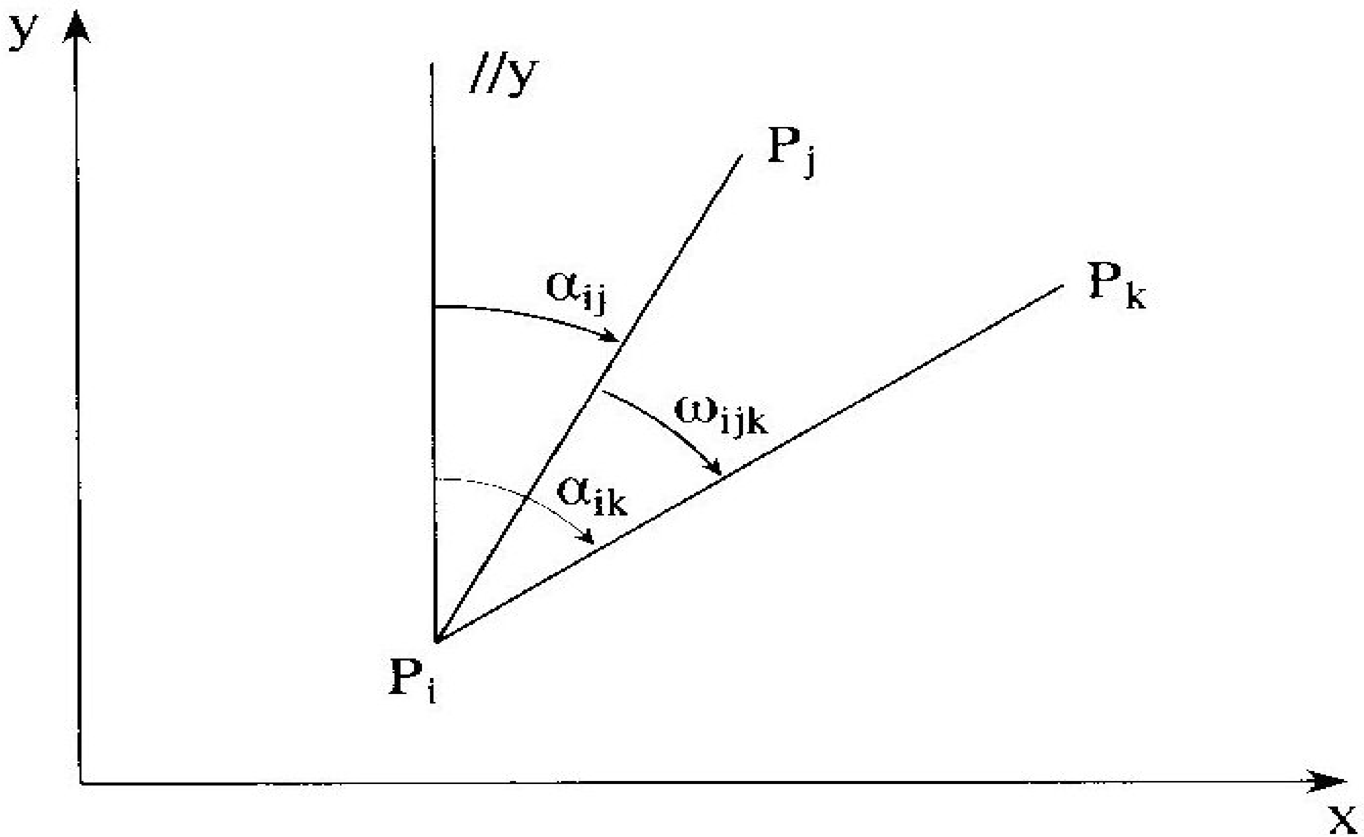




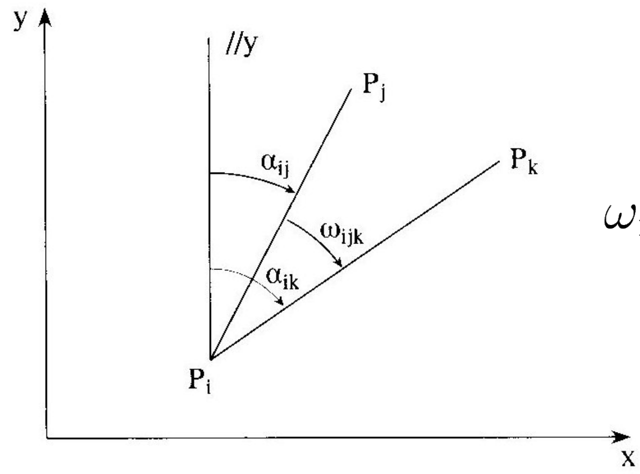
$$\delta_{ij}^{o} = \alpha_{ij}^{o} - \theta_{k}^{o} = \arctan\left(\frac{x_j^o - x_i^o}{y_j^o - y_i^o}\right) - \theta_k^o$$

$$\delta_{ij}^{b} - \delta_{ij}^{o} = -\frac{y_j^o - y_i^o}{(S_{ij}^o)^2}\delta x_i + \frac{x_j^o - x_i^o}{(S_{ij}^o)^2}\delta y_i + \frac{y_j^o - y_i^o}{(S_{ij}^o)^2}\delta x_j - \frac{x_j^o - x_i^o}{(S_{ij}^o)^2}\delta y_j - \delta\theta_k + v_{ij}^{\delta}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



$$\omega_{\mathrm{ijk}} = \alpha_{\mathrm{ik}} - \alpha_{\mathrm{ij}} = \arctan\left(\frac{x_k - x_i}{y_k - y_i}\right) - \arctan\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)$$

- Οριζόντια γωνία: παρατήρηση τριών σημείων: έξι άγνωστοι: έξι μη μηδενικά στοιχεία στον πίνακα **A**

$$\omega^{b}_{\mathrm{ijk}} - \omega^{o}_{\mathrm{ijk}} = \left\{\frac{y^o_j - y^o_i}{(S^o_{ij})^2} - \frac{y^o_k - y^o_i}{(S^o_{ik})^2}\right\}\delta x_i + \left\{\frac{x^o_k - x^o_i}{(S^o_{ik})^2} - \frac{x^o_j - x^o_i}{(S^o_{ij})^2}\right\}\delta y_i$$
$$-\frac{y^o_j - y^o_i}{(S^o_{ij})^2}\delta x_j + \frac{x^o_j - x^o_i}{(S^o_{ij})^2}\delta y_j + \frac{y^o_k - y^o_i}{(S^o_{ik})^2}\delta x_k - \frac{x^o_k - x^o_i}{(S^o_{ik})^2}\delta y_k + v^{\omega}_{\mathrm{ijk}}$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΟΝΑΔΩΝ

- Οι συντελεστές των διευθύνσεων και των οριζοντίων γωνίων θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν με ένα **συντελεστή ρ** που σχετίζεται με τις μονάδες που χρησιμοποιούνται
- Επειδή προσεγγιστικές τιμές και παρατηρήσεις είναι πολύ κοντά τα γωνιακά μεγέθη πρέπει να εκφράζονται σε **cc.** Για τον ίδιο λόγο τα γραμμικά μεγέθη πρέπει να εκφραστούν σε **cm.**
