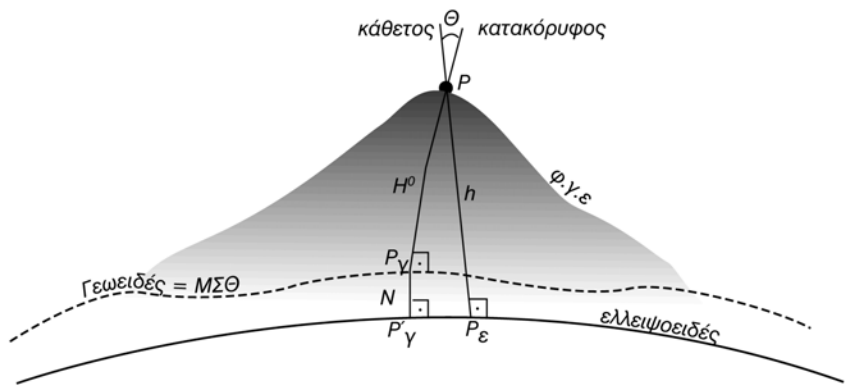
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών
Τομέας Τοπογραφίας-Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας

Εισαγωγή στη Γεωδαισία



ΑΘΗΝΑ 2007

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Γεωδαισία είναι η Γεωεπιστήμη που ασχολείται με μετρήσεις και υπολογισμούς, με σκοπό να προσδιορίσει το σχήμα (μορφή), το μέγεθος (διαστάσεις) και το πεδίο βαρύτητας της γης καθώς και τις μεταβολές τους με τον χρόνο. Ασχολείται επίσης με την αποτύπωση και απόδοση, σε χάρτες ή τοπογραφικά διαγράμματα, τμημάτων της φυσικής γήινης επιφάνειας.

Το αντικείμενο της Γεωδαισίας, στη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών ΕΜΠ, καλύπτεται από πολλά υποχρεωτικά και κατ' επιλογήν υποχρεωτικά μαθήματα, όπου αναπτύσσονται αναλυτικά οι μέθοδοι, τα όργανα οι πρακτικές και οι εφαρμογές που μπορεί να συναντήσει ένας διπλωματούχος Αγρονόμος-Τοπογράφος Μηχανικός.

Το Μάθημα Γεωδαισία Ι (Εισαγωγή στη Γεωδαισία) έχει σκοπό να εισάγει τον /την σπουδαστή/στρια στις μεθόδους, στα όργανα, στις μετρήσει και στους υπολογισμούς που χρησιμοποιεί η Γεωδαισία για να προσδιορίσει τις θέσεις σημείων πάνω στη φυσική γήινη επιφάνεια, η οποία είναι ο χώρος και το αντικείμενο μέτρησης, αποτύπωσης και μελέτης της Γεωδαισίας.

Έμφαση δίνεται στις επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται για να αποδώσουν το σχήμα και το μέγεθος της γης καθώς και στους υπολογισμούς στο επίπεδο και στην επιφάνεια της σφαίρας.

Οι Σημειώσεις « Εισαγωγή στη Γεωδαισία» φιλοδοξούν να καλύψουν την θεωρία του Μαθήματος αυτού. Τυχόν συμπληρωματική θεωρία θα δίνεται μαζί με τις Ασκήσεις, που βοηθούν στην κατανόηση και εφαρμογή της θεωρίας και οι οποίες αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του μαθήματος.

Αθήνα Μάρτιος 2006

Οι συγγραφείς

1. Εισαγωγή

Χ. Μπιλλήρης

1.1 Ορισμός – Αντικείμενο

Γεωδαισία είναι η Γεωεπιστήμη που ασχολείται με παρατηρήσεις, μετρήσεις και υπολογισμούς, με σκοπό να προσδιορίσει το σχήμα (μορφή), το μέγεθος (διαστάσεις) και το πεδίο βαρύτητας της γης και τις μεταβολές τους στο χρόνο. Ως σχήμα της γης στην περίπτωση αυτή θεωρείται το σχήμα του γεωειδούς, που ορίζεται ως η ισοδυναμική επιφάνεια του γήινου πεδίου βαρύτητας που προσαρμόζεται καλύτερα στη μέση στάθμη των θαλασσών. Επίσης μετρά και απεικονίζει περιοχές της Φυσικής Γήϊνης Επιφάνειας (Φ.Γ.Ε.) με όλα τα φυσικά και τεχνητά χαρακτηριστικά τους.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι η Γεωδαισία σχετίζεται άμεσα με την Αστρονομία και τη Γεωφυσική, καθώς και με την Χαρτογραφία, επιστήμες με τις οποίες έχει αρκετές επικαλύψεις.
Κατ΄ επέκταση καλύπτει, σε ότι αφορά αυτούς τους γνωστικούς τομείς, και τη Σελήνη και τους άλλους πλανήτες.

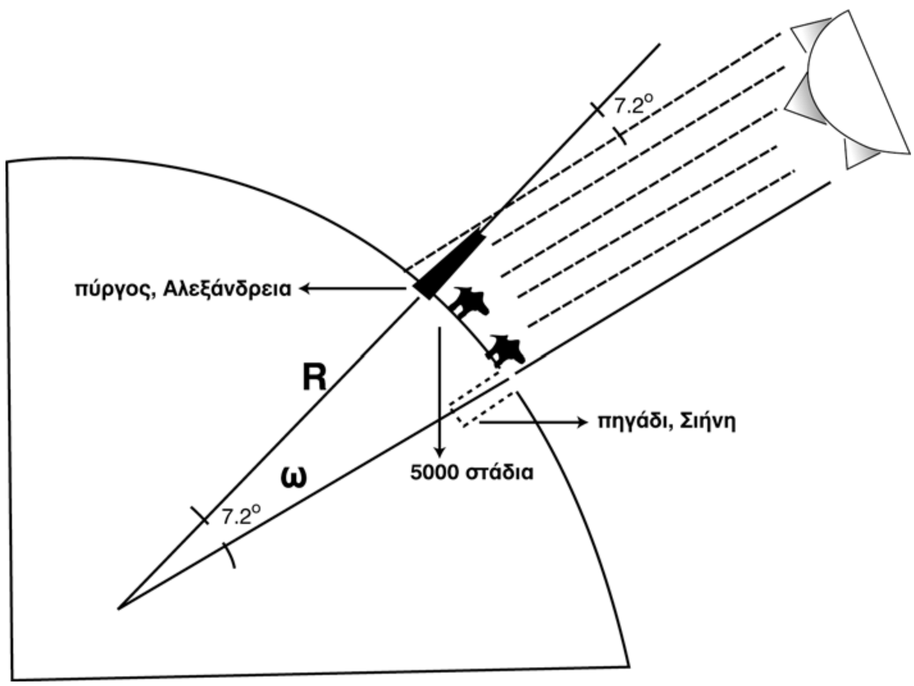
1.2 Ιστορικά

Η Γεωδαισία έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα, όταν οι αρχαίοι κάτοικοι της Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας αναγκασμένοι να επαναπροσδιορίσουν τις ιδιοκτησίες τους από τις πλημμύρες των ποταμών Νείλου, Ευφράτη και Τίγρη αντίστοιχα, έκαναν τις πρώτες γεωδαιτικές εργασίες.
Από πολύ παληά επίσης οι Αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν με την Γεωδαισία προσπαθώντας να προσδιορίσουν το σχήμα και το μέγεθος της Γης. Οι πρώτες αναφορές ξεκινούν από την εποχή του Ομήρου (900-800 π.Χ.) που πίστευε ότι η γη είναι ένας κυρτός δίσκος που περιβάλλεται από τους ωκεανούς. Ο Πυθαγόρας και η σχολή του, 580-500 π.Χ. θεωρούνται οι πρώτοι που πίστεψαν σε μια σφαιρική γη. Ο Φιλόλαος αργότερα διατύπωσε ότι η γη είναι ένας πλανήτης που περιστρέφεται όπως και τα άλλα ουράνια σώματα γύρω από μία εστία (κεντρική φωτιά).

Ο Πλάτων παραδέχθηκε ότι η γη είναι στρογγυλή, πολύ μεγάλη, απομονωμένη και ακίνητη στο κέντρο του κόσμου. Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ) μαθητής του Πλάτωνα, υποστήριξε τη θεωρία του Πλάτωνα με επιχειρήματα που διατύπωσε στο έργο του «Περί Ουρανού», μετά από παρατηρήσεις για το κυκλικό σχήμα της σκιάς της γης, που διαγράφεται στη σελήνη, κατά τη διάρκεια μιάς έκλειψης, και τις μεταβολές των θέσεων του ήλιου και των άστρων που διαπίστωσαν όσοι ταξίδευαν με κατεύθυνση βορρά-νότου.

Ο τίτλος όμως του πατέρα της γεωδαισίας αποδίδεται στον Ερατοσθένη (276-192 π.Χ.) που είναι ο πρώτος που προσδιόρισε το μέγεθος της γης, από μετρήσεις θεωρώντας την σφαίρα.

Ο Ερατοσθένης παρατήρησε ότι (Σχ.1.1) κατά το θερινό ηλιοστάσιο οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν κάθετα σ΄ ένα πηγάδι της Σιήνης (σημερινό Ασσουάν) ενώ την ίδια μέρα στην Αλεξάνδρεια, που βρίσκεται περίπου στον ίδιο μεσημβρινό με την Σιήνη, οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν υπό γωνία 7^o 12΄ σ΄ ένα πύργο, την οποία υπολόγισε με τη βοήθεια της σκιάς του πύργου.. Η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων εκτιμήθηκε ότι είναι 5000 στάδια υπολογίζοντας την μ΄ ένα καραβάνι καμήλων ή κατά άλλη εκδοχή εκτιμώντας την από Αιγυπτιακούς κτηματολογικούς χάρτες, που βασίζονταν σε βηματόμετρα. Επίσης αμφιβολίες υπάρχουν ως προς το ποιό στάδιο χρησιμο-ποίησε σαν μονάδα μήκους, το Αιγυπτιακό ή το Αττικό.



Σχήμα 1.1. *Ο υπολογισμός της ακτίνας της γης κατά τον Ερατοσθένη, 3ος π.Χ. αι.*

Έτσι η ακτίνα της γης κατά Ερατοσθένη έχει τιμές 6267 km και 7380 km χρησιμοποιώντας αντίστοιχα, το Αιγυπτιακό στάδιο = 157.7 m ή το Αττικό = 185 m, και με αποχές μόλις –2% και + 15.5% αντίστοιχα από τη μέση ακτίνα καμπυλότητας της γης (6371 km).

Αργότερα, 1670 μ.Χ., ο Γάλλος Αστρονόμος Picard (1620-1683) εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο στη Γαλλία και χρησιμοποιώντας πρώτος τηλεσκόπιο με σταυρόνημα έδωσε τιμή για την ακτίνα της γης 6372km με αποχή +0.01% από την R_m. Η τιμή αυτή της ακτίνας της γης βοήθησε αργότερα τον Newton να επαληθεύσει το νόμο της βαρύτητας.

Οι πρώτες αμφιβολίες για το σφαιρικό σχήμα της γης, ξεκινούν την ίδια εποχή (1672) από τις σημαντικές παρατηρήσεις του Γάλλου Αστρονόμου I. Richer, ότι το μήκος του εκκρεμούς που μετρούσε τα δευτερόλεπτα ήταν πιο μικρό κατά 2.8mm στην Gayenne (Γαλλική Γουϊάνα, Ν. Αμερική, 5^o Βόρειο Πλάτος) απ΄ ότι ήταν στο Παρίσι, για να έρθει 15 χρόνια αργότερα ο Newton να διατυπώσει την άποψη ότι το σχήμα της γης είναι ένα πεπλατυσμένο στους πόλους ελλειψοειδές εφαρμόζοντας τους νόμους της βαρύτητας και της κίνησης.

Έτσι, τα πρώτα μοντέλα της γης, πεπλατυσμένα στους πόλους, ανήκουν στον Newton (1643-1727) και Huygens (1629-1695) (διατύπωση των αρχών της φυγόκεντρης δύναμης) που έδωσαν τιμές για την επιπλάτυνση αντίστοιχα 1/230και 1/578, ενώ σήμερα η τιμή της επιπλάτυνσης που έχει προκύψει από δορυφορικές παρατηρήσεις είναι περίπου 1/298.

Οι Baeyer και Bessel μέτρησαν ένα τόξο λοξό προς τον μεσημβρινό, στην Ανατολική Πρωσσία (1831-1833), για να υπολογίσει ο Bessel (1840) τις διαστάσεις για το ελλειψοειδές που φέρει το όνομά του, a=6378397,155m και f=1/299.153. Το ελλειψοειδές αυτό χρησιμοποιήθηκε στην Ελλάδα στο παληό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς.

Τα τέλη του $19^{ου}$ και οι αρχές του 20ου αιώνα χαρακτηρίζονται ως η περίοδος του γεωειδούς, γιατί ήταν πια δυνατόν (μετά από επινόηση νέων οργάνων για αστρονομικές, γεωδαιτικές και βαρυτομετρικές εργασίες) να προσδιορίζονται το γεωειδές και οι αποχές του από τα ελλειψοειδή αναφοράς. Τα κυριώτερα ελλειψοειδή αναφοράς εκείνης της εποχής είναι : του μεγάλου γερμανού γεωδαίτη Helmert (1907) με διαστάσεις α=6378200m και f=1/298.3 και του J.F. Hayford (1909) με διαστάσεις α=6378388m και f=1/297.0.

Επειδή όμως κάθε χώρα χρησιμοποιούσε το δικό της ελλειψοειδές, επικράτησε κάποια σύγχυση στη σύγκριση των γεωδαιτικών αποτελεσμάτων στα σύνορα των διαφόρων χωρών. Γι΄αυτό η Διεθνής Ένωση Γεωδαισίας και Γεωφυσικής (IUGG) αποφάσισε να καθιερώσει (1924) το ελλειψοειδές του Hayford ως Διεθνές Ελλειψοειδές για παγκόσμια αναφορά. Το ελλειψοειδές αυτό χρησιμοποιήθηκε στον πρώτο ενιαίο Ευρωπαϊκό Τριγωνισμό (Ευρωπαϊκό Datum 1950, E.D.50), με αρχή το Potsdam.

Αντίστοιχα μετά τις παρατηρήσεις σε τεχνητούς δορυφόρους εγκρίθηκε το GRS 1967, ενώ σήμερα χρησιμοποιείται το ελλειψοειδές GRS 1980 με α=6378137 m και f=1/298.257.

Μεγάλες εξελίξεις στη γεωδαισία σημειώθηκαν μετά το 1950, ύστερα από την τεχνολογική εξέλιξη και εφαρμογή των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και της Μικροηλεκτρονικής, που επέτρεψαν την δημιουργία νέων γεωδαιτικών οργάνων για την ακριβή μέτρηση αποστάσεων, την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών αλλά και την εκτόξευση τεχνητών δορυφόρων, που αποτέλεσαν ένα νέο γεωδαιτικό εργαλείο με νέες μεθοδολογίες και τέτοιες δυνατότητες, ώστε ο νέος κλάδος της Δορυφορικής Γεωδαισίας να μπορεί σήμερα να συμβάλει αποφασιστικά στις τρέχουσες γεωδαιτικές εργασίες αλλά και στη μελέτη προβλημάτων της Γεωδυναμικής και της Γεωφυσικής, όπως οι μετακινήσεις του στερεού φλοιού της Γης.

1.3 Γεωδαιτικές μέθοδοι – μετρήσεις

Για να επιτύχει τους σκοπούς της η γεωδαισία μετρά γεωμετρικά κυρίως μεγέθη όπως διευθύνσεις και γωνίες, μήκη, υψόμετρα και υψομετρικές διαφορές καθώς και δυναμικά μεγέθη, όπως ένταση και διεύθυνση του διανύσματος του πεδίου βαρύτητας της γης.

Η κλασσική γεωδαισία χρησιμοποιεί τις μετρήσεις αυτές για να προσδιορίσει τις θέσεις ενός μεγάλου αριθμού σημείων (γεωδαιτικά σημεία) χωρίζοντας τη γεωδαιτική διαδικασία τόσο των μετρήσεων όσο και των υπολογισμών σε οριζοντιογραφία και υψομετρία. Οι μέθοδοι που ακολουθούνται στην οριζοντιογραφία είναι του τριγωνισμού ή/και του τριπλευρισμού, ενώ στην υψομετρία της χωροστάθμησης. Αντίστοιχα υλοποιούνται δίκτυα οριζοντίου ή κατακορύφου ελέγχου, (κλασσικός διαχωρισμός), ενώ σήμερα τα γεωδαιτικά δίκτυα υλοποιούνται στο χώρο, με τελικό σκοπό την ίδρυση και υλοποίηση ενός Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς.

Οι θέσεις των σημείων στο χώρο μπορούν να εκφραστούν και αυτές χωριστά για την οριζοντιογραφία και την υψομετρία. Κάθε σημείο προβάλλεται κάθετα πάνω σ΄ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής που επιλέγεται έτσι ώστε να προσαρμόζεται καλύτερα στο γεωειδές που με ικανοποιητική προσέγγιση ταυτίζεται με τη μέση στάθμη των θαλασσών. Η θέση ενός σημείου πάνω στο ελλειψοειδές (οριζοντιογραφία) ορίζεται με το γεωδαιτικό (ή γεωγραφικό) πλάτος (φ) και το γεωδαιτικό ή (γεωγραφικό) μήκος (λ). Η τρίτη διάσταση το υψόμετρο (h) ορίζεται με την απόσταση του σημείου από το ελλειψοειδές.

Η επιλογή ενός Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς και ο προσδιορισμός των γεωδαιτικών συντεταγμένων φ,λ,h των σημείων σ' αυτό αποτελεί την κύρια πρακτική εφαρμογή της Γεωδαισίας και γίνεται με ευθύνη κρατικών υπηρεσιών.

Με τις μεθόδους της Κλασσικής Γεωδαισίας δεν ήταν δυνατόν να καλυφθούν πολύ μεγάλες εκτάσεις της Γης, αφού είναι απαραίτητο να υπάρχει αμοιβαία ορατότητα ανάμεσα στα διάφορα γεωδαιτικά σημεία για να μπορούν να γίνουν μετρήσεις. Αυτό είχε ως επακόλουθο η κάθε χώρα να έχει ανεξάρτητο γεωδαιτικό δίκτυο και δικό της γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς.

Η χρήση όμως των τεχνητών δορυφόρων και η χρήση συστημάτων μετρήσεων αποστάσεων με ακτίνες Laser καθώς και η καθιέρωση του συστήματος GPS (Global Positioning System) επέτρεψε μετρήσεις πολύ μεγάλων αποστάσεων και τη δημιουργία τρισδιάστατων γεωδαιτικών δικτύων, ενώ η ανάπτυξη των Η/Υ την ενιαία επίλυση (υπολογισμός συντεταγμένων των κορυφών του δικτύου) στο χώρο για τις θέσεις των γεωδαιτικών σημείων που μπορούν να εκφράζονται τώρα με καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z) ή και ελλειψοειδείς (φ,λ,h) σε ένα παγκόσμιο Σύστημα Αναφοράς. Λόγω των σχετικών κινήσεων των τεκτονικών πλακών του στερεού φλοιού της γης μαζί με τις συντεταγμένες του σημείου δίνεται και ο χρόνος παρατήρησης (χώρος 4 διαστάσεων).

Η ολοκλήρωση μιάς γεωδαιτικής εργασίας περνάει κατά κανόνα από το στάδιο της απλής ή σύνθετης μέτρησης (εργασία υπαίθρου) για να καταλήξει στο αποτέλεσμα, συνήθως μετά από μία υπολογιστική ή και σχεδιαστική διεργασία (εργασία γραφείου). Το αποτέλεσμα μπορεί να δοθεί με τη μορφή ενός απλού διαγράμματος, ενός σύνθετου χάρτη πάνω σε ένα επίπεδο χαρτί, ή με τη μορφή αριθμητικών αποτελεσμάτων πινακοποιημένων ή αποθηκευμένων στην μνήμη κάποιου Ηλεκτρονικού Υπολογιστή ή ακόμα μπορεί να δοθεί και σε μικτή μορφή.

Ανάλογα με το αντικείμενο, την επιζητούμενη τελική ακρίβεια, την έκταση μίας εργασίας και την επιφάνεια αναφοράς που χρησιμοποιείται για την αναγωγή των γεωδαιτικών μετρήσεων και τους υπολογισμούς, υπάρχει ονομαστικός διαχωρισμός του μέρους της γεωδαισίας που αναφέρεται σ΄αυτό. Έτσι το μέρος της γεωδαισίας που ασχολείται με μετρήσεις και υπολογισμούς που αναφέρονται σε περιορισμένες εκτάσεις της φ.γ.ε., και που ως επιφάνεια προβολής της (επιφάνεια αναφοράς) χρησιμοποιεί ένα (οριζόντιο) επίπεδο, συνήθως ονομάζεται «Τοπογραφία»

Αντίθετα, το μέρος της Γεωδαισίας που ασχολείται με μετρήσεις και υπολογισμούς που αναφέρονται σε μεγαλύτερα τμήματα της φ.γ.ε., ή και ολόκληρης της γης και που χρησιμοποιεί ως επιφάνεια αναφοράς ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής, συνήθως ονομάζεται «Ελλειψοειδής Γεωδαισία», ενώ το μέρος της Γεωδαισίας που ασχολείται με το γήϊνο πεδίο βαρύτητας, ονομάζεται «Φυσική Γεωδαισία».Επίσης η Τεχνική Γεωδαισία ασχολείται με την επίλυση τεχνικών θεμάτων αποτύπωσης, χάραξης ή ελέγχου κατασκευών, χρησιμοποιώντας μεθόδους και όργανα υψηλής ακρίβειας συνήθως σε περιορισμένο χώρο.

Η χρήση της Διαστημικής Τεχνολογίας και των τεχνητών Δορυφόρων για γεωδαιτικούς σκοπούς δημιούργησε τη «Τρισδιάστατη ή Δορυφορική Γεωδαισία» (ή Διαστημική Γεωδαισία) που με τα όργανα και τις μεθόδους που χρησιμοποιεί, άλλαξε και βελτίωσε δραματικά τις διαδικασίες των μετρήσεων και τα αποτελέσματα και διηύρυνε τις γεωδαιτικές επιδιώξεις αρχικά με το σύστημα δορυφόρων TRANSIT και μετά με τους δορυφορικούς δέκτες του συστήματος GPS, οι οποίοι ήδη ευρέως χρησιμοποιούνται στις γεωδαιτικές εργασίες.

Τέλος η Θαλάσσια Γεωδαισία και η Υδρογραφία ασχολούνται με την εφαρμογή της γεωδαιτικής τεχνογνωσίας στο θαλάσσιο χώρο.

2. Ο Πλανήτης Γη

Χ. Μητσακάκη

2.1 Η γη

Είναι ο τρίτος σε απόσταση από τον ήλιο πλανήτης του ηλιακού συστήματος και ο πέμπτος σε μέγεθος στο ηλιακό μας σύστημα (μετά τους: Δία, Κρόνο, Ουρανό, Ποσειδώνα).

Σχήμα 2.1. *Η γη από το διάστημα*
Δορυφορική λήψη από την NASA

Γεννήθηκε πριν 4.5 περίπου δισεκατομμύρια χρόνια. Διαθέτει ατμόσφαιρα και υδρόσφαιρα, ιονόσφαιρα και μαγνητόσφαιρα.

Είναι ο μοναδικός πλανήτης με ποσότητα νερού σε υγρή μορφή στην επιφάνειά του. Έτσι, περισσότερο από το 70% της επιφάνειας είναι νερό, ενώ η ***φυσική γήινη επιφάνεια (φ.γ.ε.)*** ή ***τοπογραφική επιφάνεια*** ή ***ανάγλυφο*** αποτελεί περίπου το 28% και παρουσιάζει μοναδική ποικιλότητα.

Η επιφάνεια της γης είναι εξαιρετικά ανώμαλη. Για τον λόγο αυτό <u>δεν μπορεί να περιγραφεί</u> με μαθηματικές σχέσεις. Σε πρώτη προσέγγιση, μπορεί να θεωρηθεί περίπου ***σφαιρική*** **και** η ακτίνα της είναι ***R = 6371km.*** Για αρκετές εφαρμογές (*αστρονομία, χαρτογραφία* κλπ) το σφαιρικό σχήμα είναι αρκετά καλή προσέγγιση του σχήματος της γης.

Μερικά στοιχεία για την γη είναι τα ακόλουθα:

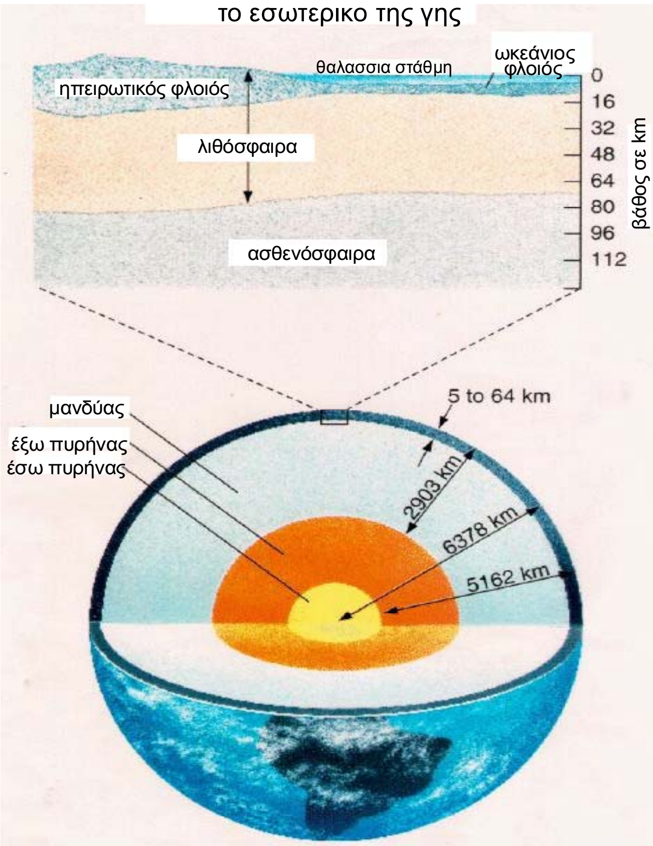
- ***Επιφάνεια*** : 5.1×10^{18} cm^2
- ***Μάζα*** : 5.9742×10^{27} gr
- ***Πυκνότητα***: Μέση πυκνότητα στην επιφάνεια 2.67gr/cm^3 (το νερό έχει πυκνότητα 1.027gr/cm^3). Η γη έχει την μεγαλύτερη πυκνότητα στο ηλιακό σύστημα.
- Η ***ταχύτητα διαφυγής*** ενός σώματος από την έλξη της γης είναι 11180km/sec.

2.2 Εσωτερική Δομή και Σύσταση της Γης

Το εσωτερικό της γης αποτελείται κυρίως από πετρώματα και μέταλλα σε διάφορες χημικές ενώσεις. Διακρίνονται 4 βασικές στοιβάδες:

Εσω πυρήνας : Αποτελείται από στερεό μέταλλο με σύσταση Fe-Ni. Η διάμετρος του είναι περίπου 1220km. Η *πυκνότητα* φθάνει τα 13 gr/cm^3 στο κέντρο του.

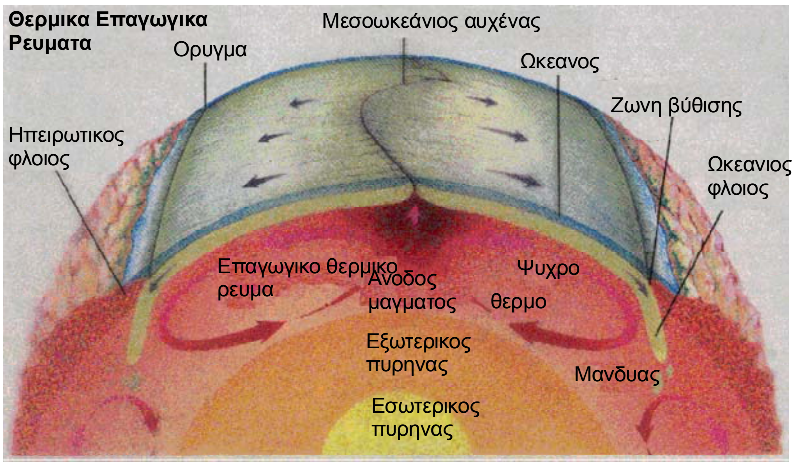
Εξω πυρήνας : Αποτελείται από ρευστό διάπυρο στρώμα με σύσταση Fe-Ni και πάχος 2265 km. *Πυκνότητα:* 9.9 gr/cm^3 στο όριο με τον μανδύα μέχρι 12.7 gr/cm^3 στο όριο με τον έσω πυρήνα.



Μανδύας: Μεγάλης πυκνότητας και κυρίως ομοιόμορφο πυριτικό πέτρωμα με πάχος ~2850km. *Πυκνότητα* 5.7 gr/cm^3 στην βάση της στοιβάδας.

Φλοιός: Αποτελείται από λεπτά πυριτικά πετρώματα. Εχει μεταβλητό πάχος από 5km έως 65km κάτω από ψηλά όρη. Η πυκνότητά του φθάνει μέχρι 3.3 gr/ cm^3 στην βάση του.

Η κάτω επιφάνεια του φλοιού παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστική ασυνέχεια στην πυκνότητα και λέγεται ***επιφάνεια Mohorovičić*** (ή ***επιφάνεια Moho***). Εκτείνεται σ΄ όλη την γη και παρουσιάζεται σε μεταβλητό βάθος από την επιφάνεια (κάτω από ωκεανούς στα ~10km βάθος, ενώ στα ορεινά σε αρκετές δεκάδες km).



Σχήμα 2.3 *Κινήσεις στο εσωτερικό της γης*

Μία διαφορετική διάκριση των πρώτων 400km βάθους της γης είναι ο διαχωρισμός σε λιθόσφαιρα και ασθενόσφαιρα. Η ***λιθόσφαιρα*** (πάχος 50-100 km) είναι το εξωτερικό στρώμα της γης. Περιλαμβάνει και τον ***φλοιό*** και διαθέτει σημαντική *ακαμψία* και *αντοχή*

Γι' αυτό είναι και το μόνο στρώμα όπου μπορούν να συσσωρεύονται ***τάσεις*** (δυνάμεις). Αυτές οι τάσεις εκτονώνονται με σεισμούς. Συνέπεια αυτού είναι το γεγονός ότι ***μόνο στην λιθόσφαιρα συναντώνται εστίες σεισμών***.

Κάτω από την λιθόσφαιρα βρίσκεται η ***ασθενόσφαιρα*** (πάνω ζώνη του μανδύα). Εκτείνεται από τα 50 -100km μέχρι τα 300-400km βάθος και έχει θερμοκρασία κοντά στο σημείο τήξης του μανδύα. Γενικά, η θερμοκρασία αυξάνεται γρήγορα με το βάθος (φθάνει τις 9000^{o}F στον πυρήνα, θερμότερη και από την επιφάνεια του ήλιου). Στο εσωτερικό του διάπυρου ρευστού μανδύα εκδηλώνονται *θερμά επαγωγικά ρεύματα* που μεταφέρουν θερμότητα προς τα ψυχρότερα επιφανειακά στρώματα.

Στις κινήσεις αυτών των ρευμάτων μπορεί να οφείλονται και το ισχυρότατο ***μαγνητικό πεδίο*** της γης, αλλά και η ***κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών***.

Οι γνώσεις για το εσωτερικό της γης προέρχονται κυρίως από την ***μελέτη διάδοσης των σεισμικών κυμάτων*** που μελετά η Σεισμολογία. Υπάρχουν ***δύο*** βασικές κατηγορίες κυμάτων: ***τα διαμήκη κύματα (compressional) P και τα εγκάρσια (shear) S***. Στα στερεά μέρη του εσωτερικού της γης διαδίδονται και τα δύο είδη. Στα ρευστά μόνο τα P. Είναι γνωστό ότι η *διαδρομή* που ακολουθούν τα κύματα και ο *χρόνος μετάδοσης* τους εξαρτάται από την ***κατανομή της πυκνότητας των πετρωμάτων*** στο εσωτερικό της γης. Ετσι, μπορούν να προκύψουν πληροφορίες για την σύσταση του εσωτερικού της γης.

2.3 Η Γη και οι Κινήσεις της

Η γη σαν μέρος του γαλαξία κινείται μαζί με τον γαλαξία μας μέσα στο σύμπαν ως προς άλλους γαλαξίες. Ακόμα κινείται μαζί με το ηλιακό σύστημα μέσα στον γαλαξία μας.
Η Γεωδαισία, όμως, ενδιαφέρεται και μελετά την κίνηση της γης περί τον ήλιο και κυρίως τις κινήσεις που εκτελεί περί τον εαυτό της καθώς και τις κινήσεις του άξονα περιστροφής της αλλά και αυτές που συμβαίνουν στην επιφάνειά τους.

2.3.1 Η Εκλειπτική

Διαγράφει, όπως και οι άλλοι πλανήτες, *ελλειπτική τροχιά* γύρω από τον ήλιο εκτελώντας *μία πλήρη περιστροφή μέσα σ΄ ένα χρόνο* με φορά αντίστροφη των δεικτών του ρολογιού. Η τροχιά αυτή είναι γνωστή σαν ***εκλειπτική***. Η *μέση ταχύτητα περιστροφής της γης* πάνω στην εκλειπτική είναι της τάξης των 29.8km/sec.

Η τροχιά αυτή είναι σχεδόν κυκλική, αλλά παρουσιάζει κάποια μικρή εκκεντρότητα (δηλαδή, το πραγματικό σχήμα της τροχιάς είναι έλλειψη). Η εκκεντρότητα, που εκφράζει πόσο αποκλίνει η τροχιά από κύκλο, μεταβάλλεται με περίοδο 100 000 ετών και οι τιμές κυμαίνονται από 0.01 μέχρι και το πολύ 0.05. Σήμερα είναι της τάξης του 0.017, δηλαδή τιμή που δείχνει ότι η τροχιά της γης περί τον ήλιο είναι σχεδόν κυκλική.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ***ετήσια κίνηση της γης*** περιγράφεται από τους νόμους της Ουράνιας Μηχανικής, δηλαδή θεωρώντας την γη και τ' άλλα ουράνια σώματα σαν υλικά σημεία. Θεωρώντας, λοιπόν, την γη σαν υλικό σημείο σε σχέση με τις διαστάσεις του ηλιακού συστήματος, η **ετήσια κίνηση της γης** περιγράφεται από τους ***τρεις νόμους της πλανητικής κίνησης*** του *Kepler*.

Αυτοί σε συντομία είναι οι ακόλουθοι:

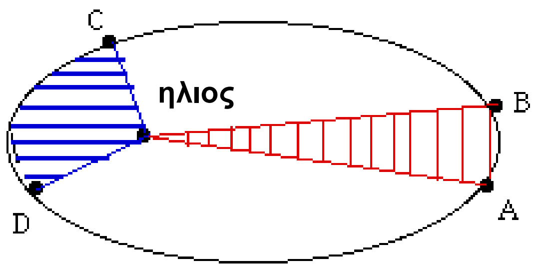
(α) Η τροχιά κάθε πλανήτη είναι έλλειψη με τον ήλιο στην μια εστία της.

(β) Ένας πλανήτης κινείται πάνω στην τροχιά του με σταθερή *επιφανειακή ταχύτητα*. Δηλαδή, η *ακτινική απόσταση* του πλανήτη από τον ήλιο διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

(γ) Οι λόγοι των τετραγώνων των περιόδων περιστροφής των πλανητών (**T**) είναι ίσοι με τους λόγους των κύβων του μήκους των ημιαξόνων (**a**) των ελλειπτικών τροχιών:

$$\mathbf{T^2/a^3} = \text{σταθερό.}$$

Λόγω του δεύτερου νόμου η γη κινείται ταχύτερα όταν είναι κοντά στον ήλιο. Μια πλήρης περιστροφή αποτελεί το ***αστρικό έτος*** (365,242199 ημέρες ***ατομικού χρόνου*** περίπου).



Σχήμα 2.4 *Κίνηση της γης στην εκλειπτική και 2ος νόμος του Kepler*

Το πλησιέστερο στον ήλιο σημείο της γήινης τροχιάς λέγεται ***περιήλιο*** και απέχει σήμερα 147 090 000km από τον ήλιο. Η γη φθάνει στο σημείο αυτό περίπου στις 4 Ιανουαρίου. Το πιο απόμακρο σημείο γνωστό σαν ***αφήλιο***, απέχει 152 000 000 km και η γη το συναντά έξη μήνες αργότερα.

2.3.2 Κινήσεις της γης περί τον εαυτό της

Ημερήσια περιστροφή

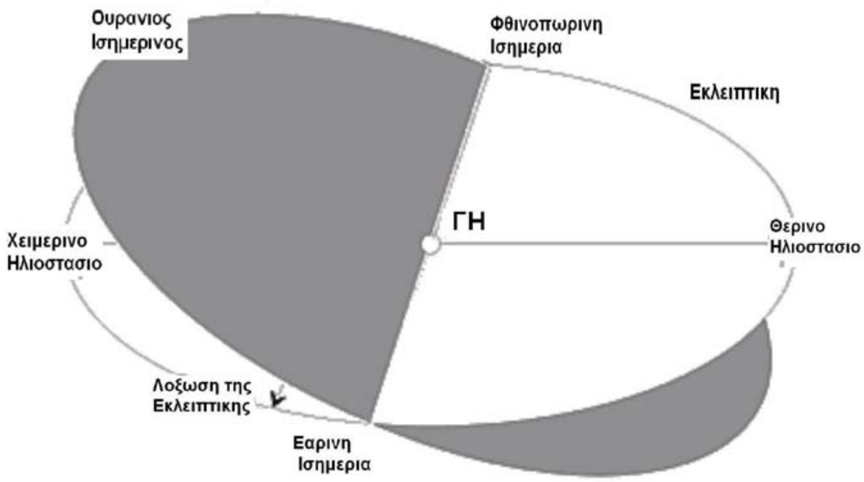
Η γη περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της, εκτελώντας μία πλήρη περιστροφή ανά μία αστρική ημέρα ή ανά 0.997270 ημέρες ***ατομικού*** (δηλ. συμβατικού) ***χρόνου***. Για την ***ημερήσια κίνησή της*** η γη θεωρείται ως υλικό σώμα ή ακριβέστερα σαν γυροσκόπιο (σβούρα).

Σχήμα 2.5 *Περιστροφή περί άξονα*

Το επίπεδο του ισημερινού της γης σχηματίζει με το επίπεδο της εκλειπτικής κλίση (γωνία) 23° 27΄ που λέγεται ***λόξωση της εκλειπτικής***.

Αυτή η ***κλίση*** ή ***λόξωση*** είναι αιτία και για την **ύπαρξη των εποχών** και έχει κυμανθεί 22°.1 έως 24°.5 από τα τελευταία 700 000 χρόνια.
Όταν η κλίση ήταν μεγαλύτερη υπήρχε εντονότερη αντίθεση καιρικών συνθηκών ανάμεσα στο καλοκαίρι και στο χειμώνα, ενώ οι πολικές και τροπικές ζώνες επεκτείνονταν σε βάρος των εύκρατων ζωνών.

Στην περίοδο της μικρότερης κλίσης η προσπίπτουσα ηλιακή ακτινοβολία κατανέμεται πιο ομοιόμορφα μεταξύ χειμώνα και καλοκαιριού, ενώ εμφανίζεται μεγαλύτερη διαφορά στην ηλιακή ακτινοβολία μεταξύ πόλων και ισημερινού.

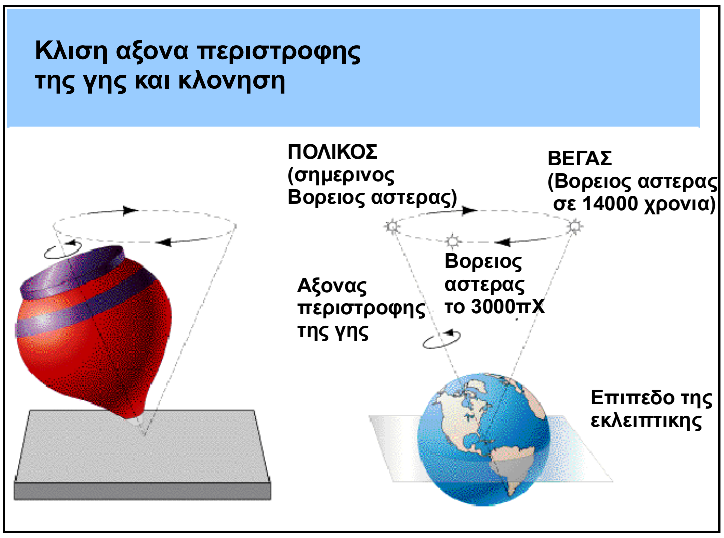


Σχήμα 2.6 *Η λόξωση και οι εποχές του έτους*

Η ***ταχύτητα περιστροφής*** *της γης περί τον εαυτό της* στον ισημερινό είναι της τάξης των 465m/sec. Αυτή η ταχύτητα περιστροφής ήταν πολύ μεγαλύτερη και, συνεπώς, η διάρκεια της ημέρας πολύ μικρότερη. Πριν περίπου 2 δισεκατομμύρια χρόνια η διάρκεια της ημέρας ήταν μόλις 12 ώρες.

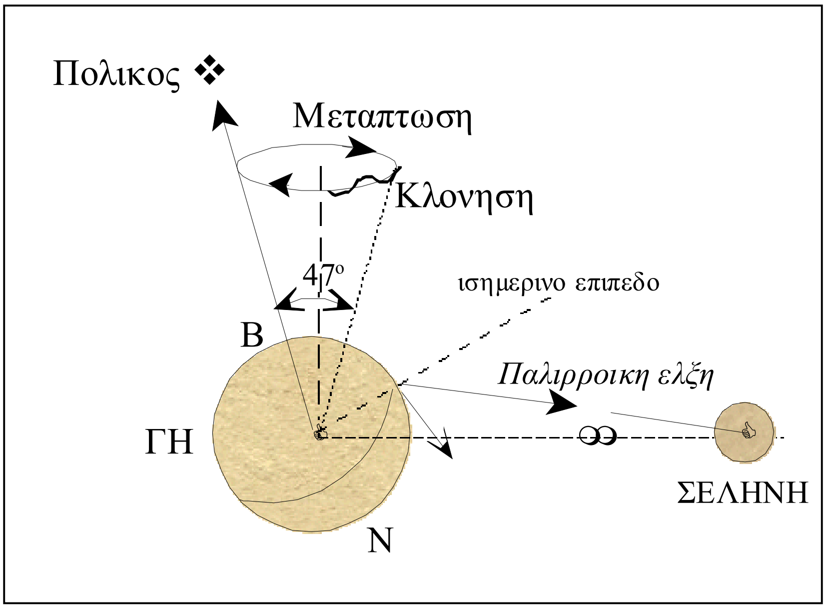
Μετάπτωση

Ας σημειωθεί ότι η περιστροφή της γης περί τον εαυτό της επηρεάζει το σχήμα της. Έτσι, αντί για σφαιρικό είναι ***ελαφρά διογκωμένο στον Ισημερινό***. Η διόγκωση αυτή οφείλεται στην φυγόκεντρο δύναμη που παράγεται από την περιστροφή της γης. Τόσο η *έλξη* που ασκείται από τον ήλιο και την σελήνη πάνω στην έξαρση της γης στον ισημερινό, όσο και η



Σχήμα 2.7 *Μετάπτωση και επίδραση στον Βόρειο αστέρα*

κλίση των $23^{o}.5$ του άξονα περιστροφής ως προς την κάθετο στην εκλειπτική, είναι οι κύριες αιτίες που *ο άξονας της ημερήσιας περιστροφής της γης* περιστρέφεται γύρω από την κάθετο στην εκλειπτική και διαγράφει *κώνο*. Το φαινόμενο είναι γνωστό ως ***μετάπτωση***. Χρειάζονται <u>*25.800 χρόνια*</u> για να διαγράψει ο άξονας περιστροφής της γης μια πλήρη κωνική επιφάνεια



Σχήμα 2.8 *Μετάπτωση και κλόνηση του άξονα περιστροφής της γης*

Λόγω της κλίσης των 23.^{o}5 του άξονα περιστροφής της γης η ***βαρυτική έλξη*** που ασκεί η σελήνη και ο ήλιος στους δύο πόλους έχει διαφορετική ένταση. Το αποτέλεσμα θα ήταν ο άξονας περιστροφής να έρθει σε κάθετη θέση ως προς την εκλειπτική (θέση της ελάχιστης ενέργειας). Εξ αιτίας, όμως, της *γυροσκοπικής συμπεριφοράς* της γης ο άξονας περιστροφής της κάνει κυκλική κίνηση (σαν μία *σβούρα*) σε διεύθυνση 90^o ως προς την επιβαλλόμενη δύναμη έλξης της σελήνης και του ήλιου.

Κλόνηση

Ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής της γης παρουσιάζει και πρόσθετες διακυμάνσεις με *περιοδικό* χαρακτήρα (***φαινόμενο κλόνησης***). Κύρια αιτία αυτής της κίνησης είναι η κλίση της τροχιάς της σελήνης κατά 5^o ως προς την εκλειπτική.

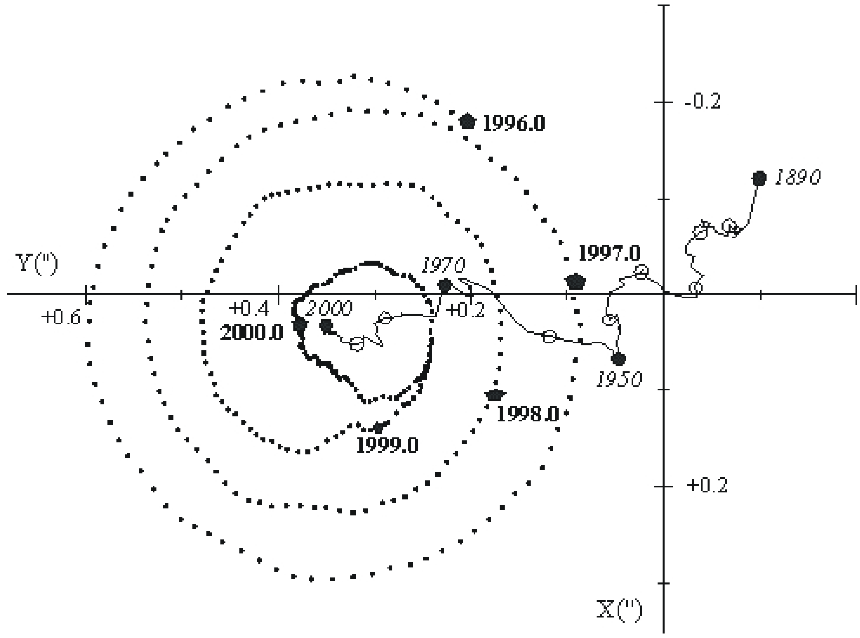
Η κλόνηση εμφανίζεται σαν κυματοειδής κίνηση πάνω στην φέρουσα βασική τροχιά του κώνου της μετάπτωσης. Ο πιο σημαντικός όρος της κλόνησης έχει περίοδο 18.6 χρόνια και το πλάτος του φθάνει τα 17".

Η μετάπτωση και η κλόνηση είναι κινήσεις που μπορούν να προβλεφθούν με μοντέλα και να προσδιορισθούν

Κίνηση του πόλου

Τέλος, φαίνεται ότι ο άξονας περιστροφής της γης μετακινείται αρκετά μέτρα σε σχέση με την επιφάνεια της γης (***φαινόμενο της κίνησης του πόλου***). Η κίνηση του πόλου αποτελείται κυρίως από δύο περιοδικές συνιστώσες : μία *με περίοδο 14 μήνες* ***(κίνηση Chandler),*** και μία με *περίοδο ενός έτους*.

Όπως, όμως, φαίνεται και από το σχήμα 9 υπάρχουν και απρόβλεπτες διακυμάνσεις στη τροχιά της κίνησης του πόλου με την πάροδο του χρόνου. Οι κινήσεις αυτές παρακολουθούνται και προσδιορίζονται τα μεγέθη τους από μετρήσεις.



Σχήμα 2.9 *Κίνηση του πόλου για τα έτη 1996-2000. Η συνεχής γραμμή είναι η μέση μετακίνηση του πόλου Περιστροφής της για τα έτη 1890-2000.[IERS]*

Έτσι, το 1899 ιδρύθηκε η Διεθνής Υπηρεσία Πλάτους (*I*nternational *L*atitude *S*ervice, ***ILS***) για να συντονίζει τις παρατηρήσεις της κίνησης του πόλου. Σήμερα, η κίνηση του πόλου παρακολουθείται από την Διεθνή Υπηρεσία Περιστροφής της Γης ***IERS*** (*I*nternational *E*arth *R*otation *S*ervice).

