



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Γεωχωρικές Τεχνολογίες»

Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

Εισηγητής
Αναστάσιος Κεσίδης



Επεξεργασία στο πεδίο της συχνότητας

Φασματικές τεχνικές

➤ Γενικά

Τεχνικές αναπαράστασης και ανάλυσης σημάτων (ήχου, εικόνας, video κλπ) στο **πεδίο της συχνότητας**.

Επιτρέπουν την **ανάλυση** του σήματος σε άθροισμα ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων (αρμονικές συναρτήσεις).

Βελτιώνουν την αποτελεσματικότητα διαφόρων τεχνικών επεξεργασίας εικόνας.

Ορισμένες εφαρμογές (π.χ. φιλτράρισμα, αποθορυβοποίηση εικόνας κα) υλοποιούνται καλύτερα στο πεδίο της συχνότητας.

Βασικό εργαλείο αποτελεί ο **μετασχηματισμός Fourier**.



Jean-Baptiste Joseph Fourier
1768-1830

Μετασχηματισμός Fourier

➤ Γενικά

Μια μέθοδος για την εύρεση των συχνοτήτων από τις οποίες αποτελείται ένα σήμα.

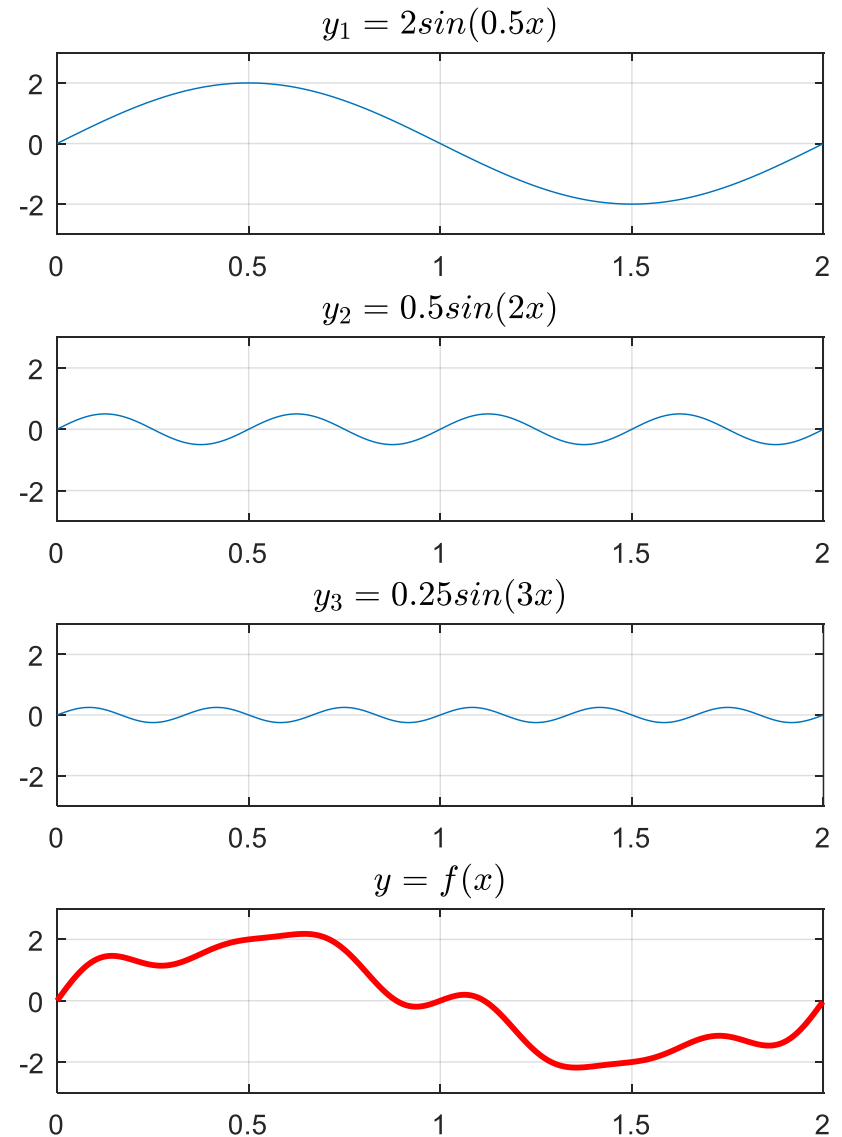
Βασική ιδέα

Μια συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων.

Σκοπός

Επεξεργασία (φιλτράρισμα, αποθρομβοποίηση κλπ) σε επίπεδο απλών συναρτήσεων και έπειτα ανασύνθεση της επεξεργασμένης συνάρτησης.