- **Χρησιμοποιείται ο συντελεστής ρ=20000/π, ο οποίος μετατρέπει τις μονάδες σε cc/cm**

$$-\frac{\mathrm{y_j}-\mathrm{y_i}}{\mathrm{S_{ij}^2}}\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}\right)=-\frac{\mathrm{y_j}-\mathrm{y_i}}{\mathrm{S_{ij}^2}}\frac{200}{\pi}\left(\frac{\mathrm{grad}}{\mathrm{m}}\right)=-\frac{\mathrm{y_j}-\mathrm{y_i}}{\mathrm{S_{ij}^2}}\frac{20000}{\pi}\left(\frac{\mathrm{cc}}{\mathrm{cm}}\right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{o}} = \sqrt{(\mathrm{x}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{o}} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}})^2 + (\mathrm{y}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{o}} - \mathrm{y}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}})^2}$$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{b}} - \mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{o}} = -\frac{\mathrm{x}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{o}} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{o}}}\delta \mathrm{x}_{\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{y}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{o}} - \mathrm{y}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{o}}}\delta \mathrm{y}_{\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{x}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{o}} - \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{o}}}\delta \mathrm{x}_{\mathrm{j}} + \frac{\mathrm{y}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{o}} - \mathrm{y}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{o}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{o}}}\delta \mathrm{y}_{\mathrm{j}} + \mathrm{v}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{S}}$$