Ο προσδιορισμός της κίνησης του πόλου είναι σημαντικός για την γεωδαισία γιατί σχετίζεται με τον ορισμό του παγκόσμιου συστήματος αναφοράς, όπου αναφέρονται οι γεωδαιτικές μετρήσεις σε παγκόσμια κλίμακα.

2.4 Το Πεδίο Βαρύτητας της Γης

2.4.1 Η θεωρία του Newton – Παγκόσμια Έλξη

Ο Isaac Newton ήταν ο πρώτος που διατύπωσε τον 17ο αιώνα τους νόμους της κίνησης. Προηγήθηκαν, όμως, ο Galileo Galilei με τις παρατηρήσεις του για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων και ο Johanes Kepler που διατύπωσε τους ***νόμους της πλανητικής κίνησης***. Οι νόμοι αυτοί υπήρξαν καθοριστικοί για την ανάπτυξη των μεθόδων που επέτρεψαν στην γεωδαισία να προσδιορίσει το *σχήμα, το μέγεθος και το πεδίο βαρύτητας της γης*.

Οι τρεις νόμοι της κίνησης σύμφωνα με τον *Newton* είναι:

1ος νόμος Σε απουσία δυνάμεων ένα σώμα σε ηρεμία παραμένει ακίνητο, ενώ σώμα κινούμενο ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα θα διατηρήσει την κίνηση επ΄άπειρον. Είναι γνωστός ως *νόμος της αδρανείας* και διατυπώθηκε αρχικά από τον *Galileo*.

2ος νόμος Όταν μια ***δύναμη*** εφαρμόζεται σε σώμα, το σώμα επιταχύνεται προς την διεύθυνση της ασκούμενης δύναμης. Η ***επιτάχυνση*** είναι ανάλογη με την ένταση της δύναμης και αντιστρόφως ανάλογη προς την μετακινούμενη μάζα.

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{m} \bullet \boldsymbol{\gamma} \qquad \text{ή} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{F}/\mathbf{m}$$

3ος νόμος Οι δυνάμεις εκδηλώνονται πάντα σε ζεύγη με ίσο μέτρο αλλά αντίθετη φορά και ένταση.

Προς τιμήν του *Newton* ορίζεται ***1Newton*** : η δύναμη που κινεί μάζα 1kg με επιτάχυνση 1m/sec^2.

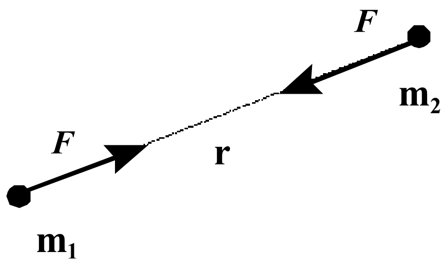
Η σχέση ισχύει και για την ***ελεύθερη πτώση των σωμάτων*** στην γη. Ο Newton ονόμασε την δύναμη που προκαλεί την πτώση ***βαρύτητα*** και την θεώρησε ανάλογη της μάζας **m**. Είναι γνωστό, όμως, ότι η *μέση επιτάχυνση* ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση είναι πάντα σταθερή και ίση με ***g*** =9.81m/sec^2 ή 981gal (προς τιμήν του *Galileo* καλείται 1gal = 1cm/sec^2 ή 1mgal = 10^{-3} gal), ανεξάρτητα από το μέγεθος του σώματος.

Ο *Newton*, αντιλαμβανόμενος ότι η *ελεύθερη πτώση* και η *περιστροφή της σελήνης* περί την γη είναι δύο όψεις κάποιου παγκόσμιου νόμου, διατύπωσε τον ***νόμο της παγκόσμιας έλξης των σωμάτων.***

Υπάρχει δύναμη έλξης μεταξύ κάθε ζεύγους σωμάτων στο σύμπαν.

Ο νόμος διατυπώνεται ως:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{m}_1 * \boldsymbol{m}_2}{\boldsymbol{r}^2}$$



Ο νόμος αναφέρεται σε δύο υλικά σημεία με μάζες $\mathbf{m_1}$ και $\mathbf{m_2}$ που απέχουν απόσταση **r**. Κάθε σημείο ασκεί πάνω στο άλλο *δύναμη ή έλξη* ***F***.
Η ποσότητα **G** είναι η ***παγκόσμια σταθερά έλξης*** και είναι η ίδια σε κάθε εφαρμογή του νόμου. Ειναι μια από τις λίγες βασικές σταθερές στη φύση.

Ο *Newton* διαπίστωσε ότι ο νόμος εφαρμόζεται και σε *πεπερασμένων διαστάσεων σώματα*, όπως είναι τα σφαιρικά συμμετρικά σώματα, που έλκουν ένα άλλο σώμα ως η μάζα τους να είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο τους. Πολλά πλανητικά σώματα είναι σχεδόν σφαιρικά, μεταξύ αυτών και η γη, ο ήλιος και η σελήνη και οι αμοιβαίες κινήσεις τους, προφανώς, διέπονται από τον ***νόμο της παγκόσμιας έλξης***.

Στο ***νόμο της παγκόσμιας έλξης*** πολύ μεγάλη σημασία έχει η ***μάζα***, που συχνά στην καθημερινότητα συγχέεται με το βάρος ενός σώματος. Ομως, το ***βάρος*** ενός αντικειμένου στην επιφάνεια της γης ορίζεται ως η δύναμη της ***βαρυτικής έλξης*** που ασκείται στο αντικείμενο από την γη.

Αν **M** η μάζα της γης και **m** η μάζα του σώματος, τότε το ***βάρος*** του είναι ίσο με :

$$\mathbf{G\,M\,m\,/\,R^2}$$

όπου **R** η ακτίνα της σφαιρικής γης ίση με R~6371km, αφού τόσο απέχει το σώμα από το κέντρο έλξης, δηλαδή το ***κέντρο μάζας της γης***. Η σχέση ισχύει και για την ελεύθερη πτώση των σωμάτων κοντά στην επιφάνεια της γης.
Το βάρος, λοιπόν, ενός σώματος εξαρτάται από την θέση του μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Οσο ένα σώμα απομακρύνεται από το κέντρο μάζας του έλκοντος σώματος χάνει βάρος. Αντίθετα, η μάζα του σώματος είναι σταθερή για την κλασσική Φυσική.

Στην πτώση των σωμάτων, όμως, ρόλο παίζει εκτός από την έλξη και η περιστροφή της γης, λόγω της φυγόκεντρης δύναμης που αναπτύσσεται. Ετσι, ως ***πεδίο βαρύτητας*** της γης θεωρείται το άθροισμα της *έλξης και της περιστροφής της γης* και ***g*** είναι η ***επιτάχυνση*** του πεδίου βαρύτητας της γης.

2.4.2 Το πεδίο βαρύτητας της γης

Από την καθημερινή ζωή είναι γνωστό ότι η πιο εμφανής δύναμη που δρα στην επιφάνεια της γης είναι η ***βαρύτητα***. Οι επιδράσεις της βαρύτητας συναντώνται σε πλήθος φαινόμενα της καθημερινότητας. Επιδρούν στο σχήμα μιας σταγόνας νερού, στο ότι ο ζεστός αέρας ανεβαίνει ενώ ο ψυχρός κατακάθεται, στην καμπύλη τροχιά επιστροφής στη γη που ακολουθεί μια μπάλα. Ο γεωδαίτης στην μελέτη της γεωμετρίας της γης πρέπει να εξετάσει και το ***πεδίο βαρύτητας της γης***. Η σύγχρονη αντίληψη της γεωδαισίας συμπεριλαμβάνει και τις γεωμετρικές όψεις του πεδίου.

Για την μελέτη, όμως, του πεδίου βαρύτητας της γης χρειάζεται η γνώση *της κατανομής της πυκνότητας* στο εσωτερικό της γης. Η κατανομή είναι μόνο προσεγγιστικά γνωστή.

Αν θεωρηθεί **R** = 6371.009km και **GM** = 398600441.5×10^6 m^3/sec^2 (τιμές προσδιορισμένες από την Διεθνή Οργάνωση Γεωδαισίας – *I*nternational *A*ssociation of *G*eodesy, *IAG*, 1995), τότε η μέση τιμή της βαρυτικής έλξης στην επιφάνεια της γης είναι :

$F = 982.022$ [cm/sec^2] × **m**,

όπου **m** η μάζα του ελκυόμενου σώματος.

Αλλά η κατανομή της πυκνότητας στο εσωτερικό της γης είναι ανώμαλη όχι μόνο ακτινικά ως προς το κέντρο αλλά και οριζόντια, ενώ η γη δεν είναι σφαιρική. Κατά συνέπεια, ούτε το πεδίο έλξης είναι ομαλό. Η τιμή της ***F*** στην παραπάνω σχέση είναι μια *μέση παγκόσμια τιμή*.

Η **περιστροφή της γης** περιπλέκει περισσότερο την εικόνα, ακόμα και αν θεωρηθεί ότι η γη είναι *άκαμπτη*. Η δύναμη που αναπτύσσεται από την περιστροφή της γης δεν είναι άλλη από την ***φυγόκεντρο δύναμη***. Η δύναμη αυτή είναι ***φαινομενική*** στην φύση αλλά η δράση της μπορεί να παρατηρηθεί σ΄ όλα τα αντικείμενα που περιστρέφονται με την γη.

Η *διεύθυνσή* της είναι πάντα .κάθετη στον *στιγμιαίο άξονα περιστροφής της γης* και μπορεί να ερμηνευθεί σαν υλοποίηση της κυκλικής, και συνεπώς, επιταχυνόμενης κίνησης. Η δύναμη είναι φαινομενική γιατί, μόλις ένα αντικείμενο ξεφύγει από την τροχιά της γης, μηδενίζεται και η δράση της δύναμης αυτής πάνω του.

Το μέγεθος της φυγόκεντρης δύναμης που δρα πάνω σε υλικό σημείο είναι κατά τα γνωστά:

$$\boldsymbol{f} = \mathbf{p}\, \boldsymbol{\omega}^2\, \mathbf{m},$$

όπου: **p** η κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής

ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης και

m η μάζα του υλικού σημείου.

φυγοκεντρος δυναμη

Σχήμα2.10

Η τιμή της φυγόκεντρης δύναμης στον *Ισημερινό* είναι: $\boldsymbol{f} = 3.392$[cm /sec^2] × **m**

Η τιμή αυτή είναι περίπου το 0.35% της δύναμης έλξης της γης. Προφανώς, στους πόλους η φυγόκεντρος μηδενίζεται.

Όπως αναφέρθηκε το διανυσματικό άθροισμα της βαρυτικής έλξης και της φυγοκέντρου δύναμης λέγεται ***δύναμη βαρύτητας***.

Η δύναμη βαρύτητας είναι ισχυρότερη στους πόλους (αφού η φυγόκεντρος = 0) από ότι στον ισημερινό. Η διαφορά αυτή θα ήταν 0.35% αν η γη ήταν σφαιρική. Στην πραγματικότητα είναι λίγο μεγαλύτερη λόγω του πεπλατυσμένου σχήματος της γης.

Η ***επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας της γης*** (δηλαδή, η *κλίση* του δυναμικού του πεδίου βαρύτητας) είναι το γνωστό ***διάνυσμα της βαρύτητας*** ή ***διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας*** $\vec{g}$. Το γήινο πεδίο βαρύτητας, σαν διανυσματικό πεδίο, διαθέτει *μέγεθος* και *ένταση*.

Το *μέτρο* του $\vec{g}$ λέγεται ***βαρύτητα***, έχει τις φυσικές διαστάσεις της επιτάχυνσης και μετράται σε gals. Η μέση τιμή του στην επιφάνεια της γης είναι της τάξης των **980.3gals**.

Το *μέγεθος* ή *ένταση* του $\vec{g}$ μετριέται με όργανα, όπως τα **βαρυτίμετρα**, και με ακρίβεια μέτρησης σήμερα της τάξης του 1μgal (1μgal = 10^{-6} gal).

Η *διεύθυνση* του διανύσματος της βαρύτητας είναι η **διεύθυνση της κατακορύφου**, η εφαπτομένη στην τροχιά της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων. Ο προσδιορισμός της διεύθυνσης της βαρύτητας είναι πιο χρονοβόρος και επιτυγχάνεται με αστρονομικές παρατηρήσεις.

Οι επιφάνειες όπου το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας είναι σταθερό ονομάζονται ***ισοδυναμικές*** ή ***χωροσταθμικές επιφάνειες.***

Μια παγκόσμια τράπεζα δεδομένων, υπό την εποπτεία του *B*ureau *G*ravimetrique *I*nternational (*BGI)***,*** που είναι οργανισμός της *I*nternational *U*nion of *G*eodesy and *G*eodynamics (*IUGG*), διαθέτει μερικά εκατομμύρια στοιχείων από μετρήσεις του $\vec{g}$.

Τα στοιχεία αυτά δείχνουν ότι, τόσο σε παγκόσμια όσο και σε τοπική κλίμακα, η τιμή του $\vec{g}$ πάνω στην επιφάνεια της γης μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο.

Αυτό οφείλεται:

- στο διαφορετικό υψόμετρο των σημείων παρατήρησης
- στο πεπλατυσμένο σχήμα της γης και
- στην άνιση κατανομή των μαζών στο εσωτερικό της γης

Η διαφορά στην τιμή της βαρύτητας, λόγω της επιπλάτυνσης της γης και της φυγοκέντρου, από την *ελάχιστη τιμή* της στον ισημερινό μέχρι την *μέγιστη* στους πόλους είναι 5200mgal.

Οσον αφορά την επίδραση λόγω υψομέτρου στην τιμή του $\vec{g}$, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η τιμή της βαρύτητας ελαττώνεται με το υψόμετρο (αρνητικό πρόσημο στην σχέση), κατά περίπου 1% της τιμής του g για μεταβολή υψομέτρου κατά 30km. Προσέγγιση αυτής της μεταβολής δίνει η σχέση:

$$\mathbf{d\vec{g}} = -\mathbf{0.308}\left[mGal/m\right]\cdot\mathbf{dH}$$

Γενικά θα πρέπει να σημειωθεί ότι *όλες οι αποκλίσεις* στην τιμή της βαρύτητας, παρ΄ όλο που μπορεί να είναι σημαντικές και εύκολα παρατηρήσιμες, παραμένουν *πολύ μικρές* αν συγκριθούν με το ίδιο το μέγεθος της βαρύτητας.

2.4.3 Το κανονικό πεδίο βαρύτητας

Εάν χρειάζεται η προσέγγιση του πραγματικού πεδίου βαρύτητας της γης με ένα πρότυπο (*μοντέλο*), τότε, συνήθως, επιλέγεται το πεδίο βαρύτητας πού προκύπτει από ένα *ελλειψοειδές εκ περιστροφής* (σώμα που παράγεται από την περιστροφή μιας έλλειψης γύρο από τον μικρό της ημιάξονα) .

Το σχήμα ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι μια ικανοποιητική προσέγγιση του σχήματος της γης. Αρκεί να έχει και μέγεθος όσο και η γη, ως κέντρο του το *κέντρο μάζας της γης* και ο μικρός του ημιάξονας να συμπίπτει με τον *κύριο άξονα αδρανείας της γης*. Θεωρείται, επίσης, ότι το ελλειψοειδές αυτό περιστρέφεται περί τον μικρό του ημιάξονα με γωνιακή ταχύτητα όση και της γης και έχει συμμετρική κατανομή μάζας. Το σώμα αυτό παράγει ένα πεδίο βαρύτητας γνωστό ως ***κανονικό πεδίο βαρύτητας*** και αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα της ***κανονικής βαρύτητας*** $\vec{\gamma}$.

Το κανονικό πεδίο βαρύτητας έχει μεγάλη πρακτική σημασία γιατί, αφ΄ ενός υπολογίζεται εύκολα αναλυτικά και, αφ΄ ετέρου οι αποκλίσεις του από το πραγματικό πεδίο βαρύτητας είναι τόσο μικρές ώστε να μπορούν να θεωρηθούν διαφορικά πρώτης τάξης.
Βασική ιδιότητα αυτού του ελλειψοειδούς αναφοράς είναι ότι:

> η *επιφάνειά του* είναι **ισοδυναμική επιφάνεια** του πεδίου έλξης και περιστροφής του (δηλαδή του ***πεδίου βαρύτητάς του***).

2.5 Η γη και οι παραμορφώσεις της με τον χρόνο

Ο προσδιορισμός του σχήματος της γης είναι ένας από τους βασικούς στόχους της Γεωδαισίας. Το σχήμα της γης, όμως, *μεταβάλλεται με τον χρόνο σε τοπική, περιφερειακή αλλά και παγκόσμια κλίμακα*.
Οι μεταβολές αυτές χαρακτηρίζονται σαν:

> ***αιώνιες*** (είναι αργές κινήσεις με γραμμικό η ερπυστικό χαρακτήρα),
> ***περιοδικές*** (με περίοδο από μερικά δέκατα του sec μέχρι δεκάδες χρόνια) και
> ***επεισοδιακές*** (ξαφνική επιτάχυνση ή και επιβράδυνση).

Η Γεωδαισία ασχολείται, κυρίως, με τις αιώνιες ή περιοδικές και χαμηλής συχνότητας κινήσεις με περιόδους από μερικές ώρες και μεγαλύτερης διάρκειας. Οι κινήσεις που απασχολούν την Γεωδαισία είναι πρόσφατες, από τον τελευταίο αιώνα και μέχρι σήμερα, σε αντίθεση με άλλες Γεωεπιστήμες, όπου ασχολούνται με τις κινήσεις των τελευταίων εκατομμυρίων ετών.

Η συμπεριφορά της γης στις δυνάμεις παραμόρφωσης βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ακραίες συνθήκες: αυτή ενός *<u>πλήρως ρευστού</u>* (σαν την αντίδραση της επιφάνειας των ωκεανών) και ενός *<u>τέλεια άκαμπτου σώματος</u>* (που δεν μπορεί να παραμορφωθεί).

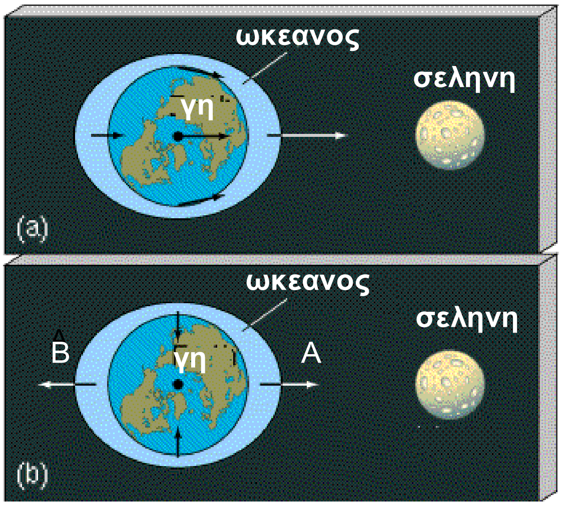
Οι πιο γνωστές από παληά και πιο καλά κατανοητές κινήσεις είναι τα παλιρροϊκά φαινόμενα (***παλίρροιες***), που εκπροσωπούν περιοδική παραμόρφωση του σχήματος της γης.

Άλλες κινήσεις αφορούν τις μετακινήσεις των λιθοσφαιρικών πλακών που απαρτίζουν τον γήινο φλοιό, και μπορεί να είναι ερπυστικού, αλλά, κυρίως, επεισοδιακού χαρακτήρα (σεισμικά φαινόμενα).

Τέλος υπάρχουν και κινήσεις που οφείλονται σε μετεωρολογικά φαινόμενα, στην ανθρώπινη δραστηριότητα κ.α.

2.5.1 Παλίρροιες

Η σελήνη και ο ήλιος ασκούν ελκτικές δυνάμεις λόγω βαρύτητας σε κάθε σημείο επάνω,



Σχήμα 2.11 *Η έλξη της σελήνης και οι θαλάσσιες παλίρροιες*

ψηλότερα ή και εντός της γης. Η γη και η σελήνη (ή αντίστοιχα η γη και ο ήλιος) περιστρέφονται *ως σύστημα* γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους (καλείται **βαρύκεντρο**). Συγκρατούνται αμοιβαία στην τροχιά τους από την **βαρυτική έλξη** (***νόμος Νεύτωνα***), ενώ συγχρόνως απωθούνται αμοιβαία με την ίση και αντίθετης φοράς **φυγόκεντρο δύναμη**. Η δύναμη αυτή προκύπτει από την περιστροφή του συστήματος περί το κοινό κέντρο μάζας τους. Η ισορροπία των δυνάμεων αυτών διατηρείται μόνο στο κέντρο μάζας της γης. Σε άλλα σημεία, όμως, επάνω στην επιφάνεια της γης, ψηλότερα ή και εντός της γης δεν εξισορροπούν με συνέπεια να εκδηλώνονται <u>*περιοδικές μεταβολές στο σχήμα της γης*</u> *(στην στεριά και την θάλασσα) αλλά και της ατμόσφαιρας*, οι ***παλίρροιες***. Αυτές, που είναι γνωστές από την αρχαιότητα είναι οι *θαλάσσιες παλίρροιες*.

Οι δυνάμεις που δημιουργούν το φαινόμενο της παλίρροιας, δρώντας πάνω στους ωκεανούς, έχουν ως αποτέλεσμα τον σχηματισμό δύο συμμετρικών εξογκωμάτων (*παλιρροϊκά εξογκώματα*) από την ανύψωση των ωκεάνιων μαζών κατά μήκος του άξονα του συστήματος γης-σελήνης (σημεία Α και Β στο σχήμα 2.11).

.

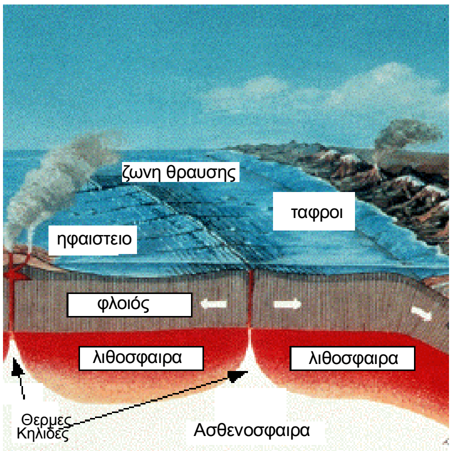
Σε ιδανικές συνθήκες, εάν η γη ήταν όλη λεία και καλυπτόταν ομοιόμορφα από τον ωκεανό μέχρι ορισμένο ύψος, το σχήμα της γης θα ήταν αυτό ενός *πεπλατυσμένου σφαιροειδούς*.

Αυτά τα εξογκώματα, όμως, δεν βρίσκονται ακριβώς επάνω στον άξονα του συστήματος γη-σελήνη. Αντίθετα, λόγω τριβών μεταξύ φλοιού και ωκεανών, η περιστροφή της γης τείνει να παρασύρει το εξόγκωμα, με συνέπεια να *προηγείται κατά μια μικρή γωνία ως προς τον άξονα γης-σελήνης και προς την διεύθυνση της περιστροφής της γης*. Επειδή η έλξη της σελήνης είναι ισχυρότερη στην πλησιέστερη όψη της γης το τελικό αποτέλεσμα είναι η επιβράδυνση του ημερήσιου ***ρυθμού περιστροφής της γης***.

Από μετρήσεις απολιθωμάτων είναι γνωστό ότι 0.5 δισεκατομμύρια χρόνια πριν η ημέρα διαρκούσε λίγο περισσότερο από 22 σημερινές ώρες και το έτος είχε 397 ημέρες. Η επιβράδυνση της περιστροφής εκτιμάται ότι ***επιμηκύνει την ημέρα κατά 1.5millisec ανά αιώνα***.

Στην Ελλάδα, το μέσο εύρος των παλιρροιών είναι της τάξης των 4-40cm, δηλαδή μάλλον μικρό.

2.5.2 Κινήσεις των τεκτονικών πλακών



Σχήμα 2.13 *Σχηματική παράσταση της δομής των τεκτονικών πλακών*

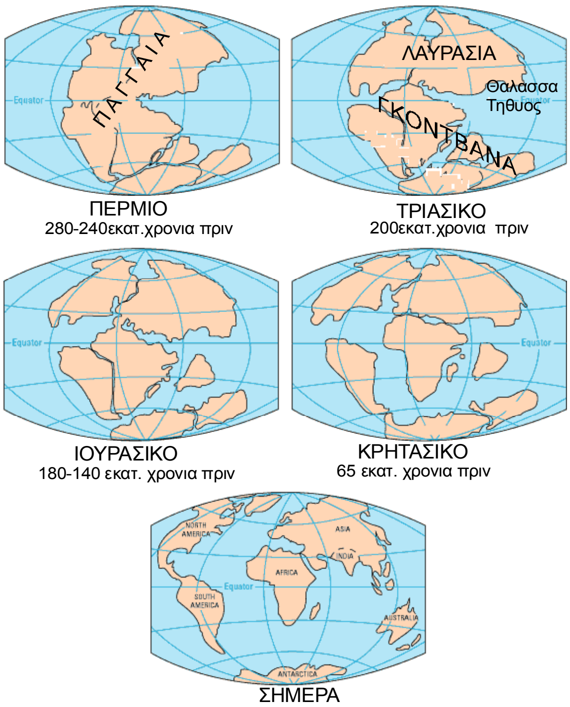
Ο ***φλοιός*** της γης σχηματίσθηκε πριν περίπου 4.5 χρόνια από σταδιακή ψύξη της εξωτερικής στοιβάδας. Η σύγχρονη αντίληψη της Γεωφυσικής υποστηρίζει ότι αποτελείται από μεγάλες άκαμπτες πλάκες που μετακινούνται αργά σχετικά η μία προς την άλλη και επιπλέουν στο ρευστό υποκείμενο στρώμα της ασθενόσφαιρας. Η αντίληψη αυτή συνιστά τη γνωστή σήμερα ***Θεωρία των Τεκτονικών Πλακών***.

Ο ***ρυθμός*** αυτής της κίνησης είναι μικρός (*μερικά εκατοστά το χρόνο*).

Πολλοί σχηματισμοί της επιφάνειας της γης οφείλονται στις κινούμενες πλάκες, ενώ τα *όρια των πλακών* είναι οι πιο ασταθείς περιοχές του πλανήτη και χαρακτηρίζονται από *έντονη σεισμική δράση και ενεργά ηφαίστεια*. Η χαρτογράφηση των σεισμικών επικέντρων σε παγκόσμια κλίμακα έδειξε ότι *όλοι οι μεγάλου βάθους και οι περισσότεροι ρηχοί σεισμοί*

συγκεντρώνονται σε σχετικά στενές ζώνες. Ουσιαστικά η σεισμικότητα οριοθετεί τα σύνορα των λεγόμενων ***τεκτονικών πλακών***.

Πριν 250 εκατ. χρόνια οι ήπειροι είχαν διαφορετική θέση. Η περισσότερη ξηρά ήταν ενιαία (***Παγγαία***) και οι επτά ήπειροι σχηματίσθηκαν με την πάροδο του χρόνου από κατατεμαχισμό και αργή μετακίνηση.

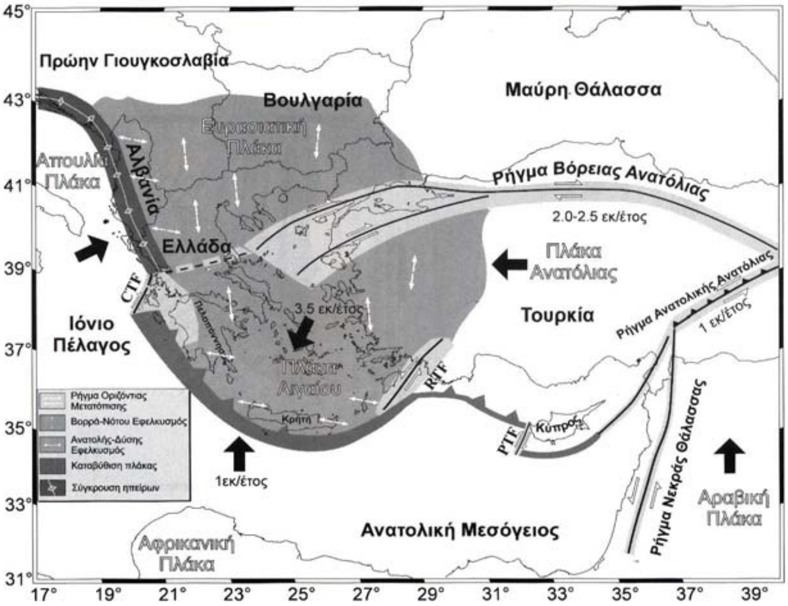


Σχήμα 2.13 *Σχηματική αναπαράσταση της μετακίνησης των ηπείρων.*

Οι βασικές τεκτονικές πλάκες σήμερα είναι : Αφρικανική, Ευρασιατική, Αμερικανική, του Ειρηνικού, Ινδική και Ανταρκτική. Ενδιάμεσα υπάρχουν και μικρότερες που προέκυψαν από την σύγκρουση των βασικών.

Σήμερα, στον Ελληνικό χώρο, όπου βυθίζεται η Αφρικανική πλάκα κάτω από την Ευρασιατική, διακρίνεται το Ελληνικό τόξο με σεισμική δραστηριότητα (από Ρόδο μέσω Κρήτης στα Επτάνησα) και το εσωτερικό ηφαιστειακό τόξο (Νίσυρος, Σαντορίνη, Μήλος κλπ).

Οι αργές κινήσεις των τεκτονικών πλακών φαίνεται να παράγουν ένα τεκτονικό κύκλο, κατά τον οποίο συσσωρεύονται τάσεις στο εσωτερικό των πλακών, με συνέπεια την σταδιακή παραμόρφωση και, τελικά, την αποφόρτιση μέσω σεισμικών επεισοδίων με καταστρεπτικές πολύ συχνά συνέπειες για τους ανθρώπους και τις κατασκευές.

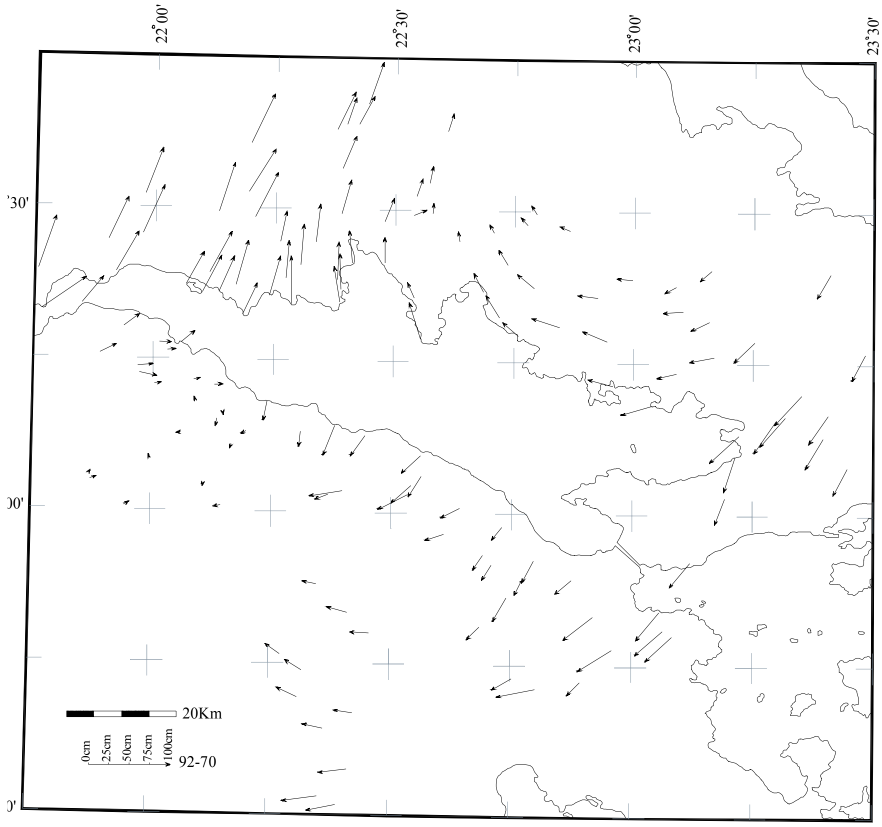


Σχήμα 2.14 *Ενεργός τεκτονική του ευρύτερου Ελλαδικού χώρου [Παπαζάχος Β., κα, 1999]*

Οι γεωδαιτικές μετρήσεις μπορούν, εάν επαναλαμβάνονται κατά διαστήματα και εφόσον διαθέτουν την απαιτούμενη ακρίβεια, να καταγράψουν την *μεταβολή των θέσεων σημείων της φ.γ.ε. με την πάροδο του χρόνου* (δηλαδή να περιγράψουν ένα ***πεδίο μετακινήσεων*** της φ.γ.ε.).

Χρησιμοποιούνται, λοιπόν, στις μελέτες παρακολούθησης των παραμορφώσεων, είτε αυτές αφορούν παραμορφώσεις του στερεού φλοιού της γης (τεκτονικές παραμορφώσεις) είτε την παρακολούθηση της συμπεριφοράς μεγάλων τεχνικών έργων.

Η εικόνα του ρυθμού της παραμόρφωσης του γήινου φλοιού τόσο σε παγκόσμια κλίμακα (κινήσεις των πλακών) όσο και σε περιφερειακή (Σχ. 2.15) ή τοπική κλίμακα (μετακινήσεις σ΄ ένα ρήγμα) είναι αρκετά σαφέστερη χάρη στην συνδρομή της γεωδαιτικής μεθοδολογίας και κυρίως στις σύγχρονες δορυφορικές γεωδαιτικές μετρήσεις.



Σχήμα 2.15 *Μετακινήσεις στον Κορινθιακό κόλπο για την περίοδο 1970-1995*

Βιβλιογραφια

1. Αγατζά – Μπαλοδήμου Α. Μ., Μπαλοδήμος Δ.Δ, ***Εισαγωγή στη Γεωδαισία.*** Σημειώσεις Μαθημάτων, ΣΑΤΜ, Αθήνα, 1991.
2. Βέης Γ., Μπιλλήρης Χ., Παπαζήση Κ., ***«Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας»***, Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας, ΣΑΤΜ, Αθήνα, 2006.
3. Παπαζάχος Β.Γ. και Παπαζάχου Ι., 1997. Οι σεισμοί της Ελλάδος, Εκδόσεις Ζήτη, pp. 304, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.

1. http://www.geo.tudelft.nl/fmr/research/EarthRot.html
2. http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/science.html
3. http://stardate.org/resources/ssguide/earth.html
4. http://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Sintro.htm
5. http://www.windows.ucar.edu/
6. http://observe.arc.nasa.gov/nasa/entries/entry_5.html
7. http://cse.ssl.berkeley.edu/lessons/indiv/beth/beth_intro.html
8. http://www.iers.org/iers/earth/
9. http://www.deos.tudelft.nl/general/toc.shtml
10. http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/datum/datum_f.html
11. http://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Sintro.htm
12. http://164.214.2.59/GandG/pubs.html
13. http://www.auslig.gov.au/geodesy/datums/aboutdatums.htm
14. http://www.earth.nasa.gov/
15. http://www.csr.utexas.edu/gmsl/main.html
16. http://einstein.gge.unb.ca/tutorial/tutorial.htm

3. Σχήμα και μέγεθος της γης. Επιφάνειες Αναφοράς

Χ. Μπιλλήρης

3.1 Σχήμα και μέγεθος της γης

Από τα βασικά προβλήματα της Γεωδαισίας, είναι ο ακριβής προσδιορισμός του σχήματος και του μεγέθους της Γης.

Με τον όρο σχήμα και μέγεθος νοείται η «φυσική και μαθηματική» επιφάνεια της γης και οι διαστάσεις της. Η φυσική επιφάνεια της γης (φ.γ.ε) είναι το όριο μεταξύ της συμπαγούς γης ή της υδάτινης επιφάνειας της γης και της ατμόσφαιρας. Η φυσική επιφάνεια της γης καλύπτεται κατά το 72% από νερό και μόνο κατά το 28% από στερηά. Έτσι η επιφάνειά της δεν είναι ούτε μία μάζα συμπαγής ούτε μία μάζα υγρή, αφού αποτελείται από ανομοιογενές υλικό και η συμπεριφορά της κυμαίνεται μεταξύ των δύο αυτών άκρων. Συνήθως, όταν γίνεται αναφορά στον προσδιορισμό του σχήματος και του μεγέθους της γης, η γη στο σύνολό της θεωρείται «συμπαγής» δηλαδή απόλυτα άκαμπτη και στερεά και οι μεταβολές του σχήματος και του μεγέθους της συναρτήσει του χρόνου μελετώνται ξεχωριστά.

Η επιφάνεια της πραγματικής γης στο κομμάτι της στεριάς της, είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και τα βουνά δημιουργούν την εντύπωση, στην ανθρώπινη κλίμακα, μιας ιδιαίτερα ανώμαλης φ.γ.ε., η οποία δεν είναι δυνατόν να αποδοθεί με κάποια μαθηματική σχέση. Αν αναλογιστούμε όμως τις διαστάσεις της γης (ακτίνα 6371 km) και το γεγονός ότι το υψηλότερο βουνό (Ιμαλάϊα) έχει ύψος περίπου 9 km, συνειδητοποιούμε ότι η σχέση μεταξύ της μεγαλύτερης "ανωμαλίας" στην επιφάνεια της γης και της διαμέτρου της είναι περίπου 1/1400. Δηλαδή αν είχαμε μια σφαίρα διαμέτρου 1400 mm, οι μεγαλύτερες «ανωμαλίες» πάνω στην επιφάνειά της θα ήταν μικρότερες από 1mm, γεγονός που δεν επηρεάζουν καθόλου το σχήμα της γης.

Επειδή σε πολλές εφαρμογές (αστρονομία, ουράνιος μηχανική, χαρτογραφία, διαστημική ναυσιπλοΐα κ.λ.π.) δεν χρειάζεται κανείς πολύ μεγάλη ακρίβεια, το ευκολότερο που έχει να κάνει, είναι να επιλέξει **ένα «μοντέλο»** (π.χ. μία σφαίρα), που θα χρησιμεύσει σαν μία βοηθητική **επιφάνεια αναφοράς** και θα αντικαταστήσει το σχήμα της γης. Βέβαια, το μοντέλο αυτό για να είναι χρήσιμο, θα πρέπει να πλησιάζει κατά το δυνατό το σχήμα και το μέγεθος της πραγματικής γης, αλλά για να είναι συγχρόνως και εύχρηστο θα πρέπει η επιφάνειά του να εκφράζεται με απλή, σχετικά, μαθηματική σχέση. Οι μικρές αποκλίσεις που θα προσδιοριστούν από την σύγκριση του σχήματος και του μεγέθους της πραγματικής γης με το μοντέλο αναφοράς, μπορούν να χρησιμεύσουν σε μια επιστημονική ανάλυση για την ερμηνεία διαφόρων φυσικών παραμέτρων και φαινομένων.

Πράγματι η γη σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί **σφαίρα** (με ομοιογενές υλικό και μάζα ίση με τη μάζα της γης) με ακτίνα 6371 km περίπου. Λόγω όμως της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της, η γη έχει πάρει το σχήμα ενός **ελλειψοειδούς εκ περιστροφής**. Βέβαια η γη δεν αποτελείται από ομοιογενές υλικό και με την περιστροφή της θα ήταν πιο σωστό να θεωρήσει κανείς ότι παίρνει τη μορφή ενός σφαιροειδούς πεπλατυσμένου στους πόλους. Η απόκλιση όμως από μία τέτοια παραδοχή δεν είναι τόσο μεγάλη, ώστε το σχήμα δεν αποκλίνει πολύ από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Αν τελειοποιηθεί το μοντέλο έτσι ώστε να έχει τις ίδιες μηχανικές (φυσικές) ιδιότητες, αλλά πολύ λιγώτερες επιφανειακές ανωμαλίες από την πραγματική επιφάνεια της γης θα πρέπει η περιβάλλουσα επιφάνεια να είναι μια **ισοδυναμική (χωροσταθμική)** επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης. Η επιφάνεια αυτή που εκλέγεται να πλησιάζει περισσότερο από κάθε άλλη ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης τη **μέση στάθμη της θάλασσας (μ.σ.θ.),** είναι το **γεωειδές.** Έτσι, λοιπόν οι βασικές επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται στη γεωδαισία για να περιγράψουν το φυσικό και γεωμετρικό μοντέλο της γης και πάνω στις οποίες προβάλλουμε τα σημεία της φ.γ.ε. για να προσδιορίσουμε τη θέση τους, αλλά και τις μετρήσεις μας για να κάνουμε τους υπολογισμούς μας, είναι τρεις:
το γεωειδές (φυσικό μοντέλο)**, το ελλειψοειδές εκ περιστροφής** (μαθηματικό μοντέλο) και **η σφαίρα** (προσεγγιστικό μοντέλο)**.**

3.1.2 Φυσική Γήϊνη Επιφάνεια

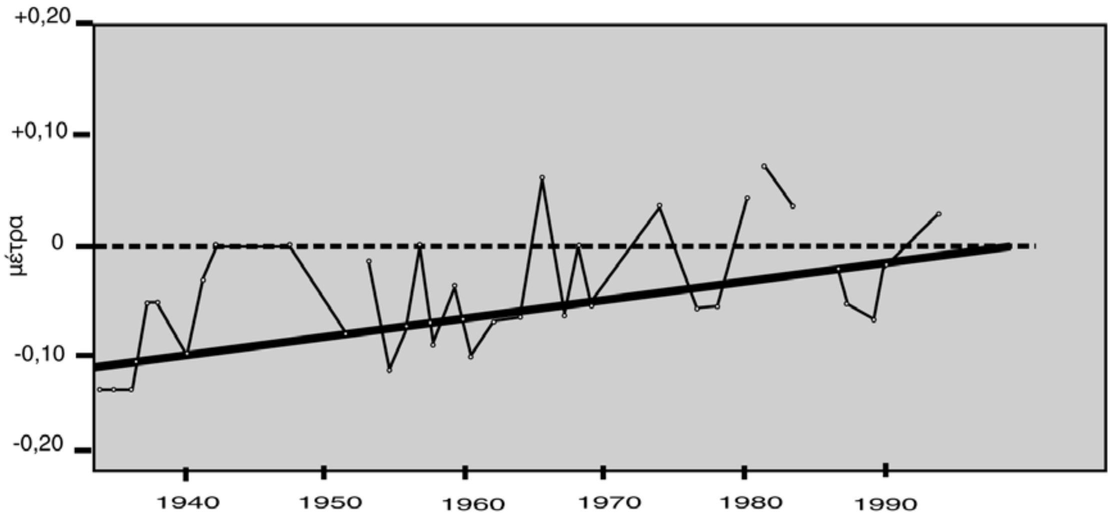
Η φυσική γήϊνη επιφάνεια είναι η πραγματική επιφάνεια της γης, περιλαμβάνει την **τοπογραφική επιφάνεια** καθώς επίσης και την επιφάνεια των ωκεανών, και θεωρείται το όριο μεταξύ της συμπαγούς και της υδάτινης επιφάνειας της γης και της ατμόσφαιρας και αποτελεί το κύριο αντικείμενο μελέτης και αποτύπωσης στη Γεωδαισία.
Η τοπογραφική επιφάνεια υλοποιείται άμεσα στη φυσική μας εποπτεία και είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία ζούμε και γίνονται όλες οι γεωδαιτικές μετρήσεις

(ίδρυση γεωδαιτικών δικτύων). Η διεύθυνση που υλοποιείται στη φύση, ως γνωστό, είναι **η κατακόρυφος** (διεύθυνση της βαρύτητας) η οποία έχει επηρεάσει τόσο την κατασκευή των γεωδαιτικών οργάνων και τις μετρήσεις μας όσο και την επιλογή των **συστημάτων αναφοράς.**

Επίσης για πρακτικούς λόγους η επιφάνεια της θάλασσας απετέλεσε την επιφάνεια (αναφοράς) πάνω από την οποία ο άνθρωπος μετρούσε τα υψόμετρα της στερηάς και κάτω από την οποία μετρούσε τα βάθη των θαλασσών. Επειδή όμως η στιγμιαία επιφάνεια της θάλασσας μεταβάλλεται συνεχώς ως επιφάνεια αναφοράς για την μέτρηση των υψομέτρων της φ.γ.ε., χρησιμοποιείται η μέση θέση (στάθμη) της επιφάνειας της θάλασσας.

Η **μέση στάθμη της θάλασσας** (μ.σ.θ) μεταβάλλεται με το χρόνο, περιοδικά, λόγω εποχιακών κυρίως μεταβολών της θερμοκρασίας της θάλασσας, της ατμοσφαιρικής πίεσης και άλλων μετεωρολογικών παραμέτρων (της τάξεως των 20cm στις ελληνικές θάλασσες), αλλά και με συστηματικό τρόπο, λόγω μικρών αλλά συνεχών μεταβολών της θερμοκρασίας, της τήξης των πάγων, καθώς και της μεταβολής των ωκεάνιων λεκανών, που οφείλεται σε γεωλογικές αιτίες. Εκτιμάται ότι τα τελευταία 20.000 χρόνια η στάθμη της θάλασσας ανέβηκε περίπου 100m, κυρίως λόγω της τήξης των παγετώνων, ενώ η σημερινή ανύψωση, που εκτιμάται ότι οφείλεται κυρίως στο φαινόμενο του θερμοκηπίου, είναι της τάξης των 1-2 mm το χρόνο για τη Μεσόγειο.

Η μέση στάθμη της θάλασσας προσδιορίζεται με τη βοήθεια **παλιρροιογράφων**, που καταγράφουν τη μεταβολή της στάθμης συναρτήσει του χρόνου σε εγκαταστάσεις κατά μήκος των ακτών, ενώ στους ωκεανούς μπορεί να προσδιοριστεί μόνο με τη βοήθεια τεχνητών δορυφόρων, οι οποίοι από γνωστές θέσεις μετρούν την απόστασή τους από τη επιφάνεια της θάλασσας με χρήση ειδικών συσκευών ραντάρ. Σήμερα η μ.σ.θ., μπορεί να προσδιοριστεί με χρήση τεχνητών δορυφόρων σε όλους τους ωκεανούς με ακρίβεια cm.



Σχήμα 3.1. Μεταβολή της στάθμης της θάλασσας στον Πειραιά. Η κεκλιμένη γραμμή απεικονίζει το μέσο ρυθμό μεταβολής της στάθμης της θάλασσας.

Η μέση επιφάνεια (στάθμη) της θάλασσας πλησιάζει πολύ να είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας της γης με απόκλιση που λίγο υπερβαίνει το 1m και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι κάθετη στην κατακόρυφη σε κάθε της σημείο. Η μ.σ.θ., επομένως υλοποιεί το γεωειδές με ακρίβεια ±1m..

3.1.3 Γεωειδές

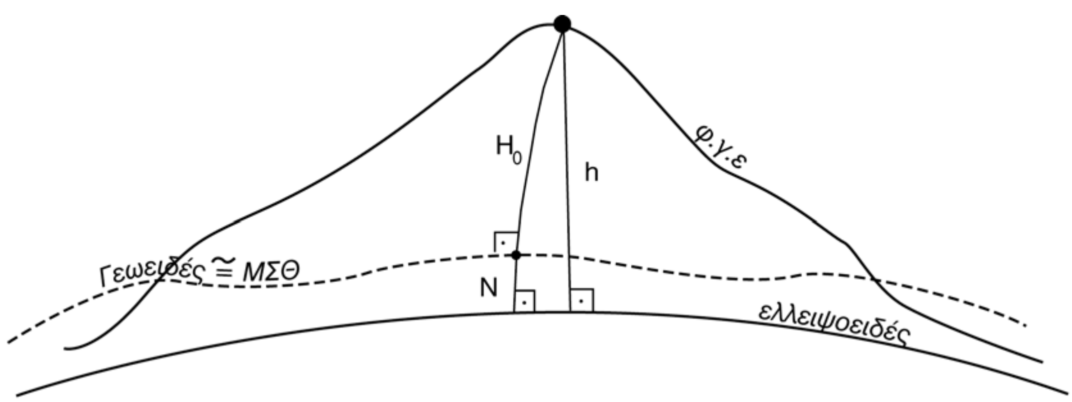
Ορίζεται ως εκείνη η ισοδυναμική επιφάνεια του πραγματικού γήϊνου πεδίου βαρύτητας, που προσαρμόζεται όσο το δυνατόν καλύτερα στη μέση στάθμη των θαλασσών στο σύνολο της γης. Με προσέγγιση μέτρου το γεωειδές ταυτίζεται με τη μέση στάθμη της θάλασσας, στους ωκεανούς, η οποία θεωρείται ότι «επεκτείνεται» και κάτω από τις ηπείρους με φανταστικές σήραγγες. Η μη σύμπτωση της μέσης στάθμης της θάλασσας με ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας οφείλεται κυρίως στη διαφορετική θερμοκρασία και αλατότητα καθώς και στα θαλάσσια ρεύματα στους ωκεανούς.