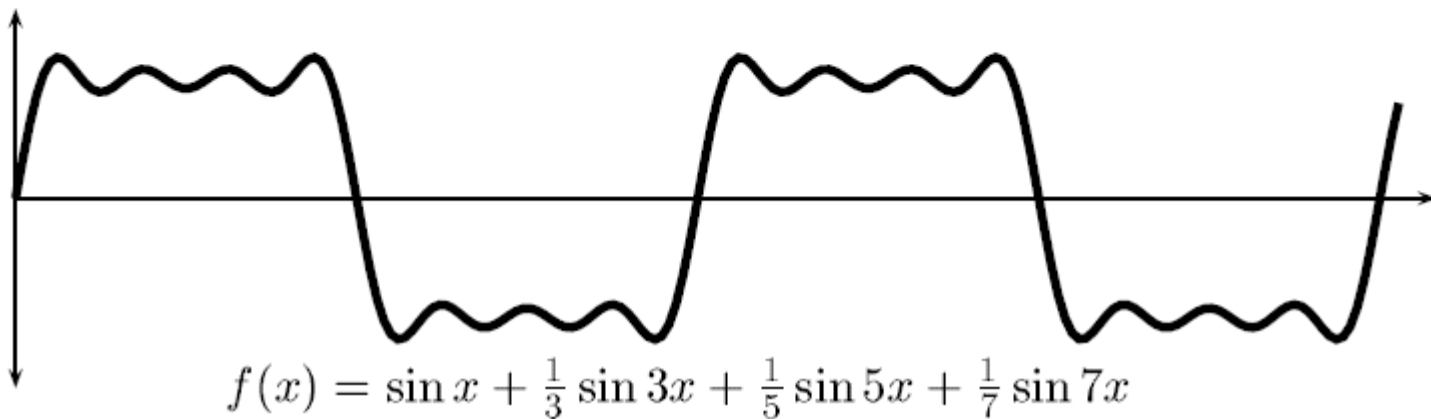
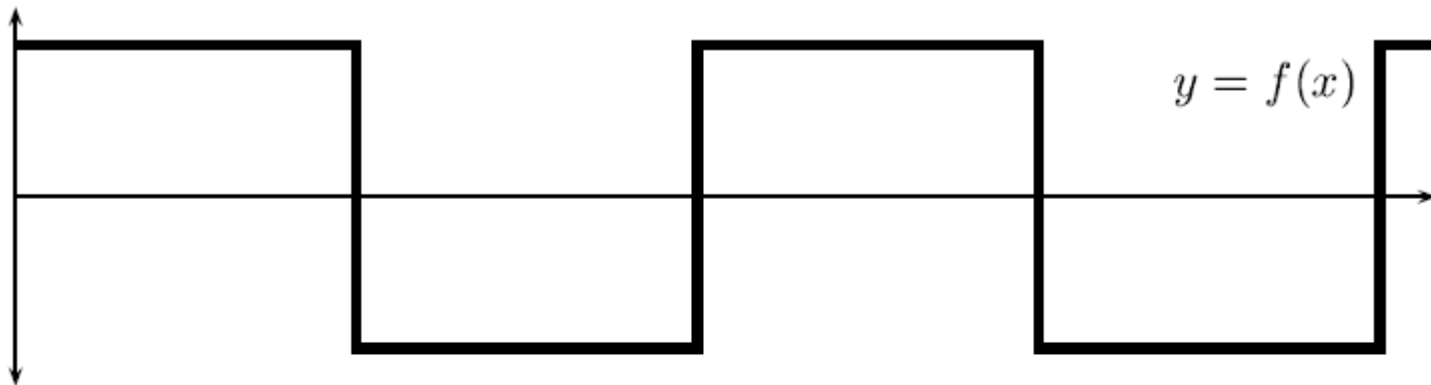
$$y = y_1 + y_2 + y_3 = 2 \sin(0.5x) + 0.5 \sin(2x) + 0.25 \sin(3x)$$



Μετασχηματισμός Fourier

➤ Γενικά

Παράδειγμα Προσέγγιση της τετραγωνικής συνάρτησης από τριγωνικές



$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x$$

↑
Όσο περισσότερες ημιτονοειδείς προστεθούν τόσο καλύτερη η προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης

Επεξεργασία στον χώρο της συχνότητας

➤ Βασικές έννοιες

Το αρμονικό περιεχόμενο του σήματος

Κάθε σήμα (χρονικό, χωρικό κλπ) μπορεί να εκφραστεί ως ένας **σταθμισμένος γραμμικός συνδυασμός** αρμονικών συναρτήσεων (ημίτονα και συνημίτονα) διαφορετικών συχνοτήτων.

Η αναπαράσταση στο επίπεδο Fourier είναι πλήρης

Τα βάρη με τα οποία συνεισφέρουν οι αρμονικές συναρτήσεις των διάφορων συχνοτήτων αποτελούν το φάσμα Fourier. Στην γενική περίπτωση υπάρχουν άπειροι τέτοιοι όροι και το σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί σε οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Συνεπώς, το επίπεδο Fourier αποτελεί μια **πλήρη** εναλλακτική αναπαράσταση του σήματος.