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΑ

Πίνακας 1. Οι μερικές παράγωγοι των παρατηρήσεων ως προς τις συντεταγμένες

	x_i	y_i	x_j	y_j	x_k	y_k
δ_{ij}	$-\frac{y_j^o-y_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	$\frac{x_j^o-x_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	$\frac{y_j^o-y_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	$-\frac{x_j^o-x_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	0	0
ω_{ijk}	$\frac{y_j^o-y_i^o}{(S_{ij}^o)^2}-\frac{y_k^o-y_i^o}{(S_{ik}^o)^2}$	$\frac{x_k^o-x_i^o}{(S_{ik}^o)^2}-\frac{x_j^o-x_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	$-\frac{y_j^o-y_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	$\frac{x_j^o-x_i^o}{(S_{ij}^o)^2}$	$\frac{y_k^o-y_i^o}{(S_{ik}^o)^2}$	$-\frac{x_k^o-x_i^o}{(S_{ik}^o)^2}$
S_{ij}	$-\frac{x_j^o-x_i^o}{S_{ij}^o}$	$-\frac{y_j^o-y_i^o}{S_{ij}^o}$	$\frac{x_j^o-x_i^o}{S_{ij}^o}$	$\frac{y_j^o-y_i^o}{S_{ij}^o}$	0	0

Πίνακας 2. Η αναλυτική δομή του πίνακα σχεδιασμού **A** και του διανύσματος των σταθερών όρων **b**

	…	x_i	y_i	…	x_j	y_j	…	x_k	y_k	… θ_i …	
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
δ_{ij}	… 0 … 0	$\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_i}$	$\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial y_i}$	0 … 0	$\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x_j}$	$\frac{\partial\delta_{ij}}{\partial y_j}$	0 … 0	0	0	0 … −1 …	$\delta_{ij}^b-\delta_{ij}^o$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
ω_{ijk}	… 0 … 0	$\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial x_i}$	$\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial y_i}$	0 … 0	$\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial x_j}$	$\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial y_j}$	0 … 0	$\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial x_k}$	$\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial y_k}$	0 … 0 …	$\omega_{ijk}^b-\omega_{ijk}^o$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
S_{ij}	… 0 … 0	$\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_i}$	$\frac{\partial S_{ij}}{\partial y_i}$	0 … 0	$\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}$	$\frac{\partial S_{ij}}{\partial y_j}$	0 … 0	0	0	0 … 0 …	$S_{ij}^b-S_{ij}^o$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮

Ο ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$$\mathrm{N_{ij}} = \sum_{\mathrm{k}} \frac{1}{\sigma_{\mathrm{k}}^2} \mathrm{A_{ki} A_{kj}} \qquad\qquad \mathrm{u_i} = \sum_{\mathrm{k}} \frac{1}{\sigma_{\mathrm{k}}^2} \mathrm{A_{ki} b_k}$$

Πίνακας 3. Η αναλυτική δομή των πινάκων **N** και **u**.

$$\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & \cdots & x_i & y_i & \cdots & x_j & y_j & \cdots & \theta_k & \cdots & \\
\hline
\vdots & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
x_i & \cdots & N(x_i,x_i) & & & & & & & & u(x_i) \\
y_i & \cdots & N(y_i,x_i) & N(y_i,y_i) & & & & & & & u(y_i) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\
x_j & \cdots & N(x_j,x_i) & N(x_j,y_i) & \cdots & N(x_j,x_j) & & & & & u(x_j) \\
y_j & \cdots & N(y_j,x_i) & N(y_j,y_i) & \cdots & N(y_j,x_j) & N(y_j,y_j) & & & & u(y_j) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
\theta_k & \cdots & N(\theta_k,x_i) & N(\theta_k,y_i) & \cdots & N(\theta_k,x_j) & N(\theta_k,y_j) & \cdots & N(\theta_k,\theta_k) & & u(\theta_k) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
\end{array}$$

Ο ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πίνακας 3. Η αναλυτική δομή των πινάκων **N** και **u**.