Το γεωειδές είναι μια κλειστή επιφάνεια με τα κοίλα προς το εσωτερικό του και προσομοιάζει με ελλειψοειδές εκ περιστροφής, με μέγιστη αποχή (υψόμετρο του γεωειδούς Ν) από αυτό περίπου 100 μέτρα, δηλαδή μόλις 15 εκατομμυριοστά της μέσης ακτίνας του ενώ ο μέσος όρος αποχής σ΄ ολόκληρη τη γη είναι ± 30m . Από

τον ορισμό του γεωειδούς προκύπτει ότι η διεύθυνση της κατακορύφου (η διεύθυνση του νήματος της στάθμης) είναι κάθετη στην επιφάνειά του σε κάθε σημείο του.
Το γεωειδές είναι η επιφάνεια αναφοράς στο αστρονομικό σύστημα αναφοράς. Επίσης αποτελεί την επιφάνεια αναφοράς των (ορθομετρικών) υψομέτρων (H^o). Στην περίπτωση αυτή υλοποιείται, δηλαδή τα υψόμετρα μετρούνται από την μ.σ.θ. στην περιοχή.

Ο προσδιορισμός του γεωειδούς αποτελεί επίσης κύριο στόχο της γεωδαισίας. Στηρίζεται σε μετρήσεις (γεωδαιτικές, αστρονομικές, ωκεανογραφικές, βαρύτητας κ.λ.π). και βελτιώνεται συνεχώς, όσο βελτιώνονται οι θεωρίες και τα όργανα μετρήσεων. Μεγάλη είναι η συμβολή των δορυφορικών μεθόδων.

Εφόσον το γεωειδές προσομοιάζει τόσο καλά σε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής (σφαιροειδές), είναι λογικό να επιζητηθεί η εύρεση εκείνου του ελλειψοειδούς που προσαρμόζεται σε σχήμα και διαστάσεις όσο το δυνατόν καλύτερα στο γεωειδές, έχει την ίδια μάζα με τη Γη και είναι συγχρόνως ισοδυναμική επιφάνεια του εαυτού του. Το ελλειψοειδές αυτό, που μπορεί να ορισθεί με δύο μόνο παραμέτρους, π.χ. τους δύο ημιάξονές του, επιτρέπει την αντικατάσταση του γεωειδούς (που είναι αρκετά πολύπλοκη επιφάνεια) και μπορεί να χρησιμεύει ως επιφάνεια αναφοράς ως προς την οποία είναι δυνατόν να εκφραστούν τόσο το ίδιο το γεωειδές, όσο και όλες οι άλλες γεωδαιτικές, τοπογραφικές και χαρτογραφικές εργασίες. Για το λόγο αυτό το ελλειψοειδές αυτό ονομάζεται και **ελλειψοειδές αναφοράς ή γήϊνο ελλειψοειδές.** Από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς αυτού μετρώνται επίσης και τα γεωμετρικά υψόμετρα (h).



Σχήμα 3.2. Σχετικές θέσεις της μέσης στάθμης της θάλασσας του γεωειδούς και του ελλειψοειδούς αναφοράς.

3.1.4 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ΕΕΠ)

Ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής μπορεί να δημιουργηθεί από την περιστροφή μίας έλλειψης γύρω από τον μικρό άξονά της και ορίζεται από το μεγάλο ημιάξονα, a, και είτε από την επιπλάτυνση, f,[1] είτε από τον μικρό του ημιάξονα **b**, είτε από την εκκεντρότητά του **e**. Ο Πίνακας 3.1, δίνει τις βασικές παραμέτρους των κύριων ελλειψοειδών που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία. Στην Ελλάδα χρησιμοποιείτο το **ελλειψοειδές Bessel στο Παλαιό Ελληνικό Σύστημα Αναφοράς** (ΠΕΓΣΑ), καθώς και τα ελλειψοειδή **Hayford (Διεθνές Ελλειψοειδές), στο Ευρωπαϊκό Σύστημα Αναφοράς (ED50)** και σήμερα το **GRS 80 (Geodetic Reference System 1980)** στο **Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΕΓΣΑ 1987).** Το τελευταίο αυτό ελλειψοειδές, που θεωρείται και το ρεαλιστικότερο, έχει προταθεί από τη Διεθνή Ένωση Γεωδαισίας το 1980, για χρήση σε **γήϊνα και σε γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς.**

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων X,Y,Z με κέντρο το κέντρο του ελλειψοειδούς η εξίσωσή του είναι :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (3.1)$$

όπου ο άξονας Z ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του (περιστροφής).

Γήϊνο ή γεωκεντρικό ελλειψοειδές θεωρείται εκείνο του οποίου το κέντρο ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της γης, ο άξονας συμμετρίας του ταυτίζεται με τον μέσο άξονα περιστροφής της, προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα (σε διαστάσεις) το γεωειδές σε παγκόσμια κλίμακα και μπορεί να προσδιοριστεί από γεωδαιτικές μετρήσεις ή/και από καθαρά δυναμικά στοιχεία που προσδιορίζονται από παρατηρήσεις σε τεχνητούς δορυφόρους. Οι μέγιστες αποχές από το γεωειδές είναι περίπου 100m, με μέσο όρο ±30m.

---

[1] Η επιπλάτυνση του ελλειψοειδούς ισούται με $f = \frac{a-b}{a}$ ενώ η εκκεντρότητα $e = \left[\left(a^2 - b^2\right)/a^2\right]^{1/2}$

Γεωδαιτικό ελλειψοειδές θεωρείται εκείνο που ταιριάζει καλύτερα στο γεωειδές μιάς συγκεκριμένης περιοχής, είναι παράλληλα μετατοπισμένο ως προς το γήινο, και μπορεί να έχει τις ίδιες διαστάσεις με αυτό.

Πίνακας 3.1. Βασικές παράμετροι των κυρίως χρησιμοποιούμενων ελλειψοειδών

Είδος ελλειψοειδούς Ε.Π.	**a**	**1/f**
Everest (1830)	6377276	300,8
Airy (1830)	6376542	299,3
Bessel (1841)	6377397	299,15
Clarke (1866)	6378206	294,98
Clarke (1880)	6378245	293,5
Helmert (1907)	6378200	298,3
Hayford International (1924)	6378388	297,0
Krassowsky (1942)	6378245	298,3
GRS (1967)	6378160	298,247
WGS (1972)	6378135	298,26
Gaposhkin (1973)	6378140	298,256
GRS (1980)	6378137	298,25722

3.1.5 Σφαίρα

Απλούστερη μαθηματική έκφραση μοντέλου που προσεγγίζει με μικρότερη ακρίβεια από όσο ένα Ε.Ε.Π. στο σύνολο του το γεωειδές, είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας με κέντρο το κέντρο μάζας της γης και ακτίνα την μέση ακτίνα καμπυλότητας του Ε.Ε.Π. Τοπικά, για σχετικά μικρές εκτάσεις μπορεί η σφαίρα (εγγύτατη στο σημείο) να αντικαταστήσει το ελλειψοειδές με ικανοποιητική ακρίβεια, ενώ για εφαρμογές στην χαρτογραφία και ναυσιπλοΐα συχνά η επιφάνεια της σφαίρας αποτελεί την επιφάνεια αναφοράς της φ.γ.ε. Από την επιφάνεια της σφαίρας δεν μετρώνται υψόμετρα.

Η μαθηματική έκφραση της θέσης των σημείων της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας R (ακτίνα της σφαιρικής γης R =6371 km), όταν το κέντρο του συστήματος αναφοράς είναι το κέντρο της σφαίρας είναι :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \qquad (3.2)$$

Οι υπολογισμοί στην επιφάνειά της γίνονται με τη βοήθεια των τύπων της σφαιρικής τριγωνομετρίας, είναι πολύ πιο απλοί από εκείνους στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς και για μικρές σχετικά περιοχές δίνουν ικανοποιητική ακρίβεια.

3.2 Οριζόντιο επίπεδο

Ένα οριζόντιο επίπεδο δεν μπορεί να αποδώσει τη μορφή και το μέγεθος της γης και επομένως δεν αποτελεί υπό την έννοια αυτή, επιφάνεια αναφοράς για ολόκληρη ή για κάποιο τμήμα της γης.
Για πολύ μικρές όμως εκτάσεις ή απλές εφαρμογές της Τοπογραφίας, όπου η επίδραση της καμπυλότητας της γης δεν είναι σημαντική και επομένως οι κατάκόρυφοι στην περιοχή αυτή μπορούν να θεωρηθούν παράλληλοι, (δηλαδή για συνηθισμένη ακρίβεια αποτύπωσης και διαστάσεις περίπου 10km x 10km), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα οριζόντιο επίπεδο, πάνω στο οποίο προβάλλονται οι μετρήσεις και γίνονται οι υπολογισμοί με απλό τρόπο χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια γεωμετρία. Το οριζόντιο αυτό επίπεδο θεωρείται συνήθως εφαπτόμενο στο γεωειδές (μ.σ.θ.)., στο μέσον της περιοχής που αποτυπώνεται και βέβαια είναι κάθετο στη διεύθυνση της κατακορύφου.

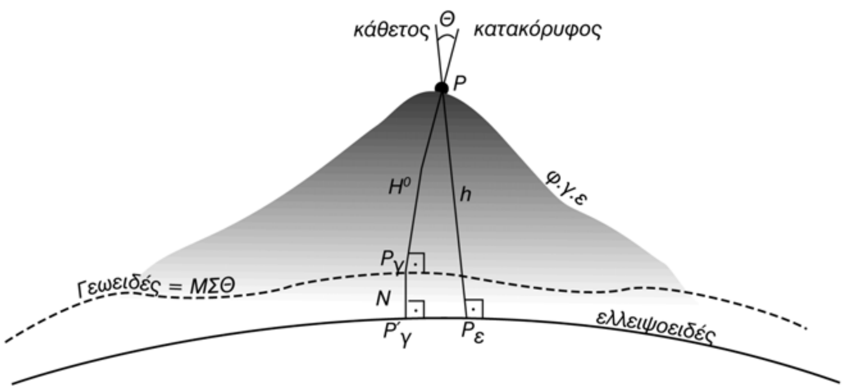
Όταν η έκταση είναι αρκετά μεγάλη οπότε η καμπυλότητα της γης είναι σημαντική τότε αντί για οριζόντιο επίπεδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας, ενώ για πολύ μεγάλες επιφάνειες ή και ολόκληρης της γης χρησιμοποιούμε την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Συγκρίνοντας το γεωειδές με τη Φ.Γ.Ε. καθώς και με τις άλλες επιφάνειες αναφοράς, παρατηρούμε ότι η μέγιστη αποχή (υψόμετρο) της Φ.Γ.Ε ως προς το γεωειδές είναι περίπου $H_{max}=10^4$m, ενώ η αποχή του γεωειδούς από τη Μ.Σ.Θ. είναι μόλις ±1m. Το γήινο γεωκεντρικό ελλειψοειδές πλησιάζει πολύ το γεωειδές και οι μέγιστες αποχές του γεωειδούς από αυτό είναι N_{max} $\cong 10^2$m $=1,6x10^{-5}R$. Αν τέλος χρησιμοποιηθεί σφαίρα αντί του ελλειψοειδούς τότε η μέγιστη αποχή του γεωειδούς από αυτή είναι περίπου N_{max} $\cong 1,5x10^4$m $\cong 2,4x10^{-3}R$, πράγμα που σημαίνει ότι το ελλειψοειδές είναι καλύτερο από τη σφαίρα κατά δύο τάξεις μεγέθους τουλάχιστον.

3.3. Προσδιορισμός της θέσης σημείου της φ.γ.ε. ως προς τις επιφάνειες αναφοράς.

Για να προσδιοριστεί η θέση ενός σημείου της φ.γ.ε., ως προς την επιφάνεια αναφοράς του, που όπως αναφέρθηκε μπορεί να είναι : το γεωειδές, το ελλειψοειδές εκ περιστροφής, η σφαίρα και για πολύ μικρές εκτάσεις το οριζόντιο επίπεδο, θα πρέπει να φέρουμε από το σημείο αυτό **"κάθετη"** προς την επιφάνεια αναφοράς. Η διεύθυνση της καθέτου αυτής για την περίπτωση του γεωειδούς και του οριζοντίου επιπέδου είναι η **διεύθυνση της κατακορύφου.**

Έτσι, αν θεωρήσουμε την κατακόρυφη που περνά από το σημείο P μέχρι το γεωειδές και την κάθετη από το σημείο προς το Ε.Ε.Π., τότε (Σχ.3.3) η πρώτη τέμνει το γεωειδές στο σημείο P_γ και η δεύτερη το Ε.Ε.Π. στο σημείο P_ε.



Σχήμα 3.3. Υψόμετρα σημείου P και απόκλιση της κατακορύφου.

Η γωνία (θ) που σχηματίζεται στο P από την κατακόρυφη και την κάθετη στο Ε.Ε.Π. λέγεται **απόκλιση της κατακορύφου**, και είναι μία γωνία στο χώρο η οποία δίνει και **την κλίση μεταξύ των δύο επιφανειών** (γεωειδούς και Ε.Ε.Π.). Η τιμή της κατά μέσο όρο σ' ολόκληρη την γη κυμαίνεται από –10" έως 10".

Η απόσταση PP_γ λέγεται **ορθομετρικό υψόμετρο** (H^o) του σημείου από το γεωειδές (πρακτικά από την μ.σ.θ). Η απόσταση PP_ε λέγεται **γεωμετρικό υψόμετρο** (h) του σημείου, ενώ αν φέρουμε την κάθετη από το σημείο P_γ στο ελλειψοειδές η $P_\gamma P'_\gamma$ λέγεται **υψόμετρο ή αποχή του γεωειδούς** (N) από το ελλειψοειδές.

Από το σχήμα φαίνεται ότι :

$$h = H^o + N \tag{3.3}$$

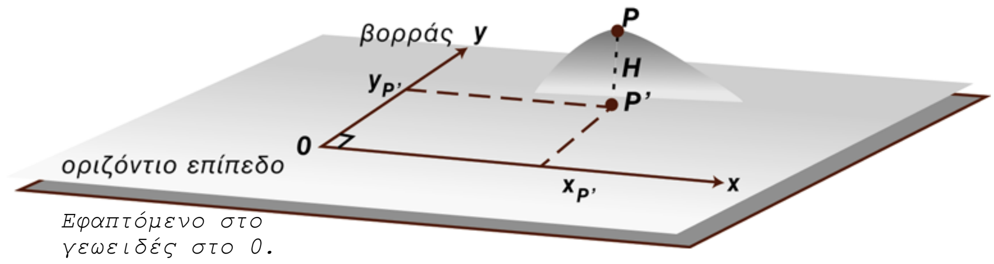
αφού η γωνία θ είναι πολύ μικρή.

Η σχέση (3.3) είναι πολύ σημαντική για την **υψομετρία** στη γεωδαισία.

Τα ορθομετρικά υψόμετρα που είναι τα συνηθισμένα υψόμετρα τα οποία χρησιμοποιούνται στους χάρτες προσδιορίζονται κυρίως με **γεωμετρική χωροστάθμηση**, τα γεωμετρικά κυρίως με **δορυφορικές μετρήσεις GPS**, ενώ τα υψόμετρα του γεωειδούς μπορούν να προκύψουν ως διαφορά των δύο προηγουμένων αλλά και με **αστρογεωδαιτική χωροστάθμηση**, όπου χρησιμοποιούνται γεωδαιτικές και αστρονομικές (απόκλιση της κατακορύφου) παρατηρήσεις.

Η θέση ενός σημείου στο χώρο μπορεί να περιγραφεί με τρεις παραμέτρους χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων , όπως θα δούμε και στα Συστήματα Αναφοράς. Όταν χρησιμοποιείται μια επιφάνεια (αναφοράς) τότε η απόσταση του σημείου από την επιφάνεια αυτή (εκτός της σφαίρας) είναι η (τρίτη συνήθως) παράμετρος που στη γεωδαισία λέγεται, όπως είδαμε, **υψόμετρο**. Οι άλλες δύο αναζητούνται πάνω στην επιφάνεια αναφοράς και είναι συντεταγμένες ως προς επιφανειακούς άξονες (κάθετους μεταξύ τους) κατάλληλα προσδιορισμένους.

Για εκπαιδευτικούς λόγους θα δοθούν παρακάτω οι άξονες και οι παράμετροι που προσδιορίζουν τη θέση της προβολής του σημείου πάνω στη δεδομένη επιφάνεια αναφοράς και στη συνέχεια στο χώρο, ξεκινώντας από το οριζόντιο επίπεδο το εφαπτόμενο σε σημείο του γεωειδούς (δηλαδή θεωρούμε ότι το τμήμα του γεωειδούς στη μικρή αυτή περιοχή που αποτυπώνουμε μπορεί να αντικατασταθεί με ένα οριζόντιο επίπεδο).



Σχήμα 3.4. Προσδιορισμός θέσης σημείου ως προς το οριζόντιο επίπεδο.

Η θέση λοιπόν της προβολής P' του σημείου P, (Σχ. 3.4,) προσδιορίζεται από την **τετμημένη x** και την **τεταγμένη y,** ενός **ορθογωνίου συστήματος αξόνων,** όπου το κέντρο O είναι (συνήθως) αυθαίρετα εκλεγμένο, ο άξονας y είναι προσανατολισμένος συνήθως στον Βορρά και ο άξονας x κάθετος στον y και κατευθύνεται προς την ανατολή.

Επομένως το σημείο έχει επίπεδες συντεταγμένες x,y και συμπληρώνονται από το υψόμετρο του σημείου H^o, για να δοθεί η θέση του στο χώρο.

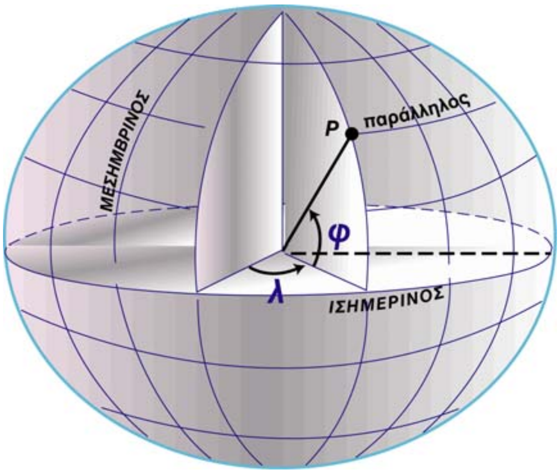
Όταν όμως η έκταση είναι μεγαλύτερη τότε το μοντέλο της επίπεδης γης αντικαθίσταται από μία καμπύλη επιφάνεια και οι ευθείες γραμμές των αξόνων x και y θα πρέπει να γίνουν καμπύλες γραμμές προσαρμοσμένες στην επιφάνεια αναφοράς που μπορεί να είναι η επιφάνεια μίας σφαίρας ή ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.

Οι καμπύλες αυτές γραμμές αποτελούν τους νέους άξονες των επιφανειακών συντεταγμένων και είναι κάθετες μεταξύ τους, πάνω στις παραπάνω επιφάνειες λέγονται **μεσημβρινοί** και **παράλληλοι.**

Μεσημβρινό καλούμε κάθε μέγιστο κύκλο στην επιφάνεια της σφαίρας που προκύπτει από την τομή της με ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονα περιστροφής της.

Παράλληλο, ή παράλληλο **πλάτους φ**, καλούμε τον κύκλο που προέρχεται από την τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής της. Αν το επίπεδο αυτό περνά και από το κέντρο της σφαίρας **(ισημερινό επίπεδο)** ο παράλληλος αυτός που είναι μέγιστος κύκλος λέγεται **ισημερινός.**

Το Σχ. 3.5, δείχνει το πλέγμα των μεσημβρινών και παραλλήλων κύκλων αν θεωρήσουμε ως επιφάνεια αναφοράς, όπου προβάλλουμε τα σημεία της φ.γ.ε., την επιφάνεια μίας σφαίρας ακτίνας R.



Σχήμα 3.5. Δίκτυο μεσημβρινών και παραλλήλων και γεωγραφικές συντεταγμένες (φ,λ) στη σφαίρα.

Η προβολή P' ενός σημείου P της φ.γ.ε προσδιορίζεται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας με τις παραμέτρους (συντεταγμένες):

φ = γεωγραφικό πλάτος και

λ = γεωγραφικό μήκος

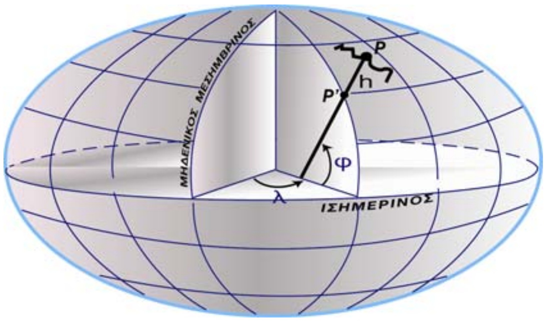
και συμπληρώνεται με το υψόμετρο (συνήθως) H^o ή και h όπου:

Γεωγραφικό πλάτος καλείται η γωνία (φ) που σχηματίζει η κάθετη από το P στην επιφάνεια της σφαίρας με το ισημερινό επίπεδο, μετριέται πάνω στον μεσημβρινό του σημείου με αρχή από τον ισημερινό και από 0^o έως 90^o προς τον **Βόρειο Πόλο** και από 0^o έως -90^o προς τον **Νότιο Πόλο** (λέγονται επίσης και **Βόρειο πλάτος** ή **Νότιο πλάτος** αντίστοιχα στην γεωγραφία).

Γεωγραφικό μήκος καλείται η γωνία (λ) που σχηματίζει το επίπεδο του μεσημβρινού που περνά από το Αστεροσκοπείο του Greenwich (λέγεται και **μηδενικός μεσημβρινό**ς) με το επίπεδο του μεσημβρινού του σημείου και μετριέται πάνω στον Ισημερινό από 0^o έως 360^o προς ανατολάς. (Στη Γεωγραφία μετριέται από 0^o έως 180^o ανατολικά και 0^o έως -180^o δυτικά).

Αν η επιφάνεια μελέτης είναι αρκετά μεγάλη ώστε η προσέγγιση της σφαίρας δεν είναι ικανοποιητική τότε ως επιφάνεια αναφοράς πρέπει να πάρουμε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής και να προβάλλουμε το σημείο P της φ.γ.ε. κατά την κάθετη στην επιφάνειά του

Οι μεσημβρινοί σε ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι ελλείψεις που δημιουργούνται από την τομή του Ε.Ε.Π., με επίπεδο που περιέχει τον άξονα περιστροφής του. Παράλληλοι κύκλοι είναι και εδώ κύκλοι που είναι τομές επιπέδων καθέτων στον άξονα περιστροφής του Ε.Ε.Π. Ο μέγιστος κύκλος που είναι τομή του Ε.Ε.Π. με το επίπεδο που περνά από το κέντρο του Ε.Ε.Π., και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής του λέγεται **ισημερινός** ενώ το επίπεδο **ισημερινό επίπεδο (Σχ. 3.6).**



Σχήμα 3.6. Δίκτυο μεσημβρινών και παραλλήλων και ελλειψοειδείς γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ,λ) στο Ε.Ε.Π.

Οι **ελλειψοειδείς συντεταγμένες** του σημείου P', προβολή του σημείου P της φ.γ.ε. είναι αντίστοιχα:

φ : **γεωδαιτικό πλάτος** και

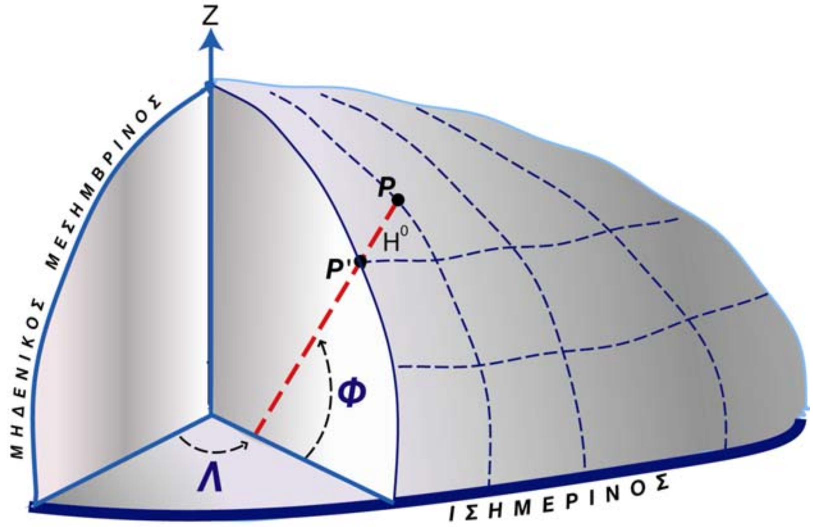
λ : **γεωδαιτικό μήκος** όπου:

Γεωδαιτικό πλάτος καλείται η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς από το σημείο P με το επίπεδο του ισημερινού. Μετριέται από 0^o (ισημερινός) έως + 90^o (Β. Πόλος) ή από 0^o (ισημερινός) έως -90^o (Ν. Πόλος).

Γεωδαιτικό μήκος καλείται η γωνία που σχηματίζει στον ισημερινό το επίπεδο του μεσημβρινού του Greenwich με το επίπεδο του μεσημβρινού του σημείου, μετρούμενο από 0^o έως 360^o προς ανατολάς. Επομένως κάθε σημείο της φ.γ.ε., ορίζεται από τις (παραμέτρους) συντεταγμένες φ, λ που συμπληρώνονται από το υψόμετρο h που μετριέται πάνω στην κάθετη από το σημείο της φ.γ.ε. μέχρι το ελλειψοειδές.

Βέβαια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως επιφάνεια αναφοράς και το γεωειδές που είναι το πιστότερο μοντέλο της μορφής και του μεγέθους της γης. Στην περίπτωση αυτή φέρουμε την διεύθυνση της κατακορύφου από το σημείο μέχρι την επιφάνεια του γεωειδούς.

Και εδώ έχουμε μεσημβρινούς και παραλλήλους που δημιουργούνται όπως και προηγουμένως, μόνο που τώρα δεν είναι γραμμές δευτέρου βαθμού, δηλαδή δεν είναι ούτε κύκλοι ούτε ελλείψεις, αλλά γραμμές κλειστές στον χώρο (Σχ. 3.7) που δημιουργούν πλέγμα συντεταγμένων, οι οποίες τώρα λέγονται :



Σχήμα 3.7. Δίκτυο αστρονομικών μεσημβρινών και παραλλήλων και αστρονομικές συντεταγμένες (Φ,Λ).

Φ : αστρονομικό πλάτος

Λ : αστρονομικό μήκος

και οι οποίες ορίζονται όπως και προηγουμένως :

Έτσι κάθε σημείο της φ.γ.ε. προσδιορίζεται από τις (παραμέτρους) **αστρονομικές συντεταγμένες Φ, Λ και από το** (ορθομετρικό) υψόμετρο **H^o** **(**υψόμετρο, του σημείου από το γεωειδές), οι οποίες προσδιορίζονται με αστρονομικές παρατηρήσεις (Φ,Λ) που γίνονται στο σημείο και με γεωμετρική χωροστάθμηση για το υψόμετρο H^o. (βλέπε και Συστήματα Αναφοράς).

Βιβλιογραφία

1. *Βέης Γ., Μπιλλήρης Χ., Παπαζήση Κ.,* **Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας,** Αθήνα 2005.

2. *Smith J.,* **Introduction to Geodesy**. J Wiley and Sons, Inc. 1997

3. *Torge W*., **Γεωδαισία** Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2000

4. *Torge W*., **Geodesy**. Walter de Gruyter, 3rd Edition, Berlin, New York 2001

4. Συστήματα Αναφοράς

Χ. Μπιλλήρης

4.1 Εισαγωγή

Η Γεωδαισία για να εκπληρώσει τον βασικό σκοπό της, που είναι ο προσδιορισμός της θέσης σημείων στο χώρο σε δοσμένη χρονική στιγμή χρησιμοποιεί Συστήματα Αναφοράς.

Σύστημα Αναφοράς στη Γεωδαισία καλούμε εκείνο το πλαίσιο παραμέτρων και συστημάτων συντεταγμένων που συνδέεται με μία συγκεκριμένη περιοχή ή με ένα συγκεκριμένο χώρο ή και με ολόκληρη τη γη και ως προς το οποίο καθορίζονται οι θέσεις σημείων και αντικειμένων της φ.γ.ε., ή/και μελετάται η κίνηση ή και η δυναμική συμπεριφορά τους με τον χρόνο.

Σύστημα συντεταγμένων σε κάποιο χώρο ορίζεται κάθε διαδικασία με την οποία, μέσω ενός συνόλου αριθμών ή παραμέτρων, προσδιορίζεται η θέση οποιουδήποτε σχήματος (ειδικά σημείου) του χώρου μέσα σ΄αυτόν.

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία παραμέτρων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον εντοπισμό των σημείων. Κατά κανόνα γίνεται χρήση συντεταγμένων, όπως και στα μαθηματικά, κατάλληλα προσαρμοσμένων σε ένα σύστημα Αναφοράς ώστε να εξυπηρετούν τις εφαρμογές.

Τα Συστήματα Αναφοράς στη Γεωδαισία, είναι επομένως πλαίσια που επιτρέπουν, με την βοήθεια κατάλληλων **παραμέτρων εντοπισμού**, την αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχηση με τις θέσεις αντικειμένων και σημείων (οντοτήτων) στο χώρο, καθώς και διευθύνσεων. Είναι ένα εργαλείο που βοηθά σημαντικά τις μαθηματικές και γεωμετρικές αναλύσεις, τους υπολογισμούς και τις αποδόσεις σε χάρτες και διαγράμματα.

Είναι το πλαίσιο μέσα στο οποίο οι γεωδαιτικές μετρήσεις μετά από κατάλληλες αναγωγές και υπολογισμούς, μετατρέπονται σε συντεταγμένες των σημείων **(εντοπισμός)**, οι οποίες χρειάζονται για να δώσουν την «ταυτότητα» των σημείων της Φ.Γ.Ε. ή το στίγμα τους στη ναυσιπλοΐα ή να περιγράψουν γραφικά ή ψηφιακά την φ.γ.ε., ή οποιοδήποτε τεχνικό έργο. Εκφράζουν ή και υλοποιούν σημεία της μελέτης ενός έργου, δίνουν το **γεωδαιτικό υπόβαθρο** (πλαίσιο) στους χάρτες και μπορούν να προσδιορίσουν τις μικρομετακινήσεις των χαρακτηριστικών σημείων τεχνικών έργων ή του στερεού φλοιού της γης (συγκρίνοντας τις συντεταγμένες χαρακτηριστικών σημείων τους σε διάφορες χρονικές στιγμές).

Επομένως ένα Σύστημα Αναφοράς στη Γεωδαισία, για να είναι χρήσιμο πρέπει, σε συνδυασμό με κατάλληλες τεχνικές μετρήσεων και υπολογισμών να μπορεί:

α) Να προσδιορίζει τις παραμέτρους που ορίζουν τις θέσεις, για κάθε σημείο (οντότητα) του χώρου (αποτύπωση).

β) Να υλοποιεί στο χώρο τα σημεία μελέτης π.χ. ενός τεχνικού έργου, που έχουν γνωστές παραμέτρους εντοπισμού (χάραξη, πλοήγηση).

γ) Να υπολογίζει μεγέθη που σχετίζονται με την γεωμετρία του χώρου (αποστάσεις, διευθύνσεις, γωνίες, εμβαδά).

Έτσι οι θέσεις των σημείων σε ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς εκφράζονται με συντεταγμένες οι οποίες όμως δεν μετρώνται απευθείας. Προσδιορίζονται από «σημείο σε σημείο» μετρώντας με ειδικά όργανα, γεωμετρικά μεγέθη (αποστάσεις, διαφορές αποστάσεων, διευθύνσεις, γωνίες), τα οποία συνδέουν τα νέα σημεία που θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση τους, με γνωστά (με τις συντεταγμένες τους) σημεία που έχουν ήδη προσδιοριστεί στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς.

Τα «γνωστά» αυτά σημεία, ιδρύονται για να σχηματίσουν στην περιοχή, ή στη χώρα, ένα κατάλληλο δίκτυο, από φυσικά σημεία (υλοποιημένα με ειδική σήμανση (βάθρο) που λέγονται **τριγωνομετρικά**), που ονομάζεται **τριγωνομετρικό ή γεωδαιτικό δίκτυο** και χρησιμεύει ως **δίκτυο αναφοράς**. Το δίκτυο αναφοράς ορίζει στην πραγματικότητα το **γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς**, αφού στην πράξη το υλοποιεί. Στην περίπτωση απόλυτου δορυφορικού εντοπισμού (π.χ. πλοήγηση) το δίκτυο αναφοράς αντικαθίσταται από τους τεχνητούς δορυφόρους, που αν και κινούνται με υψηλές ταχύτητες, η θέση τους για κάθε στιγμή είναι γνωστή με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Η ίδρυση των δικτύων αναφοράς σε εθνική κλίμακα είναι ευθύνη των αρμοδίων κρατικών φορέων. Στην Ελλάδα υπάρχει Κρατικό Γεωδαιτικό Δίκτυο, με χιλιάδες τριγωνομετρικά σημεία που οι συντεταγμένες τους εκφράζονται στο «Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς 87» (ΕΓΣΑ 87). Υπάρχει όμως και πολύ μεγάλος αριθμός μικρών ανεξάρτητων τριγωνομετρικών δικτύων, τα οποία ιδρύονται για ειδικούς σκοπούς.

4.2 Συστήματα Συντεταγμένων

Συστήματα συντεταγμένων μπορούν να επινοηθούν και να χρησιμοποιηθούν πολλά τόσο στο επίπεδο όσο και στον χώρο για να περιγράψουν την θέση ενός σημείου.

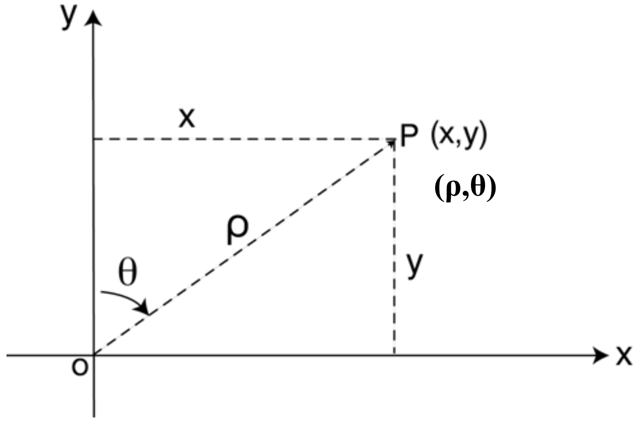
Η Γεωδαισία όμως έχει επιλέξει στο επίπεδο το **σύστημα των ορθογώνιων συντεταγμένων** και το σύστημα **των πολικών συντεταγμένων** (στις μετρήσεις και χαράξεις με κλασσικά όργανα), ενώ στον τρισδιάστατο χώρο το σύστημα **των καρτεσιανών συντεταγμένων** και το σύστημα **των γεωδαιτικών (ελλειψοειδών) συντεταγμένων.** Σε ειδικές εφαρμογές μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης **οι σφαιρικές καθώς και οι κυλινδρικές συντεταγμένες**.

Η έννοια των συντεταγμένων σημείων έχει τις ρίζες της από την αρχαιότητα στην ανάγκη και προσπάθεια του ανθρώπου να προσδιορίσει τον χρόνο του αλλά και την θέση του. Συστηματική χρήση τους άρχισε τον 17^{o} αιώνα από τον Καρτέσιο, δημιουργό της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

4.2.1 Συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο

Σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων (Σχ.4.1)

Ορίζεται από τρεις παραμέτρους. Δύο για τη θέση της αρχής του Ο και μία για την διεύθυνση του άξονα των y.Ο άξονας των x φέρεται από το σημείο Ο κάθετα στον y ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο. Η θέση ενός σημείου P του επιπέδου προσδιορίζεται από την τετμημένη x και την τεταγμένη y , που ονομάζονται (επίπεδες ορθογώνιες) συντεταγμένες του (x,y) του P.



Σχήμα 4.1. Σύστημα Ορθογωνίων και Πολικών Συντεταγμένων

- **Σύστημα Πολικών συντεταγμένων**

Η θέση του ίδιου σημείου στο επίπεδο μπορεί να προσδιορισθεί επίσης και με το σύστημα των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) (Σχ. 4.1), όπου ρ η απόσταση του σημείου P από τον πόλο O (γνωστό) και λέγεται πολική ακτίνα και θ η πολική γωνία που μετριέται δεξιόστροφα ως προς την γνωστή σταθερή διεύθυνση oy. Χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις αποτύπωσης και στις χαράξεις σημείων των τεχνικών έργων με τη βοήθεια οργάνων που μετρούν γωνίες και πλευρές. Οι σχέσεις που συνδέουν τις ορθογώνιες συντεταγμένες ενός σημείου με τις αντίστοιχες πολικές του συντεταγμένες είναι:

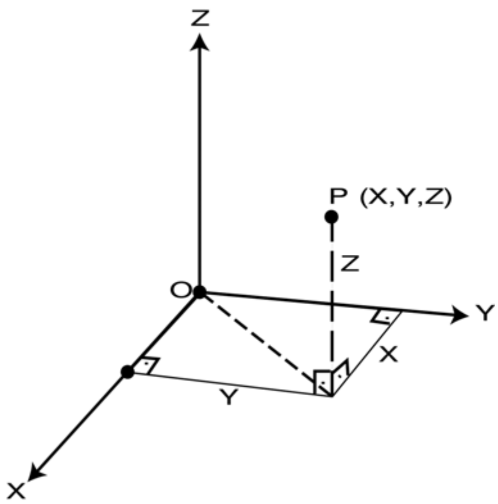
$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \sin\theta \\ y &= \rho \cdot \cos\theta \end{aligned} \qquad \text{αλλά και} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arcsin\frac{y}{\rho} = \arccos\frac{x}{\rho} \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2.2 Συστήματα συντεταγμένων στο τρισδιάστατο χώρο

- Καρτεσιανό τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Ορίζεται με έξι παραμέτρους. Τρεις για την θέση του σημείου O (αρχή) στο χώρο και τρείς για τον προσανατολισμό των αξόνων του.

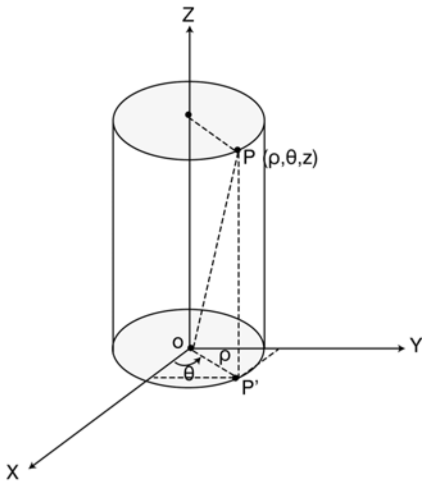
Στο Σχ. 2, φαίνεται ότι η θέση του σημείου P εκφράζεται στο χώρο με την τριάδα των συντεταγμένων X (τετμημένη), Y (τεταγμένη) και Z (κατηγμένη).



Σχήμα 4.2. Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

- **Σύστημα κυλινδρικών (πολικών) συντεταγμένων**

Η θέση ενός σημείου στην επιφάνεια του κυλίνδρου ορίζεται από την πολική ακτίνα ρ, την πολική γωνία θ και την κυλινδρική συντεταγμένη Z, στον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου (Σχ. 4.3).



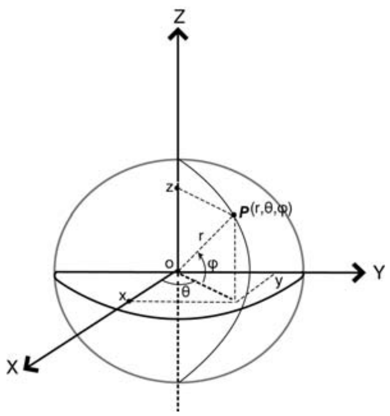
Σχήμα 4.3. Κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι σχέσεις που συνδέουν τις κυλινδρικές με τις καρτεσιανές τρισορθογώνιες συντεταγμένες είναι:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cdot \cos\theta \\ Y &= \rho \cdot \sin\theta \\ Z &= Z \end{aligned} \qquad \text{και αντίστροφα} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta &= \arccos\frac{X}{\rho} = \arcsin\frac{Y}{\rho} \\ Z &= Z \end{aligned} \qquad (4.2)$$

- **Σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (Σχ. 4.4)**

Στο σύστημα αυτό η θέση του σημείου P προσδιορίζεται από την ακτίνα r, την πολική γωνία θ, ως προς αυθαίρετη αρχή και το πλάτος φ. Συνδέονται δε με τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις σχέσεις (4.3).

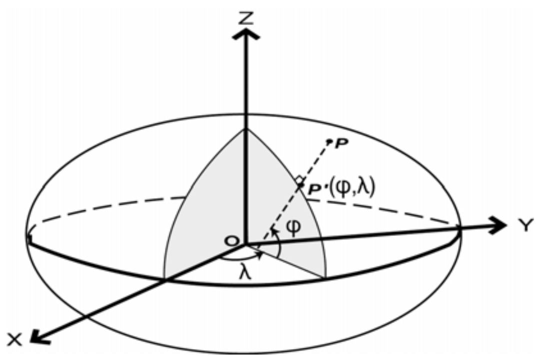


Σχήμα 4.4 Σφαιρικές συντεταγμένες

$$X = r \cdot \cos\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$Y = r \cdot \sin\theta\cos\varphi \quad \text{και αντίστροφα} \quad \varphi = \arcsin\frac{Z}{r} \tag{4.3}$$
$$Z = r\sin\varphi \qquad \theta = \arccos\frac{X}{r\cos\varphi} = \arcsin\frac{Y}{r\cos\varphi}$$

Στη Γεωγραφία και Χαρτογραφία η πολική γωνία θ λέγεται γεωγραφικό μήκος, ενώ ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (γνωστής ακτίνας R) ορίζεται από το γεωγραφικό πλάτος φ και το γεωγραφικό μήκος λ.

- **Σύστημα ελλειψοειδών συντεταγμένων (Σχ.4.5).**



Σχήμα 4.5 Ελλειψοειδείς συντεταγμένες

Η θέση του σημείου P, πάνω στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς γνωστών διαστάσεων (a και f), ορίζεται από τις ελλειψοειδείς (γεωδαιτικές) συντεταγμένες : φ (γεωδαιτικό πλάτος) και λ (γεωδαιτικό μήκος).

Λόγω της κίνησης των τεκτονικών πλακών που απαρτίζουν τον στερεό φλοιό της γης η θέση ενός σημείου μπορεί να αλλάζει και επομένως θα πρέπει να δίνεται και ως συνάρτηση του χρόνου P(X,Y,Z,t), που σημαίνει ότι το σημείο P μετρήθηκε στον χρόνο t και οι θέση του στο χώρο που προκύπτει από τους υπολογισμούς, εκφράζεται από τις συντεταγμένες X, Y, Z. Αντί για τον χρόνο είναι δυνατόν να δίνεται μαζί με τις συντεταγμένες του σημείου και η ετήσια ταχύτητα της κίνησή του ως διάνυσμα στο χώρο (δηλ. το μέγεθος της σε mm/χρόνο και η διεύθυνσή της).

4.3 Συστήματα Αναφοράς στη Γεωδαισία

Όπως είπαμε, το Σύστημα Αναφοράς είναι ένα πλαίσιο παραμέτρων και συστημάτων συντεταγμένων που σκοπό έχουν να καθορίσουν την θέση του και τον προσανατολισμό του στον χώρο και το οποίο ορίζεται, υλοποιείται, εφαρμόζεται και χρησιμοποιείται σε κάθε γεωδαιτική, τοπογραφική ή χαρτογραφική εφαρμογή.

Ετσι για να οριστεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο χρειάζονται 3 παράμετροι (2 για θέση αρχής και 1 για προσανατολισμό αξόνων), ενώ στο χώρο χρειάζονται 6 παράμετροι (3 για την θέση της αρχής και 3 για τον προσανατολισμό των αξόνων). **Τα συστήματα των συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία στα συστήματα αναφοράς είναι: οι καρτεσιανές τρισδιάστατες συντεταγμένες (X,Y,Z), οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες (φ,λ,h) και οι επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες (x,y)** οι οποίες συνοδεύονται συνήθως και με το υψόμετρο του σημείου H^0.

Παρόμοια για να οριστεί ένα σύστημα αναφοράς πρέπει να οριστούν οι παράμετροι που προσδιορίζουν την θέση και τον προσανατολισμό των αξόνων των συστημάτων συντεταγμένων που χρησιμοποιεί το σύστημα αναφοράς. Επειδή επιδιώκεται το σύστημα αναφοράς να ορίζεται (να τοποθετείται και να προσανατολίζεται) έτσι ώστε να εξυπηρετεί μία συγκεκριμένη περιοχή ή και ολόκληρη την επιφάνεια της γης θα πρέπει οι παράμετροι που προσδιορίζονται να ανταποκρίνονται με ακρίβεια στον σκοπό αυτό.

Παλαιότερα, πριν εισαχθεί η δορυφορική τεχνολογία στις μετρήσεις στην Γεωδαισία, ο προσδιορισμός του κέντρου μάζας της γης που θα ήταν και το κέντρο ενός καρτεσιανού συστήματος αναφοράς αλλά και το κέντρο του γήινου ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (σύστημα ελλειψοειδών συντεταγμένων), δεν είχε την απαιτούμενη ακρίβεια για την καθιέρωση ενός παγκόσμιου γήινου συστήματος αναφοράς.

Έτσι τα διάφορα κράτη προσδιόριζαν το καθένα το δικό τους σύστημα αναφοράς, ορίζοντας αυθαίρετα (στο μέσο περίπου της χώρας) μία αρχή, πάνω στη φ.γ.ε., και προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες της αρχής (αφετηρία του γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς της χώρας), καθώς και το προσανατολισμό του μεσημβρινού που περνά από το σημείο αυτό.

Ταυτόχρονα επιλεγόταν και ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής το οποίο μετατοπιζόταν, όσο το δυνατόν ακριβέστερα, παράλληλα προς το γήινο ελλειψοειδές, ώστε η επιφάνειά του να ταιριάζει καλλίτερα στο γεωειδές της χώρας. Κατόπιν προσδιοριζόντουσαν οι έξι βασικές παράμετροι (3 για τη θέση της αρχής, 1 για τον προσανατολισμό και δύο για τις διαστάσεις του ελλειψοειδούς) που όριζαν το DATUM, όπως διεθνώς λέγεται, της χώρας.

Ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων παλαιότερα εγένετο με αστρονομικές μετρήσεις για τη θέση της αρχής και τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς. Από τις μετρήσεις αυτές προέκυπτε το αστρονομικό πλάτος (Φ) και το αστρονομικό μήκος της αρχής (θέση) (Λ), καθώς και το αστρονομικό αζιμούθιο* (A_A) της πλευράς από το σημείο της αρχής προς ένα άλλο σημείο του συστήματος αναφοράς (προσανατολισμός). Οι παράμετροι αυτές εθεωρούντο γεωδαιτικές δηλ. $\varphi \equiv \Phi$, $\lambda \equiv \Lambda$ και $A \equiv A_A$, γνωρίζοντας ότι είναι δυνατόν να διαφέρουν η κάθε μία κατά μέσο όρο περίπου 10'' (μέση απόκλιση της κατακορύφου σε παγκόσμια κλίμακα). Βέβαια υπήρχε η δυνατότητα βελτίωσης των τιμών των παραμέτρων αυτών μετά την ολοκλήρωση των μετρήσεων και των υπολογισμών σε όλο το δίκτυο του συστήματος αναφοράς.

Σήμερα η χρήση των τεχνητών δορυφόρων στη γεωδαισία και κυρίως του συστήματος GPS, επιτρέπει την ακριβέστερη ίδρυση αλλά και την σύνδεση των διαφόρων γεωδαιτικών συστημάτων σε ένα ενιαίο παγκόσμιο γεωκεντρικό σύστημα (ITRS)και τον εύκολο προσδιορισμό νέων σημείων σ' αυτό. Τα παλαιότερα εθνικά συστήματα, εξακολουθούν ακόμα να χρησιμοποιούνται δεδομένου του ιδιαίτερα μεγάλου αριθμού δεδομένων που υπάρχουν, αλλά και της καλλίτερης προσαρμογής του ελλειψοειδούς (γεωδαιτικού) στο τοπικό γεωειδές.

Τα συστήματα αναφοράς στη Γεωδαισία επομένως διακρίνονται κυρίως σε Γήινα ή Παγκόσμια και σε Γεωδαιτικά (κρατικά), ανάλογα με την θέση του κέντρου του τρισορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων που είναι και το κέντρο του ελλειψοειδούς αναφοράς που χρησιμοποιούν. Τέλος υπάρχει και το **Αστρονομικό** (ή **Φυσικό**) **Σύστημα Αναφοράς** με επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές και βασική διεύθυνση την διεύθυνση της κατακορύφου. Στο σύστημα αυτό οι συντεταγμένες κάθε σημείου προσδιορίζονται μόνο με αστρονομικές παρατηρήσεις στο σημείο αυτό.

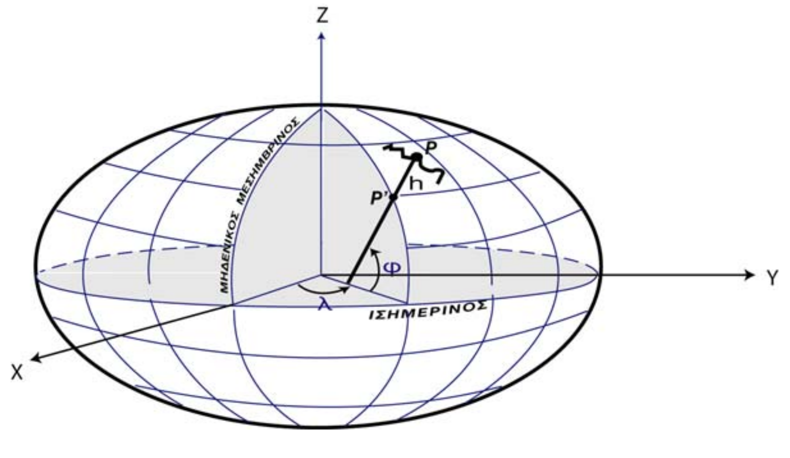
* Αζιμούθιο: η γωνία που σχηματίζει ο αστρονομικός μεσημβρινός που περνά από το σημείο, αν στραφεί δεξιόστροφα μέχρι να συμπέσει με την σκοπευόμενη πλευρά.

4.4 Γήινα ή Παγκόσμια Συστήματα Αναφοράς

Γήϊνο ή Παγκόσμιο Σύστημα Αναφοράς καλείται κάθε Σύστημα Αναφοράς που έχει κέντρο το κέντρο μάζας της γης, Z τον μέσο άξονα περιστροφής της, άξονα των X την κάθετη στον άξονα Z από το κέντρο της γης προς τον μέσο Μεσημβρινό του Greenwich και άξονα Y κάθετο στο επίπεδο XZ προς ανατολάς (Σχ.4.6). Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής που χρησιμοποιείται, ως επιφάνεια αναφοράς (γήϊνο ελλειψοειδές) έχει επίσης κέντρο του το κέντρο μάζας της γης, άξονας περιστροφής του είναι ο μέσος άξονας περιστροφής της γης, και βασικός μεσημβρινός του, ο μεσημβρινός του Greenwich (Σχ.4.6).

Η θέση ενός σημείου P της φ.γ.ε. στο γήινο σύστημα αναφοράς εκφράζεται ή από τις καρτεσιανές συντεταγμένες X,Y,Z, ή από τις ελλειψοειδείς (γεωδαιτικές) συντεταγμένες (φ,λ) του σημείου P' (προβολή του σημείου P στο ελλειψοειδές) και του γεωμετρικού υψομέτρου h. Το γεωδαιτικό πλάτος φ ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η κάθετη στο ελλειψοειδές με το επίπεδο του ισημερινού. Μετριέται πάνω στον μεσημβρινό που περνά από το σημείο P' από τον ισημερινό προς βορράν (0^o-90^o) και προς νότο (0^o- -90^o).

Το γεωδαιτικό μήκος είναι η γωνία (δίεδρη) που σχηματίζουν τα επίπεδα του μεσημβρινού του Greenwich και του μεσημβρινού του P'. Μετριέται πάνω στον Ισημερινό με αρχή τον Μεσημβρινό του Greenwich προς ανατολάς από 0^o-360^o . Η τρίτη συνιστώσα στο γήϊνο σύστημα αναφοράς είναι το (γεωμετρικό) υψόμετρο (h) του σημείου της φ.γ.ε., από το ελλειψοειδές (Σχ. 4.6).



Σχήμα 4.6 . Ελλειψοειδείς συντεταγμένες σημείου P

Βλέπουμε επομένως ότι οι έξι παράμετροι που ορίζουν το Γήϊνο ή Παγκόσμιο Σύστημα Αναφοράς είναι :

- Στην περίπτωση των καρτεσιανών συντεταγμένων η θέση του κέντρου του συστήματος (3) και ο προσανατολισμός των αξόνων του (3) και
- Στην περίπτωση των ελλειψοειδών συντεταγμένων, η θέση του κέντρου του ελλειψοειδούς (3), ο προσανατολισμός του άξονα περιστροφής του (1) και οι διαστάσεις του (2) a και f.

Τα γήινα συστήματα αναφοράς υλοποιούνται

- Από ένα αριθμό σημείων (σταθμών) κατανεμημένων σ΄ ολόκληρη τη γη, με γνωστές συντεταγμένες
- από ένα αριθμό παραμέτρων και στοιχείων που ορίζουν τις διαστάσεις, τις μηχανικές ιδιότητες (κίνηση πόλου, ταχύτητα περιστροφής της γης κλπ.) και τον προσανατολισμό της γης.

Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο κυρίως παγκόσμια συστήματα αναφοράς :

a) Το ITRF (International Terrestrial Reference Frame), που ορίζεται με κέντρο το κέντρο μάζας της γης, με άξονα των Z , να περνάει από τον μέσο πόλο της περιόδου 1900-1906, με άξονα των X να περνάει από τον μέσο μεσημβρινό του Greenwich, και άξονα των Y να συμπληρώνει το δεξιόστροφο σύστημα. Υλοποιείται με τις γεωδαιτικές συντεταγμένες ενός μεγάλου αριθμού σταθμών (□ 1500) σε ολόκληρη τη γη, που συμμετέχουν στις παρατηρήσεις με διαστημική ή/και δορυφορική τεχνολογία (VLBI, SLR και GPS).[*]

b) Το WGS'84 (World Geodetic System 1984), ιδιαίτερα αν χρησιμοποιεί κανείς το σύστημα GPS στις μετρήσεις του, το οποίο υλοποιείται μέσω των εκπεμπόμενων τροχιών (θέσεων) των δορυφόρων GPS και επίγειων σταθμών. Από το 1994 υλοποιείται και μέσω των σταθμών του ITRF με μιά ακρίβεια η οποία σήμερα είναι αντίστοιχη του ITRF

Και τα δύο Παγκόσμια συστήματα αναφοράς χρησιμοποιούν ως ελλειψοειδές αναφοράς το GRS 80, για να δώσουν τις γεωδαιτικές (ελλειψοειδές) συντεταγμένες των σημείων.

---

[*] Βλέπε Κεφάλαιο 5, «Μετρήσεις»

4.4.1 Γεωδαιτικά Συστήματα Αναφοράς

Η ανάγκη δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς για την ένταξη όλων των γεωδαιτικών, χαρτογραφικών και κτηματογραφικών εργασιών σε μια χώρα, οδήγησε στην δημιουργία των Γεωδαιτικών Συστημάτων Αναφοράς.
Αφού η θέση του κέντρου μάζας της γης ήταν άγνωστη (με την απαιτούμενη ακρίβεια) θα έπρεπε να οριστούν άλλες παράμετροι σχετικές με τη θέση της χώρας πάνω στη επιφάνεια της γης, (και καλύτερα πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που έχει επιλεγεί), έτσι ώστε το γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς να εντάσσει τη χώρα στη «θέση» της, ως προς το παγκόσμιο πλαίσιο μεσημβρινών και παραλλήλων.

Επίσης το ελλειψοειδές που χρησιμοποιεί το Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς επιλέγεται (σήμερα το GRS 80) και μετατοπίζεται παράλληλα προς το γήϊνο, ώστε να προσαρμόζεται καλλίτερα στο γεωειδές της χώρας (γεωδαιτικό ελλειψοειδές αναφοράς).
Έτσι ένα Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς ορίζεται από :

- Τις συντεταγμένες (φ_o,λ_o,h_o) μιάς αρχής (ενός βάθρου) που είναι σημείο της φ.γ.ε και βρίσκεται στο κέντρο περίπου της χώρας
- Το αζιμούθιο Α από το σημείο της αρχής προς ένα άλλο σημείο του κρατικού δικτύου και
- Τις διαστάσεις (a,f) του ελλειψοειδούς αναφοράς.

Με τις έξι αυτές παραμέτρους ορίζεται ένα Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς ή το Γεωδαιτικό DATUM μιάς χώρας.

Οι παράμετροι (φ,λ) και (Α) προσδιοριζόντουσαν, όπως είπαμε, με αστρονομικές παρατηρήσεις στο σημείο, δηλ. φ_o=Φ, λ_o=Λ και A_o=A_A (αστρονομικό) και είναι αυτές που εντάσσουν την αφετηρία στην «σωστή» θέση και εξασφαλίζουν, με ικανοποιητικό τρόπο, την παραλληλία του γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς με το γήϊνο. Το υψόμετρο h_o=H^o, σημαίνει ότι δίνεται ως γεωμετρικό υψόμετρο στην αρχή το ορθομετρικό υψόμετρο του σημείου. Με τον τρόπο αυτό γίνεται η «καλλίτερη» προσαρμογή του ελλειψοειδούς αναφοράς στο γεωειδές της περιοχής. Δηλαδή θεωρείται ότι στην αρχή του συστήματος το γεωδαιτικό ελλειψοειδές συμπίπτει με το γεωειδές και επομένως ότι η απόκλιση της κατακορύφου είναι ίση με μηδέν και το υψόμετρο του γεωειδούς, (Ν) είναι μηδέν.

Σήμερα με τις σύγχρονες γεωδαιτικές μετρήσεις γίνεται επεξεργασία όλων των υπαρχόντων στοιχείων (επίγειων και δορυφορικών) για να προκύψουν οι ακριβέστερες συντεταγμένες και το αζιμούθιο της αρχής του συστήματος αναφοράς ώστε να εξασφαλιστεί η παραλληλία του με τα γήϊνα συστήματα αναφοράς με ακρίβεια καλλίτερη από 1ppm.

Ένα Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς υλοποιείται από το τριγωνομετρικό δίκτυο που ιδρύεται και καλύπτει ολόκληρη τη χώρα και εφαρμόζεται (χάρτες, διαγράμματα) μέσω ενός **Προβολικού Συστήματος** κατάλληλα προσαρμοσμένου στη χώρα ώστε να ελαττώνει τις παραμορφώσεις, κατά το δυνατόν. Η απεικόνιση δηλαδή της χώρας από το ελλειψοειδές γίνεται σε μία αναπτυκτή επιφάνεια για την δημιουργία επίπεδων χαρτών καθώς και τοπογραφικών και κτηματολογικών διαγραμμάτων.
Με τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες χαρακτηριστικών σημείων της φ.γ.ε. θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε τον χάρτη πάνω στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς, και με αρκετή ακρίβεια πάνω στην επιφάνεια μιάς σφαίρας. Όχι όμως πάνω σ΄ ένα επίπεδο χαρτί γιατί θα έχουμε πολύ μεγάλες αποκλίσεις (παραμορφώσεις) όσο η περιοχή μεγαλώνει σε διαστάσεις, αφού οι επιφάνειες του ελλειψοειδούς και της σφαίρας απέχουν πολύ από μια επίπεδη επιφάνεια.
Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα και να φτιάξουμε επίπεδους χάρτες μεγάλων περιοχών με ακρίβεια (χωρίς βέβαια να αποφύγουμε κάποιες παραμορφώσεις κάθε φορά), προβάλλουμε τα σημεία της φ.γ.ε., πρώτα στο ελλειψοειδές ώστε να αποκτήσουν επιφανειακές συντεταγμένες (φ,λ) και μετά τα «**προβάλλουμε**» από το ελλειψοειδές πάνω σε **αναπτυκτές επιφάνειες** (π.χ. κύλινδρο, κώνο) ή σε εφαπτόμενα στο ελλειψοειδές επίπεδα ή καλύτερα απεικονίζουμε (μετασχηματίζουμε) τις συντεταγμένες (φ,λ) των σημείων με βάση κάποια μαθηματική σχέση (σχέσεις απεικόνισης των ελλειψοειδών ή σφαιρικών (φ,λ) σε **επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες (x,y).** Στην περίπτωση αυτή ως υψόμετρο του σημείου παίρνουμε το (ορθομετρικό) υψόμετρο του (H^o) από τη μ.σ.θ. (υψόμετρα κρατικού δικτύου) και όχι το γεωμετρικό υψόμετρο (h), γιατί στα τοπογραφικά διαγράμματα και στους χάρτες τα γεωμετρικά υψόμετρα δεν έχουν καμία πρακτική σημασία. Επομένως η θέση του σημείου στο χώρο τώρα προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες (x,y,και το υψόμετρο

H^o) και αυτές χρησιμοποιούνται συνήθως σε όλα τα τοπογραφικά και κτηματολογικά διαγράμματα και για την μελέτη και χάραξη των τεχνικών έργων. Η επιφάνεια προβολής ή οι σχέσεις απεικόνισης είναι συγκεκριμένες και αποτελούν αναπόσπαστο μέρος κάθε Συστήματος Αναφοράς σε κάθε χώρα.

Επομένως ένα σημείο στο χώρο σε κάθε Σύστημα Αναφοράς, στη Γεωδαισία μπορεί να εκφραστεί με τα παρακάτω συστήματα συντεταγμένων.

- Τρισορθογώνιες Καρτεσιανές Συντεταγμένες X,Y,Z.
- Ελλειψοειδείς (γεωδαιτικές) συντεταγμένες φ,λ,h. Σε κρατικά (γεωδαιτικά) Συστήματα Αναφοράς χρησιμοποιείται συνήθως το υψόμετρο του κρατικού υψομετρικού συστήματος (για την Ελλάδα το ορθομετρικό υψόμετρο H^0) αντί του γεωμετρικού υψομέτρου.
- Επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες x,y, (στο προβολικό σύστημα), συνδεδεμένες με το υψόμετρο H^o του σημείου.

Υπάρχει δυνατότητα μετατροπής από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο με ακριβείς μαθηματικές σχέσεις αν γνωρίζουμε τις διαστάσεις του ελλειψοειδούς και τα υψόμετρα του γεωειδούς (N) ως προς το ελλειψοειδές ($h=H^o+N$), ή και τις σχέσεις απεικόνισης που χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς.

4.5 Προσδιορισμός συντεταγμένων σημείου

Για να ενταχθεί (να πάρει συντεταγμένες) ένα νέο σημείο μιάς χώρας στο Εθνικό της Σύστημα Αναφοράς θα πρέπει να γίνουν μετρήσεις οι οποίες να συνδέουν το νέο σημείο με ένα ή περισσότερα σημεία του υπάρχοντος δικτύου που υλοποιεί το σύστημα αναφοράς. Κατόπιν με τις κατάλληλες αναγωγές και υπολογισμούς προσδιορίζονται και εκφράζονται οι συντεταγμένες του νέου σημείου σε ένα ή περισσότερα (αν χρειάζεται) συστήματα συντεταγμένων, που χρησιμοποιεί το σύστημα αναφοράς.

Η διαδικασία για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων από σημείο σε σημείο με κατάλληλες μετρήσεις και υπολογισμούς εφαρμόζεται τόσο στα Γεωδαιτικά Συστήματα Αναφοράς όσο και στα Γήϊνα. Ακόμα και στην περίπτωση του δορυφορικού συστήματος WGS 84, στο οποίο προσδιορίζεται η θέση του σημείου από μετρήσεις με δέκτη GPS, όταν επιζητούμε μεγαλύτερη ακρίβεια χρειάζεται να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία δηλαδή να συνδεθούμε με σημείο γνωστών συντεταγμένων στο σύστημα αυτό.

Η παραπάνω διαδικασία δεν εφαρμόζεται στο Αστρονομικό Σύστημα Αναφοράς λόγω της πολυπλοκότητας της επιφάνειας αναφοράς που χρησιμοποιεί (γεωειδές) και των δυσκολιών επομένως που έχει στους υπολογισμούς πάνω σ΄αυτήν .

4.6 Αστρονομικό Σύστημα Αναφοράς

Η θέση ενός σημείου προσδιορίζεται με το αστρονομικό πλάτος Φ και το αστρονομικό μήκος Λ και με τον **γεωδυναμικό αριθμό C**, που είναι η διαφορά του δυναμικού του πεδίου βαρύτητας της γης στο γεωειδες από το δυναμικό στο σημείο. Αντί του γεωδυναμικού αριθμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ορθομετρικό υψόμετρο του σημείου δηλ. Φ,Λ,C ή Φ,Λ, H^o. Τα Φ και Λ προσδιορίζονται απ΄ ευθείας μόνο με αστρονομικές παρατηρήσεις στο σημείο με ακρίβεια καλύτερη από ±0.1", ενώ ο γεωδυναμικός αριθμός με μετρήσεις της έντασης της βαρύτητας και γεωμετρική χωροστάθμηση.

Είναι ένα φυσικό σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιεί ως επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές και την κατακόρυφο αλλά έχει πολύ δύσκολους και πολύπλοκους υπολογισμούς.

4.7 Τοπικό Αυθαίρετο Σύστημα Αναφοράς

Τέλος για την αποτύπωση και απεικόνιση ιδιοκτησιών, (οικοπέδων) όπου συνήθως δεν είναι απαραίτητη η σύνδεση με το Κρατικό Σύστημα Αναφοράς, το οποίο χρησιμοποιεί συγκεκριμένο «προβολικό επίπεδο», μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τυχαίο οριζόντιο επίπεδο κάθετο στην κατακόρυφο, σε οποιοδήποτε σημείο της. Συνήθως το οριζόντιο αυτό επίπεδο θεωρείται ότι εφάπτεται του γεωειδούς στο κέντρο περίπου της περιοχής που αποτυπώνεται, ώστε η τρίτη διάσταση να είναι το υψόμετρο των σημείων. Ο άξονες x και y μπορεί να έχουν αυθαίρετο προσανατολισμό ή να είναι προσανατολισμένοι (συνήθως ο y προς βορράν και ο x προς ανατολάς).

Δεν πρέπει να συγχέουμε ποτέ το οριζόντιο επίπεδο που χρησιμοποιείται στις απλές τοπογραφικές, ιδιωτικές κυρίως, εφαρμογές με το «προβολικό επίπεδο» το

οποίο δεν είναι κατά κανόνα και οριζόντιο. Ούτε να συγχέονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες (X,Y,Z) ως προς το κέντρο μάζας της γης, με τις ορθογώνιες επίπεδες συντεταγμένες (χ,y) ως προς την αρχή (ή τους άξονες x,y) της προβολής που είναι ένα σημείο (ή επιλεγμένοι άξονες) πάνω στην αναπτυκτή επιφάνεια την «εφαπτόμενη» στο ελλειψοειδές αναφοράς.

4.8 Μετατροπή Συστημάτων συντεταγμένων και Συστημάτων Αναφοράς

Η χρήση των τεχνητών δορυφόρων έφερε σε χρήση τις καρτεσιανές (γεωκεντρικές) συντεταγμένες (X,Y,Z) στη γεωδαισία, δεδομένου ότι οι δορυφόροι κινούνται στο χώρο σε μεγάλες αποστάσεις γύρω από το κέντρο μάζας της γης σύμφωνα με τους νόμους της ουράνιας μηχανικής. Όλοι οι υπολογισμοί στη δορυφορική γεωδαισία απλοποιούνται με τις γεωκεντρικές καρτεσιανές συντεταγμένες, οι οποίες όμως στις εφαρμογές δεν έχουν την ίδια χρησιμότητα με αυτή των ελλειψοειδών ή των ορθογώνιων επίπεδων συντεταγμένων, που είναι περισσότερο αντιληπτές και κατανοητές. Η μετατροπή των καρτεσιανών συντεταγμένων ενός σημείου σε ελλειψοειδείς καθώς και των ελλειψοειδών σε επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες, και τανάπαλιν, γίνεται όπως είπαμε με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων με ακρίβεια, λαμβάνοντας υπόψη και τις διαστάσεις του ελλειψοειδούς αναφοράς. Τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων αποτελούν μία διαφορετική έκφραση του ιδίου πράγματος.

Είναι δυνατόν επίσης να μετατρέψουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο π.χ. από ένα γήινο σύστημα σε ένα γεωδαιτικό. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να γνωρίζουμε την μετατόπιση του κέντρου του ελλειψοειδούς αναφοράς του ενός συστήματος αναφοράς ως προς το άλλο, καθώς και τον προσανατολισμό των αξόνων ή/ και την διαφορετική κλίμακα στα δύο συστήματα αναφοράς. Επιδιώκεται τα γεωδαιτικά συστήματα να είναι παράλληλα με τα γήινα ώστε να είναι εύκολη η μετατροπή των συντεταγμένων από το ένα σύστημα στο άλλο μέσω των Καρτεσιανών συντεταγμένων.

Και η μετατροπή αυτή γίνεται με μαθηματικές σχέσεις, αλλά η ακρίβεια της θα εξαρτηθεί από την ακρίβεια με την οποία γνωρίζουμε την (μεταξύ των συστημάτων) θέση και τον προσανατολισμό τους. Έτσι, αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες κάποιων κοινών σημείων και στα δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς, μπορούμε, αντιστρέφοντας τις σχέσεις, να βρούμε τη σχετική θέση και τον προσανατολισμό του ενός ως προς το άλλο.

Για απλούστευση των υπολογισμών η μετατροπή των γεωδαιτικών (ελλειψοειδών) συντεταγμένων (φ,λ,h) από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο γίνεται με την βοήθεια των καρτεσιανών συντεταγμένων (X,Y,Z).

4.9 Συστήματα Αναφοράς που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα

Στην Ελλάδα σήμερα χρησιμοποιείται **το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς ή "ΕΓΣΑ 87'** όπως λέγεται, για κάθε γεωδαιτική, τοπογραφική ή χαρτογραφική και κτηματολογική εργασία.

Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1990, εχρησιμοποιείτο το Παληό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΠΕΓΣΑ), ενώ παράλληλα υπάρχουν και άλλα γεωδαιτικά ή γήϊνα συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιούνται για την ναυσιπλοΐα, για στρατιωτικούς σκοπούς ή για επιστημονικούς σκοπούς.

Παρακάτω γίνεται μια πολύ περιληπτική παρουσίαση των Συστημάτων Αναφοράς που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα.

4.9.1 Το ΕΓΣΑ 87*

Αρχικό σημείο (αφετηρία) του Εθνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς είναι το κεντρικό βάθρο στο Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου του ομώνυμου Εργαστηρίου της ΣΑΤΜ του ΕΜΠ.
Ορίζεται από τις συντεταγμένες του Κεντρικού Βάθρου:
φ=38^{o} 04' 33"8107
λ=23^{o} 55' 51"0095
h=481,743m και
N=7,000m.

Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο του ελλειψοειδούς αναφοράς (GRS 80) που χρησιμοποιήθηκε μετατοπίστηκε παράλληλα ως προς το γήινο σύστημα κατά :

* Το 87 σημαίνει ότι χρησιμοποιήθηκαν όλες οι μέχρι τότε μετρήσεις, επίγειες και κυρίως δορυφορικές για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων της αρχής και την επίλυση του δικτύου.

ΔX=+199,652m

ΔY= - 74,759m

ΔZ = -246,055m

ώστε να ταιριάζει καλύτερα στο γεωειδές της Ελλάδας, και προσανατολίστηκε παράλληλα προς το Παγκόσμιο και Δορυφορικό Σύστημα Αναφοράς.Οι παραπάνω τιμές συνεχώς αναθεωρούνται.

Υλοποιείται από τις συντεταγμένες όλων των Τριγωνομετρικών σημείων του Κρατικού δικτύου και εφαρμόζεται (χρησιμοποιεί ως απεικόνιση) με την Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή (ΕΜΠ) σε μία ζώνη με κεντρικό μεσημβρινό $\lambda_o=24^o$ και συντελεστή παραμόρφωσης σ΄αυτόν K_0=0.9996, έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι παραμορφώσεις κλίμακας στην έκταση της ηπειρωτικής χώρας και να διευκολύνονται οι πράξεις στον Η/Υ.

4.9.2 Το Παλαιό Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα (ΠΕΓΣΑ)

Ιδρύθηκε το 1889 με αρχή το Κεντρικό Βάθρο του Αστεροσκοπείου Αθηνών στο οποίο δόθηκαν οι συμβατικές συντεταγμένες.

$\varphi_o=37^o$ 58’20",1000

$\lambda_o=0^o$ 0’ 00",0000

A_o= 359^o 46’ 13",1000 (προς το τριγωνομετρικό της Πάρνηθας)

N_o= 0m (δηλ. $h=H^o$)

Ενώ αργότερα προσδιορίστηκε με αστρονομικές παρατηρήσεις και το $\lambda_o=23^o$42’58"815 ως προς τον μεσημβρινό του Greenwich. Ελλειψοειδές αναφοράς επελέγη το ελλειψοειδές του Bessel.

Για κλίμακα στο δίκτυο (υπολογισμός πλευρών δικτύου) μετρήθηκε το μήκος μιάς βάσης (πλευράς) στο Θριάσιο πεδίο. Η υλοποίηση του και η επέκταση του έγινε σταδιακά με την προσάρτηση νέων εδαφών στο Ελληνικό Κράτος και την ίδρυση του τριγωνομετρικού δικτύου στη χώρα.

Για την εφαρμογή του, ως προβολικό σύστημα επελέγη η **επίπεδη αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή του Hatt,** με εφαπτόμενα σ’ όλη τη χώρα επίπεδα στο κέντρο τραπεζίων (περίπου 130 κέντρα) διαστάσεων 30’Χ30’. Αργότερα χρησιμοποιήθηκε από το ΥΠΕΧΩΔΕ και η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή με κεντρικούς μεσημβρινούς ανά 3^o.

4.9.3 Το ED 50 (European Datum 1950)

Μετά τον δεύτερο Παγκόσμιο πόλεμο όλα τα δίκτυα της Ευρώπης εντάχθηκαν σε ένα ενιαίο σύστημα γνωστό ως ED50 (European Datum 1950) με αρχή το Potsdam Γερμανίας και ελλειψοειδές αναφοράς του Hayford. Προβολικό σύστημα επελέγη η εγκάρσια Μερκατορική Προβολή, όπου η Ευρώπη χωρίστηκε σε ζώνες με κεντρικούς μεσημβρινούς κάθε 6^o. Η Ελλάδα χρησιμοποιεί τις ζώνες με μεσημβρινούς $\lambda=21^o$ και $\lambda=27^o$ και συντελεστή παραμόρφωσης στους κεντρικούς μεσημβρινούς K=0.9996.
Το σύστημα αυτό χρησιμοποιήθηκε στην Ελλάδα κυρίως για στρατιωτικούς σκοπούς.

4.10 Γήινα Συστήματα

Στην Ελλάδα χρησιμοποιούνται επίσης και τα Παγκόσμια Συστήματα ITRS ή ITRF κυρίως για επιστημονικούς σκοπούς αλλά και το WGS 84, που είναι το σύστημα δορυφόρων και δεκτών GPS τόσο για τις μετρήσεις όσο και στην ναυσιπλοΐα.

4.11 Ελληνικό Σύστημα Υψομετρίας

Στην Ελλάδα χρησιμοποιούνται τα ορθομετρικά υψόμετρα (H^o) δηλαδή υψόμετρα με επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές. Το γεωειδές υλοποιείται από την ΜΣΘ στον Πειραιά, όπως αυτή έχει προσδιοριστεί από την Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού (ΥΥΠΝ) από καταγραφές του παλιρροιογράφου στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, κατά την χρονική περίοδο 1933-1978. Βασικό σημείο υψομετρικής αναφοράς είναι η χωροσταθμική αφετηρία κοντά στον παλιρροιογράφο, η R287, με συμβατικό υψόμετρο H^o=14,665m. Από το σημείο αυτό, με γεωμετρική χωροστάθμηση, έχουν δοθεί υψόμετρα σε όλες τις υψομετρικές αφετηρίες του δικτύου του Ελληνικού Συστήματος Υψομετρίας στην ηπειρωτική χώρα.

Στην Κρήτη και στα μεγαλύτερα νησιά έχουν ιδρυθεί τοπικά χωροσταθμικά δίκτυα τα οποία εξαρτήθηκαν είτε από τοπικούς παλιρροιογράφους (π.χ. Κρήτη, Ρόδος), είτε από παλιρροιόμετρα.

Όπως ήδη γνωρίζουμε τα υψόμετρα αυτά χρησιμοποιούνται στους χάρτες και τα Τοπογραφικά διαγράμματα και συμπληρώνουν την τριάδα των συντεταγμένων των προβολικών συστημάτων. Προσδιορίζονται μετρώντας υψομετρικές διαφορές από γνωστά σημεία με κατάλληλες αναγωγές.

Τα γεωμετρικά υψόμετρα (h) χρησιμοποιούνται για τις αναγωγές στο ελλειψοειδές, συμπληρώνουν τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες και συνδέονται με τα ορθομετρικά υψόμετρα με την σχέση $h=H^o+N$, όπου N το υψόμετρο του γεωειδούς από το ελλειψοειδές αναφοράς.

Βιβλιογραφία

1. *Βέης Γ., Μπιλλήρης Χ., Παπαζήση Κ.,* **Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας,** Αθήνα 2006, Σημειώσεις για κάλυψη μαθήματος

2. *Smith J.,* **Introduction to Geodesy**. J Wiley and Sons, Inc. 1997

3. *Torge W.*, **Γεωδαισία** Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2000

4. *Torge W.*, **Geodesy**. Walter de Gruyter, 3rd Edition, Berlin, New York 2001

5. Μετρήσεις

Χ. Μπιλλήρης

5.1 Εισαγωγή

Η Γεωδαισία για να προσδιορίσει στον χώρο τη θέση σημείων της φυσικής γήϊνης επιφάνειας σε ένα Σύστημα Αναφοράς κάνει μετρήσεις και υπολογισμούς.

Στην ***Κλασσική Γεωδαισία*** υπάρχει «διαχωρισμός» στις μεθόδους και στα όργανα μετρήσεων που προσδιορίζουν την οριζοντιογραφική θέση του σημείου από την τρίτη διάσταση δηλαδή το υψόμετρο.

Με την ***Δορυφορική Γεωδαισία*** ο προσδιορισμός της θέσης του σημείου στο χώρο γίνεται ταυτόχρονα, αφού μετρώνται στο χώρο τα διανύσματα που συνδέουν τα σημεία μεταξύ τους.

5.2 Μετρήσεις

Μετρώνται κυρίως γεωμετρικά μεγέθη δηλαδή :

- Μήκη
- Διευθύνσεις – γωνίες
- Υψομετρικές διαφορές

Αλλά και δυναμικά μεγέθη π.χ. ένταση της βαρύτητας ή και συνθήκες περιβάλλοντος (θερμοκρασία, ατμοσφαιρική πίεση, υγρασία).

5.2.1 Μετρήσεις μηκών

Τα μήκη μετρώνται άμεσα με **ηλεκτρονικά τηλέμετρα EDM** (Electronic Distance Measurements) για μήκη από μερικά μέτρα μέχρι αρκετά χιλιόμετρα και με απλές ή ακριβείας **μετροταινίες**, όταν τα μήκη είναι μικρά, με ιδιαίτερη προσοχή, αλλά και έμμεσα (μέσω δορυφόρων) **με τους δορυφορικούς δέκτες GPS** (Global Positioning System) για οποιεσδήποτε αποστάσεις (ακόμα και εκατοντάδες χιλιόμετρα).

Η **ακρίβεια** με την οποία μετράμε εξαρτάται από το όργανο και εκφράζεται τόσο **απόλυτα** (σε μήκος) π.χ. ακρίβεια ±1cm, όσο και σε μέρη στο εκατομμύριο ή **αναλογικά** σε (p.p.m., parts per million), π.χ. με μια καλή μετροταινία μπορεί κανείς να μετρήσει προσεκτικά με ακρίβεια 1cm στα 50m οπότε έχει ακρίβεια : $1/5000=(1cm/50x100cm) = 2X10^{-4} = 200X10^{-6}$ ή 200 p.p.m. Με ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης αποστάσεων (EDM) μπορεί να μετρήσει κανείς με ακρίβεια μέχρι και λίγα p.p.m. Τέλος με τους δορυφορικούς δέκτες GPS μπορεί να μετρήσει με ακρίβεια που μπορεί να φτάσει το 0,1 p.p.m., δηλαδή το ±1cm για απόσταση 100km.

- **E.D.M.**

Τα ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης μηκών (EDM : Electronic Distance Measurements) βασίζουν την λειτουργία τους στην διαμόρφωση μιάς φέρουσας ακτινοβολίας, συνήθως ορατού φωτός ή κοντά στο ορατό φως, οπότε έχουμε «διαμόρφωση κατά εύρος» ή μικροκυμάτων οπότε έχουμε «διαμόρφωση κατά συχνότητα».

Οι αρχές μέτρησης είναι δύο:

α. Αρχή των παλμών

Το όργανο (στο σημείο Α) εκπέμπει ένα παλμό πολύ μικρής διάρκειας ο οποίος ανακλάται σε ειδικό ανακλαστήρα (στο σημείο Β) και επιστρέφει στο όργανο (σημείο Α) το οποίο και μετρά τον χρόνο (t) της διπλής διάδοσης του παλμού με πολύ μεγάλη ακρίβεια (της τάξης εκατοστών του 1nsec=10^{-9} sec).

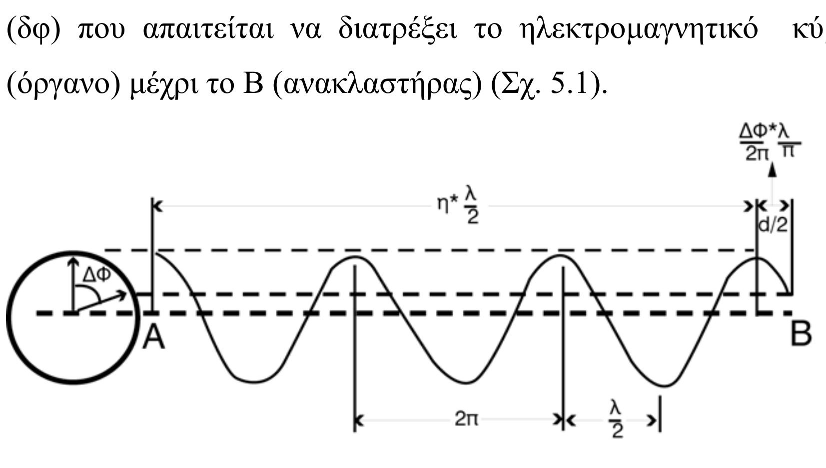
Επομένως το μήκος D = ½ υ.t

Όπου υ η ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην ατμόσφαιρα : υ = c/n

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό c=299.792.458m/sec και n ο μέσος δείκτης διάθλασης κατά μήκος της διαδρομής. Σήμερα πλεονεκτούν τα όργανα που μετρούν αποστάσεις πολλών εκατοντάδων m χωρίς να χρειάζονται τους ειδικούς ανακλαστήρες διευκολύνοντας πολύ τις μετρήσεις υπαίθρου, ιδίως αν τα σημεία είναι δυσπρόσιτα.

β. Αρχή της διαφοράς φάσης

Το όργανο, εκπέμποντας σε διαφορετικές συχνότητες (από μία βασική) μπορεί να υπολογίσει τον ακέραιο αριθμό μηκών κύματος (λ) καθώς και την διαφορά φάσης (δφ) που απαιτείται να διατρέξει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα από το σημείο Α (όργανο) μέχρι το Β (ανακλαστήρας) (Σχ. 5.1).



Σχήμα 5.1. Αρχή μέτρησης αποστάσεων με τη μέθοδο των φάσεων

Επομένως το μήκος $D = K\lambda + \delta\varphi\ .\ \lambda/2\pi = K\lambda + \Delta\lambda$

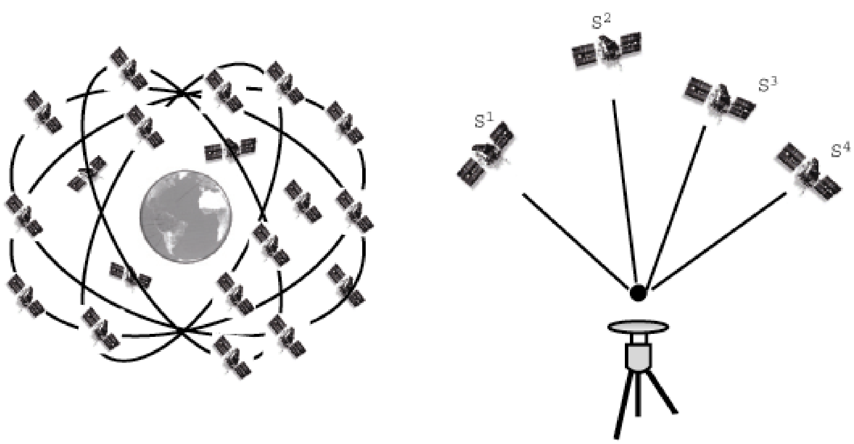
όπου K ο ακέραιος αριθμός μηκών κύματος που αυτόματα υπολογίζει το όργανο.

Την αρχή διαφοράς φάσης χρησιμοποιούν όλα τα γεωδαιτικά EDM της αγοράς ενώ η αρχή των παλμών χρησιμοποιήθηκε από μεγάλα συστήματα Laser για μετρήσεις προς γεωδαιτικούς δορυφόρους και την Σελήνη.

- **G.P.S.**

Το Παγκόσμιο Σύστημα Προσδιορισμού θέσης ευρύτερα γνωστό με τα αρχικά GPS (Global Positioning System) είναι ένα σύστημα πλοήγησης που στηρίζεται στην μετάδοση πληροφοριών από τον δορυφόρο προς τους επίγειους δέκτες. Οι πληροφορίες περιλαμβάνουν και την χρονική στιγμή μετάδοσης του σήματος που φθάνει στον δέκτη από την θέση του δορυφόρου κάθε στιγμή. Το ρολόι του δέκτη συγχρονισμένο με το χρονόμετρο του δορυφόρου, προσδιορίζει την απόσταση (ψευδοαπό-σταση) δέκτη-δορυφόρου $r=c\Delta t$, όπου c η ταχύτητα του φωτός και Δt ο χρόνος διαδρομής του σήματος από τον δορυφόρο στον δέκτη.

Λόγω αδυναμίας ακριβούς συγχρονισμού του χρονομέτρου του δέκτη με εκείνα των δορυφόρων, η προσδιοριζόμενη απόσταση δεν έχει την απαιτούμενη ακρίβεια και επομένως χρειάζονται 4 δορυφόροι και ταυτόχρονη μέτρησή τους από τον δέκτη ώστε να υπολογιστεί η θέση X,Y,Z ή φ,λ,h του δέκτη με ακρίβεια ως η τομή 4 σφαιρών, υπολογίζοντας και τυχόν σφάλμα συγχρονισμού.



Εικόνα 5.1. Τροχιές Δορυφόρων GPS και εντοπισμός σημείου

Σήμερα υπάρχουν 24+3 δορυφόροι, σε τροχιές σχεδόν κυκλικές σε απόσταση 20200km από το κέντρο της γης παρέχοντας κάλυψη τουλάχιστον 4 δορυφόρων σε κάθε σημείο της γης όλο το 24ωρο (Εικ. 5.1).

Για γεωδαιτικές εφαρμογές, όπου απαιτείται η μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια χρησιμοποιείται η μέθοδος της μέτρησης φάσεων του φέροντος κύματος που είναι η διαφορά μεταξύ της φάσης του εισερχομένου στο δέκτη φέροντος κύματος του GPS και της φάσης μιας ουσιαστικά σταθερής συχνότητας αναφοράς που παράγεται στον δέκτη.

Η θέση ενός σημείου ως προς το κέντρο μάζας της γης μπορεί να προσδιορισθεί, με ένα δέκτη, με ακρίβεια της τάξης ± 3m, ενώ η απόσταση μεταξύ δύο δεκτών στα σημεία Α και Β, με τη μέθοδο της μέτρησης φάσεων, μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια της τάξης του ± 1 cm οριζοντιογραφικά και ± 2 cm υψομετρικά .

Οι μετρήσεις με GPS στο ύπαιθρο, πλεονεκτούν εκείνων με κλασσικές μεθόδους αφού δεν απαιτείται οπτική επαφή μεταξύ των σημείων, οι μετρήσεις δεν επηρεάζονται από καιρικές συνθήκες και το σκοτάδι, δεν απαιτούν παρά ένα σημείο αναφοράς στην ευρύτερη περιοχή των μετρήσεων και απαιτούν μικρότερο αριθμό παρατηρητών στο ύπαιθρο.

Αντίστοιχο σύστημα είναι το Ρωσικό GLONASS (GLObal Navigation System) που διαθέτει 15 δορυφόρους σε τροχιά ύψους 19099km γύρω από τη γη και μπορεί να δώσει την ίδια απόλυτη ακρίβεια. Οι δέκτες που μπορούν να χρησιμοποιούν και τα δύο συστήματα εντοπισμού έχουν αυξημένες δυνατότητες μετρήσεων.

- **VLBI**

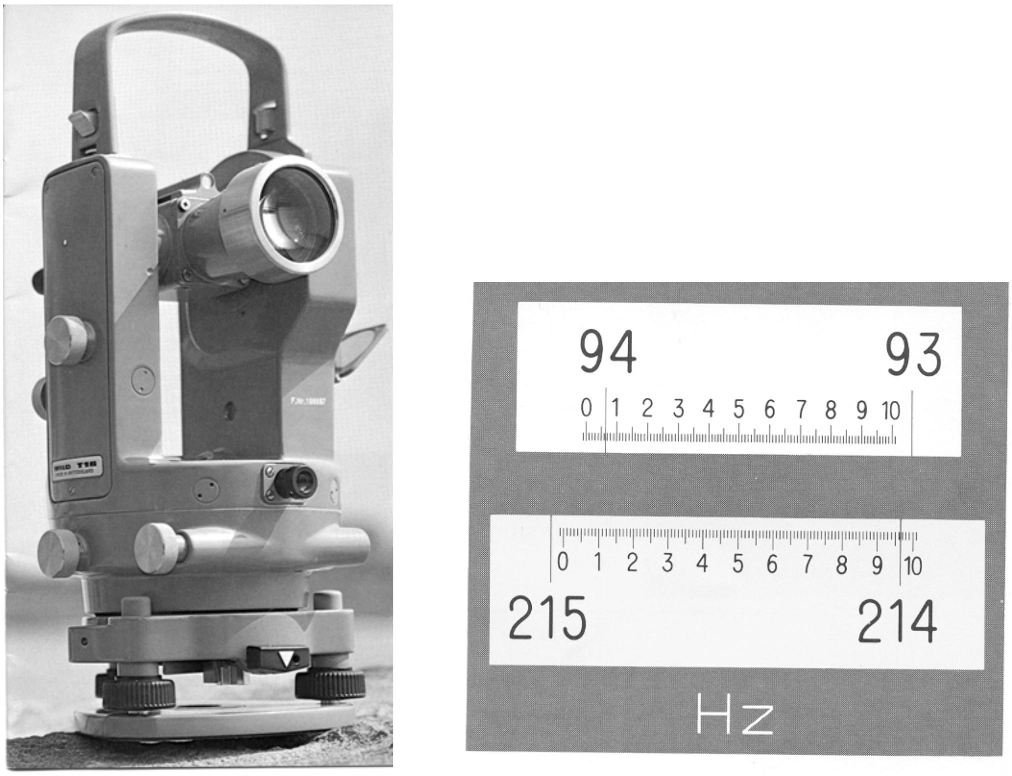
Στις σύγχρονες διαστημικές ακριβείς μεθόδους μέτρησης μεγάλων αποστάσεων πρέπει να αναφερθεί και η μέθοδος VLBI (Very Long Baseline Interferometry) που χρησιμοποιεί την αρχή της συμβολομετρίας στις παρατηρήσεις «σημάτων» από εξωγαλαξιακές ραδιοπηγές (quasars).

Επίσης στη νέα γεωδαιτική τεχνολογία, αλλά μη διαστημική, θεωρούνται και τα αδρανειακά συστήματα (inertial survey systems) πλοήγησης και σχετικού προσ-διορισμού θέσεων σημείων στο χώρο. Τα συστήματα αυτά μπορούν να συνδυασθούν με GPS με σκοπό να προεκτείνουν τις δυνατότητες και εφαρμογές των GPS και σε χώρους, π.χ. σήραγγες, που αδυνατούν να μετρήσουν.

5.2.2 Μετρήσεις γωνιών

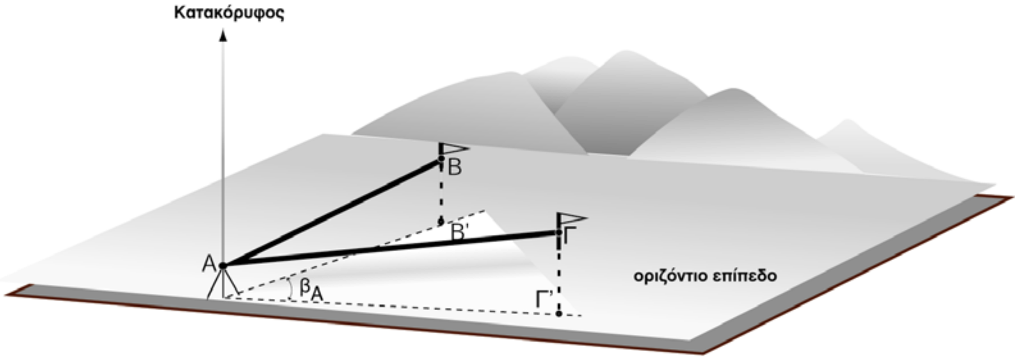
<u>Οι γωνίες</u> μετρώνται με θεοδόλιχα τα οποία είναι όργανα που συνδυάζουν διατάξεις κέντρωσης στο σημείο, οριζοντίωσης, σκόπευσης και ανάγνωσης έτσι ώστε να μπορούν να μετρήσουν διευθύνσεις και επομένως γωνίες (Εικ. 5.2).

Οι γωνίες που μετρούν είναι είτε οριζόντιες είτε κατακόρυφες και οι αναγνώσεις γίνονται πάνω σε αντίστοιχους αριθμημένους δίσκους. Τα όργανα μετρούν τις οριζόντιες γωνίες δεξιόστροφα σε βαθμούς (π =200^{g}.0000).



Εικόνα 5.2. Θεοδόλιχο: όργανο μέτρησης γωνιών

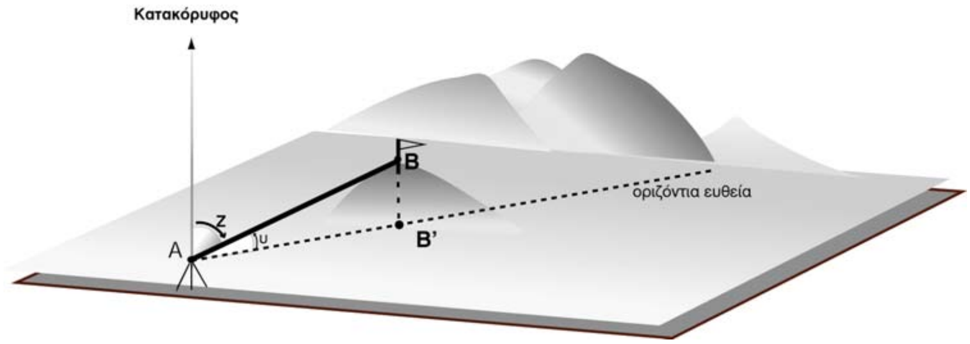
Για να μετρηθεί η γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ **κεντρώνεται** το όργανο στο σημείο Α, οριζοντιώνεται, **σκοπεύεται** το σημείο Β και **παίρνεται η ανάγνωση** στον οριζόντιο δίσκο. Έπειτα περιστρέφεται δεξιόστροφα το τηλεσκόπιο του θεοδόλιχου και σκοπεύεται το σημείο Γ (Σχ. 5.2) και παίρνεται πάλι η ανάγνωση στον οριζόντιο δίσκο..