	…	x_i	y_i	…	x_j	y_j	…	θ_k	…	
⋮	⋱									⋮
x_i	…	$N(x_i,x_i)$								$u(x_i)$
y_i	…	$N(y_i,x_i)$	$N(y_i,y_i)$							$u(y_i)$
⋮		⋮	⋮	⋱						⋮
x_j	…	$N(x_j,x_i)$	$N(x_j,y_i)$	…	$N(x_j,x_j)$					$u(x_j)$
y_j	…	$N(y_j,x_i)$	$N(y_j,y_i)$	…	$N(y_j,x_j)$	$N(y_j,y_j)$				$u(y_j)$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋱			⋮
θ_k	…	$N(\theta_k,x_i)$	$N(\theta_k,y_i)$	…	$N(\theta_k,x_j)$	$N(\theta_k,y_j)$	…	$N(\theta_k,\theta_k)$		$u(\theta_k)$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋱	⋮

- Τα στοιχεία του πίνακα **N** είναι μή μηδενικά όταν τα σημεία i, j, ... συνδέονται μεταξύ τους με παρατηρήσεις
- Οι διορθώσεις των σταθερών προσανατολισμού είναι δυνατό να απαλειφθούν από το σύστημα των κανονικών εξισώσεων για απλοποίηση των υπολογισμών

Ο ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N_{xx}} & \mathbf{N}_{\mathbf{x}\theta} \\ \mathbf{N}_{\mathbf{x}\theta}^{\mathbf{T}} & \mathbf{N}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_x} \\ \mathbf{u}_\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N_{xx}} - \mathbf{N}_{\mathbf{x}\theta}\mathbf{N}_{\theta\theta}^{-\mathbf{1}}\mathbf{N}_{\mathbf{x}\theta}^{\mathbf{T}} \qquad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u_x} - \mathbf{N}_{\mathbf{x}\theta}\mathbf{N}_{\theta}^{-\mathbf{1}}\mathbf{u}_\theta$$

- Η απαλοιφή δεν έχει σχέση με την επιλογή του συστήματος αναφοράς και αναφέρεται μόνο στην απλοποίηση των υπολογισμών και στη δημιουργία υποπινάκων με αγνώστες μόνο τις συντεταγμένες των σημείων

Ο ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πίνακας 3. Η αναλυτική δομή των πινάκων **N** και **u**.

	…	x_i	y_i	…	x_j	y_j	…	θ_k	…	
⋮	⋱									⋮
x_i	…	$N(x_i,x_i)$								$u(x_i)$
y_i	…	$N(y_i,x_i)$	$N(y_i,y_i)$							$u(y_i)$
⋮		⋮	⋮	⋱						⋮
x_j	…	$N(x_j,x_i)$	$N(x_j,y_i)$	…	$N(x_j,x_j)$					$u(x_j)$
y_j	…	$N(y_j,x_i)$	$N(y_j,y_i)$	…	$N(y_j,x_j)$	$N(y_j,y_j)$				$u(y_j)$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋱			⋮
θ_k	…	$N(\theta_k,x_i)$	$N(\theta_k,y_i)$	…	$N(\theta_k,x_j)$	$N(\theta_k,y_j)$	…	$N(\theta_k,\theta_k)$		$u(\theta_k)$
⋮		⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋱	⋮

- Το στοιχείο N(x,x) υπολογίζεται από τη στήλη του **A** που αφορά στο x στο τετράγωνο επί $1/\sigma^2$
- Το στοιχείο N(x,y) υπολογίζεται από τη στήλη του **A** που αφορά στο x επί τη στήλη που αφορά το y επί $1/\sigma^2$
- Το στοιχείο N(y,y) υπολογίζεται από τη στήλη του **A** που αφορά στο y στο τετράγωνο επί $1/\sigma^2$