Σχήμα 5.2. Οριζόντια γωνία ΒΑΓ=$β_Α$

Αφαιρώντας την ανάγνωση στο Γ από την ανάγνωση στο Β, προσδιορίζεται η γωνία ΒΑΓ = $β_Α$. Για ακριβείς μετρήσεις η γωνία μετράται σε περιόδους. Μία περίοδος π.χ. της γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ περιλαμβάνει μέτρηση στο Β, μετά μέτρηση στο Γ έπειτα αναστροφή – περιστροφή τηλεσκοπίου μέτρηση στο Γ και μετά στο Β. Μια γωνία μπορεί να μετρηθεί μέχρι και 36 περιόδους για τριγωνισμούς Α΄ τάξης. Η ακρίβεια των μετρήσεων κυμαίνεται μεταξύ 1^{cc} και 1^{c} συνήθως.

Κατακόρυφη γωνία ή γωνία ύψους (υ) είναι η γωνία που σχηματίζει η σκοπευτική γραμμή του τηλεσκοπίου προς το σημείο με τη διεύθυνση του ορίζοντα. Στην Γεωδαισία συνήθως μετρώνται οι ζενίθιες γωνίες (Ζ) (γωνία που σχηματίζει η κατακόρυφη στο σημείο με την σκοπευτική γραμμή) (Σχ. 5.3).



Σχήμα 5.3. Κατακόρυφη (υ) ή ζενίθια γωνία (Ζ)

Η ακρίβεια μέτρησης των ζενιθίων γωνιών είναι μικρότερη από εκείνη των οριζόντιων γωνιών, λόγω της εντονότερης επίδρασης της διάθλασης της ατμόσφαιρας.

Αντίστοιχα και η ακρίβεια στις γωνίες μπορεί να εκφραστεί σε cc ή c αλλά και σε p.p.m. (μέρη στο εκατομμύριο), αν το σφάλμα της γωνίας εκφρασθεί σε ακτίνια π.χ. ακρίβεια $\pm 1^{cc}$ σημαίνει $1^{cc}/636620^{cc} = \sim 1{,}5\text{x}10^{-6}$ ακτίνια και αντιστοιχεί σε 1,5 ppm.

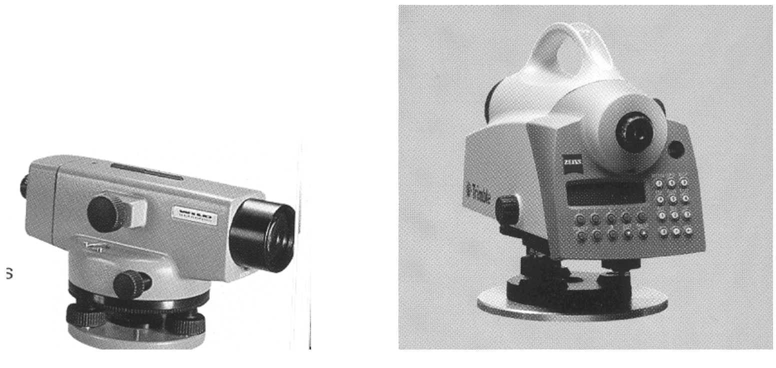
Διευθύνσεις ως προς τον Αστρονομικό ή αληθή βορρά (μεσημβρινό), μπορούν να προσδιοριστούν με ειδικές παρατηρήσεις (αστρονομικές) ή με ειδικά όργανα π.χ. γυροσκοπικό θεοδόλιχο με ικανοποιητική ακρίβεια (1^{cc}-20^{cc}) ή ως προς τον μαγνητικό μεσημβρινό με μαγνητικά θεοδόλιχα με ακρίβεια ~ 1^{c} ή με πυξίδες με μικρή ακρίβεια (~1^{g}).

5.3 Μετρήσεις Υψομετρικών διαφορών (ΔΗ)

Η Γεωδαισία προσδιορίζει υψόμετρα[1] μετρώντας υψομετρικές διαφορές ΔH_{AB} μεταξύ σημείων οπότε γνωρίζοντας το υψόμετρο ενός σημείου (Α) μπορεί να προσδιοριστεί το υψόμετρο του σημείου (Β) από τη σχέση (5.1)

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB} \qquad (5.1)$$

Υψομετρικές διαφορές μπορούν να μετρηθούν με Γεωμετρική χωροστάθμηση χρησιμοποιώντας τον χωροβάτη, ένα όργανο που αποτελείται από ένα τηλεσκόπιο το οποίο περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα και επομένως διαγράφει ένα

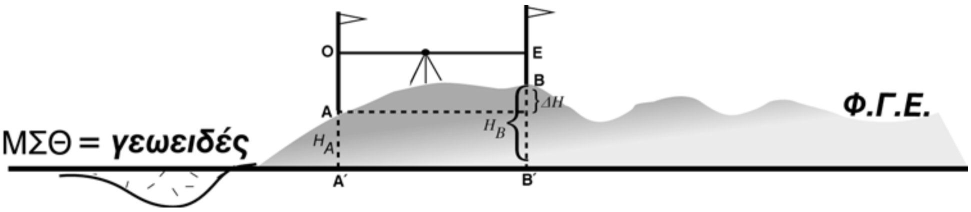


Εικόνα 5.3. Κλασσικός χωροβάτης - Ψηφιακός χωροβάτης

οριζόντιο επίπεδο (Εικ. 5.3), το οποίο «τέμνει» οπτικά τις δύο κατακόρυφες σταδίες (αριθμημένοι πήχεις) στα σημεία Α και Β. Οι διαφορές των αναγνώσεων τους Ο και

[1] **<u>Υψόμετρο (Η)</u>** σημείου καλείται η απόστασή του από την επιφάνεια αναφοράς του. Στην Ελλάδα επιφάνεια αναφοράς είναι η μέση στάθμη της θάλασσας (ΜΣΘ) όπως έχει προσδιοριστεί μετά από μετρήσεις πολλών ετών στον παλιρροιογράφο του Πειραιά. Όπως είναι γνωστό η μέση στάθμη της θάλασσας «ταυτίζεται» με το γεωειδές στην περιοχή με ακρίβεια ±1m.

Ε αντίστοιχα, δίνουν την υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων ΔΗ =Ο-Ε, (Σχ. 5.4) με ακρίβεια που μπορεί να φθάσει και το ±1mm/√km. Αν τα Α και Β απέχουν πολύ, η διαδικασία επαναλαμβάνεται οπότε η υψομετρική διαφορά τους ισούται με το άθροισμα όλων των Ο-Ε, δηλ. Σ(Ο-Ε). Η γεωμετρική χωροστάθμηση ολοκληρώνεται με μετρήσεις μετάβασης και επιστροφής.



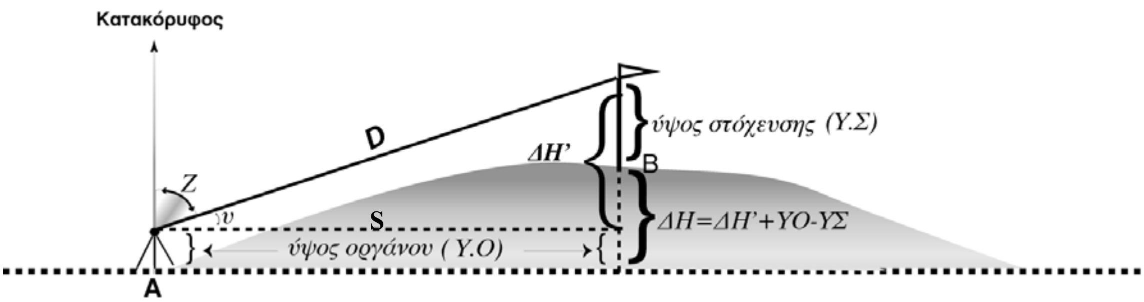
Σχήμα 5.4. Γεωμετρική χωροστάθμηση. Μέτρηση υψομετρικών διαφορών

Υψομετρικές διαφορές μπορούν να μετρηθούν επίσης με Τριγωνομετρική υψομετρία μετρώντας το κεκλιμένο μήκος (D) μεταξύ των σημείων και την αντίστοιχη ζενίθια γωνία (z) (Σχ. 5.5), από τη σχέση (5.2) :

ΔΗ=Dcosz+ΥΟ-ΥΣ (5.2)

που δίνει την υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων Α και Β, όπου :

ΥΟ= ύψος οργάνου , ΥΣ= ύψος σκόπευσης.



Σχ.5.5 Τριγωνομετρική Υψομετρία. Μέτρηση υψομετρικών διαφορών

Για μεγάλες αποστάσεις πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και διορθώνεται η τιμή της υψομετρικής διαφοράς που προκύπτει από την (5.2), λόγω της σφαιρικότητας της γης ($S^2/2R$) και της διάθλασης της ατμόσφαιρας ($-kS^2/2R$), όπου k= 0.16 ο συντελεστής διάθλασης και R η ακτίνα καμπυλότητας της γης. Για μία απόσταση 500 m η συνολική διόρθωση $[(1-k)S^2/2R]$ είναι 1.6 cm.

Επομένως ο πλήρης τύπος της τριγωνομετρικής υψομετρίας γράφεται :

$ΔH=D\cos z+(1-k)S^2/2R+Y0-YΣ$ (5.3)

5.3.1. Άλλες μετρήσεις

Ο Τοπογράφος μετρά την ένταση και την διεύθυνση του πεδίου βαρύτητας της γης είτε για την αναγωγή γεωμετρικών μεγεθών (διευθύνσεων και υψομετρικών διαφορών) στην επιφάνεια αναφοράς και την διόρθωση των αποτελεσμάτων της γεωμετρικής χωροστάθμησης, είτε για την χαρτογράφηση του πεδίου βαρύτητας. Η *ένταση του πεδίου βαρύτητας* μετριέται με το βαρυτήμετρο ενώ η *διεύθυνση του* με αστρονομικές παρατηρήσεις.

Κατά την διάρκεια των γεωδαιτικών μετρήσεων γίνονται επίσης μετρήσεις των ατμοσφαιρικών συνθηκών όπως π.χ. θερμοκρασίας, ατμοσφαιρικής πίεσης, υγρασίας για τον προσδιορισμό της ταχύτητας των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ατμόσφαιρα και τις αναγωγές των μετρήσεων, κυρίως των μηκών.

Τέλος γίνονται μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου της γης με μαγνητόμετρα.

5.3.2 Αναγωγές –Υπολογισμοί

Μετά την ολοκλήρωση των μετρήσεων ακολουθούν οι αναγωγές, οι διορθώσεις , καθώς και οι υπολογισμοί έτσι ώστε τα μετρούμενα μεγέθη πάνω στην φ.γ.ε:

- να προσδιοριστούν οι καλύτερες τιμές και τα σφάλματα των μεγεθών που μετρήθηκαν πολλές φορές
- να απαλλαγούν από τις επιδράσεις του περιβάλλοντος, όπως της ατμόσφαιρας στις μετρήσεις των αποστάσεων και των κατακόρυφων γωνιών, της απόκλισης της κατακορύφου (διεύθυνση του g) στις οριζόντιες κυρίως γωνίες και της έντασης της βαρύτητας στις μετρήσεις υψομετρικών διαφορών κατά τη γεωμετρική χωροστάθμηση.
- να αναχθούν (προβληθούν) στην επιφάνεια αναφοράς, που χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς, δηλαδή από την επιφάνεια της γης που γίνονται οι μετρήσεις π.χ. στο ελλειψοειδές αναφοράς και από εκεί στην επιφάνεια προβολής . Ανάγονται τόσο οι πλευρές όσο και οι διευθύνσεις και γωνίες. Για απλά τοπογραφικά (ιδιωτικά) διαγράμματα χρησιμοποιείται συνήθως το οριζόντιο επίπεδο.
- να «συνορθωθούν» έτσι ώστε να γίνουν όλες οι μετρήσεις συμβιβαστές μεταξύ τους και

- να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των σημείων είτε σε δύο διαστάσεις (οριζοντιογραφία) και χωριστά τα υψόμετρα των σημείων, είτε ταυτόχρονα στις τρεις διαστάσεις.

Βασική προϋπόθεση για να υπολογισθούν οι συντεταγμένες των νέων σημείων που μετρήσαμε στο Κρατικό Σύστημα Αναφοράς είναι να υπάρχουν τα σχετικά δίκτυα (Τριγωνομετρικό και Υψομετρικό) στην περιοχή και να έχουν συνδεθεί με μετρήσεις με τα δίκτυα αυτά.

5.4 Αποτυπώσεις

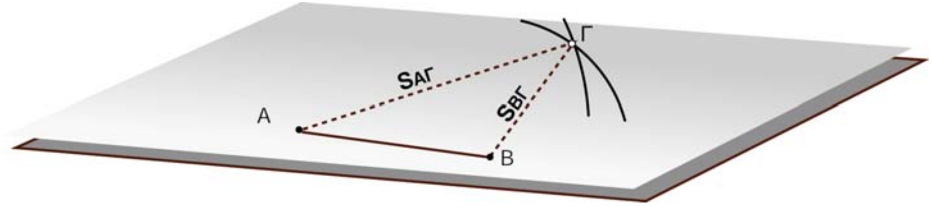
Αποτύπωση καλείται η διαδικασία μέτρησης και «απόδοσης» (σχεδίασης), ενός τμήματος της επιφάνειας της γης ή αντικειμένου με όλα τα φυσικά και τεχνητά χαρακτηριστικά τους πάνω σε ένα χαρτί υπό κλίμακα.

Ανάλογα με τα διαθέσιμα όργανα και το μέγεθος της εργασίας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω μεθόδους αποτύπωσης. Αν είναι δυνατή η χρήση ζεύγους δορυφορικών δεκτών GPS η εργασία υπαίθρου διευκολύνεται πολύ για εκτεταμένες εργασίες κυρίως.

Σε κάθε περίπτωση συσχετίζουμε «γνωστά» σημεία ή άξονες, που μετρώνται ιδιαίτερα, με τα χαρακτηριστικά σημεία που περιγράφουν το σχήμα ή το ανάγλυφο του εδάφους, ώστε να είναι δυνατός ο προσδιορισμός και η σχεδίασή τους στο χαρτί.

- *Μέθοδος πλευρών (τριγώνου)*

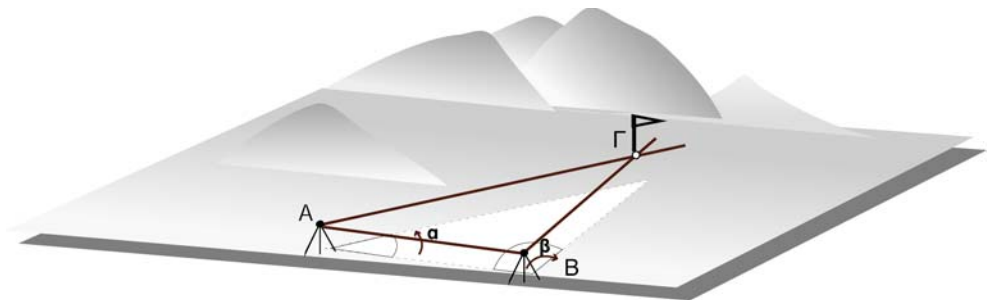
Αν είναι γνωστά (ή αν θεωρηθούν γνωστά) τα σημεία Α και Β, το σημείο Γ προσδιορίζεται στην τομή των δύο κύκλων με κέντρα το Α και Β και ακτίνες $S_{AΓ}$ και $S_{BΓ}$ αντίστοιχα, οι οποίες και μετρώνται στο έδαφος, συνήθως με μετροταινία για οριζοντιογραφική μόνο αποτύπωση . Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στις μετρήσεις μηκών (Σχ.5.6). Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου συμπληρωθεί η αποτύπωση με διαδοχικά τρίγωνα. Για την σχεδίαση τοποθετούμε στη κατάλληλη θέση πάνω στο χαρτί την πλευρά ΑΒ, στη κλίμακα σχεδίασης και με την βοήθεια διαβήτου και των μετρημένων αποστάσεων (υπό κλίμακα) σχεδιάζεται το διάγραμμα της ιδιοκτησίας βάσει και του σκαριφήματος που έχουμε πρόχειρα σχεδιάσει στο ύπαιθρο.



Σχήμα 5.6. Αποτύπωση σημείου Γ. Μέθοδος πλευρών (τριγώνου)

- *Μέθοδος γωνιών (εμπροσθοτομία)*

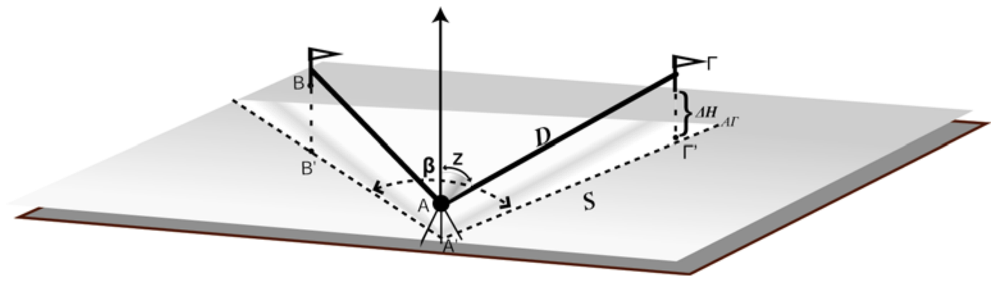
Γνωστά τα Α και Β. Το Γ βρίσκεται στην τομή των διευθύνσεων ΑΓ και ΒΓ. Μετρώνται οι γωνίες α και β με το θεοδόλιχο και επιλύεται το τρίγωνο ΑΒΓ για να προκύψουν οι άλλες πλευρές και οι συντεταγμένες του σημείου Γ.(Σχ.5.7).
Χρησιμοποιείται κυρίως για πύκνωση των σημείων αναφοράς ή απρόσιτων σημείων.



Σχήμα 5.7. Αποτύπωση σημείου Γ. Μέθοδος γωνιών (εμπροσθοτομία)

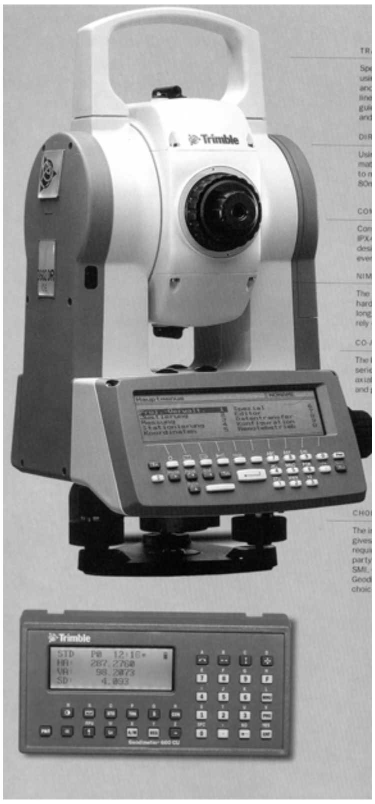
- *Μέθοδος πολικών Συντεταγμένων (Ταχυμετρική Μέθοδος)*

Το σημείο Γ προσδιορίζεται αν μετρηθούν από το γνωστό σημείο Α η απόσταση $S_{ΑΓ}$ ή το κεκλιμένο μήκος $D_{ΑΓ}$ και η οριζόντια γωνία β με αφετηρία γνωστή διεύθυνση ΑΒ. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατόν να προσδιοριστεί και η υψομετρική διαφορά $ΔΗ_{ΑΓ}$ αν ταυτόχρονα μετρηθεί και η ζενίθια γωνία προς το σημείο Γ (Σχ.5.8) .



Σχήμα 5.8. Αποτύπωση σημείου Γ. Μέθοδος πολικών συντεταγμένων

Η μέθοδος αυτή είναι και η περισσότερο διαδεδομένη (με τη χρήση ταχύμετρου και σταδίας παλαιότερα) και σήμερα με τους «γεωδαιτικούς σταθμούς» (συνδυασμός θεοδολίχου και EDM) (Εικ.5.4), όργανα που μπορούν να μετρούν και να καταγράφουν ταυτόχρονα γωνίες και αποστάσεις, αλλά και να υπολογίζουν ταυτόχρονα τις συντεταγμένες και το υψόμετρο των νέων σημείων όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων (στάσεων) Α και Β και το υψόμετρο του Α.



Εικόνα 5.4. Γεωδαιτικός Σταθμός: Ηλεκτρονικό ψηφιακό καταγραφικό όργανο μέτρησης γωνιών και αποστάσεων

Μετά από τους σχετικούς υπολογισμούς γίνεται η σχεδίαση (υπό κλίμακα), με χρήση κλίμακας και διαβήτη στη μέθοδο πλευρών ή με τη βοήθεια ορθογωνίων συντεταγμένων για τις άλλες μεθόδους και το τελικό προϊόν μπορεί να είναι συνήθως:

- ένα <u>τοπογραφικό σχέδιο</u> (με υψομετρικές καμπύλες) ή ένα κτηματολογικό σχέδιο ή μπορεί να είναι και ένα ειδικό σχέδιο για την εξυπηρέτηση συγκεκριμένου σκοπού π.χ. αποτύπωση σπηλαίου ή
- ένας χάρτης μεγάλης κλίμακας (1:5000 ή 1:10.000)

Το τελικό αποτέλεσμα των μετρήσεων εκτός από ένα σχέδιο ή ένα διάγραμμα μπορεί να είναι μόνο ένας πίνακας με τις συντεταγμένες των σημείων που μετρήθηκαν (π.χ. για τον έλεγχο μετακινήσεων).

5.5 Χάραξη

Την μελέτη ενός τεχνικού έργου π.χ. δρόμου ή μίας ρυμοτομικής μελέτης, ακολουθεί η υλοποίηση στο έδαφος, δηλαδή **η χάραξη** του τεχνικού έργου πάνω στην γήινη επιφάνεια, εργασία η οποία απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και αυξημένη ακρίβεια και ευθύνη.

Σήμερα η χάραξη γίνεται εύκολα με τη χρήση γεωδαιτικού σταθμού ή και ευκολότερα με τους δορυφορικούς δέκτες GPS.

5.6 Έλεγχοι

Οι έλεγχοι που μπορεί να κάνει ο Τοπογράφος Μηχανικός είναι π.χ.

- Έλεγχος ορθής χάραξης οικοδομικού τετραγώνου ή οικοπέδου ως προς τον περιβάλλοντα χώρο.
- Έλεγχος ορθής (γεωμετρικής) κατασκευής π.χ. αν ένα κτίριο ή ένα πλοίο κλπ έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με τη μελέτη του.
- Έλεγχος σταθερότητας π.χ., αν μέρος του έργου υποχωρεί ή «μετακινείται» προς το υπόλοιπο ή τον περιβάλλοντα χώρο συγκρίνοντας τη θέση (συντεταγμένες) χαρακτηριστικών σημείων του έργου, όπως προέκυψε από μετρήσεις σε διάφορες χρονικές στιγμές.
- Έλεγχος εγκατάστασης και ορθής λειτουργίας βιομηχανικών εγκαταστάσεων π.χ. μηχανή χαρτοποιίας κ.λ.π.

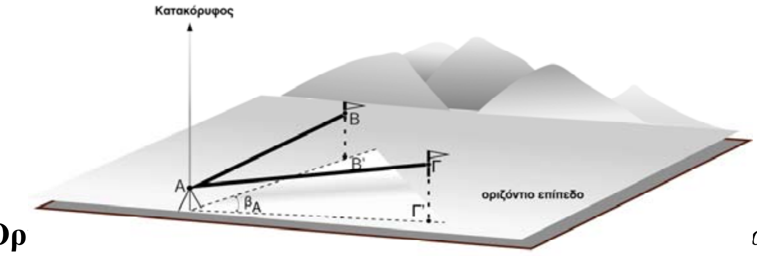
5.7 Συνεργασία με άλλους επιστήμονες όπως:

- Μηχανικούς π.χ. πολιτικούς μηχανικούς στα τεχνικά έργα ιδιαίτερα στα μεγάλα τεχνικά έργα στην οδοποιία στους ελέγχους σταθερότητας και ασφάλειας των έργων Ναυπηγούς για ελέγχους πορείας πλοίων και θέματα ναυσιπλοΐας.
- Αρχιτέκτονες και αρχαιολόγους για ειδικές αποτυπώσεις μνημείων και αρχαιολογικών χώρων
- Γεωλόγους, γεωφυσικούς και σεισμολόγους για τις μετακινήσεις τεχνικών έργων (μαζί με Πολιτικούς Μηχανικούς) και του στερεού φλοιού της γης κλπ.

5.8 Βασικοί Ορισμοί στη Γεωδαισία

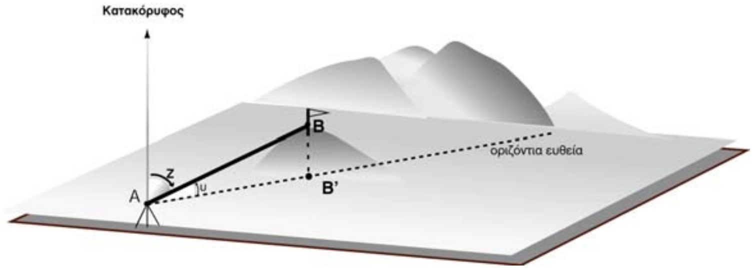
Με βάση το σχήμα της γης, την κατακόρυφο και την διεύθυνσή της ορίζονται βασικές έννοιες, που χρησιμοποιούνται στην γεωδαισία.

Οριζόντιο επίπεδο: Είναι το επίπεδο το κάθετο στην κατακόρυφο σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της. Από το συγκεκριμένο αυτό σημείο της κατακορύφου περνά μία ***ισοδυναμική επιφάνεια*** (*χωροσταθμική επιφάνεια*) πάνω στην οποία εφάπτεται το οριζόντιο επίπεδο. Από κάθε σημείο του χώρου περνά **μόνο ένα** οριζόντιο επίπεδο.
Οριζόντια ευθεία: Είναι η ευθεία η κάθετη στην κατακόρυφο.
Κατακόρυφο επίπεδο: Είναι το επίπεδο που περιέχει μία κατακόρυφο.
Απόσταση: μεταξύ δύο σημείων **Α** και **Β**, είναι το μήκος **Α΄Β΄** , όπου **Α΄** και **Β΄** είναι οι προβολές των **Α** και **Β** στην επιφάνεια αναφοράς (π.χ. οριζόντιο επίπεδο).
Εμβαδόν: ενός κλειστού πολυγώνου **ΑΒΓΔ...Α** είναι το εμβαδόν της προβολής του **Α΄Β΄Γ΄Δ΄...Α΄** στην επιφάνεια αναφοράς (π.χ. οριζόντιο επίπεδο).



Σχήμα 5.9

Ορ *ωνίας* που σχηματίζεται από τα επίπεδα που περιέχουν την "κατακόρυφο" στο σημείο **Α** και τα σημεία **Β** και **Γ** αντίστοιχα (Σχ. 5.9). Μετριέται στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Α.



Σχήμα 5.10

Κατακόρυφη γωνία ή **γωνία ύψους** (**υ**) της **ΑΒ**: είναι η γωνία που σχηματίζει η σκόπευση **ΑΒ** με την προβολή της στο οριζόντιο επίπεδο. Η συμπληρωματική της γωνίας ύψους λέγεται **ζενίθια γωνία** (**z**). (Σχ. 5.10). Ισχύει: $\mathbf{υ+z= 100^g \ (90^0)}$

Υψόμετρο: σημείου **Α** (**H_A**), είναι η απόσταση τους από την *ισοδυναμική επιφάνεια* (*χωροσταθμική επιφάνεια*) που θεωρείται ως επιφάνεια αναφοράς. Συνηθίζεται ως επιφάνεια αναφοράς να εκλέγεται η *μέση στάθμη της θάλασσας* (*μ.σ.θ.*) που μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζει ικανοποιητικά το *γεωειδές* στην περιοχή.

Υψομετρική διαφορά (ισοϋψής καμπύλη): μεταξύ δύο σημείων **Α** και **Β** (**ΔH_{AB}**) είναι η διαφορά των υψομέτρων τους **$H_B – H_A$**.

Υψομετρική καμπύλη: είναι η τομή της *φ.γ.ε.* με μία χωροσταθμική επιφάνεια (π.χ. με ένα οριζόντιο επίπεδο) ή αλλοιώς, είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με *σταθερό υψόμετρο*. Παρουσιάζεται ως μία συνεχής καμπύλη γραμμή πάνω στα διαγράμματα και στους χάρτες.

Ευθυγραμμία: Τομή κατακόρυφου επιπέδου με την ***Φ.Γ.Ε.*** Προβάλλεται σε *ευθεία γραμμή* στο οριζόντιο επίπεδο.

5.9 Μονάδες μετρήσεων

Οι μετρήσεις στην γεωδαισία είναι προϊόν συνδυασμού της ανθρώπινης επιδεξιότητας και της χρήσης διαφόρων οργάνων. Η ποιότητα των αποτελεσμάτων των μετρήσεων βελτιώνεται όταν το σύστημα "όργανο-παρατηρητής" γίνεται καλύτερο, τόσο με την αύξηση της εμπειρίας του παρατηρητή όσο και με την βελτίωση των τεχνικών χαρακτηριστικών των οργάνων.

Οι μετρήσεις που υλοποιούνται στην γεωδαισία είναι:

- μετρήσεις μηκών (κεκλιμένων και οριζοντίων)
- μετρήσεις γωνιών (οριζοντίων και κατακορύφων) και
- μετρήσεις υψομετρικών διαφορών.

Στις επόμενες ενότητες θα δοθούν οι μονάδες που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις αυτές. Είναι γνωστό ότι, κατά καιρούς έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορα συστήματα μετρήσεων, σ΄ όλο τον κόσμο. Τα ευρύτερα χρησιμοποιούμενα μέχρι πρόσφατα ήταν το μετρικό σύστημα και το Αγγλοσαξωνικό σύστημα (*Imperial System*). Σήμερα, πάντως, με την καθιέρωση και υιοθέτηση από τα περισσότερα κράτη του *Διεθνούς Συστήματος Μονάδων* (*Systeme Internationale d' Unités*) ή σε σύντμηση **SI**, έχει επικρατήσει το μετρικό σύστημα μονάδων.

Μονάδες μήκους

Η βασική μονάδα μήκους αποδεκτή από το SI σύστημα είναι το μέτρο* με τα πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά του, όπως έχουν συμφωνηθεί διεθνώς να χρησιμοποιούνται. Αυτά είναι :

Μεγαμετρο (Mm)	Χιλιομετρο (Km)	Εκατομετρο (hm)	Δεκαμετρο (dam)	Δεκατομετρο (dm)	Εκατοστομετρο (cm)	Χιλιοστομετρο (mm)	Μικρο (μm)	Νανο(μετρο) (nm)	Angstrom (Å)
10^6m	10^3m	10^2m	10^1m	10^{-1} m	10^{-2}m	10^{-3} m	10^{-6} m	10^{-9} m	10^{-10} m

Στην πράξη χρησιμοποιούνται τα Km, m, cm και mm**.

Μονάδες υψομέτρων

Τα υψόμετρα και οι υψομετρικές διαφορές, προφανώς, έχουν μονάδες μήκους.

Μονάδες επιφανείας

Βασική μονάδα μέτρησης είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2). Ακόμα, χρησιμοποιούνται τα:

1 Αριο =10^2 m^2
1 Στρέμμα = 10^3m^2
1 Εκτάριο (ha)= 10^4m^2
1Km^2 = 10^6m^2

Παλαιότερα, στην Ελλάδα χρησιμοποιούσαν και τον τετραγωνικό τεκτονικό πήχυ, που αντιστοιχεί στα 9/16m^2, δηλαδή 1 τετραγωνικός πήχυς = 0.5625m^2.

* Το μέτρο καθιερώθηκε ως μονάδα μέτρησης μήκους το 1791 και είχε ορισθεί σαν το 10^{-7} του μήκους του ¼ της περιμέτρου του γήινου ισημερινού. Το 1799, ορίσθηκε σαν το διάστημα (μήκος) κάτω από συγκεκριμένες φυσικές συνθήκες, μεταξύ δύο χαραγών πάνω σε μία πρότυπη ράβδο (ήταν κατά 90% πλατίνα και 10% ιρίδιο) και φυλασσόταν στο Μουσείο Μέτρων και Σταθμών των Παρισίων. Το 1960 ορίσθηκε σαν μήκος ίσο με 1650763.73 μήκη κύματος στο *κενό* της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στην μετάπτωση μεταξύ των στοιβάδων $2p_{10}$ και $5d_5$ του ατόμου του Kr86 (Κρυπτόν – 86). Από το 1983 το μέτρο ορίζεται ως η **απόσταση** που το φως διασχίζει στο *κενό* σε ακριβώς **1/ 299 792 458 sec**. Αυτός ο ορισμός του μέτρου εξαρτά το μήκος του από την *διάρκεια του sec* (δευτερολέπτου). Εξ ορισμού η ταχύτητα του φωτός είναι ακριβώς **299 792 458 m/sec**.

** Παρ΄όλο που ισχύει το **SI** σύστημα σε πολλά Αγγλοσαξονικά βιβλία χρησιμοποιούνται μονάδες μήκους του Αγγλοσαξονικού συστήματος. Οι κυριότερες είναι:

1 ft (foot, πόδι) = 12in (inches, ίντσες)
1 yd (yard, γιάρδα) = 3ft
1 mile (μίλι) = 5280ft
ενώ ισχύει:1 inch = 2.54 cm
1ft = 0.3048 m
39.37in = 1 m

Μονάδες όγκου

Βασική μονάδα μέτρησης όγκου, κυρίως για τα στερεά, είναι το κυβικό μέτρο (m^3). Για όγκο υγρών είναι το λίτρο (lt), όπου 1lt = 0.001 m^3.

Μονάδες γωνιών

Η βασική μονάδα μέτρησης γωνιών που έχει γίνει αποδεκτή στο **SI** είναι το ***ακτίνιο*** (***rad***), που αντιστοιχεί σε γωνία με μήκος τόξου ίσο με την ακτίνα.

$$2\pi \text{ rad} = 1 \text{ περιφέρεια} = 4 \text{ ορθές γωνίες}$$

Το ακτίνιο χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά, στους Η/Υ, καθώς και σε γεωδαιτικούς υπολογισμούς.

Συνήθως, οι μετρήσεις γωνιών γίνονται με πιο πρακτικές μονάδες όπως οι <u>μοίρες</u> (*degrees*, εξηκονταδικό σύστημα) ή οι <u>βαθμοί</u> (*grades*, εκατονταδικό σύστημα). Ισχύει:

$60'' = 1'$ $\qquad$ $100^{cc} = 1^{c}$

$60' = 1^{o}$ $\qquad$ $100^{c} = 1^{g}$

$360^{o} = 4$ ορθές $\qquad$ $400^{g} = 4$ορθές

Η συνηθισμένη γραφή των γωνιών σε μοίρες είναι : $\underline{\mathbf{123^{o}\ 25'\ 40''}}$

Η ανάλογη σε βαθμούς είναι: $\underline{\mathbf{319^{g}\ 89^{c}\ 45^{cc}}}$ ή $\underline{\mathbf{319.^{g}8945}}$

Το εκατονταδικό σύστημα είναι αυτό που χρησιμοποιείται συχνότερα στη Γεωδαισία στην Ελλάδα.

Στη Γεωδαιτική Αστρονομία χρησιμοποιείται και η ώρα (h)

$$1h = 1/24 \text{ της περιφέρειας} = 60min, \quad 1min = 60sec$$

Η σχέση μεταξύ των τεσσάρων συστημάτων (ακτίνια, μοίρες, βαθμοί, ώρες) δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\alpha}{\mathbf{rad}} = \frac{\theta}{\mathbf{180^{o}}} = \frac{\omega}{\mathbf{200^{g}}} = \frac{h}{\mathbf{24}}$$

όπου η γωνία ***θ*** στην σχέση εκφράζεται <u>*σε δεκαδική μορφή*</u>.

Οι υπολογισμοί όλων των γωνιακών μεγεθών σε Η/Υ γίνονται σε μορφή ακτινίων. Στους υπολογιστές τσέπης υπάρχουν στο πληκτρολόγιο πλήκτρα που επιτρέπουν την εισαγωγή ενός γωνιακού μεγέθους είτε σε ακτίνια, ή σε βαθμούς ή σε μοίρες.

Συχνά, είναι αναγκαίο μία μικρή γωνία εκφρασμένη σε ακτίνια να μετατραπεί σε δευτερόλεπτα τόξου (μοιρών ή βαθμών). Είναι γνωστό, όμως, ότι για πολύ μικρές γωνίες ισχύει: $\theta(rad) = \mathbf{arc}\theta \cong \mathbf{sin}\theta \cong \mathbf{tan}\theta$

Εάν η γωνία $\boldsymbol{\theta}$ είναι εκφρασμένη σε δευτερόλεπτα, το τόξο της ή το ημίτονό της ή η εφαπτομένη της μπορούν να προσδιορισθούν με τις σχέσεις:

$$\mathbf{arc}\theta = \theta^{cc} \cdot \mathbf{arc\ 1}^{cc} \quad (\alpha\kappa\rho\iota\beta\eta\varsigma\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$$
$$\mathbf{sin}\theta = \theta^{cc} \cdot \mathbf{sin\ 1}^{cc} \quad (\pi\rho o\sigma\varepsilon\gamma\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$$
$$\mathbf{tan}\theta = \theta^{cc} \cdot \mathbf{tan\ 1}^{cc} \quad (\pi\rho o\sigma\varepsilon\gamma\gamma\iota\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \sigma\chi\varepsilon\sigma\eta)$$

Γνωρίζοντας ότι:

$$\mathbf{arc\ 1}^{cc} \cong \mathbf{sin\ 1}^{cc} \cong \mathbf{tan\ 1}^{cc} \cong \frac{1}{636620} = \frac{1}{\rho^{cc}} \ \kappa\alpha\iota$$
$$\mathbf{arc\ 1}'' \cong \mathbf{sin\ 1}'' \cong \mathbf{tan\ 1}'' \cong \frac{1}{206265} = \frac{1}{\rho''}$$
$$\theta rad = \frac{\theta^{cc}}{\rho^{cc}} = \frac{\theta''}{\rho''}$$

τελικά είναι:

Μονάδες θερμοκρασίας

Η βασική μονάδα μέτρησης θερμοκρασίας στο **SI** είναι ο βαθμός *Kelvin* (^{o}K) , που είναι η μονάδα της *θερμοδυναμικής κλίμακας της θερμοκρασίας*. Ο βαθμός *Celsius* (^{o}C) χρησιμοποιείται περισσότερο στην καθημερινή πρακτική των παρατηρήσεων και είναι σε μέγεθος 1^{o}C =1^{o}K.

Η κλίμακα *Celsius* (παλαιότερα γνωστή και σαν εκατοντάβαθμη κλίμακα) βασίζεται στην:

0^{o}C = 273.15^{o}K που σημαίνει:

(^{o}K) = 273^{o}.15 + **t** (^{o}C)

Στο Αγγλοσαξωνικό σύστημα χρησιμοποιείται ο βαθμός *Fahrenheit* (^{o}F). Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς *Celsius* και *Fahrenheit* είναι η :

t (^{o}C) =[**t** (^{o}F) –32^{o}]•5/ 9

Μονάδες ατμοσφαιρικής πίεσης

Η βασική μονάδα στο SI είναι το Pascal (Pa). Είναι γνωστό ότι: 1Pa=1N/m^{2}

Η κανονική ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας είναι ίση με:
101,325 KN/ m^2 =101325 Pa. (N=Neuton)

Στην καθημερινή πρακτική των μετρήσεων χρησιμοποιούνται το 1bar = 10^5 N/m^2 ή καλύτερα: 1mbar=100 N/m^2 και το 1mm στήλης Hg 1,33322mbar, που σημαίνει στην επιφάνεια της θάλασσας: 760mmHg=1013,25mbar.

Μονάδες χρόνου

Βασική μονάδα χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (sec). Είναι γνωστό ότι:

60sec = 1min, 60min = 1h = 3600sec

Επίσης: 1sec=10^3msec=10^6μsec=10^9nsec=10^{12}pcosec.
(m=mili, μ=micro, n=nano και p=pico)

Βιβλιογραφία

1. *Μπαλοδήμος Δ-Δ., Σταθάς Δ,* **Γεωδαιτικά όργανα και μέθοδοι μέτρησης γωνιών και μηκών,** Αθήνα 1993

2. *Μπαλοδήμος Δ-Δ., Σταθάς λ, Αραμπατζή Ο.,* **Γεωδαισία**, *Δίκτυα-Αποτυπώσεις-Χαράξεις*. Αθήνα ,2000

3. *Μπαντέλλας Α.,Γ., Σαββαΐδης Π.Δ., Υφαντής Ι.Μ., Δούκας Ι.Δ.,* **Αποτυπώσεις-Χαράξεις Τεχνικών Εργων,** Τόμοι Ι,ΙΙ, 2η έκδοση, Αφοί Κυριακίδη α.ε.

Βιβλιογραφία

1. *Μπαλοδήμος Δ-Δ., Σταθάς Δ,* **Γεωδαιτικά όργανα και μέθοδοι μέτρησης γωνιών και μηκών,** Αθήνα 1993

2. *Μπαλοδήμος Δ-Δ., Σταθάς λ, Αραμπατζή Ο.,* **Γεωδαισία**, *Δίκτυα-Αποτυπώσεις-Χαράξεις*. Αθήνα ,2000

3. *Μπαντέλλας Α.,Γ., Σαββαίδης Π.Δ., Υφαντής Ι.Μ., Δούκας Ι.Δ.,* **Αποτυπώσεις-Χαράξεις Τεχνικών Εργων,** Τόμοι Ι,ΙΙ, 2η έκδοση, Αφοί Κυριακίδη α.ε.

6. Στοιχεία από τη θεωρία Σφαλμάτων

Μ.Α. Αγατζά-Μπαλοδήμου

- *Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί βελτιωμένη έκδοση του ομώνυμου κεφαλαίου των σημειώσεων «εισαγωγή στη Γεωδαισία» των Α.Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου &Δ.Δ. Μπαλοδήμου του 1988.*

- *Ευχαριστώ την Υ.Δ της ΣΑΤΜ κ. Δήμητρα Τσίνη για την πολύτιμη βοήθειά της στην παρούσα έκδοση.*

Α.Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου

6.1 Σφάλματα στις μετρήσεις

Ένα μέγεθος προσδιορίζεται άμεσα, με απ' ευθείας μετρήσεις, ή έμμεσα, μετρώντας ένα ή περισσότερα μεγέθη που συνδέονται με το ζητούμενο.

Το αποτέλεσμα μιας μέτρησης που είναι σύγκριση του μεγέθους με κάποια μονάδα, δεν μπορεί ποτέ να θεωρηθεί πως δίνει την αληθινή τιμή του μεγέθους, αλλά μια εκτίμηση. Έτσι κάθε μέτρηση περιέχει ένα σφάλμα που η αληθινή του τιμή δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί, γιατί δεν είναι γνωστή και η αληθινή τιμή του μεγέθους.

Για μεγαλύτερη σιγουριά για τον προσδιορισμό της τιμής ενός μεγέθους γίνονται περισσότερες από μια μετρήσεις.

Έτσι προκύπτει η ανάγκη του προσδιορισμού της καλύτερης τιμής του μεγέθους χρησιμο-ποιώντας το σύνολο των μετρήσεων καθώς και του προσδιορισμού της ποιότητας των μετρήσεων και της καλύτερης τιμής.

6.1.1 Πηγές και είδη σφαλμάτων

Σφάλματα που οφείλονται σε απροσεξία του παρατηρητή, ονομάζονται χονδροειδή ή και λάθη, προσδιορίζονται εύκολα με επανάληψη της μέτρησης και αποφεύγονται αν ο παρατηρητής είναι προσεκτικός.

Υπάρχουν όμως σφάλματα που οφείλονται σε φυσικά αίτια όπως μεταβολές θερμοκρασίας, υγρασίας κ.λ.π., σε ατέλειες οργάνων όπως: κακή διαίρεση οριζόντιου κύκλου ενός θεοδόλιχου ή μετροταινία με διαφορά από το πρότυπο κ.λ.π. και τέλος σφάλματα που οφείλονται στη λειτουργία των ανθρώπινων αισθήσεων (προσωπικά σφάλματα).

Τα σφάλματα αυτά μπορεί να είναι ή συστηματικά ή τυχαία, δεν είναι δυνατό να εξαλειφ-θούν, αλλά μπορούν να περιοριστούν με προσεκτικές μετρήσεις και κατάλληλες αναγωγές .

Συστηματικά είναι εκείνα τα σφάλματα που παρουσιάζουν σταθερότητα ή περιοδικότητα σε μέγεθος και πρόσημο. Σε μεγάλο ποσοστό τα συστηματικά σφάλματα υπακούουν σε κάποιο φυσικό νόμο οπότε, μπορούν να υπολογιστούν. Μπορεί ακόμη ορισμένα να απαλειφθούν ακολουθώντας κατάλληλη μεθοδολογία στις μετρήσεις.

Σχεδόν πάντα όμως παραμένει, ένα μικρό ποσοστό συστηματικών σφαλμάτων που είναι πιθανό να εντοπιστεί μετά την επεξεργασία των μετρήσεων.

Τυχαία είναι εκείνα τα σφάλματα που η συμπεριφορά τους μπορεί να περιγραφεί μόνο από νόμους της τύχης και αντιμετωπίζονται με μεθόδους της στατιστικής.

6.1.2 Ακρίβεια – Ορθότητα

Αποχή είναι η διαφορά δύο τιμών ενός μεγέθους. Αν οι αποχές των μετρήσεων είναι μικρές, σημαίνει πως δεν υπάρχουν χονδροειδή σφάλματα και πως τα τυχαία σφάλματα είναι μικρά. Δεν εξασφαλίζεται όμως πως δεν υπάρχει κάποιο συστηματικό σφάλμα. Αν π.χ. ένας πεπειραμένος παρατηρητής μετράει με μετροταινία που δεν έχει συγκριθεί με το πρότυπο αλλά έχει κατασκευαστεί από αδιάσταλτο υλικό και έχει υποδιαιρέσεις του ενός mm, τα αποτελέσματα των μετρήσεων θα έχουν πολύ μικρές αποχές αλλά θα περιέχουν ένα σταθερό σφάλμα ίδιο για όλες τις μετρήσεις.

Στην περίπτωση αυτή λέμε πως οι μετρήσεις είναι ακριβείς χωρίς να ξέρουμε αν είναι ορθές.

Η Ακρίβεια (precision) είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν οι μετρήσεις μεταξύ τους. Εξαρτάται από την ευαισθησία του οργάνου και την ικανότητα του παρατηρητή και μπορεί να εκτιμηθεί για μια σειρά μετρήσεων που έγιναν στο ίδιο σύστημα "Όργανο - παρατηρητής – συνθήκες".

Αντίθετα η Ορθότητα (Accuracy) είναι έννοια που αναφέρεται στο πόσο οι μετρήσεις πλησιάζουν την αληθινή τιμή. Η εκτίμηση της ορθότητας των μετρήσεων δεν μπορεί να γίνει από τα αποτελέσματα μιας σειράς μετρήσεων με το ίδιο σύστημα, "Όργανο -Παρατηρητής - συνθήκες".

6.1.3 Τυχαία σφάλματα

Αν X είναι η αληθινή τιμή ενός μεγέθους και x_i το αποτέλεσμα μιας μέτρησης απαλλαγμένο από χονδροειδή και συστηματικά σφάλματα (όσα είναι δυνατό να απαλειφθούν) το "αληθές" σφάλμα ε_i της μέτρησης θα είναι:

$$\varepsilon_i = x_i - X \qquad (6.1)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε η X δεν είναι γνωστή και δεν μπορεί να εκτιμηθεί από μια σειρά μετρήσεων όσο καλές και πολλές και αν είναι, έτσι, δεν μπορεί να υπολογιστεί το "αληθές" σφάλμα.

Αν όλες οι μετρήσεις μιας σειράς δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα $x_1 = x_2 = ... = x_n$ τότε το - το πλήθος n των μετρήσεων πλησιάζει το άπειρο, τότε η ακριβής τιμή του μεγέθους θα είναι:

$$\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum x_1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[x]}{n} \text{ [1]} \qquad (6.2)$$

Η διαφορά $u_i = x_i - \mu$ (6.3) είναι το τυχαίο σφάλμα.

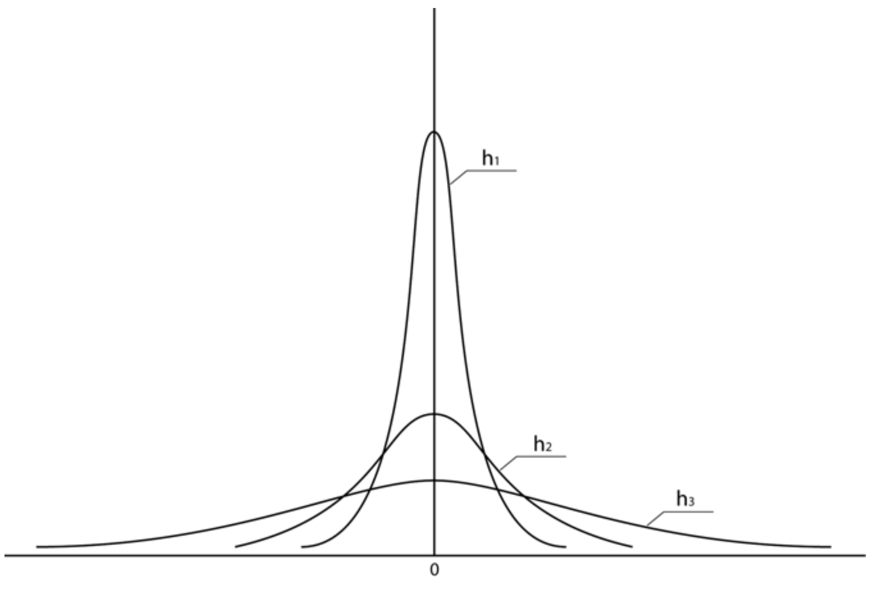
Από την θεωρία πιθανοτήτων και στατιστικής είναι γνωστό ότι:

- Η συχνότητα εμφάνισης ενός θετικού σφάλματος είναι ίδια με την συχνότητα ενός αρνητικού.
- Τα μικρά σφάλματα εμφανίζονται πιο συχνά απ’ ότι τα μεγάλα.
- Μεγάλα σφάλματα δεν εμφανίζονται καθόλου ή έχουν πολύ μικρή πιθανότητα να εμφανιστούν.

Από πειραματικές και θεωρητικές μελέτες έχει δειχθεί πως η πιθανότητα [2] P(x) εμφάνισης ενός σφάλματος με τιμή από x ως x +dx δίνεται με ικανοποιητική προσέγγιση από τη σχέση:

$$P(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx \qquad (6.4)$$

Η συνάρτηση $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ ονομάζεται συνάρτηση πυκνοτήτων ή κανονικής κατανομής του Gauss. Στο Σχ.6.1 εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης y για $h_3 < h_2 < h_1$.



Σχήμα 6.1

[1] Ο συμβολισμός [x] ξεκίνησε από τον Gauss και συμβολίζει το άθροισμα.

[2] Σαν πιθανότητα θεωρείται ο λόγος του αριθμού των σφαλμάτων με τιμές μεταξύ x και x+dx, προς το συνολικό αριθμό των σφαλμάτων, όταν ο αριθμός των μετρήσεων τείνει στο άπειρο.

Η καμπύλη που σχηματίζεται ονομάζεται καμπύλη πυκνοτήτων ή κανονικής κατανομής του Gauss και όπως φαίνεται, όσο μεγαλώνει η παράμετρος h τόσο πιο οξεία γίνεται η καμπύλη, που σημαίνει πως όσο μεγαλώνει η h τόσο μικραίνει η διασπορά των σφαλμάτων. Έτσι η παράμετρος h εκφράζει την ακρίβεια των μετρήσεων.

Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον άξονα των τετμημένων και την καμπύλη της κανονικής κατανομής εκφράζει την πιθανότητα που έχει ένα σφάλμα να κυμαίνεται από -∞ έως +∞ και είναι ίσο με 1 (βεβαιότητα).

Έτσι $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = 1 \qquad (6.5)$$

Η μορφή των καμπύλων του σχήματος 6.1 δείχνει πως ανταποκρίνονται στα χαρακτηριστικά των τυχαίων σφαλμάτων που αναφέρθηκαν.

Στην πράξη οι μετρήσεις έχουν πάντα ένα περιορισμένο αριθμό, που σημαίνει πως δεν μπορεί να υπολογισθεί η ακριβής τιμή ενός μεγέθους και φυσικά δεν είναι γνωστά τα τυχαία σφάλματα των μετρήσεων.

Έτσι, από τα αποτελέσματα των μετρήσεων υπολογίζεται η καλύτερη εκτίμηση (καλύτερη τιμή) της ακριβούς τιμής, η ποιότητα των μετρήσεων και η αποχή που αναμένεται να έχει η εκτίμηση από την ακριβή τιμή.

6.2 Ισοβαρείς παρατηρήσεις

Οι μετρήσεις ενός μεγέθους πού έγιναν όλες με το ίδιο σύστημα "όργανο - παρατηρητής - συνθήκες" μπορεί να θεωρηθεί πως έχουν όλες την ίδια ακρίβεια και ότι θα πρέπει να συμβάλλουν όλες το ίδιο στο τελικό αποτέλεσμα. Οι μετρήσεις αυτές ονομάζονται ισοβαρείς.

6.2.1 Καλύτερη τιμή

Στην περίπτωση αυτή, αν με $x_1, x_2 ..., x_n$ συμβολιστούν τα αποτελέσματα n μετρήσεων, η καλύτερη τιμή $\hat{x}$ του μεγέθους θα είναι η μέση τιμή $\overline{x}$ άρα:

$$\hat{x}=\overline{x}=\frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i = \frac{[x]}{n} \quad (6.6)$$

Επειδή γενικά τα αποτελέσματα των μετρήσεων συμβολίζονται με ℓ η σχέση (6.6) γράφεται:

$$\hat{x}=\hat{\ell}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\ell_i=\frac{[\ell]}{n}=\overline{\ell} \quad (6.7)$$

Η διαφορά $\upsilon_i=\ell_\iota-\hat{x}$ ονομάζεται πιθανό σφάλμα ή υπόλοιπο αν θεωρηθεί ως $\upsilon_i=\hat{x}-\ell_\iota$.

Αποδεικνύεται πως:

$$\sum_{1}^{n}\upsilon_i=[\upsilon]=0 \qquad (6.8)$$

ενώ

$$\sum_{1}^{n}\upsilon_i^2=[\upsilon\upsilon]=\min \qquad (6.9)$$

Η σχέση (6.9) εκφράζει την αρχή των ελαχίστων τετραγώνων βάσει της οποίας υπολογίζονται γενικά οι καλύτερες τιμές μεγεθών που μετρώνται άμεσα ή έμμεσα από μετρήσεις άλλων, όταν τα μετρημένα μεγέθη είναι ίσης ακρίβειας και περισσότερα από τα απαραίτητα για τη λύση ενός προβλήματος.

Αν οι μετρήσεις είναι πολλές $\hat{x} \approx \mu$ και τα υπόλοιπα υ θεωρείται πως συμπεριφέρονται όπως τα τυχαία σφάλματα u ακολουθώντας την κανονική κατανομή.

6.2.2 Τυπικό σφάλμα

Η παράμετρος h, που είναι ενδεικτική της ακρίβειας των μετρήσεων, γράφεται σαν:

$$h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \qquad (6.10)$$

Με σ συμβολίζεται το τυπικό σφάλμα της κάθε μέτρησης της συγκεκριμένης σειράς μετρήσεων.

Ονομάζεται τυπικό σφάλμα γιατί χαρακτηρίζει (τυποποιεί) την συγκεκριμένη σειρά μετρήσεων και ορίζεται από τη σχέση:

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{[uu]}{n}} \qquad (6.11)$$

Επειδή όμως δεν είναι γνωστή η ακριβής τιμή, η σχέση (6.11) έχει εφαρμογή αν $n\to\infty$.

Στις περιπτώσεις πεπερασμένου αριθμού μετρήσεων γίνεται εκτίμηση του τυπικού σφάλματος από τα υπόλοιπα υ των μετρήσεων και η καλύτερη εκτίμηση δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}} \quad (6.12)$$ [3]

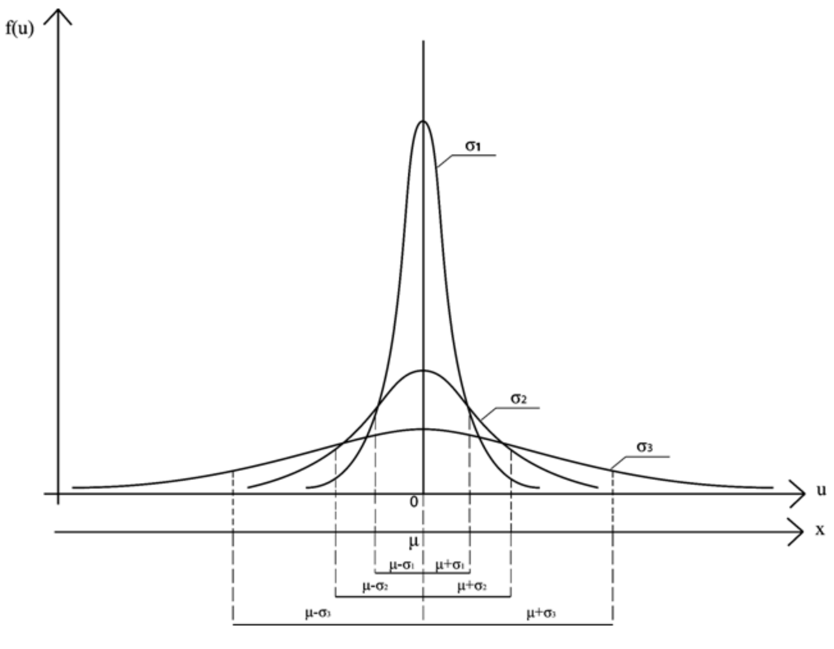
Η ποσότητα n-1 = r ονομάζεται βαθμός ελευθερίας και δίνει πόσες μετρήσεις περισσότερες από τις απαραίτητες έγιναν για τον προσδιορισμό του μεγέθους.(Στη στατιστική, το τυπικό σφάλμα που υπολογίζεται από μια σειρά πεπερασμένου αριθμού μετρήσεων, συμβολίζεται με **s** και ονομάζεται τυπική απόκλιση.)

Το τετράγωνο του τυπικού σφάλματος $\boldsymbol{\sigma^2}$ ονομάζεται μεταβλητότητα.

Όπως ήδη αναφέρθηκε τα τυχαία σφάλματα $u_i = x_i - \mu$ ακολουθούν την κανονική κατανομή και προφανώς την ίδια κατανομή ακολουθούν και οι μετρήσεις, οπότε:

$$y = f(u) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (6.13)$$

Το τυπικό σφάλμα σ είναι ένα μέτρο ακρίβειας των μετρήσεων, διότι όσο μεγαλύτερο είναι, τόσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά των μετρήσεων. Στο σχήμα (6.2) εμφανίζονται καμπύλες κανονικής κατανομής για $\sigma_1 \langle \sigma_2 \langle \sigma_3$. Τα σημεία καμπής της f(u) ή f(x) αντιστοιχούν σε τετμημένες –σ και +σ ή μ –σ και μ + σ αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2

[3] Αν στην περίπτωση πεπερασμένου αριθμού μετρήσεων θεωρείτο και πάλι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n}}$, τότε για την περίπτωση n=1, η σχέση θα οδηγούσε στο άτοπο να είναι το τυπικό σφάλμα ίσο με 0 αντί για απροσδιόριστο

Αν η f(u) ολοκληρωθεί μεταξύ των ορίων -σ έως +σ το εμβαδόν που προκύπτει είναι ίσο με 0.6826 και εκφράζει την πιθανότητα:

$$P\left(-\sigma \le x\text{-}\mu \le +\sigma\right) = 68.3\%$$

ή

$$P\left(\mu\text{-}\sigma \le x \le \mu + \sigma\right) = 68.3\%$$

που σημαίνει πως η πιθανότητα εμφάνισης ενός τυχαίου σφάλματος μεταξύ -σ και +σ είναι 68.3% ή ότι το αποτέλεσμα μιας μέτρησης αναμένεται να κυμαίνεται μεταξύ μ-σ και μ+σ με πιθανότητα 68.3%.

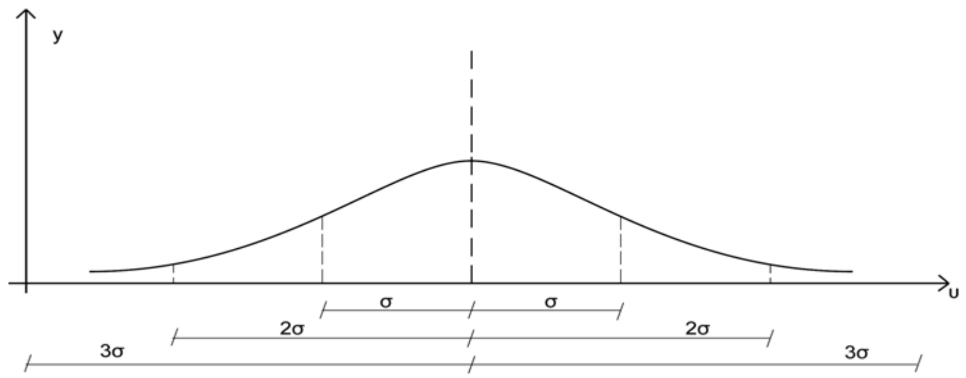
Αν η f(u) ολοκληρωθεί μεταξύ (–2σ,+2σ) και (–3σ,+3σ) θα ισχύουν αντίστοιχα:

$$P\left(-2\sigma \prec x\text{-}\mu \prec +2\sigma\right) = 95.4\%$$

και

$$P\left(-3\sigma \prec x\text{-}\mu \prec +3\sigma\right) = 99.7\% .$$

Τα μεγέθη σ, 2σ, 3σ αποτελούν διαστήματα μέσα στα οποία αναμένεται να βρίσκεται ένα τυχαίο σφάλμα με πιθανότητα 68.3%, 95.4% και 99.7% αντίστοιχα.(σχ.6.3)



Σχήμα 6.3

6.2.3 Αναλογικά σφάλματα

Τα σφάλματα γραμμικών μεγεθών που συνήθως εξαρτώνται από τα μεγέθη που αναφέρονται, εκφράζονται συχνά ως αναλογικά σφάλματα με τον λόγο:

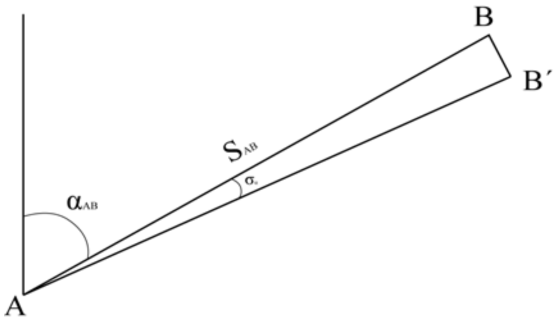
$\frac{\sigma_s}{S}$ ή $\frac{1}{K}$ όπου $K=\frac{S}{\sigma_s}$ ή σε ppm

Τα γωνιακά σφάλματα δεν έχει νόημα να εκφραστούν αναλογικά, γιατί είναι ανεξάρτητα από τα μεγέθη των γωνιών. Δηλαδή αν έχουμε ένα σφάλμα 20^{cc} στην σκόπευση τότε το σφάλμα αυτό είναι το ίδιο είτε μετράμε μια γωνία 60^g είτε 160^g.

Το γωνιακό όμως σφάλμα μιας διεύθυνσης ij εκφρασμένο σε rad (ακτίνια), δίνει το αναλογικό γραμμικό σφάλμα σε διεύθυνση κάθετη προς την διεύθυνση ij. Έτσι συχνά εκφράζονται τα γωνιακά σφάλματα σε ppm (parts per million = μέρη στο εκατομμύριο) ή

$$\sigma_\gamma^{rad} \text{ ή } \frac{1}{K} \text{ όπου } K=\frac{1}{\sigma_\gamma^{rad}}$$

Παράδειγμα



Μετρήθηκε η απόσταση S_{AB} με σφάλμα 0.05m και η γωνία διεύθυνσης α_{AB} με σφάλμα 10^{cc}. Αν η απόσταση S_{AB} είναι 5000m να εκφραστούν τα σφάλματα της απόστασης και της γωνίας σε μορφή $\frac{1}{K}$ και σε ppm.

Λύση

Το αναλογικό σφάλμα της απόστασης είναι:

$$\frac{0.05}{5000}=\frac{1}{100000}$$

Σε ppm το αντίστοιχο σφάλμα είναι:

$$\frac{1}{100000}\times 10^6 = 10\text{ppm}$$

Αυτό σημαίνει πως στα 10^6m το σφάλμα είναι 10m. Το γωνιακό σφάλμα εκφρασμένο σε rad δίνει το λόγο της γραμμικής μετατόπισης BB΄ του σημείου B σε διεύθυνση κάθετη στην AB προς την απόσταση S_{AB}. Έτσι προκύπτει:

$$\sigma_\alpha^{rad}=\frac{10}{\rho^{cc}}=\frac{10}{636620}=\frac{1}{63662}=\frac{BB'}{S_{AB}}$$

που σημαίνει πως το σφάλμα των 10^{cc} στα 5000m αντιστοιχεί σε μετατόπιση BB΄=0.08m ή ότι στα 63662m το γραμμικό σφάλμα θα είναι 1m.

Έτσι το αντίστοιχο σφάλμα σε ppm θα είναι:

$$10^6\times\sigma_\alpha^{rad}=\frac{10}{\rho^{cc}}\times 10^6=\frac{10}{636620}\times 10^6=15.7\approx 16\text{ppm}$$

που σημαίνει γραμμικό σφάλμα 16m στα 10^6m.

6.2.4 Μετάδοση σφαλμάτων

Αν για τον προσδιορισμό ενός μεγέθους y έχουν μετρηθεί τα μεγέθη x_1 και x_2 n φορές και είναι γνωστό ότι το μέγεθος y συνδέεται με τα x_1 και x_2 γραμμικά με τη σχέση π.χ.

$$y=\alpha x_1+\beta x_2 \quad (6.14)$$

δημιουργείται η ανάγκη να υπολογιστεί η καλύτερη τιμή του y, το τυπικό σφάλμα ενός προσδιορισμού του y και το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής.

Για κάθε ζευγάρι μετρήσεων x_{1i}, x_{2i} προκύπτει η τιμή του $y_i=\alpha x_{1i}+\beta x_{2i}$ (6.15) και προφανώς:

$$\overline{y}=\alpha\overline{x}_1+\beta\overline{x}_2 \quad (6.16)$$

Αν στις σχέσεις (6.15) τεθεί $y_i=\overline{y}+\upsilon_{y_i}$ και $x_{1i}=\overline{x}_1+\upsilon_{x_{1i}}$, $x_{2i}=\overline{x}_2+\upsilon_{x_{2i}}$ τότε για τις n μετρήσεις προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\overline{y}+\upsilon_{y_1} &= \alpha(\overline{x}_1+\upsilon_{x_{11}})+\beta(\overline{x}_2+\upsilon_{x_{21}})\\
\overline{y}+\upsilon_{y_2} &= \alpha(\overline{x}_1+\upsilon_{x_{12}})+\beta(\overline{x}_2+\upsilon_{x_{22}})\\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\overline{y}+\upsilon_{y_n} &= \alpha(\overline{x}_1+\upsilon_{x_{1n}})+\beta(\overline{x}_2+\upsilon_{x_{2n}})
\end{aligned} \quad (6.17)$$

Αλλά λόγω της σχέσης (6.16) οι σχέσεις (6.17) γίνονται:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{y_1} &= \alpha\upsilon_{x_{11}}+\beta\upsilon_{x_{21}}\\
\upsilon_{y_2} &= \alpha\upsilon_{x_{12}}+\beta\upsilon_{x_{22}}\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots\\
\upsilon_{y_n} &= \alpha\upsilon_{x_{1n}}+\beta\upsilon_{x_{2n}}
\end{aligned} \quad (6.18)$$

Υψώνοντας τις σχέσεις (6.18) στο τετράγωνο γίνονται:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{y_1}^2 &= \alpha^2\upsilon_{x_{11}}^2+\beta^2\upsilon_{x_{21}}^2+2\alpha\beta\upsilon_{x_{11}}\upsilon_{x_{21}}\\
\upsilon_{y_2}^2 &= \alpha^2\upsilon_{x_{12}}^2+\beta^2\upsilon_{x_{22}}^2+2\alpha\beta\upsilon_{x_{12}}\upsilon_{x_{22}}\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
\upsilon_{y_n}^2 &= \alpha^2\upsilon_{x_{1n}}^2+\beta^2\upsilon_{x_{2n}}^2+2\alpha\beta\upsilon_{x_{1n}}\upsilon_{x_{2n}}
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις n παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\left[\upsilon_y\upsilon_y\right]=\alpha^2\left[\upsilon_{x_1}\upsilon_{x_1}\right]+\beta^2\left[\upsilon_{x_2}\upsilon_{x_2}\right]+2\alpha\beta\left[\upsilon_{x_1}\upsilon_{x_2}\right] \quad (6.19)$$

και διαιρώντας με n-1:

$$\frac{\left[\upsilon_y\upsilon_y\right]}{n-1}=\alpha^2\frac{\left[\upsilon_{x_1}\upsilon_{x_1}\right]}{n-1}+\beta^2\frac{\left[\upsilon_{x_2}\upsilon_{x_2}\right]}{n-1}+2\alpha\beta\frac{\left[\upsilon_{x_1}\upsilon_{x_2}\right]}{n-1} \quad (6.20)$$

Αλλά $\frac{[\upsilon_{x_1}\upsilon_{x_1}]}{n\text{-}1}=\sigma^2_{x_1}, \frac{[\upsilon_{x_2}\upsilon_{x_2}]}{n\text{-}1}=\sigma^2_{x_2}, \frac{[\upsilon_y\upsilon_y]}{n\text{-}1}=\sigma^2_y$

Εφ' όσον τα μεγέθη x_1, x_2 μετρήθηκαν ανεξάρτητα θα είναι:

$[\upsilon_{x_1}\upsilon_{x_2}] \approx [\upsilon_{x_1}][\upsilon_{x_2}]=0$ (6.21)

Άρα προκύπτει πως η μεταβλητότητα ενός προσδιορισμού του μεγέθους y, αν τα μεγέθη x_1, x_2 <u>έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα</u>, θα είναι:

$\sigma^2_y=\alpha^2\sigma^2_{x_1}+\beta^2\sigma^2_{x_2}$ (6.22)

και το τυπικό σφάλμα σ_y θα είναι:

$\sigma_y=\pm\sqrt{\alpha^2\sigma^2_{x_1}+\beta^2\sigma^2_{x_2}}$ (6.23)

Γενικά αν δίνεται μία σχέση της μορφής $y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_\nu x_\nu$ (6.24) και τα τυπικά σφάλματα των $x_1, x_2, ..., x_\nu$, θα ισχύει η σχέση:

$\sigma_y=\pm\sqrt{\alpha_1^2\sigma^2_{x_1}+\alpha_2^2\sigma^2_{x_2}+...+\alpha_\nu^2\sigma^2_{x\nu}}$ (6.25)

Αν το μέγεθος y συνδέεται με τα μετρημένα μεγέθη $x_1, x_2, ..., x_\nu$ με σχέση $y=f(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ που δεν είναι γραμμική ως προς τα $x_1, x_2, ..., x_\nu$, η καλύτερη τιμή του y θα είναι η :

$\overline{y}=f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_\nu)$ (6.26)

Για απειροελάχιστες μεταβολές $dx_1, dx_2, ..., dx_\nu$ των $x_1, x_2, ..., x_\nu$ η μεταβολή της τιμής του μεγέθους y θα είναι: $dy=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial y}{\partial x_\nu}dx_\nu$ (6.27)

Έτσι αν για μια μέτρηση των $x_1, x_2, ..., x_\nu$ θεωρηθεί ότι :

$\upsilon_{y_1}=dy_1, \upsilon_{x_{1i}}=dx_{1i}, \upsilon_{x_{21}}=dx_{2i}, ..., \upsilon_{x_{\nu i}}=dx_{\nu i}$

τότε για τις n μετρήσεις των $x_1, x_2, ..., x_\nu$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{y_1}&=\frac{\partial y}{\partial x_1}\upsilon_{x_{11}}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\upsilon_{x_{21}}+...+\frac{\partial y}{\partial x_\nu}\upsilon_{x_{\nu 1}}\\
\upsilon_{y_2}&=\frac{\partial y}{\partial x_1}\upsilon_{x_{12}}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\upsilon_{x_{22}}+...+\frac{\partial y}{\partial x_\nu}\upsilon_{x_{\nu 2}}\\
\vdots\quad&\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\
\upsilon_{y_n}&=\frac{\partial y}{\partial x_1}\upsilon_{x_{1n}}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\upsilon_{x_{2n}}+...+\frac{\partial y}{\partial x_\nu}\upsilon_{x_{\nu n}}
\end{aligned}\qquad (6.28)$$

Αλλά οι σχέσεις (6.28) δεν διαφέρουν από τις (6.18). Έτσι εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\sigma_y = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_\nu}\right)^2 \sigma_{x\nu}^2} \qquad (6.29)$$

Η σχέση (6.29) αποτελεί την γενική έκφραση του νόμου μετάδοσης των σφαλμάτων[4] για την περίπτωση που τα μεγέθη $x_1, x_2, ..., x_\nu$ έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα.

Θα πρέπει να αναφερθεί πως ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων εφαρμόζεται όποτε δίνονται τα τυπικά σφάλματα μεγεθών $x_1, x_2, ..., x_\nu$ και ζητείται το σφάλμα της συνάρτησης $f(x_1, x_2, ..., x_\nu)$ χωρίς να είναι απαραίτητο να δοθούν μετρήσεις ή καλύτερες τιμές, αρκεί να γνωρίζουμε την τάξη μεγέθους των $x_1, x_2, ..., x_\nu$, ώστε να υπολογισθούν οι τιμές των μερικών παραγώγων $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_\nu}$.

6.2.5 Τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής

Το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής είναι μια εκτίμηση της αποχής της από την ακριβή τιμή και φυσικά εξαρτάται από την ποιότητα των μετρήσεων (από το τυπικό σφάλμα της μιας μέτρησης).

Εφ' όσον οι παρατηρήσεις θεωρούνται ισοβαρείς, όλες θα έχουν την ίδια ακρίβεια.

Η καλύτερη τιμή από n ισοβαρείς παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ενός μεγέθους, όπως αποδείχτηκε είναι η:

$$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \ldots + \frac{x_n}{n} \qquad (6.30)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο μετάδοσης σφαλμάτων προκύπτει ότι:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_{x_1}^2 + \frac{1}{n^2}\sigma_{x_2}^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}\sigma_{x_n}^2 \qquad (6.31)$$

Εφ' όσον όμως όλες οι παρατηρήσεις έχουν την ίδια ακρίβεια, αν θεωρηθεί σαν μέτρο ακριβείας το σ, θα είναι $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \ldots = \sigma_{x_n} = \sigma$, οπότε:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n}{n^2}\sigma^2 \qquad (6.32)$$

Επειδή όμως $\sigma = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}$ η σχέση (6.32) γίνεται:

[4] Στη γενική του μορφή ονομάζεται και νόμος μετάδοσης μεταβλητοτήτων

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}} \qquad (6.33)$$

Από τις σχέσεις (6.29) και (6.33) προκύπτει πως το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής του μεγέθους y, όταν $y = f(x_1, x_2, ..., x_\nu)$, θα είναι:

$$\sigma_{\bar{y}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{\bar{x}_2}^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_\nu}\right)^2 \sigma_{\bar{x}\nu}^2} \qquad (6.34)$$

6.2.6. Παραδείγματα

6.2.6.1. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου οικοπέδου βρέθηκαν:

α = 15.20m ±0.02m

β = 30.15m ±0.04m

Να υπολογισθούν η περίμετρος, το εμβαδόν και η διαφορά β-α με τα τυπικά τους σφάλματα.

Λύση

Η περίμετρος θα είναι:

Π = 2α +2β = 90.70m

με τυπικό σφάλμα

$$\sigma_\Pi = \pm\sqrt{2^2\sigma_\alpha^2 + 2^2\sigma_\beta^2} = \pm 0.09\text{m}$$

Το εμβαδόν θα είναι:

$E = \alpha \cdot \beta = 458.3\text{m}^2$

με τυπικό σφάλμα:

$$\sigma_E = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \beta}\right)^2 \sigma_\beta^2} = \pm\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2} = \pm 0.9\text{m}^2$$

Η διαφορά β-α = 14.95 m με τυπικό σφάλμα :

$$\sigma_{(\beta\text{-}\alpha)} = \pm\sqrt{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2} = \pm 0.04\text{m}$$

6.2.6.2. Οι συντεταγμένες X_A, Y_A ενός σημείου Α είναι γνωστές με $\sigma_{X_A} = \pm 0.03\text{m}$ και $\sigma_{Y_A} = \pm 0.04\text{m}$. Η απόσταση S_{AB} πρόκειται να μετρηθεί με $\sigma_{S_{AB}} = \pm 0.03\text{m}$ και η γωνία διεύθυνσης α_{AB} με $\sigma_{\alpha_{AB}} = \pm 20^{cc}$. Να υπολογιστούν τα τυπικά σφάλματα $\sigma_{X_B}, \sigma_{Y_B}$ με τα οποία μπορούν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες X_B, Y_B του σημείου Β αν $S_{AB} \approx 1000\text{m}$ και $\alpha_{AB} \approx 30^g$.

Λύση

Είναι γνωστό πως

$$X_B = X_A + S_{AB}\sin\alpha_{AB}$$
$$Y_B = Y_A + S_{AB}\cos\alpha_{AB}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης σφαλμάτων στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\sigma_{X_B} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial X_B}{\partial X_A}\right)^2\sigma_{X_A}^2 + \left(\frac{\partial X_B}{\partial S_{AB}}\right)^2\sigma_{S_{AB}}^2 + \left(\frac{\partial X_B}{\partial \alpha_{AB}}\right)^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2}$$
$$\sigma_{Y_B} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial Y_B}{\partial X_A}\right)^2\sigma_{Y_A}^2 + \left(\frac{\partial Y_B}{\partial S_{AB}}\right)^2\sigma_{S_{AB}}^2 + \left(\frac{\partial Y_B}{\partial \alpha_{AB}}\right)^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2}$$

Αλλά

$$\frac{\partial X_B}{\partial X_A} = 1 \qquad \frac{\partial Y_B}{\partial X_A} = 1$$
$$\frac{\partial X_B}{\partial S_{AB}} = \sin\alpha_{AB} \qquad \frac{\partial Y_B}{\partial S_{AB}} = \cos\alpha_{AB}$$
$$\frac{\partial X_B}{\partial \alpha_{AB}} = S_{AB}\cos\alpha_{AB} \qquad \frac{\partial Y_B}{\partial \alpha_{AB}} = -S_{AB}\sin\alpha_{AB}$$

Οπότε

$$\sigma_{X_B} = \pm\sqrt{\sigma_{X_A}^2 + (\sin\alpha_{AB})^2\sigma_{S_{AB}}^2 + (S_{AB}\cos\alpha_{AB})^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2}$$
$$\sigma_{Y_B} = \pm\sqrt{\sigma_{Y_A}^2 + (\cos\alpha_{AB})^2\sigma_{S_{AB}}^2 + (-S_{AB}\sin\alpha_{AB})^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2}$$

Οι σχέσεις αυτές θα δώσουν αποτελέσματα σε μέτρα εφ' όσον όλοι οι προσθετέοι των υπόριζων έχουν μονάδες μέτρου. Τα γινόμενα $(S_{AB}\cos\alpha_{AB})^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2$, $(-S_{AB}\sin\alpha_{AB})^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2$ έχουν μονάδες m^2cc^2. Τα $\sigma_{X_B}, \sigma_{Y_B}$ όμως τα θέλουμε εκφρασμένα σε μέτρα. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το $\sigma_{\alpha_{AB}}$ να εκφραστεί σε rad ή να διαιρεθούν οι αντίστοιχοι συντελεστές μπροστά από αυτό με p^{cc} (δηλαδή $\frac{S_{AB}\cos\alpha_{AB}}{p^{cc}}$, $\frac{-S_{AB}\sin\alpha_{AB}}{p^{cc}}$).

Έτσι τελικά προκύπτουν:

$$\sigma_{X_B} = \pm\sqrt{\sigma_{X_A}^2 + (\sin\alpha_{AB})^2\sigma_{S_{AB}}^2 + \left(\frac{S_{AB}\cos\alpha_{AB}}{p^{cc}}\right)^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2} = \pm 0.04\text{m}$$
$$\sigma_{Y_B} = \pm\sqrt{\sigma_{Y_A}^2 + (\cos\alpha_{AB})^2\sigma_{S_{AB}}^2 + \left(\frac{-S_{AB}\sin\alpha_{AB}}{p^{cc}}\right)^2\sigma_{\alpha_{AB}}^2} = \pm 0.05\text{m}$$

6.3. Ανισοβαρείς Παρατηρήσεις

Αν οι μετρήσεις ενός μεγέθους έγιναν από διαφορετικό σύστημα "όργανο - παρατηρητής- συνθήκες", οι μετρήσεις δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν την ίδια ακρίβεια, πράγμα πού σημαίνει πως δεν πρέπει να συμβάλλουν το ίδιο στην εύρεση του τελικού αποτελέσματος.

Στη περίπτωση αυτή οι μετρήσεις ονομάζονται ανισοβαρείς.

6.3.1 Έννοια βάρους-καλύτερη τιμή

Το βάρος μιας μέτρησης μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αριθμός που εκφράζει πόσο περισσότερο θα πρέπει να συμβάλλει μια μέτρηση στο τελικό αποτέλεσμα σε σχέση με κάποια άλλη.

Για την κατανόηση της έννοιας του βάρους και της καλύτερης τιμής ανισοβαρών παρατηρήσεων δίνεται ένα απλό παράδειγμα.

Μια γωνία μετρήθηκε από το ίδιο σύστημα "όργανο - παρατηρητής- συνθήκες" n φορές με αποτελέσματα $x_1, x_2, ..., x_v$. Όπως είναι γνωστό η καλύτερη τιμή θα είναι η:

$$\hat{x}=\overline{x}=\frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n} \qquad (6.35)$$

Αν τώρα τα αποτελέσματα χωριστούν σε δύο ομάδες, με n_A και n_B ($n_A + n_B = n$), με μετρήσεις στην κάθε μία και για κάθε ομάδα υπολογιστεί η καλύτερη τιμή θα είναι:

$$\overline{x}_A = \frac{x_1 + x_2 ... + x_{n_A}}{n_A} \qquad \overline{x}_B = \frac{x_{n_{A+1}} + x_{n_{A+2}} ... + x_{n_B}}{n_B} \qquad (6.36)$$

Η καλύτερη τιμή $\overline{x}$ του μεγέθους μπορεί να εκφραστεί σαν:

$$\overline{x}=\frac{n_A \overline{x}_A + n_B \overline{x}_B}{n_A + n_B} \qquad (6.37)$$

Οι σχέσεις (6.35) και (6.37) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα $\overline{x}$.

Στη σχέση (6.37) οι αριθμοί n_A και n_B μπορούν να αντικατασταθούν από αριθμούς P_A και P_B τέτοιους ώστε:

$$\frac{P_A}{n_A} = \frac{P_B}{n_B} = \text{σταθ.} \qquad (6.38)$$

Οι αριθμοί P_A και P_B ονομάζονται βάρη και στη περίπτωση αυτή είναι αυθαίρετοι αριθμοί, ανάλογοι του αριθμού των παρατηρήσεων από τις οποίες έχουν προκύψει οι μέσοι όροι $\overline{x}_A$ και $\overline{x}_B$.

Αν θεωρηθεί πως οι αρχικές ισοβαρείς παρατηρήσεις έχουν ένα τυπικό σφάλμα σ_o, τα τυπικά σφάλματα των $\overline{x}_A$ και $\overline{x}_B$ θα είναι:

$$\sigma_{\overline{x}_A} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_A}} \qquad \text{και} \qquad \sigma_{\overline{x}_B} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_B}}$$

που σημαίνει ότι:

$$\frac{\sigma_{\overline{x}_A}}{\sigma_{\overline{x}_B}} = \frac{\sqrt{n_B}}{\sqrt{n_A}} \quad (6.39) \quad \text{ή} \quad \frac{\sigma^2_{\overline{x}_A}}{\sigma^2_{\overline{x}_B}} = \frac{P_B}{P_A} \quad (6.40)$$

Από τη σχέση (6.40) προκύπτει πως τα βάρη P_A και P_B είναι αντιστρόφως ανάλογα των μεταβλητοτήτων των $\overline{x}_A$ και $\overline{x}_B$.

Αν, αντί για τους μέσους όρους δύο ομάδων παρατηρήσεων, που κάθε μία παρατήρηση έχει το ίδιο τυπικό σφάλμα, έχουμε δύο παρατηρήσεις x_1 και x_2 με διαφορετικά τυπικά σφάλματα σ_{X_1} και σ_{X_2}, αναγόμαστε στη προηγούμενη περίπτωση θεωρώντας πως η κάθε μία μέτρηση x_1, x_2 είναι ο μέσος όρος n_1 και n_2 φανταστικών μετρήσεων που όλες έχουν το ίδιο τυπικό σφάλμα σ_o.

Τα τυπικά σφάλματα σ_{X_1} και σ_{X_2} θεωρούνται σαν τυπικά σφάλματα των μέσων όρων n_1 και n_2 παρατηρήσεων αντίστοιχα, που όλες έχουν το ίδιο τυπικό σφάλμα σ_o. Έτσι θα είναι:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_1}} \qquad \text{και} \qquad \sigma_{x_2} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_2}} \quad (6.41)$$

ή

$$n_1 = \frac{\sigma_o^2}{\sigma^2_{x_1}} \qquad \text{και} \qquad n_2 = \frac{\sigma_o^2}{\sigma^2_{x_2}} \quad (6.42)$$

Θεωρώντας για τις παρατηρήσεις x_1, x_2 βάρη P_1 και P_2 που να ικανοποιούν την σχέση:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sigma^2_{X_2}}{\sigma^2_{X_1}} \quad (6.43)$$

υπολογίζεται η καλύτερη τιμή $\overline{x}$ του μεγέθους από τη σχέση:

$$\overline{x} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} \quad (6.44)$$

Η καλύτερη τιμή στη περίπτωση ανισοβαρών παρατηρήσεων ονομάζεται γενικευμένος μέσος όρος και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}=\frac{[Px]}{[P]} \quad (6.45)$$

0 γενικευμένος μέσος όρος ικανοποιεί την αρχή της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων πού στη περίπτωση ανισοβαρών παρατηρήσεων, σαν καλύτερη τιμή θεωρείται εκείνη για την οποία $[P\upsilon\upsilon]=\min$.

6.3.2 Τυπικό σφάλμα του γενικευμένου μέσου όρου $\sigma_{\bar{x}}$

Όπως αναφέρθηκε, τα βάρη μπορεί να οριστούν σαν αριθμοί πού εκφράζουν πόσο περισσότερο θα πρέπει να συμβάλλει μια μέτρηση σε σχέση με κάποια άλλη. Έτσι, αν σε κάποια μέτρηση πραγματική ή φανταστική δοθεί βάρος 1 η μέτρηση αυτή ονομάζεται μονάδα βάρους και το τυπικό σφάλμα που της αντιστοιχεί, είναι το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους.

Για τον υπολογισμό του γενικευμένου μέσου όρου δεν χρειάζεται γνώση του σ_o αλλά μόνο μια εκτίμηση του λόγου των τυπικών σφαλμάτων των μετρήσεων, γιατί:

$$\frac{P_i}{P_j}=\frac{n_i}{n_j}=\frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2} \quad (6.46)$$

Αν θεωρηθεί $P_i=1$ θα είναι $\sigma_o=\sigma_i$.

Η αρχική τιμή του σ_o που εξαρτάται μόνο από την επιλογή μονάδας βάρους ονομάζεται a priori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους και η τιμή του δεν επηρεάζει τον γενικευμένο μέσο όρο άρα ούτε το τυπικό του σφάλμα.

Μετά την εύρεση του γενικευμένου μέσου όρου $\bar{x}$, συγκρίνοντας τον με τις μετρήσεις από *τις* οποίες προέκυψε, γίνεται μια νέα εκτίμηση του σ_o, πού συμβολίζεται με $\hat{\sigma}_o$ και ονομάζεται a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους.

Γνωρίζοντας το $\hat{\sigma}_o$, γίνονται νέες εκτιμήσεις για τα τυπικά σφάλματα των μετρήσεων.

Έτσι για κάθε μέτρηση θα έχουμε ότι:

$$\hat{\sigma}_{x_1}=\frac{\hat{\sigma}_o}{\sqrt{P_1}} \quad (6.47)$$

Ο γενικευμένος μέσος όρος γράφεται σαν:

$$\bar{x}=\frac{P_1x_1}{[P]}+\frac{P_2x_2}{[P]}+\ldots+\frac{P_nx_n}{[P]} \quad (6.48)$$

και εφαρμόζοντας τον νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων προκύπτει ότι:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2=\frac{P_1^2}{[P]^2}\hat{\sigma}_{x_1}^2+\frac{P_2^2}{[P]^2}\hat{\sigma}_{x_2}^2+...+\frac{P_n^2}{[P]^2}\hat{\sigma}_{x_n}^2 \qquad (6.49)$$

ή
$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2=\frac{P_1^2}{[P]^2}\frac{\hat{\sigma}_o^2}{P_1}+\frac{P_2^2}{[P]^2}\frac{\hat{\sigma}_o^2}{P_2}+...+\frac{P_n^2}{[P]^2}\frac{\hat{\sigma}_o^2}{P_n} \qquad (6.50)$$

ή
$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2=\frac{[P]}{[P]^2}\hat{\sigma}_o^2=\frac{\hat{\sigma}_o^2}{[P]} \qquad (6.51)$$

άρα
$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}=\frac{\hat{\sigma}_o}{\sqrt{[P]}} \qquad (6.52)$$

6.3.3 A posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_o$

Εφ' όσον κάθε μέτρηση x_i θεωρείται σαν μέσος ορός P_i, φανταστικών μετρήσεων που κάθε μία έχει τυπικό σφάλμα σ_o, τα υπόλοιπα $\hat{x}$ - x_i = υ_i δίνουν εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων των μέσων όρων των P_i φανταστικών μετρήσεων, οπότε οι ποσότητες $\upsilon_i\sqrt{P_i}$ θα είναι εκτιμήσεις του $\hat{\sigma}_o$.

Έτσι όπως και στην περίπτωση ισοβαρών παρατηρήσεων, η καλύτερη εκτίμηση του $\hat{\sigma}_o$ θα προκύψει από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_o=\pm\sqrt{\frac{[P\upsilon\upsilon]}{n-1}} \qquad (6.53)$$

Αντικαθιστώντας την (6.53) στην (6.52) προκύπτει ότι:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}}=\pm\sqrt{\frac{[P\upsilon\upsilon]}{(n-1)[P]}} \qquad (6.54)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση (6.54) το $\hat{\sigma}_o$ εξαρτάται από το σ_o ενώ το $\hat{\sigma}_{\bar{X}}$ είναι ανεξάρτητο του σ_o.

6.3.4 Παραδείγματα

6.3.4.1 Ένα μήκος μετρήθηκε σε τρεις διαφορετικές ημέρες με τα παρακάτω αποτελέσματα:

	S (m)	Αριθμός μετρήσεων
1η μέρα	200.152	8
2η μέρα	200.090	4
3η μέρα	200.125	16

Ζητείται η καλύτερη τιμή του μήκους και το τυπικό της σφάλμα.

Λύση

Στο παράδειγμα αυτό δεν δίνονται στοιχεία για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων εκτός από το γεγονός πως τα τρία αποτελέσματα προήλθαν από διαφορετικούς αριθμούς μετρήσεων που σημαίνει πως δεν μπορούν να θεωρηθούν ισοβαρή. Το βάρος του κάθε αποτελέσματος στη περίπτωση αυτή θα είναι ανάλογο του αριθμού των μετρήσεων από τις οποίες έχει προέλθει.

Έτσι θα ισχύει: $$\frac{P_1}{8}=\frac{P_2}{4}=\frac{P_3}{16}=K$$

Για ευκολία υπολογισμών επιλέγεται σαν μονάδα βάρους το αποτέλεσμα της δεύτερης ημέρας που σημαίνει $P_2 = 1$, $P_1 = 2$, $P_3 = 4$.

Η καλύτερη τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{x}=\frac{2\times 200.152+1\times 200.090+4\times 200.125}{1+2+4}=200.128\text{m}$$

Άρα $\upsilon_1 = 200.152 - 200.128 = 0.024\text{m}$

$$\upsilon_2 = 200.090 - 200.128 = -0.038\text{m}$$

$$\upsilon_3 = 200.125 - 200.128 = -0.003\text{m}$$

Το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους θα είναι:

$$\hat{\sigma}_o = \pm\sqrt{\frac{[P\upsilon\upsilon]}{n\text{-}1}} = \pm 0.036\text{m}$$

και το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής θα είναι:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \pm\frac{0.0036}{\sqrt{7}} = \pm 0.014\text{m}$$

6.3.4.2 Μία γωνία β μετρήθηκε σε τρεις διαφορετικές ημέρες με τα παρακάτω αποτελέσματα.

Ζητείται να βρεθεί η καλύτερη τιμή της γωνίας και το τυπικό της σφάλμα, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των τριών ημερών.

	$1^η$ μέρα	$2^η$ μέρα	$3^η$ μέρα
	225	200	250
	200	200	240
	260	225	260
	220	225	180
	245	230	275
	260	200	220
	225	225	280
	190	220	225
	220	230	
	245	235	
		200	
		210	

<u>Λύση</u>

Επειδή οι μετρήσεις έγιναν σε ξεχωριστές μέρες δεν μπορούν να θεωρηθούν ισοβαρής. Βρίσκουμε αρχικά τους μέσους όρους $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$ των παρατηρήσεων της κάθε μέρας και τα τυπικά τους σφάλματα.

Θεωρούμε σαν καλύτερη τιμή της γωνίας τον γενικευμένο μέσο όρο των $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3$ με βάρη αντιστρόφως ανάλογα των $\sigma^2_{\beta_1}, \sigma^2_{\beta_2}, \sigma^2_{\beta_3}$

Έτσι έχουμε:

<u>Για την πρώτη ημέρα</u>

$$\overline{\beta}_1 = \frac{1}{10}\sum_{\iota=1}^{10}\beta_{1\iota} = 73^g_,8229$$

Το τυπικό σφάλμα της μίας παρατήρησης της ημέρας αυτής θα είναι:

$$\sigma_{\beta_1} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\upsilon^2_{1i}} = \pm 0^g_,0024$$

Το τυπικό σφάλμα του μέσου όρου θα είναι:

$$\sigma_{\overline{\beta}_1} = \frac{\sigma_{\beta_1}}{\sqrt{10}} = \pm 0^g_,0007$$

<u>Για την δεύτερη ημέρα</u>

$$\overline{\beta}_2 = \frac{1}{12}\sum_{\iota=1}^{12}\beta_{2\iota} = 73^g_,8217$$

Το τυπικό σφάλμα της μίας παρατήρησης της ημέρας αυτής θα είναι:

$$\sigma_{\beta_2} = \pm\sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}\upsilon^2_{2i}} = \pm 0^g_,0014$$

Το τυπικό σφάλμα του μέσου όρου θα είναι:

$$\sigma_{\overline{\beta}_2} = \frac{\sigma_{\beta_2}}{\sqrt{12}} = \pm 0^g_,0004$$

<u>Για την τρίτη ημέρα</u>

$$\overline{\beta}_3 = \frac{1}{8}\sum_{\iota=1}^{8}\beta_{3\iota} = 73^g_,8241$$

Το τυπικό σφάλμα της μίας παρατήρησης της ημέρας αυτής θα είναι:

$$\sigma_{\beta_3} = \pm\sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}\upsilon^2_{3i}} = \pm 0^g_,0033$$

Το τυπικό σφάλμα του μέσου όρου θα είναι:

$$\sigma_{\bar{\beta}_3} = \frac{\sigma_{\beta_3}}{\sqrt{8}} = \pm 0^g_{,}0012$$

Για ευκολία επιλέγεται σαν μονάδα βάρους το αποτέλεσμα της τρίτης ημέρας οπότε το a priori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους θα είναι το :

$$\sigma_o = 0^g_{,}0012$$

Έτσι προκύπτουν τα βάρη:

$$P_1 = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{\beta_1}^2} = \frac{0.0012^2}{0.0007^2} = 3$$

$$P_2 = \frac{0.0012^2}{0.0004^2} = 9$$

$$P_3 = \frac{0.0012^2}{0.0012^2} = 1$$

Η καλύτερη τιμή της γωνίας β θα είναι:

$$\bar{\beta} = \frac{P_1\bar{\beta}_1 + P_2\bar{\beta}_2 + P_3\bar{\beta}_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 73.^g8222$$

Το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

$$\hat{\sigma}_o = \pm\sqrt{\frac{\left[P_1\upsilon_1^2 + P_2\upsilon_2^2 + P_3\upsilon_3^2\right]}{2}} = \pm 0^g_{,}0019$$

και το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής είναι:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \pm\frac{\hat{\sigma}_o}{\sqrt{[P]}} = \pm\frac{0.0019}{\sqrt{13}} = \pm 0^g_{,}0005$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αγατζά – Μπαλοδήμου Α.Μ.,Δ.-Δ. Μπαλοδήμος "Εισαγωγή στην Γεωδαισία", Αθήνα 1988
2. Αγατζά – Μπαλοδήμου Α.Μ. "Θεωρία Σφαλμάτων και Συνορθώσεις Ι, Αθήνα 2000
3. Βλάχος Δ. "Μαθήματα Τοπογραφίας" Τόμος Α΄, Θεσσαλονίκη 1979
4. Κριεζή Π. "Εισαγωγή εις την θεωρία των Πιθανοτήτων και την θεωρία των Σφαλμάτων, Σημειώσεις εκ των παραδόσεων εις το Ε.Μ.Π., Αθήνα 1967
5. Mikhail E.M and Gracie G. "Analysis and Adjustment of Survey Measurements", Van Nostrand Reinhold Company, New York 1981
6. Moffitt F. and Bouchard H. "Surveying" 6th Edition Indext Educational Publishers New York 1975
7. Parratt L.G. "Probability and experimental errors in Science", Dover Publications Inc. New York 1971
8. Rainsford H.F. "Survey Adjustments and Least Squares" Constable & Company Ltd, London 1975

7. Προσδιορισμός θέσης στο επίπεδο

Μ.Τσακίρη

7.1. Ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων

7.1.1 Εισαγωγή

Στις καθημερινές γεωδαιτικές εργασίες το πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου στο χώρο για μικρές περιοχές ανάγεται σε πρόβλημα που χρησιμοποιεί ως επιφάνεια αναφοράς το **οριζόντιο επίπεδο** (ή το προβολικό επίπεδο) και την **κατακόρυφο**. Επειδή στην Γεωδαισία η τελική επιδίωξη των εργασιών είναι συνήθως η απεικόνιση της επιφάνειας του εδάφους, όταν γίνεται λόγος για σημεία εννοούμε πάντοτε τις **προβολές των σημείων** και όταν λέμε απόσταση σημείων εννοούμε τη **απόσταση των προβολών των σημείων**.

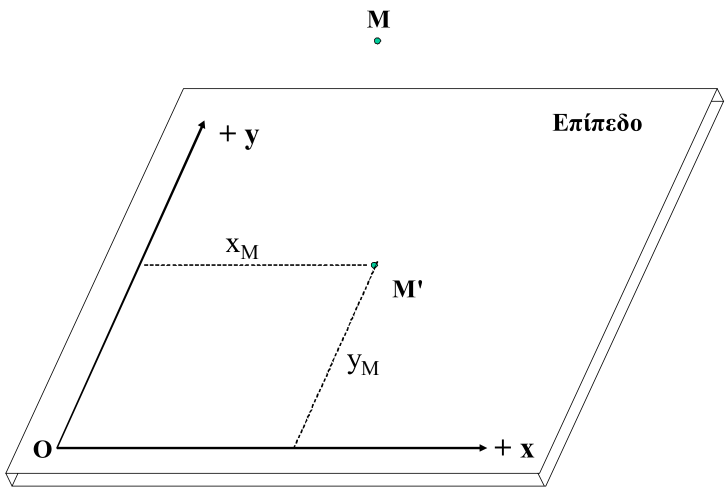
Για να καθορισθεί η θέση των προβολών των σημείων στο επίπεδο ορίζεται ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων. Ετσι, πολύ συχνά οι εργασίες προσδιορισμού της οριζοντιογραφικής θέσης ενός σημείου γίνονται με την χρήση **ορθογώνιων επίπεδων συντεταγμένων** διότι οι μαθηματικοί υπολογισμοί είναι απλούστεροι. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τον απλό προσδιορισμό των επίπεδων ορθογώνιων συντεταγμένων μεμονωμένων τοπογραφικών σημείων.

7.1. 2 Ορθογώνιες Επίπεδες Συντεταγμένες

Η θέση ενός σημείου Μ στο χώρο προσδιορίζεται με τον υπολογισμό της θέσης της προβολής του Μ' πάνω σε ένα επίπεδο (πχ οριζόντιο). Έτσι, η θέση του σημείου Μ στο χώρο καθορίζεται από τις συντεταγμένες της προβολής Μ΄ του σημείου στο επίπεδο και το υψόμετρο του.

Η προβολή Μ' του τυχαίου σημείου Μ περιγράφεται από το ζεύγος των επίπεδων ορθογώνιων συντεταγμένων (x_M, y_M), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1. Ένα επίπεδο γεωδαιτικό σύστημα συντεταγμένων είναι ένα **ορθογώνιο σύστημα (x, y).** Στα κρατικά συστήματα συντεταγμένων γενικά ισχύει ότι ο θετικός άξονας y (ο οποίος λέγεται τεταγμένη ή ordinate) συμπίπτει με την διεύθυνση του γεωγραφικού βορρά και ο θετικός άξονας x (ο οποίος λέγεται τετμημένη ή abscissa) κατευθύνεται στην ανατολή.

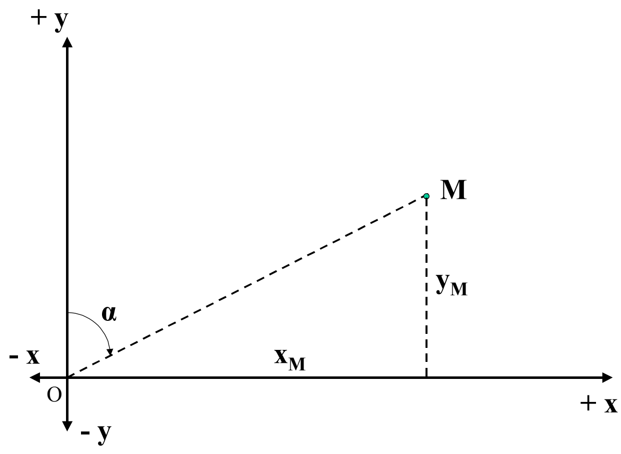
Οι δύο άξονες είναι κάθετοι μεταξύ τους και η θέση της αρχής των αξόνων Ο εξαρτάται από την χαρτογραφική προβολή που έχει επιλεγεί στο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς μιας χώρας ή από την συγκεκριμένη τοπογραφική εφαρμογή (για παράδειγμα, σε μια εφαρμογή ίδρυσης δικτύου σημείων για τις ανάγκες ανάπτυξης ενός τεχνικού έργου η αφετηρία του τοπικού καρτεσιανού συστήματος θα μπορούσε να είναι αυθαίρετη). Το σύστημα των συντεταγμένων που δημιουργείται είναι **δεξιόστροφο** (δηλ. συμπίπτει με την φορά των δεικτών του ρολογιού) και ισχύουν οι σχέσεις της επίπεδης αναλυτικής γεωμετρίας.



Σχήμα 7.1 Ορθογώνιες Επίπεδες Συντεταγμένες (x_M, y_M) της προβολής του σημείου M

7.1.3 Βασικοί Υπολογισμοί

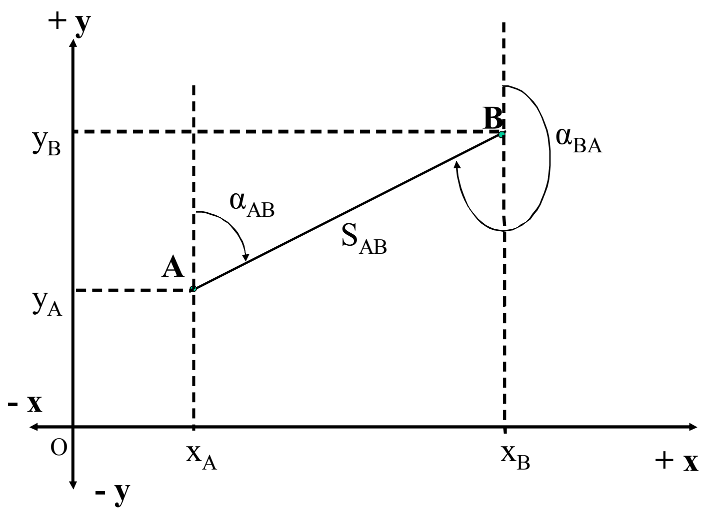
Για ένα σημείο Μ του οριζόντιου επιπέδου ορίζονται οι συντεταγμένες του (x_M, y_M) καθώς και η γωνία διεύθυνσης (ή προσανατολισμού) της ΟΜ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2 Γωνία διεύθυνσης α

Η **γωνία διεύθυνσης (ή προσανατολισμού) α** είναι η γωνία που σχηματίζεται όταν ο θετικός ημιάξονας των y στραφεί κατά την θετική φορά (δεξιόστροφα) μέχρι να συμπέσει με την ΟΜ. Η γωνία μπορεί να έχει τιμές μεταξύ 0 και 400 βαθμών ή 0 και 360 μοιρών. Οταν ο θετικός ημιάξονας των y έχει διεύθυνση προς τον γεωδαιτικό (ή αστρονομικό) βορρά, τότε η γωνία διεύθυνσης $α_{AB}$ ονομάζεται **αζιμούθιο** της πλευράς ΑΒ.

Για δύο τυχαία σημεία Α και Β του επιπέδου (τα οποία είναι προβολές των σημείων του εδάφους) που έχουν συντεταγμένες (x_A, y_A) και (x_B, y_B) και το μήκος της πλευράς τους είναι S_{AB}, η γωνία διεύθυνσης της πλευράς ΑΒ είναι $α_{AB}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3 Γωνία διεύθυνσης $α_{AB}$

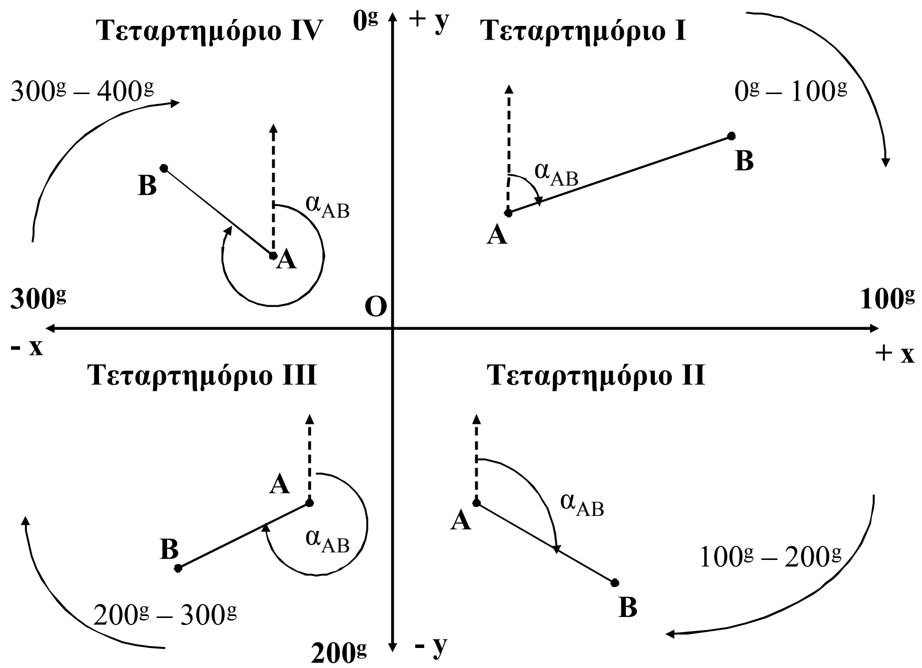
Η γωνία διεύθυνσης α_{AB}, μιας πλευράς ΑΒ είναι η γωνία η οποία «γράφεται» όταν η παράλληλη στον θετικό ημιάξονα y (που διέρχεται από το σημείο Α και αποτελεί τον πρώτο δείκτη της α_{AB}) στραφεί κατά την θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την πλευρά ΑΒ.

Η γωνία διεύθυνσης α_{BA} της πλευράς ΒΑ μπορεί να βρεθεί από την γωνία διεύθυνσης α_{AB} της πλευράς ΑΒ (αλλαγή φοράς) αρκεί να προστεθούν 200^g (ή 180^o), και η τιμή της γωνίας να παραμένει μεταξύ 0^g και 400^g ή 0^o και 360^o. Ισχύει

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 200^g = \alpha_{AB} + 180^o \qquad (7.1)$$

Αν από αριθμητικές πράξεις προκύψουν μεγαλύτερες τιμές από 400^g ή 360^o για την γωνία α_{BA} τότε αφαιρούνται τόσα ακέραια πολλαπλάσια των 400^g (δηλαδή τόσες ακέραιες περιφέρειες) όσα χρειάζεται για να μείνει τελικά η τιμή της α_{BA} μεταξύ 0^g και 400^g . Για παράδειγμα, αν $\alpha_{AB} = 356.25^g$ τότε η $\alpha_{BA} = 356.25^g + 200^g = 556.25^g$ άρα $\alpha_{BA} = 156.25^g$.

Η γωνία διεύθυνσης α μπορεί να βρίσκεται σε ένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια του Σχήματος 7.4 ανάλογα με τη θέση του σημείου Β ως προς το Α.



Σχήμα 7.4 Ο χωρισμός σε τεταρτημόρια

Κάποια χρήσιμα στοιχεία προσδιορισμού των προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών για την γωνία διεύθυνσης α και για τα 4 τεταρτημόρια δίνονται στον Πίνακα 7.1

Τεταρτημόριο	**I**	**II**	**III**	**IV**
γωνία	0^g -100^g	100^g -200^g	200^g -300^g	300^g -400^g
Δx	+	+	-	-
Δy	+	-	-	+
sinα	+	+	-	-
cosα	+	-	-	+
tanα	+	-	+	-

Πίνακας 7.1 Τριγωνομετρικά στοιχεία προσδιορισμού των γωνιών διεύθυνσης

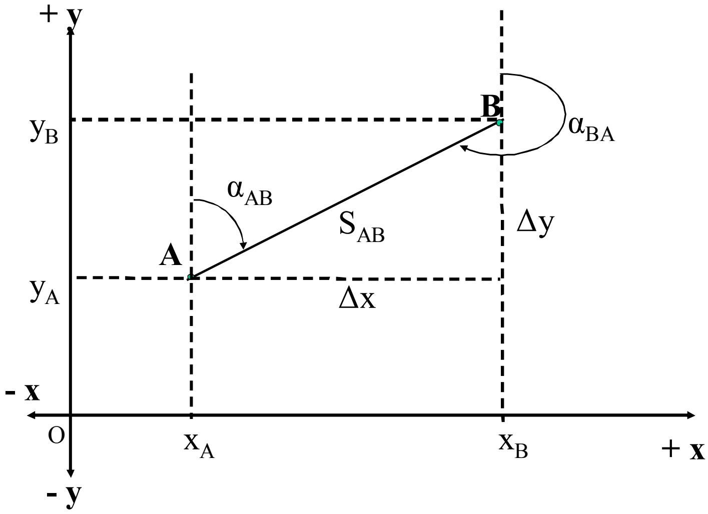
7.2. Θεμελιώδη γεωδαιτικά προβλήματα

7.2.1 Εισαγωγή

Ένα από τα βασικά προβλήματα της Γεωδαισίας είναι ο προσδιορισμός της σχετικής θέσης σημείων της επιφάνειας του εδάφους. Η σχετική θέση ενός σημείου Α ως προς κάποιο σημείο Β μπορεί να υπολογισθεί ως προς κάποιο κοινό, και για τα δύο σημεία, σύστημα συντεταγμένων. Επίσης μπορεί να προσδιορισθεί το μήκος μεταξύ των δύο σημείων και η γωνία διεύθυνσης αυτής της πλευράς. Αυτοί οι υπολογισμοί αποτελούν τα **τρία θεμελιώδη προβλήματα** της Γεωδαισίας ενώ ο συνδυασμός τους επιτρέπει την αντιμετώπιση ενός μεγάλου μέρους εφαρμογών στην Γεωδαισία.

7.2.2 Πρώτο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Στο πρόβλημα αυτό γίνεται ο υπολογισμός των συντεταγμένων ενός σημείου Β, όταν είναι γνωστά οι συντεταγμένες ενός άλλου σημείου Α, η απόσταση S μεταξύ των σημείων και η γωνία διεύθυνσης α_{AB} της πλευράς ΑΒ.



Σχήμα 7.5 Υπολογισμός συντεταγμένων του σημείου B

Από το Σχήμα 7.5 φαίνεται ότι:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_B - y_A \Rightarrow y_B = y_A + \Delta y \\ \Delta x &= x_B - x_A \Rightarrow x_B = x_A + \Delta x \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Επίσης ισχύει

$$\Delta y = S_{AB} \cos\alpha_{AB} \text{ και } \Delta x = S_{AB} \sin\alpha_{AB} \qquad (7.3)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (7.3) στην σχέση (7.2) έχουμε

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + S_{AB} \cos\alpha_{AB} \\ x_B &= x_A + S_{AB} \sin\alpha_{AB} \end{aligned} \qquad (7.4)$$

7.2.3 Δεύτερο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στον υπολογισμό της απόστασης S μεταξύ δύο σημείων A και B και της γωνίας διεύθυνσης α_{AB} της πλευράς AB όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των σημείων A και B.

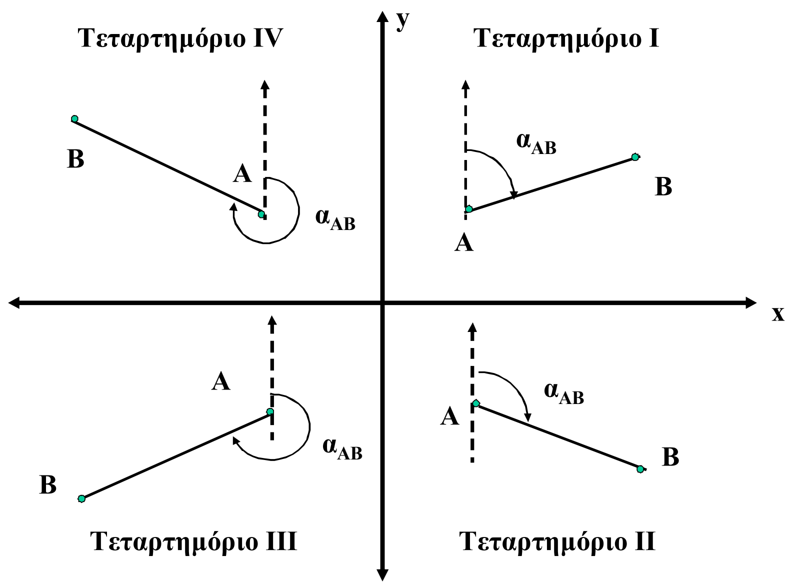
Οπως φαίνεται από το Σχήμα 7.5, είναι:

$$\tan\alpha_{AB} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \text{ή} \quad \alpha_{AB} = \arctan\frac{\Delta x}{\Delta y}$$
$$S_{AB} = \frac{\Delta x}{\sin\alpha_{AB}} = \frac{\Delta y}{\cos\alpha_{AB}} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{7.5}$$

Η γωνία α_{AB} , όπως υπολογίζεται από την πρώτη εξίσωση της σχέσης (7.5), μπορεί να πάρει μία από τις τιμές τεσσάρων γωνιών μεταξύ 0^g και 400^g. Ετσι, αρκεί να λάβουμε την τιμή της γωνίας που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη:

$$\tan\alpha = \frac{|\Delta x|}{|\Delta y|}$$
$$\text{ή} \;\; \alpha = \arctan\frac{|\Delta x|}{|\Delta y|} \tag{7.6}$$

Στην συνέχεια, ανάλογα με τα πρόσημα των Δx και Δy, εφαρμόζουμε τον κατάλληλο τύπο όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.6 και στον Πίνακα 7.2.



Σχήμα 7.6 Η γωνία διεύθυνσης μεταβάλλεται βάσει του τεταρτημορίου των συντεταγμένων των σημείων στο οποίο κείται

$$\text{Αν} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \frac{+}{+} \qquad \text{τότε} \qquad \alpha_{AB} = \alpha$$

$$\text{Αν} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \frac{+}{-} \qquad \text{τότε} \qquad \alpha_{AB} = 200^g - \alpha$$

$$\text{Αν} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \frac{-}{-} \qquad \text{τότε} \qquad \alpha_{AB} = 200^g + \alpha$$

$$\text{Αν} \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \frac{-}{+} \qquad \text{τότε} \qquad \alpha_{AB} = 400^g - \alpha$$

Επισης

$$\text{Αν } \Delta x = 0 \begin{cases} \text{αν } \Delta y \geq 0 \text{ τότε } \alpha_{AB} = 0^g \\ \text{αν } \Delta y < 0 \text{ τότε } \alpha_{AB} = 200^g \end{cases}$$

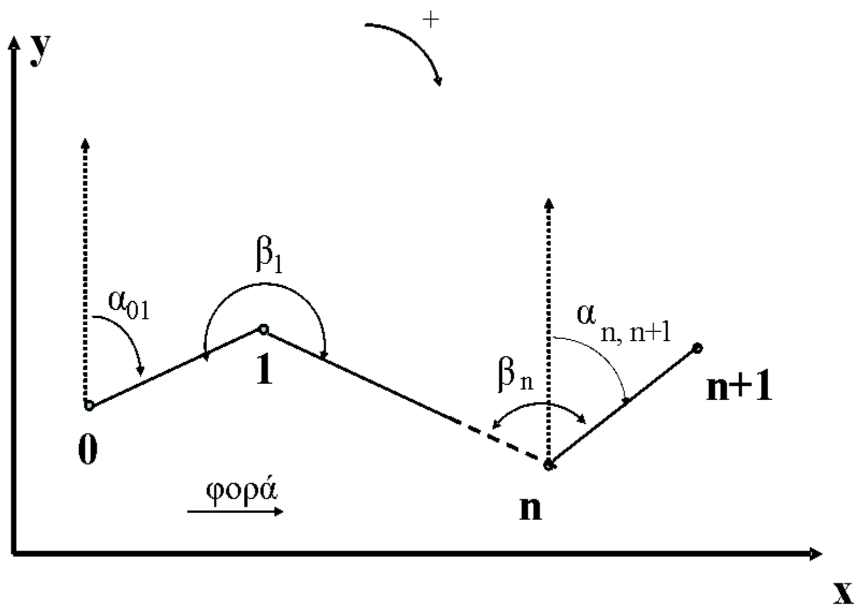
$$\text{Αν } \Delta y = 0 \begin{cases} \text{αν } \Delta x > 0 \text{ τότε } \alpha_{AB} = 100^g \\ \text{αν } \Delta x < 0 \text{ τότε } \alpha_{AB} = 300^g \end{cases}$$

Πίνακας 7.2 Διερεύνηση προσήμου για τον υπολογισμό της τιμής της γωνίας διεύθυνσης

7.2.4 Τρίτο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Περισσότερα από ένα σημεία 0, 1, 2, ...n, τα οποία είναι πάνω στο έδαφος και ζητείται ο προσδιορισμός της θέση τους, ορίζουν μια τεθλασμένη γραμμή. Στην Γεωδαισία η γραμμή αυτή ονομάζεται **πολυγωνική όδευση** ή απλά όδευση γιατί έχει αρχή, τέλος και φορά. Στο Σχήμα 7.7 φαίνονται εκτός από τις γωνίες διεύθυνσης των πλευρών μεταξύ των σημείων, οι γωνίες θλάσης βi μεταξύ των δύο διαδοχικών πλευρών. Η **γωνία θλάσης** «γράφεται» όταν η προηγούμενη πλευρά στραφεί κατά την θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την επόμενη πλευρά.

Το τρίτο πρόβλημα αναφέρεται στον υπολογισμό της γωνίας διεύθυνσης $\alpha_{n,n+1}$ της πλευράς $S_{n,n+1}$ όταν δίνονται οι γωνίες θλάσης β_1, β_2,...,β_n μιας όδευσης και η γωνία διεύθυνσης της πρώτης πλευράς α_{01} .



Σχήμα 7.7 Πολυγωνική όδευση

Η ζητούμενη γωνία διεύθυνσης υπολογίζεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} &\alpha_{n,n+1}^{grad} = \alpha_{01}^{grad} + \Sigma\beta_i + n\times 200^{grad} - k\times 400^{grad} \\ &\eta \\ &\alpha_{n,n+1}^{deg} = \alpha_{01}^{deg} + \Sigma\beta_i + n\times 180^{deg} - k\times 360^{deg} \end{aligned} \qquad (7.7)$$

όπου, $i = 1, 2, \ldots, n$ και k = ακέραιος 0, 1, 2, ...

Αν από τις αριθμητικές πράξεις προκύψουν μεγαλύτερες τιμές των 400 βαθμών για την γωνία α, τότε αφαιρούνται τόσες ακέραιες περιφέρειες (δηλ. 400^g) όσες χρειάζεται για να μείνει τελικά η τιμή της γωνίας διεύθυνσης μεταξύ 0^g και 400^g.

Παραδείγματα

1) Δίνονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες ενός σημείου Α (x_A , y_A) = (713.64m, 496.72m). Εχουν μετρηθεί η απόσταση μεταξύ του Α και σημείου Β ίση με S_{AB} = 135.25m, και η γωνία διεύθυνσης α_{AB} = 32.9645 grad. Ζητείται να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου Β.

Είναι:

$$\sin\alpha_{12} = +0.49497 \qquad \cos\alpha_{12} = +0.86891$$

$$\Delta x = S\sin\alpha_{12} = +\,66.95\text{m} \qquad \Delta y = S\cos\alpha_{12} = +\,117.52\text{m}$$

$$x_B = x_A + \Delta x = 780.59\,\text{m} \qquad y_B = y_A + \Delta y = 614.24\,\text{m}$$

2) Δίνονται οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες δύο σημείων Α και Β, (x_A, y_A) = (713.64m, 496.72m) και (x_B, y_B) = (780.59m, 614.24m). Ζητείται να υπολογισθούν η απόσταση μεταξύ των Α και Β και η γωνία διεύθυνσης α_{AB}.

Είναι:

$$\Delta x = x_B - x_A = +\,66.95\,\text{m}$$

$$\Delta y = y_B - y_A = +\,117.52\,\text{m}$$

$$S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{66.95^2 + 117.52^2} = 135.25\,\text{m}$$

$$\tan\alpha_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{+\,66.95}{+\,117.52} = 0.5697$$

$$\Rightarrow \alpha_{12} = 32.9663 \text{ grad}$$

Να σημειωθεί ότι μια εναλλακτική σχέση για την γωνία διεύθυνσης α_{AB} δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$\sin\alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{S}$$

$$\text{ή} \quad \cos\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{S}$$

3) Δίνονται οι παρακάτω γωνίες:

$\alpha_0 = 157.9422$ grad

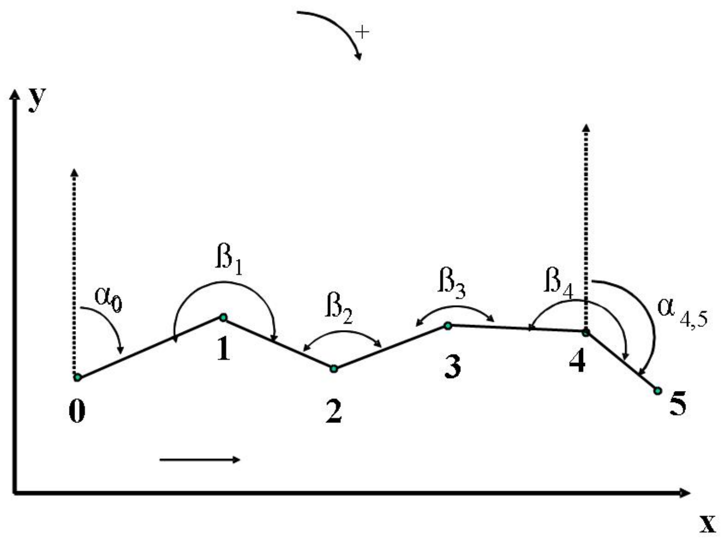
$\beta_1 = 192.4735$ grad

$\beta_2 = 196.5106$ grad

$\beta_3 = 207.5641$ grad

$\beta_4 = 212.6123$ grad .

Να υπολογισθεί η γωνία διεύθυνσης α_{45}.



Είναι: $\alpha_{45} = \alpha_o + \Sigma\beta + n\, 200^{grad} - k\, 400^{grad} =$

$157.9422 + 809.1605 + 4 \times 200 - k \times 400 =$

$1767.1027 - 4 \times 400 = 167.1027$ grad (k = 4)

7.3 Μετατροπές συντεταγμένων

7.3.1 Εισαγωγή

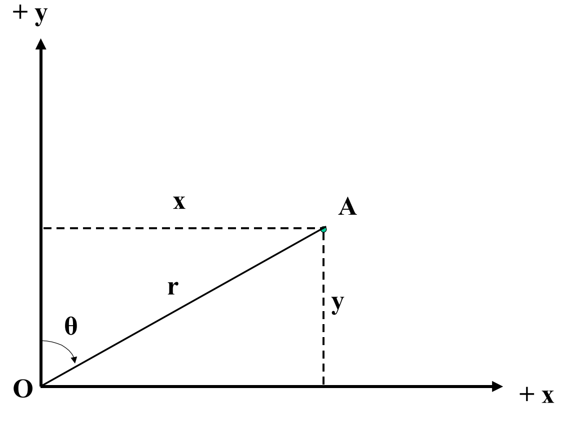
Οι ανάγκες μετατροπής ορθογώνιων συντεταγμένων ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων στις αντίστοιχες συντεταγμένες ενός δεύτερου καρτεσιανού συστήματος εμφανίζονται συχνότατα στις γεωδαιτικές-τοπογραφικές εργασίες μεγάλης ή μικρής κλίμακας.

Υπάρχουν πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις που δίνουν με ακρίβεια τις παραπάνω μετατροπές. Για τις ανάγκες αυτού του μαθήματος θα δοθούν απλές σχέσεις που επιτρέπουν την μετατροπή ορθογώνιων συντεταγμένων από ένα σύστημα (πχ τοπικό) σε ένα άλλο (πχ γενικό) σύστημα συντεταγμένων.

7. 3.2 Μετατροπή μεταξύ Ορθογώνιων και Πολικών Συντεταγμένων

Η θέση ενός τυχαίου σημείου Α του επιπέδου μπορεί να ορισθεί με ένα ζεύγος ορθογώνιων συντεταγμένων (x, y) ή με ένα ζεύγος **πολικών συντεταγμένων (r, θ).**

Οπως φαίνεται στο Σχήμα 7.9, οι πολικές συντεταγμένες αναφέρονται σε σύστημα που αποτελείται από τον πόλο Ο (ο οποίος συμπίπτει με την αρχή ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων) και έχει αρχική διεύθυνση μέτρησης για τις πολικές γωνίες (συμπίπτει με τον άξονα Oy).



Σχήμα 7.9 Σχέση μεταξύ πολικών και ορθογώνιων συντεταγμένων

Οταν είναι γνωστές οι πολικές συντεταγμένες του σημείου Α μπορούν να υπολογισθούν οι ορθογώνιες συντεταγμένες του ίδιου σημείου και αντίστροφα με χρήση των παρακάτω σχέσεων που προκύπτουν από την γεωμετρία του σχήματος:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \\ y &= r \cos\theta \end{aligned} \tag{7.10}$$

επίσης

$$\begin{aligned} \arctan\theta &= \frac{x}{y} \\ r &= \frac{x}{\sin\theta} = \frac{y}{\cos\theta} \qquad \text{ή} \\ \arctan\theta &= \frac{x}{y} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{7.11}$$

7.3.3 Μετατροπές Ορθογώνιων Συντεταγμένων

Στις καθημερινές τοπογραφικές εργασίες υπάρχει συχνά η ανάγκη να συσχετισθούν χάρτες ή τοπογραφικά διαγράμματα που αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων.

Για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων από ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο *μετασχηματισμός ομοιότητας* στο επίπεδο (similarity transformation). Η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τον μετασχηματισμό αυτό είναι η διατήρηση της μορφής των σχημάτων. Κατά τον μετασχηματισμό αυτό ισχύουν μαθηματικές σχέσεις μετατροπής που αναφέρονται σε τρεις περιπτώσεις:

- Παράλληλη μετατόπιση των αξόνων
- Στροφή των αξόνων
- Αλλαγή της κλίμακας (ενιαία για το επίπεδο εφαρμογής)

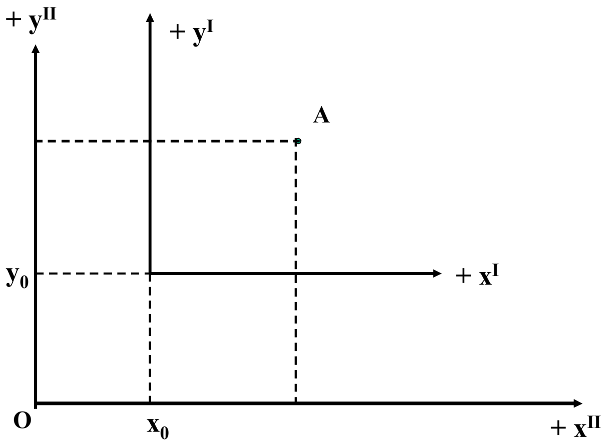
Οι σχέσεις που ακολουθούν συνδέουν τις επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες για μετάβαση από το σύστημα συντεταγμένων I στο σύστημα συντεταγμένων II.

7.3.4 Παράλληλη μετατόπιση των αξόνων

Οταν οι συντεταγμένες της αρχής του συστήματος I ως προς τις αντίστοιχες συντεταγμένες αρχής του συστήματος II είναι μετατοπισμένες κατά (x_0^{II}, y_0^{II}), όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.10, τότε ένα τυχαίο σημείο A με συντεταγμένες (x, y) στο σύστημα I θα έχει συντεταγμένες στο σύστημα II που υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} x^{II} &= x^{I} + x_0^{II} \\ y^{II} &= y^{I} + y_0^{II} \end{aligned} \tag{7.12}$$

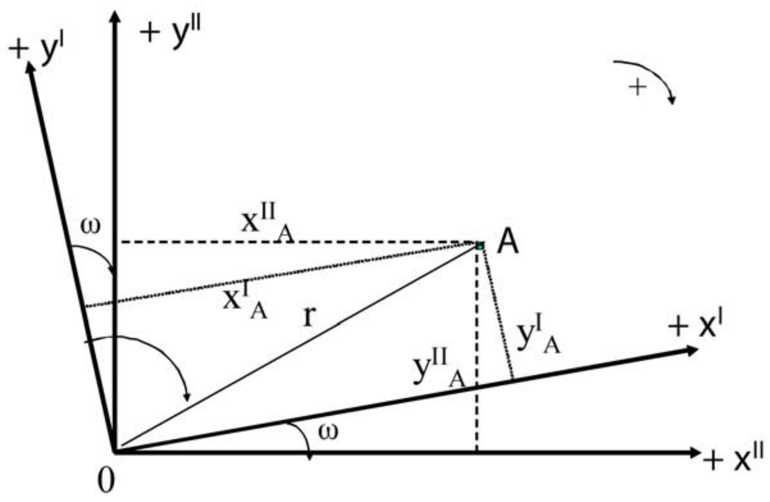
Οι συντεταγμένες (x_0, y_0) είναι προσημασμένες με πρόσημα που εξαρτώνται από την θέση της αρχής 0^I ως προς την αρχή 0^{II} του συστήματος II.



Σχήμα 7.10 Μετάθεση αρχής των συντεταγμένων

7.3.5 Στροφή των αξόνων

Εστω τα δύο ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων I και II που έχουν κοινή αρχή O. Οι άξονες του συστήματος I πρέπει να στραφούν δεξιόστροφα κατά γωνία ω (γωνία στροφής) για να ταυτιστούν με τους άξονες του συστήματος ΙΙ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.11.



Σχήμα 7.11 Δεξιόστροφη στροφή των αξόνων δύο ορθογώνιων συστημάτων συντεταγμένων με κοινή αρχή

Για το τυχαίο σημείο Α με γνωστές ορθογώνιες συντεταγμένες (x^I, y^I), οι αντίστοιχες συντεταγμένες του στο δεύτερο σύστημα ΙΙ προσδιορίζονται βάσει των σχέσεων (7.10) και (7.11), δηλαδή

$$\begin{aligned} x^{II} &= r \sin(\theta - \omega) \\ y^{II} &= r \cos(\theta - \omega) \end{aligned} \tag{7.13}$$

Η σχέση (7.14) γράφεται μετά από ανάπτυξη των τριγωνομετρικών όρων

$$\begin{aligned} x^{II} &= r \sin\theta \cos \omega \text{ - } r \cos\theta \sin \omega \\ y^{II} &= r \cos\theta \cos \omega + r \sin\theta \sin \omega \end{aligned} \tag{7.14}$$

και με χρήση των σχέσεων (7.10) και (7.11) η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$x^{II} = x \cos\omega - y \sin\omega$$
$$y^{II} = y \cos\omega + x \sin\omega \qquad (7.15)$$

Οι σχέσεις (7.16) μπορούν να γραφούν με την μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} x^{II} \\ y^{II} \end{bmatrix} = R \times \begin{bmatrix} x^{I} \\ y^{I} \end{bmatrix}$$

$$\text{όπου} \quad R = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \qquad (7.16)$$

Ο πίνακας R ονομάζεται «πίνακας στροφής» και δεν έχει μονάδες.

7.3.6 Αλλαγή κλίμακας

Έστω δύο σημεία A και B που έχουν γνωστές συντεταγμένες στα δύο επίπεδα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων I και II (βλ. Σχήμα 7.12). Οπως φαίνεται στο Σχήμα 7.12, όταν η απόσταση S^{I}_{AB} (όπως υπολογίζεται από τις επίπεδες συντεταγμένες των σημείων A και B) στο σύστημα I είναι ίδια με την απόσταση S^{II}_{AB} μεταξύ των ίδιων δύο σημείων στο σύστημα II, δηλαδή είναι $S^{I}_{AB} = S^{II}_{AB}$ τότε τα δύο συστήματα έχουν την ίδια κλίμακα.

Όταν $S^{I}_{AB} \neq S^{II}_{AB}$, τότε τα δύο συστήματα δεν έχουν την ίδια κλίμακα και πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας συντελεστής κλίμακας "m" (συνήθως ονομάζεται κλίμακα παραμόρφωσης) που ορίζεται με το λόγο ενός μήκους στο σύστημα II ως προς το αντίστοιχο μήκος στο σύστημα I, δηλαδή:

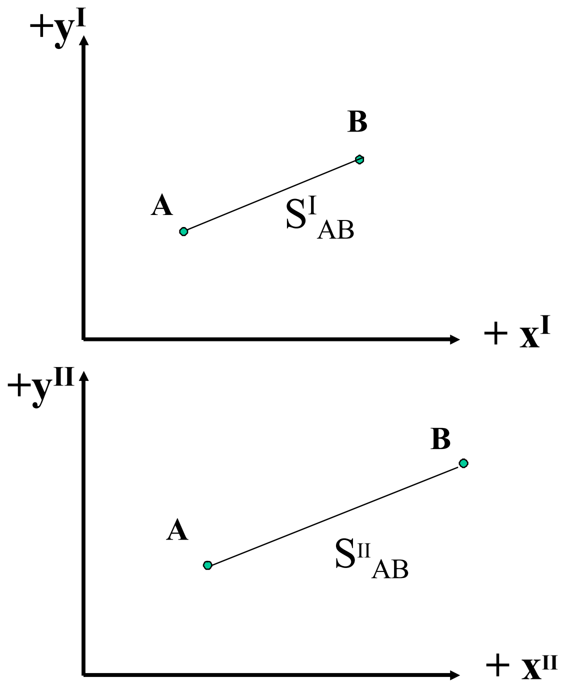
$$m = \frac{S^{II}_{AB}}{S^{I}_{AB}} = \frac{\sqrt{{\Delta x^{II}_{AB}}^2 + {\Delta y^{II}_{AB}}^2}}{\sqrt{{\Delta x^{I}_{AB}}^2 + {\Delta y^{I}_{AB}}^2}} \qquad (7.17)$$

όπου $\Delta x^{I}_{AB} = x^{I}_{B} - x^{I}_{A}$, $\Delta y^{I}_{AB} = y^{I}_{B} - y^{I}_{A}$

$\Delta x^{II}_{AB} = x^{II}_{B} - x^{II}_{A}$, $\Delta y^{II}_{AB} = y^{II}_{B} - y^{II}_{A}$

Επομένως, οι συντεταγμένες στο σύστημα ΙΙ υπολογίζονται από:

$x^{II} = m\, x^{I}$ και $y^{II} = m\, y^{I}$



Σχήμα 7. 12. Όταν $S^{I}_{AB} \neq S^{II}_{AB}$ τότε χρησιμοποιείται η κλίμακα παραμόρφωσης m

7.3.7 Γενική περίπτωση

Για ένα σημείο του οποίου είναι γνωστή η θέση του (x^{I}, y^{I}) στο σύστημα συντεταγμένων Ι, ζητείται να βρεθεί η αντίστοιχη θέση του στο σύστημα ΙΙ δηλαδή (x^{II}, y^{II}) . Δίνονται η θέση (x_0, y_0) της αρχής, η κλίμακα m και η γωνία στροφής του συστήματος Ι ως προς το σύστημα ΙΙ. Η γενική σχέση που δίνει το μετασχηματισμό είναι:

$$\begin{aligned} x^{II} &= x_0^{II} + m\,(x^{I}\cos\omega - y^{I}\sin\omega) \\ y^{II} &= y_0^{II} + m\,(x^{I}\sin\omega + y^{I}\cos\omega) \end{aligned} \qquad (7.18)$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} x^{II} \\ y^{II} \end{bmatrix} = m R \begin{bmatrix} x^{I} \\ y^{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^{II} \\ y_0^{II} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{I} \\ y^{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^{II} \\ y_0^{II} \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

7.3.8 Προσδιορισμός παραμέτρων μετασχηματισμού

Σε πολλές τοπογραφικές εργασίες συχνά είναι γνωστές οι θέσεις σημείων σε δύο συστήματα συντεταγμένων. Ομως για να γίνει μετασχηματισμός συντεταγμένων μεταξύ των δύο συστημάτων, αρκεί να υπάρχουν κοινά σημεία (**τουλάχιστον δύο)** με γνωστές συντεταγμένες και στα δύο συστήματα. Βάσει των κοινών αυτών σημείων γίνεται ο προσδιορισμός των παραμέτρων μετασχηματισμού. Τα κοινά σημεία θα πρέπει να είναι κατανεμημένα στην περιοχή εφαρμογής για καλύτερο προσδιορισμό των παραμέτρων. Όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός κοινών σημείων, ο προσδιορισμός των παραμέτρων γίνεται συνήθως με μαθηματικές μεθόδους, όπως την χρήση της αρχής των ελαχίστων τετραγώνων.

Μετά τον προσδιορισμό των παραμέτρων, δηλαδή την μετάθεση της αρχής των αξόνων, την στροφή των αξόνων και την κλίμακα, ακολουθεί ο προσδιορισμός των συντεταγμένων για όλα τα υπόλοιπα σημεία στο νέο σύστημα.

Έστω δύο σημεία A και B των οποίων οι θέσεις τους (x_A^I, y_A^I), (x_B^I, y_B^I), (x_A^{II}, y_A^{II}), (x_B^{II}, y_B^{II}) είναι γνωστές σε δύο συστήματα ορθογώνιων συντεταγμένων I και II. Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων πρέπει να υπολογιστούν τα παρακάτω:

- Η απόσταση S_{AB} και η γωνία διεύθυνσης α_{AB} για κάθε σύστημα, δηλαδή

$$\alpha_{AB}^{I} = \arctan \frac{\Delta x_{AB}^{I}}{\Delta y_{AB}^{I}}, \qquad \alpha_{AB}^{II} = \arctan \frac{\Delta x_{AB}^{II}}{\Delta y_{AB}^{II}}$$

$$S_{AB}^{II} = \sqrt{\Delta x_{AB}^{I\,2} + \Delta y_{AB}^{I\,2}}, \qquad S_{AB}^{II} = \sqrt{\Delta x_{AB}^{II\,2} + \Delta y_{AB}^{II\,2}}$$

- Η κλίμακα m του συστήματος ΙΙ ως προς το σύστημα Ι, δηλαδή

$$m = \frac{S_{AB}^{II}}{S_{AB}^{I}}$$

- Η γωνία στροφής ω του συστήματος ΙΙ ως προς το σύστημα Ι, δηλαδή

$$\omega = \alpha_{AB}^{I} - \alpha_{AB}^{II}$$

- Το διάνυσμα της μετάθεσης (x_0^{II}, y_0^{II}) βάσει ενός από τα δύο γνωστά σημεία, έστω το σημείο Α, δηλαδή

$$\begin{aligned} x_0^{II} &= x_A^{II} - (\cos\omega)\, x_A^{I}\, m + (\sin\omega)\, y_A^{I}\, m \\ y_0^{II} &= y_A^{II} - (\sin\omega)\, x_A^{I}\, m - (\cos\omega)\, y_A^{I}\, m \end{aligned}$$

Οι σχέσεις μπορούν να εφαρμοσθούν είτε για το σημείο Α ή για το σημείο Β. Οταν εφαρμοσθούν οι σχέσεις και για τα δύο σημεία Α και Β τότε λαμβάνεται ο μέσος όρος των παραμέτρων μετασχηματισμού.

7.4 Υπολογισμοί εμβαδών

7.4.1 Εισαγωγή

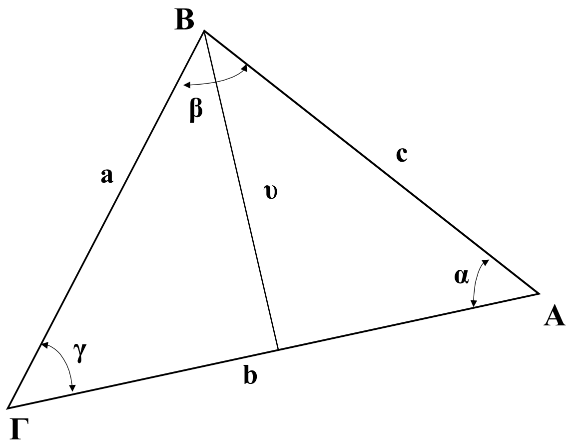
Στις πρακτικές τοπογραφικές εργασίες συχνά περιλαμβάνεται ο υπολογισμός του εμβαδού μιας έκτασης της επιφάνειας του εδάφους. Εμβαδόν ενός τμήματος είναι ουσιαστικά το εμβαδόν της προβολής της επιφάνειας πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.

Ο υπολογισμός του εμβαδού των σχημάτων που αποτελούν τις εκτάσεις γίνεται με την βοήθεια της επίπεδης γεωμετρίας και τριγωνομετρίας. Αυτά τα σχήματα μπορεί να είναι γεωμετρικά ή ακανόνιστα ενώ ο υπολογισμός γίνεται συνήθως αναλυτικά με στοιχεία που μετρώνται απευθείας στο έδαφος ή/και λαμβάνονται από τοπογραφικά διαγράμματα.

7.4.2 Υπολογισμός εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων

Μια επιφάνεια μπορεί να έχει γνωστό γεωμετρικό σχήμα ή μπορεί να χωριστεί σε γνωστά σχήματα για να γίνει ο υπολογισμός του εμβαδού της. Οταν υπάρχουν όλα τα απαιτούμενα στοιχεία, τότε για τον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά περίπτωση οι γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις.

(α) Τρίγωνο



Σχήμα 7.13 Τρίγωνο

Αν για το τρίγωνο του Σχήματος 7.13 είναι:

a, b, c	οι πλευρές
A, B, Γ	οι κορυφές
a, β, γ	οι γωνίες
υ	το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά b

τότε το εμβαδόν του μπορεί να υπολογιστεί με μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E = \frac{1}{2}\, b\, \upsilon$$
$$E = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma = \frac{1}{2}\, \upsilon^2 \,(\cot\beta + \cot\gamma) \qquad (7.20)$$
$$E = \frac{1}{2}\, \alpha^2 \frac{\sin\beta\, \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Όταν είναι γνωστές οι τρείς πλευρές του τριγώνου είναι ευκολότερο να χρησιμοποιείται ο **τύπος του Ηρωνα**,

$$E = \sqrt{\tau\,(\tau - a)(\tau - b)\,(\tau - c)}$$
$$\tau = \frac{1}{2}\,(a + b + c) \tag{7.21}$$

Άλλες χρήσιμες σχέσεις που ισχύουν για το τυχαίο τρίγωνο είναι οι παρακάτω.

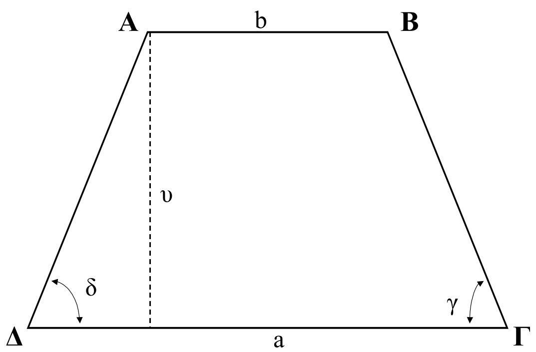
$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (γνωστός και σαν νόμος των ημιτόνων)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos a$ (γνωστός και σαν νόμος των συνημιτόνων)

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

(β) Τραπέζιο



Σχήμα 7.14 Τραπέζιο

Αν για το τραπέζιο του Σχήματος 7.14 είναι:

a, b οι κύριες πλευρές

Α, Β, Γ, Δ οι κορυφές

γ, δ οι γωνίες που αντιστοιχούν στις κορυφές Γ, Δ

υ το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά a

τότε το εμβαδόν του μπορεί να υπολογιστεί με μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E = \frac{a + b}{2}\,\upsilon$$
$$E = \frac{1}{2}\,[b\,\upsilon + \upsilon^2\,(\cot\gamma + \cot\delta)] \qquad (7.22)$$

(γ) Τυχαίο Τετράπλευρο

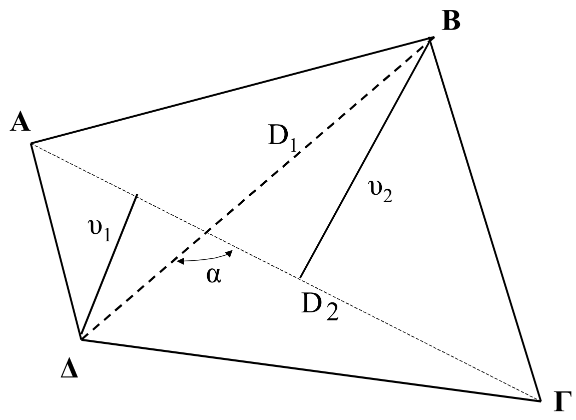
Αν για το τετράπλευρο του Σχήματος 7.15 είναι:

D_1, D_2, οι διαγώνιες

Α, Β, Γ, Δ οι κορυφές

γ, δ οι γωνίες που αντιστοιχούν στις κορυφές Γ, Δ

υ_1, υ_2 τα ύψη που αντιστοιχούν στις διαγώνιες D_1, D_2



Σχήμα 7.15 Τυχαίο Τετράπλευρο

τότε το εμβαδόν του μπορεί να υπολογιστεί με μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E = \frac{D_2\,(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{2}$$
$$E = \frac{D_2\,D_1\,\sin\alpha}{2} \qquad (7.23)$$

Τα απλά πολυγωνικά σχήματα είναι δυνατό να διαιρεθούν με ευθείες σε τρίγωνα. Επομένως το συνολικό εμβαδόν του τετραπλεύρου μπορεί να προκύψει ως άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους τριγώνων που σχηματίζονται πχ των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΔ στο Σχήμα 7.15.

(δ) Κύκλος

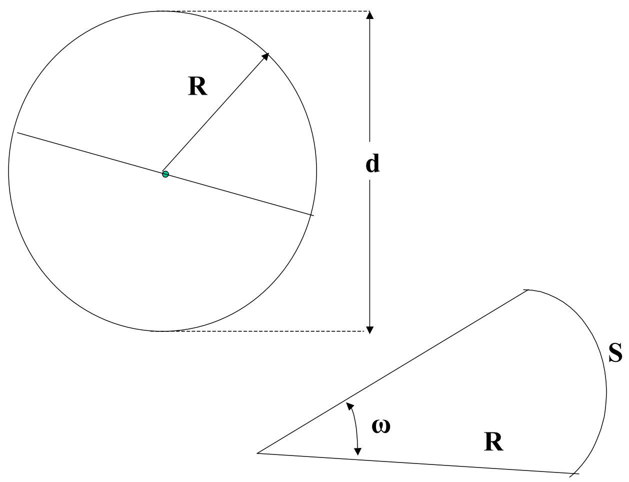
Αν για τον κύκλο και τον κυκλικό τομέα του Σχήματος 7.16 είναι :

R η ακτίνα

d η διάμετρος

S το μήκος του κυκλικού τόξου

ω η επίκεντρη γωνία



Σχήμα 7.16 Ο κύκλος και ο κυκλικός τομέας

τότε το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E = \pi R^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι

$$E = \frac{\pi R^2\ \omega^\circ}{360^\circ}$$

ή (7.24)

$$E = \frac{\pi R^2\ \omega^{grad}}{400^{grad}}$$

7.4.3 Υπολογισμός εμβαδού πολυγώνου με ορθογώνιες συντεταγμένες

Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού σχήματος μπορεί να υπολογισθεί σαν άθροισμα των επί μέρους εμβαδών εάν χωρισθεί σε γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα, τραπέζια κλπ) ή αναλυτικά από τις ορθογώνιες συντεταγμένες των κορυφών του.

Στο τυχαίο κλειστό πολύγωνο 1,2,3,..., n του Σχήματος 7.17 είναι γνωστές οι συντεταγμένες όλων των κορυφών του καθώς και τα παρακάτω στοιχεία, με i = 1, 2, 3, …, n :

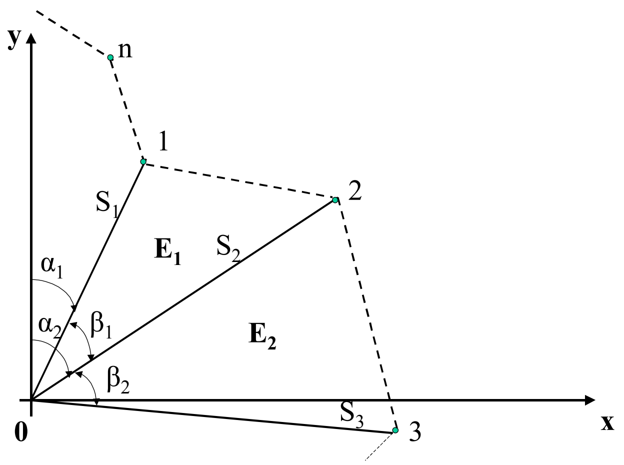
O η αρχή του καρτεσιανού συστήματος xOy

Si το μήκος των ακτίνων O1, O2, ..., On

αi οι γωνίες διεύθυνσης των ακτίνων O1, O2, ..., On

Ei τα εμβαδά των επιμέρους τριγώνων

βi οι γωνίες που αντιστοιχούν στη κορυφή κάθε τριγώνου



Σχήμα 7.17 Τυχαίο κλειστό πολύγωνο

Το συνολικό εμβαδόν του πολυγώνου είναι $E = E_1 + E_2 + E_3 + ...+ E_n$.

Το εμβαδόν των επιμέρους τριγώνων δίνεται με μια από τις σχέσεις της εξίσωσης (7.20), δηλαδή,

$$E_1 = \frac{1}{2} S_1\ S_2\ \sin\beta_1 \Rightarrow$$

$$2E_1 = S_1\ S_2\ \sin\beta_1 = S_1\ S_2\ \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad \text{ή}$$

$$2E_1 = S_1\ S_2\ (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_2) \qquad \text{ή}$$

$$2E_1 = S_1 \cos\alpha_1 S_2\ \sin\alpha_2\ - S_1 \sin\alpha_1 S_2 \cos\alpha_2 \qquad \text{ή}$$

$$2E_1 = y_1 x_2 - x_1 y_2$$

Αντίστοιχα, για τα άλλα τρίγωνα είναι:

$$2E_2 = y_2 x_3 - x_2 y_3$$
$$2E_{n\text{-}1} = y_{n\text{-}1} x_n - x_{n\text{-}1} y_n$$
$$2E_n = y_n x_1 - x_n y_1$$

Επομένως, το τελικό εμβαδόν είναι:

$$2E = 2(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) = x_1 (y_n - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + \ldots + x_n (y_{n-1} - y_1)$$

Η γενική σχέση είναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2E = \sum x_n (y_{n-1} - y_{n+1}) \\ \text{ή} \\ 2E = \sum y_n (x_{n-1} - x_{n+1}) \end{array}} \qquad (7.25)$$

Όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του πολυγώνου, ενώ όταν n = 1 τότε η προηγούμενη κορυφή είναι η «n» και επόμενη η «2», και όταν n = n τότε η προηγούμενη κορυφή είναι η «n-1» και επόμενη η «1».

Βιβλιογραφία

Kahmen H. & W. Faig (1988) Surveying. Walter de Gruyter, Berlin, ISBN 3-11-008303-5.

Kavanagh B. & S.J. Glenn Bird (2000) Surveying, Principles and Applications. 5th Edition, Prentice Hall, ISBN 0-13-022733-1.

Μπαλοδήμου Α.Μ. & Δ.Δ. Μπαλοδήμος (1998) Εισαγωγή στη Γεωδαισία. Σημειώσεις Μαθήματος, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

Παρδάλης Ν. (1987). Μαθήματα Γεωδαισίας, Κλασσικής- Ηλεκτρονικής. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

8. Γεωμετρία Σφαίρας

Δ. Σταθάς

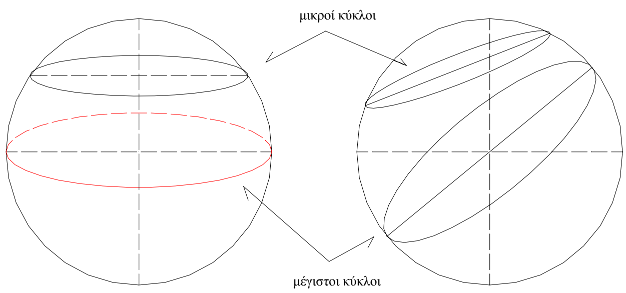
8.1 Εισαγωγή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, όταν οι τοπογραφικές εργασίες εκτελούνται σε μικρές εκτάσεις, ως επιφάνεια αναφοράς, για την αναγωγή των μετρήσεων και την εκτέλεση υπολογισμών, χρησιμοποιείται η σφαιρική επιφάνεια με την οποία προσεγγίζουμε το γεωειδές (ή τη **μ**έση **σ**τάθμη της **θ**άλασσας- μ.σ.θ.).

Κρίνεται λοιπόν σκόπιμο σ' αυτό το κεφάλαιο να δοθούν κάποιοι βασικοί ορισμοί μεγεθών που αφορούν στη σφαιρική επιφάνεια καθώς επίσης στη γεωμετρία της σφαίρας και στις αναλυτικές σχέσεις που συνδέουν τα παραπάνω μεγέθη μεταξύ τους.

8.2 Η Γεωμετρία της σφαίρας – Ορισμοί – Σφαιρικό τρίγωνο

Η σφαιρική επιφάνεια είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων εκείνων των σημείων που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο. Η απόσταση αυτή είναι η ακτίνα της σφαίρας R και το σταθερό σημείο είναι το κέντρο της O.



Σχήμα 8.1 Η σφαίρα με τους κύκλους

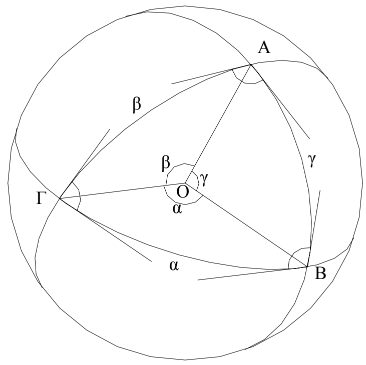
Η τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο είναι κύκλος.

Αν το επίπεδο αυτό διέρχεται από το κέντρο O τότε ο κύκλος που δημιουργείται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος** (Σχ.8.1).

Δυο σημεία Α και Β πάνω στη σφαίρα (σφαιρική επιφάνεια) και το κέντρο O ορίζουν ένα επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το κέντρο O. Το επίπεδο αυτό τέμνει τη σφαίρα και δημιουργείται ένας μέγιστος κύκλος του οποίου ένα τόξο είναι αυτό που ορίζεται από τα δυο σημεία Α και Β και έχει το μικρότερο μήκος.

Ο μέγιστος κύκλος είναι μοναδικός, ενώ υπάρχουν άπειροι άλλοι κύκλοι που διέρχονται από τα σημεία Α και Β και είναι τομές της σφαίρας με τα αντίστοιχα επίπεδα.

Όταν τρεις μέγιστοι κύκλοι τέμνονται με τέτοιο τρόπο ώστε στη σφαιρική επιφάνεια να εμφανίζονται τρία τόξα που ορίζονται από τα σημεία Α,Β,Γ τότε τρίγωνο που δημιουργείται ονομάζεται **σφαιρικό τρίγωνο** (Σχ.8.2).



Σχήμα 8.2 Το σφαιρικό τρίγωνο με τα στοιχεία του.

Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ είναι τα αντίστοιχα τόξα, ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ.

Τα τόξα αυτά έχουν μέτρο ίσο με το μέτρο των αντιστοίχων επικέντρων γωνιών, οι οποίες βρίσκονται στους μέγιστους κύκλους που ορίζονται από τα σημεία και το κέντρο Ο. Συνήθως οι πλευρές των σφαιρικών τριγώνων, δηλ. τα τόξα, συμβολίζονται με τα γράμματα **α**,**β**,**γ** ή **a**,**b**,**c** όπως και στα επίπεδα τρίγωνα με τη διαφορά όμως ότι αυτά εκφράζονται ως γωνιακά μεγέθη και επομένως οι μονάδες τους είναι οι μοίρες (°) ή τα ακτίνια (rad).

Τα μήκη S των πλευρών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι δυνατόν να υπολογισθούν, εφ' όσον είναι γνωστή η ακτίνα της σφαίρας R, από τη σχέση που δίνει το μήκος τόξου ενός κύκλου το οποίο είναι και το μήκος τόξου μεγίστου κύκλου πάνω στη σφαίρα, π.χ. για το τόξο ΒΓ ισχύει (το α σε rad):

$$S_{\mathrm{B\Gamma}} = \alpha \cdot R \tag{8.1}$$

Οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου Α,Β,Γ έχουν μέτρο ίσο με το μέτρο των αντιστοίχων επιπέδων γωνιών που ορίζονται, σε κάθε κορυφή του τριγώνου, από τις εφαπτόμενες των τόξων στην κορυφή αυτή (Σχ.8.2).

Το σφαιρικό τρίγωνο είναι προφανές ότι δεν είναι επίπεδο τρίγωνο και επομένως το άθροισμα των γωνιών του δεν είναι ίσο με 180º (ή π rad) αλλά μεγαλύτερο.

Δηλαδή ισχύει:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 180^\circ + E \tag{8.2}$$

Η ποσότητα *E* ονομάζεται **σφαιρική υπεροχή**.

Η τιμή της (σε rad) δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{T}{R^2} \tag{8.3}$$

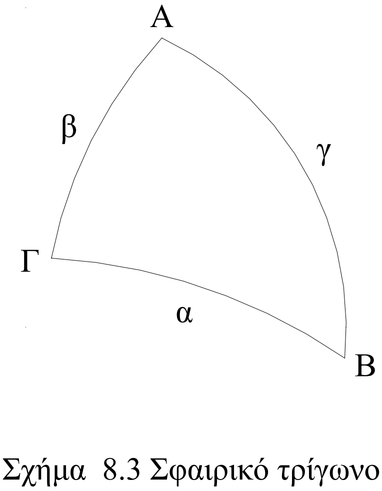
όπου:

T = το εμβαδόν του τριγώνου.

R= η ακτίνα της σφαίρας.

8.2.1 Μετρητικές σχέσεις στο σφαιρικό τρίγωνο.

Όπως στο επίπεδο τρίγωνο έτσι και στο σφαιρικό υπάρχουν σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις γωνίες **Α**,**Β**,**Γ** και τις πλευρές του **α**,**β**,**γ**. Σε αυτές τις σχέσεις οι πλευρές δεν εισάγονται ως γραμμικά μεγέθη όπως αυτά θα υπολογίζονταν από την σχέση (8.1) αλλά ως γωνιακά.



Σχήμα 8.3 Σφαιρικό τρίγωνο

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία σχέσεων αλλά, από αυτές, θα δοθεί ένας μικρός αριθμός οι οποίες είναι οι πλέον εύχρηστες.

1. Νόμος ημιτόνου.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin\beta}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin\gamma}{\sin \Gamma} \tag{8.4}$$

2. Νόμος συνημιτόνου.

$$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos \mathrm{A} \tag{8.5α}$$

και

$$\cos \mathrm{A} = -\cos \mathrm{B} \cdot \cos\Gamma + \sin \mathrm{B} \cdot \sin\Gamma \cdot \cos\alpha \tag{8.5β}$$

3. Σχέσεις των 5 στοιχείων.

$$\sin\alpha \cdot \cos \mathrm{B} = \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos \mathrm{A} \tag{8.6α}$$

$$\sin \mathrm{A} \cdot \cos\beta = \cos \mathrm{B} \cdot \sin\Gamma + \sin \mathrm{B} \cdot \cos\Gamma \cdot \cos\alpha \tag{8.6β}$$

και

$$\cos\alpha \cdot \cos \mathrm{B} = \sin\alpha \cdot \cot\gamma - \sin \mathrm{B} \cdot \cot\Gamma \tag{8.6γ}$$

4. Αναλογίες του Napier.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}}{\sin\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}} = \tan\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}}{\cos\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}} \tag{8.7α}$$

$$\tan\frac{\mathrm{A}}{2} = \cot\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \cot\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \tag{8.7β}$$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν για όλα τα στοιχεία του τριγώνου εφ' όσον γίνει κυκλική μετάθεση των στοιχείων.

5. Ανισότητες που ισχύουν.

1. $A < B \Leftrightarrow \alpha < \beta$
2. $A+B > \pi \Leftrightarrow \alpha+\beta > \pi$
3. $|\beta-\gamma| < \alpha < \beta+\gamma$
4. $\alpha+\pi > \beta+\gamma$

6. Επίλυση σφαιρικού τριγώνου.

Η επίλυση ενός σφαιρικού τριγώνου είναι εκείνη η διαδικασία κατά την οποία με γνωστά τρία από τα βασικά στοιχεία είναι δυνατή η εύρεση των υπολοίπων. Η διαδικασία επίλυσης η οποία ακολουθείται κάθε φορά εξαρτάται από τα δεδομένα με την επιλογή των κατάλληλων σχέσεων.

Γενικά πρέπει να ακολουθούνται οι παρακάτω κανόνες:

1) Όπου είναι δυνατόν χρησιμοποιούνται σχέσεις υπολογισμού των στοιχείων χρησιμοποιώντας το συνημίτονο ή την εφαπτομένη επειδή δίνουν μοναδική λύση για το διάστημα (0^o -180^o).
2) Σε περιπτώσεις διπλών λύσεων (π.χ. με το ημίτονο) η επιλογή της κατάλληλης μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των ανισοτήτων.

8.2.2 Ορθόπλευρα και ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα

Ορθόπλευρο λέγεται ένα **σφαιρικό τρίγωνο** όταν μια πλευρά του είναι τόξο μέτρου π/2 (90° ή 100 g). Ένα σφαιρικό τρίγωνο μπορεί να έχει ορθές τις δύο ή και τις τρεις πλευρές του (δις- ή τρις ορθόπλευρο).

Ορθογώνιο λέγεται ένα **σφαιρικό τρίγωνο** το οποίο έχει μια γωνία του ορθή.

Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δις- ή τρις- ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα ανάλογα με το αν έχουν δύο ή τρεις γωνίες ορθές.

Στα ορθογώνια ή ορθόπλευρα τρίγωνα ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις 4, 5α, 5β, 6α, 6β, 7α, 7β αλλά απλοποιημένες διότι οι αντίστοιχοι τριγωνομετρικοί αριθμοί των

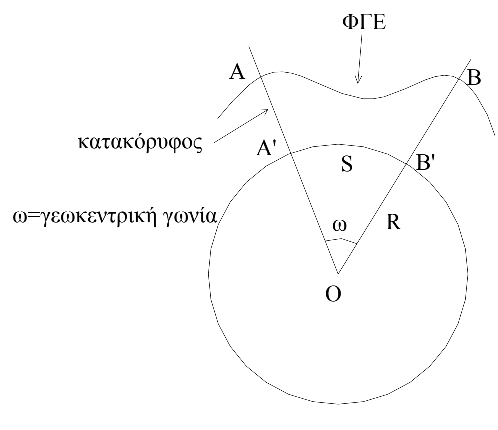
γωνιών ή των πλευρών που έχουν μέτρο 90° λαμβάνουν την τιμή 1 ή 0 ανάλογα με το αν πρόκειται για ημίτονο ή συνημίτονο.
Για παράδειγμα αν το σφαιρικό τρίγωνο έχει Α=90° τότε ισχύουν:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos\beta\cdot\cos\gamma = \cot\mathrm{B}\cdot\cot\Gamma \\
\sin\beta &= \sin\alpha\cdot\sin\mathrm{B} = \tan\gamma\cdot\cot\Gamma \\
\cos\mathrm{B} &= \cos\beta\cdot\sin\Gamma = \tan\gamma\cdot\cot\alpha
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Με κυκλική μετάθεση προκύπτουν ανάλογες σχέσεις και για τα υπόλοιπα στοιχεία.

8.2.3 Η Γη ως σφαίρα –Υπολογισμοί στην επιφάνεια της γης

Πολλές φορές (τοπογραφικές εργασίες σε περιορισμένη έκταση πχ των 100 τετραγ. χιλιομέτρων) η γη μπορεί να θεωρηθεί τοπικά ως μια σφαίρα. Το πιο ορθό θα ήταν αν λέγαμε ότι το **γεωειδές προσεγγίζεται τοπικά από μια σφαίρα** με ακτίνα **R=6371km**.
Η προσέγγιση αυτή γίνεται με την ταυτόχρονη **παραδοχή** της **ομογενούς σφαίρας**. Αυτό σημαίνει ότι οι **κατακόρυφες** που περνούν από κάθε σημείο του γήινου ανάγλυφου είναι **κάθετες στην σφαιρική επιφάνεια και διέρχονται όλες από το κέντρο της** (άρα είναι προεκτάσεις των αντιστοίχων ακτίνων της σφαίρας) (Σχ.8.4).



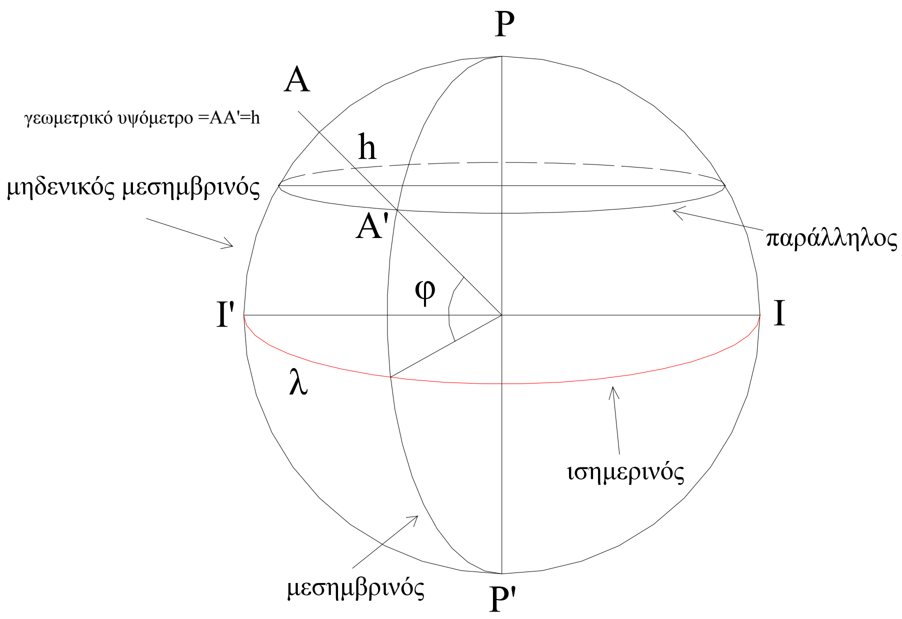
Σχήμα 8.4 Τομή της σφαίρας όπου φαίνονται οι δυο κατακόρυφες που διέρχονται από τα Α και Β και προβάλλουν αυτά στη σφαίρα στις θέσεις Α’ και Β’.

Η γωνία **ω** που σχηματίζουν δύο κατακόρυφες με κορυφή το κέντρο της γης ονομάζεται **γεωκεντρική γωνία**. Το μέτρο της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{S}{R} \quad (\mathrm{rad}) \tag{8.9}$$

όπου: S το μήκος του τόξου και R η ακτίνα της γης.

Όπως είναι γνωστό η γη περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα που τη διασχίζει από τον Βόρειο ως το Νότιο πόλο. Ο μέγιστος κύκλος που είναι κάθετος σε αυτόν τον άξονα τέμνει τη γήινη σφαίρα κατά το **ισημερινό επίπεδο** και σχηματίζει τον **Ισημερινό** πάνω στη σφαιρική επιφάνεια (Σχ.8.5), όπου Α': προβολή του Α στη σφαίρα.



Σχήμα 8.5 Η γήινη σφαίρα με τους μεσημβρινούς και τους παραλλήλους.

Κάθε επίπεδο παράλληλο προς το ισημερινό τέμνει τη γη κατά τους **παράλληλους κύκλους.**

Οι μέγιστοι κύκλοι που εμπεριέχουν τον άξονα περιστροφής της γης ορίζουν πάνω στη γήινη σφαιρική επιφάνεια τους **μεσημβρινούς** (Σχ.8.5).

Οι τομές αυτές της γήινης σφαίρας αναφέρονται και ως **μεσημβρινές τομές**.

Ένα σημείο πάνω στη γήινη σφαίρα ορίζεται με τις γεωγραφικές του συντεταγμένες που είναι το **γεωγραφικό πλάτος** και το **γεωγραφικό μήκος**.

Ένα σημείο του γήινου ανάγλυφου προβάλλεται πάνω στη γήινη σφαίρα μέσω της κατακόρυφης (Σχ.8.4) και η προβολή του είναι εκείνη που προσδιορίζεται πλέον με τις γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ).

Στο Σχ.5 φαίνεται πώς η προβολή Α ενός σημείου ορίζεται με το γεωγραφικό πλάτος **φ** και το γεωγραφικό μήκος **λ** . Όπως φαίνεται σε αυτό το σχήμα τα μεγέθη αυτά αντιστοιχούν σε τόξα μεγίστων κύκλων.

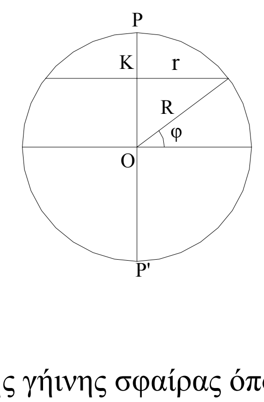
Το γεωγραφικό μήκος αντιστοιχεί σε τόξο στον κύκλο του Ισημερινού με αφετηρία τον μηδενικό μεσημβρινό με διάστημα τιμών (0° έως 360°). Το γεωγραφικό πλάτος αντιστοιχεί σε τόξο το οποίο βρίσκεται πάνω στον αντίστοιχο μεσημβρινό με αφετηρία μέτρησης τον Ισημερινό και διάστημα τιμών (-90°, +90°). Οι πιο συνηθισμένες μονάδες μέτρησης των μεγεθών αυτών είναι οι **μοίρες** (π.χ. 35°45'30″).

8.2.4 Μήκη τόξων σε παράλληλο και σε μεσημβρινό.

Όπως αναφέρθηκε όλοι οι μεσημβρινοί είναι μέγιστοι κύκλοι επομένως η ακτίνα αυτών των κύκλων είναι ίση με την ακτίνα της γήινης σφαίρας. Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και με τον μέγιστο κύκλο του Ισημερινού.

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τους παραλλήλους.

Κάθε παράλληλος, όπως αναφέρθηκε, δημιουργείται από την τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο παράλληλο προς τον Ισημερινό και κάθετο στον άξονα περιστροφής. Το επίπεδο αυτό τέμνει τον άξονα σε σημείο το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου π.χ. K και ο παράλληλος έχει ακτίνα **r** όπως φαίνεται στο Σχ.8.6.



Σχήμα 8.6 Μεσημβρινή τομή της γήινης σφαίρας όπου φαίνεται η τομή της με τον παράλληλο κύκλο.

Είναι προφανές ότι η σχέση που συνδέει την ακτίνα του παραλλήλου με αυτήν της γήινης σφαίρας και το γεωγραφικό πλάτος, στο οποίο αντιστοιχεί ο παράλληλος, είναι:

$$r = R \cdot \cos\varphi \qquad (8.10)$$

Δυο σημεία που βρίσκονται στον ίδιο παράλληλο έχουν το ίδιο πλάτος αλλά διαφορετικό μήκος.

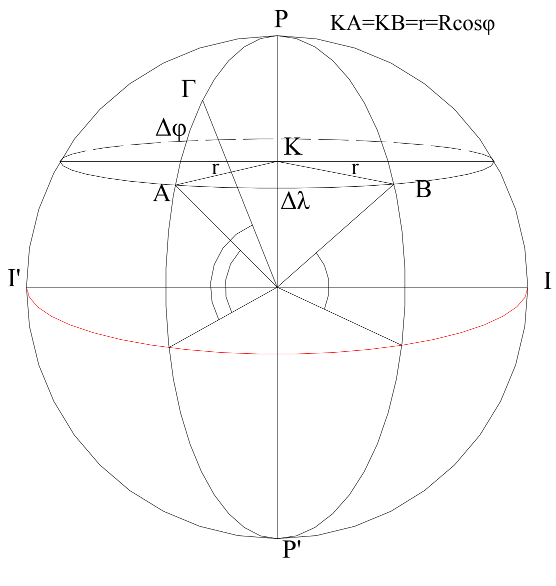
Έστω λοιπόν δυο σημεία (Σχ.4.7) τα Α και Β τα οποία βρίσκονται στον ίδιο παράλληλο με συντεταγμένες **φ_A, λ_A** και **φ_B, λ_B**.

Προφανώς **$\varphi_A = \varphi_B$**. Το μήκος του τόξου ΑΒ θα δίνεται από την σχέση:

$$S_{AB} = r \cdot (\lambda_B - \lambda_A) = r \cdot \Delta\lambda = R \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\lambda \qquad (8.11)$$

Προφανώς η σχέση 11 ισχύει όταν η ποσότητα Δλ είναι σε rad.

Επειδή όμως το γεωγραφικό πλάτος και μήκος μετριούνται συνήθως σε μοίρες είναι αναγκαία η μετατροπή του Δλ σε ακτίνια.



Σχήμα 8.7 Προσδιορισμός σημείων στη γήινη σφαίρα.

Εφαρμογή 1: Δίνονται δυο σημεία Α, Β στον ίδιο παράλληλο με

$\lambda_A = 23^o\ 15'\ 24''$ και $\lambda_B = 24^o\ 12'\ 35''$ $\varphi = 38^o\ 25'\ 30''$ R=6371km.

Να βρεθεί το μήκος του τόξου ΑΒ στον παράλληλο αυτό.

Υπολογίζω το Δλ αφού μετατρέψω σε δεκαδική μορφή.

$$\lambda_A = 23 + \frac{15}{60} + \frac{24}{3600} = 23^0.2566667$$

$$\lambda_B = 24 + \frac{12}{60} + \frac{35}{3600} = 24^0.2097222$$

άρα το Δλ σε μοίρες και σε δεκαδική μορφή είναι:

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = 0^0.9530555$$

Γίνεται μετατροπή σε ακτίνια:

$$\Delta\lambda = \frac{0.9530555 \cdot \pi}{180} = 0.0166339564 rad$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 11 το μήκος του τόξου του παραλλήλου είναι:

$$S_{AB} = R \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\lambda = 6371 \cdot \cos\left(38^0.425\right) \cdot 0.0166339546 km = 83.023 km$$

Το γεωγραφικό πλάτος είναι και αυτό σε μοίρες αλλά σε δεκαδική μορφή.
Δυο σημεία που βρίσκονται πάνω στον ίδιο μεσημβρινό έχουν το ίδιο γεωγραφικό μήκος. Έστω λοιπόν δύο σημεία Α και Γ (Σχ.4.7) πάνω στον ίδιο μεσημβρινό. Ο μεσημβρινός είναι ένας μέγιστος κύκλος της γήινης σφαίρας και επομένως έχει ακτίνα R=6371km. Τα δύο σημεία έχουν το ίδιο γεωγραφικό μήκος $\boldsymbol{\lambda_A} = \boldsymbol{\lambda_\Gamma}$ αλλά διαφορετικά πλάτη $\boldsymbol{\varphi_A}$ και $\boldsymbol{\varphi_\Gamma}$.

Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο ΑΓ είναι προφανώς (Σχ.4.7) ίση με:

$$\Delta\varphi = \varphi_\Gamma - \varphi_A \qquad (8.12)$$

Επομένως το μήκος του τόξου $S_{A\Gamma}$ στο μεσημβρινό, όταν το Δφ δίνεται σε ακτίνια, είναι:

$$S_{A\Gamma} = R \cdot \Delta\varphi \qquad (8.13)$$

Εφαρμογή 2: Δίνονται δύο σημεία Α και Γ με φ_A = 38º 25' 30'' και φ_Γ= 41º 30' 45'' τα οποία βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό. Να βρεθεί το μήκος του τόξου ΑΓ.

Μετατρέπουμε σε δεκαδική μορφή τα γεωγραφικά πλάτη όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή:

$$\varphi_A = 38 + \frac{25}{60} + \frac{30}{3600} = 38^\circ.425$$

$$\varphi_\Gamma = 41 + \frac{30}{60} + \frac{45}{3600} = 41^\circ.5125$$

Υπολογίζουμε το Δφ σε ακτίνια:

$$\Delta\varphi = \varphi_\Gamma - \varphi_A = 3^\circ.0875 \cdot \frac{\pi}{180} = 0.05388704$$

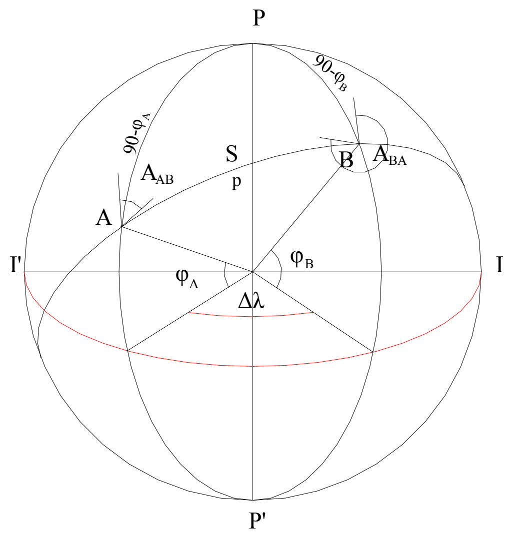
Από τη σχέση 13 υπολογίζεται το μήκος του τόξου:

$$S_{A\Gamma} = R \cdot \Delta\varphi = 6371 \cdot 0.05388704 km = 343.314 km$$

8.2.5 Μήκος τόξου που ορίζουν δυο τυχαία σημεία - Αζιμούθιο.

Δύο σημεία πάνω στη γήινη σφαίρα ορίζονται, όπως αναφέρθηκε, με τις συντεταγμένες τους **φ** και **λ**.

Στο Σχ.4.8 φαίνονται δύο τέτοια σημεία τα Α (φ_A, λ_A) και Β (φ_B, λ_B).



Σχήμα 8.8 Τόξο που ορίζουν δύο τυχαία σημεία στη γήινη σφαίρα.

Από τα δύο σημεία διέρχεται ένας μέγιστος κύκλος ο οποίος τέμνει τη σφαιρική επιφάνεια κατά το τόξο S_{AB}.
Ας δούμε με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να υπολογισθεί το μήκος του τόξου αυτού.
Στη σφαιρική επιφάνεια δημιουργείται ένα σφαιρικό τρίγωνο το οποίο έχει κορυφές τα σημεία A , B και τον πόλο P.

Η γωνία που δημιουργείται από τον μεσημβρινό του A και το τόξο AB είναι ίση με τη γωνία που ορίζουν οι δύο εφαπτόμενες (στο μεσημβρινό και το τόξο αντιστοίχως) οι οποίες διέρχονται από το σημείο A. Το ίδιο συμβαίνει και στο σημείο B.
Η **προσανατολισμένη γωνία** η οποία έχει κορυφή το σημείο A (ή το B), αρχική πλευρά την διεύθυνση (εφαπτομένη) του μεσημβρινού AP (ή BP αντιστοίχως) και τελική πλευρά την διεύθυνση (εφαπτομένη) του τόξου AB (ή BA) ονομάζεται **Αζιμούθιο** της AB (ή της BA αντιστοίχως) και συμβολίζεται $\mathbf{A_{AB}}$ (ή $\mathbf{A_{BA}}$)*.

Το σφαιρικό τρίγωνο PAB με βάση τα παραπάνω έχει:

1. Γωνίες: $P=\Delta\lambda$, $A=A_{AB}$, $B=360^o-A_{BA}$
2. Πλευρές τα τόξα: $AP=\beta=90^o-\varphi_A$, $BP=\alpha=90^o-\varphi_B$ και $AB=p$ = άγνωστο.

Το μήκος του τόξου AB (S_{AB}), με δεδομένη την ακτίνα R της γης, μπορεί να υπολογισθεί εφ' όσον πρώτα βρεθεί το μέτρο του τόξου AB= p εφαρμόζοντας τη σχέση (5α).

$$\cos p = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos \mathrm{P} \tag{8.14}$$

δηλαδή μετά από αντικατάσταση:

$$\cos p = \cos\left(90^\circ - \varphi_\mathrm{B}\right)\cdot \cos\left(90^\circ - \varphi_\mathrm{A}\right) + \sin\left(90^\circ - \varphi_\mathrm{B}\right)\cdot \sin\left(90^\circ - \varphi_\mathrm{A}\right)\cdot \cos\Delta\lambda \tag{8.15}$$

ή

$$\cos p = \sin\varphi_\mathrm{B} \cdot \sin\varphi_\mathrm{A} + \cos\varphi_\mathrm{B} \cdot \cos\varphi_\mathrm{A} \cdot \cos\Delta\lambda \tag{8.16}$$

* Σημείωση: η σχέση που συνδέει τα A_{AB} και A_{BA}, λαμβάνοντας υπόψη και τη διόρθωση λόγω σύγκλισης των μεσημβρινών είναι: $A_{BA}=A_{AB}+180^0+\Delta A$

Από την 16 υπολογίζεται η γωνιακή τιμή ***p*** του τόξου ΑΒ επομένως και η επίκεντρη γωνία στην οποία αντιστοιχεί δηλαδή η επίκεντρη γωνία που ανήκει στον μέγιστο κύκλο ο οποίος περνά από τα σημεία Α και Β.

Κατόπιν αυτού το μήκος του τόξου προκύπτει αν εφαρμοσθεί η σχέση (8.1).

$$S_{\mathrm{AB}} = R \cdot p \tag{8.17}$$

όπου: το *p* δίνεται σε ακτίνια

Εάν εφαρμοσθεί η ίδια σχέση (η 5α), θεωρώντας πλέον γνωστό το τόξο ΑΒ, για το τόξο ΡΒ (=*α*) τότε έχουμε:

$$\cos\alpha = \cos p \cdot \cos\beta + \sin p \cdot \sin\beta \cdot \cos A \qquad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$\cos(90 - \varphi_{\mathrm{B}}) = \cos p \cdot \cos(90 - \varphi_{\mathrm{A}}) + \sin p \cdot \sin(90 - \varphi_{\mathrm{A}}) \cdot \cos \mathrm{A}_{\mathrm{AB}} \qquad \text{ή}$$

$$\sin\varphi_{\mathrm{B}} = \cos p \cdot \sin\varphi_{\mathrm{A}} + \sin p \cdot \cos\varphi_{\mathrm{A}} \cdot \cos \mathrm{A}_{\mathrm{AB}} \tag{8.18}$$

Από την 18 μπορεί να υπολογισθεί η τιμή του Αζιμουθίου A_{AB}.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, όπως στο επίπεδο, έτσι και στη σφαίρα αν δίνονται δυο σημεία με τις συντεταγμένες τους είναι δυνατόν να βρεθεί το μήκος και το αζιμούθιο (2^o θεμελιώδες πρόβλημα).

Με ανάλογο τρόπο λύνεται και το **αντίστροφο πρόβλημα** δηλαδή:

Δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου, του Α (φ_A , λ_A) , το μήκος S_{AB} και το αζιμούθιο A_{AB} και ζητούνται οι συντεταγμένες του σημείου Β.

Αυτό είναι το ίδιο πρόβλημα όπως και στο επίπεδο δηλαδή το 1^o θεμελιώδες.

Τα βήματα που ακολουθούνται για τη λύση είναι:

1. Από τη σχέση 17 υπολογίζεται το μέτρο του τόξου ΑΒ (***p***) που αντιστοιχεί στο μήκος S_{AB}.
2. Από τη σχέση 18 υπολογίζεται το γεωγραφικό πλάτος $\boldsymbol{\varphi_B}$.
3. Από τη σχέση 16 υπολογίζεται το **Δλ** οπότε:

$$\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{A}} + \Delta\lambda \tag{8.19}$$

Προσοχή

Σε όλες τις παραπάνω ενέργειες χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στις γωνιακές μονάδες. Όταν γίνεται μετατροπή του μήκους του τόξου σε γωνιακό μέγεθος (ή και αντιστρόφως), δηλαδή όταν χρησιμοποιείται η σχέση 8.17, τότε η γωνία θα πρέπει να εκφράζεται σε ακτίνια. Σε όλες τις άλλες σχέσεις οι γωνίες μπορεί να εκφράζονται και σε άλλες μονάδες όπως μοίρες (για τα φ και λ) ή και σε βαθμούς (π.χ. για το Αζιμούθιο).

Εφαρμογή : (η λύση που δίνεται επιτυγχάνεται με Η/Υ τσέπης)

Δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων Α και Β. Να βρεθεί το μήκος του τόξου S_{AB} και το Αζιμούθιο A_{AB} (Σχ.8.8).

φ_A= 38° 25' 30'' , λ_A=23° 15' 18'' , φ_B=41° 30' 45'' , λ_B= 24° 12' 36'' , R=6371km

Λύση:

Πρώτα μετατρέπω τις μοίρες σε δεκαδική μορφή όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές έτσι έχω:

φ_A=38.425 , λ_A=23.255 , φ_B=41.5125 , λ_B=24.2100

Υπολογίζω το Δλ:

$$\Delta\lambda = \varphi_B - \varphi_A = 0.955$$

Από τη σχέση 16 υπολογίζω το τόξο ΑΒ(=*p*) ως γωνιακό μέγεθος δίνοντας τα δεδομένα με τη δεκαδική τους μορφή.

$$\cos p = 0.9984669575 \text{ άρα } \quad p = \arccos(0.9984669575) = 3^{\circ}.173001124$$

Υπόδειξη- παρατήρηση

*Η συνάρτηση **arccosx** σημαίνει το «το τόξο (γωνία) η οποία έχει συνημίτονο τον αριθμό x». Στα Ελληνικά η συνάρτηση αυτή γράφεται **τοξσυνx**.*

Ανάλογες συναρτήσεις ισχύουν και για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς δηλαδή arcsinx (τοξημx), arctanx (τοξεφx) ,arccotx (τοξσφx) κλπ.

Στον Η/Υ τσέπης οι συναρτήσεις αυτές εμφανίζονται τις περισσότερες φορές με τη μορφή της αντίστροφης συνάρτησης δηλ sin^{-1} , cos^{-1}, tan^{-1}.

Κατόπιν υπολογίζω το μήκος του τόξου S_{AB} χρησιμοποιώντας τη σχέση 8.17 αφού πρώτα μετατρέψω το ***p*** σε ακτίνια.

$$p = 3.173001124 \cdot \frac{\pi}{180} = 0.0553793168 \; rad$$

$$S_{\mathrm{AB}} = 6371 \cdot 0.0553793168 km = 352.821627 km = 352821.627 \; m$$

Από τη σχέση 18 μπορώ να υπολογίσω το Αζιμούθιο A_{AB}.

$$\cos A_{AB} = \frac{\sin \varphi_B - \cos p \cdot \sin \varphi_A}{\sin p \cdot \cos \varphi_A} = 0.9742478867$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{AB}} = \arccos\,(0.9742478867) = 13^{\circ}.03108265$$

Το αζιμούθιο μπορώ να το μετατρέψω σε εξηκονταδική μορφή (δηλ. μ^o π' δ'') με την ακόλουθη διαδικασία:

$\mu=13^o$

π = (13.03108265 – 13)*60 = 1.864959 άρα π = 1'

δ = (1.864959-1)*60 = 51.89754 άρα δ = 51".9 (στρογγύλευση)

Άρα $A_{AB} = 13^o$ 1' 51".9

Αντίστροφο πρόβλημα .

Δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου Α, το μήκος S_{AB} και το Αζιμούθιο A_{AB}. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Β.

$\varphi_A = 38^o$ 25' 30" , $\lambda_A=23^o$ 15' 18" , S_{AB}=352821.627m, $A_{AB}= 13^o$ 1' 51".9.

<u>Λύση:</u>

Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή γίνεται μετατροπή των γωνιακών μεγεθών σε δεκαδική μορφή.

Από τη σχέση 17 υπολογίζω την τιμή του ρ.

$$p = \frac{S_{\mathrm{AB}}}{R} = \frac{352821.627m}{6371000m} = 0.0553793168 rad \qquad \text{ή}$$

$$p = 0.0553793168 \cdot \frac{180}{\pi} = 3^{\circ}.173001122$$

Από τη σχέση 18 μπορώ τώρα να υπολογίσω το πλάτος φ_B.

$\sin\varphi_{\mathrm{B}} = 0.6627834292$ άρα

$\varphi_{\mathrm{B}} = \arcsin(0.6627834292) = 41^{\circ}.5125 = 41^{\circ}\,30'\,45''$

Από τη σχέση 16 υπολογίζω το Δλ.

$$\cos\Delta\lambda = \frac{\cos p - \sin\varphi_{\mathrm{A}}\cdot\sin\varphi_{\mathrm{B}}}{\cos\varphi_{\mathrm{A}}\cdot\cos\varphi_{\mathrm{B}}} = 0.9998610939 \quad \text{άρα}$$

$\Delta\lambda = \arccos(0.9998610939) = 0^{\circ}.954999879 = 0^{\circ}57'18''$

Από τη σχέση 19 υπολογίζω το λ_{B}.

$\lambda_{\mathrm{B}} = \lambda_{\mathrm{A}} + \Delta\lambda = 24.209999... = 24^{\circ}\,12'35''.999...$

Οι μικρές διαφορές που παρατηρούνται στα αποτελέσματα σε σχέση με αυτά της προηγούμενης εφαρμογής οφείλονται σε πράξεις, στρογγυλεύσεις κλπ.