Επεξεργασία στο επίπεδο Fourier

Η επεξεργασία του σήματος στο χώρο της συχνότητας (ανάλυση, ενίσχυση, αποκοπή κλπ) αφορά τις **αρμονικές συνιστώσες** του σήματος και το πώς αυτή η επεξεργασία επηρεάζει το αρχικό σήμα.

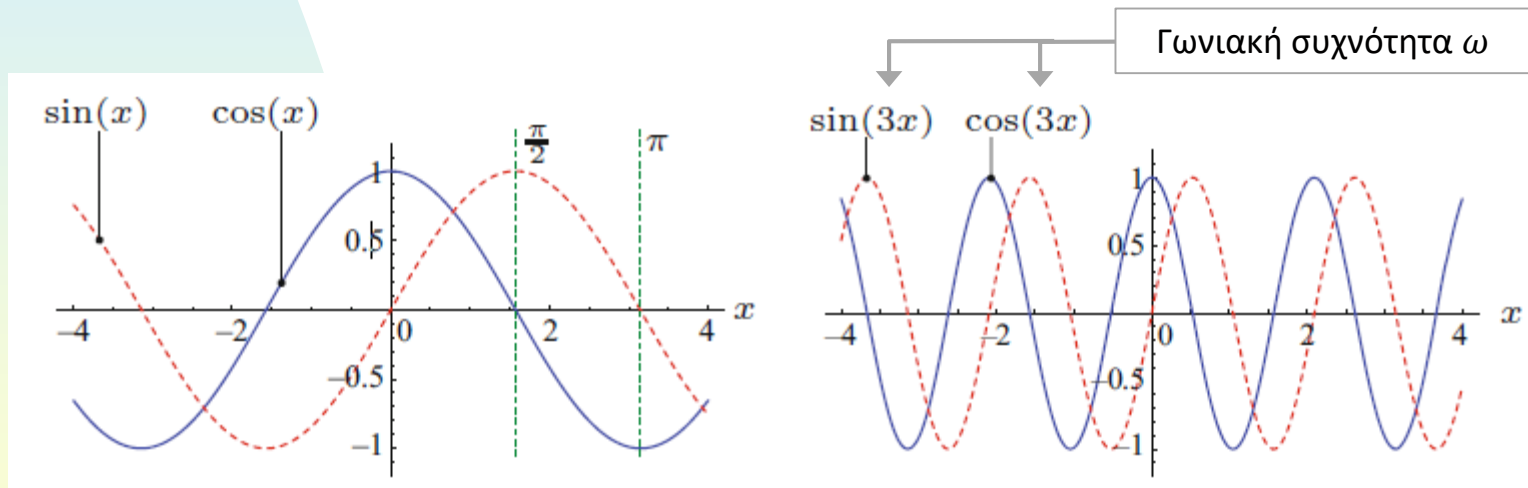
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

➤ Συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{και} \quad f(x) = \cos(x)$$

Είναι περιοδικές συναρτήσεις

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + k2\pi)$$



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

➤ Συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου

Σχέση μεταξύ περιόδου T , συχνότητας f και γωνιακής συχνότητας ω :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \rightarrow \quad \omega = 2\pi f$$

Παράδειγμα:

Σήμα συχνότητας $f = 1000$ Hertz (κύκλοι/δευτερόλεπτο) έχει

περίοδο $T = 1/1000$ δευτερόλεπτα και

γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi \cdot 1000 = 2000\pi$

➤ Μεταβολή της φάσης κατά γωνία

$$\cos(x) = \cos(x - \varphi)$$

➤ Σχέση μεταξύ ημιτόνου και συνημιτόνου

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

➤ Σύνθεση ημιτονοειδών συναρτήσεων

Πρόσθεση ενός ημιτόνου και ενός συνημιτόνου ίδιας συχνότητας αλλά διαφορετικού πλάτους

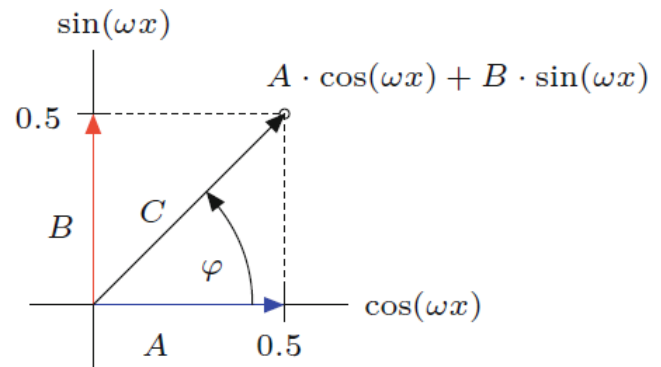
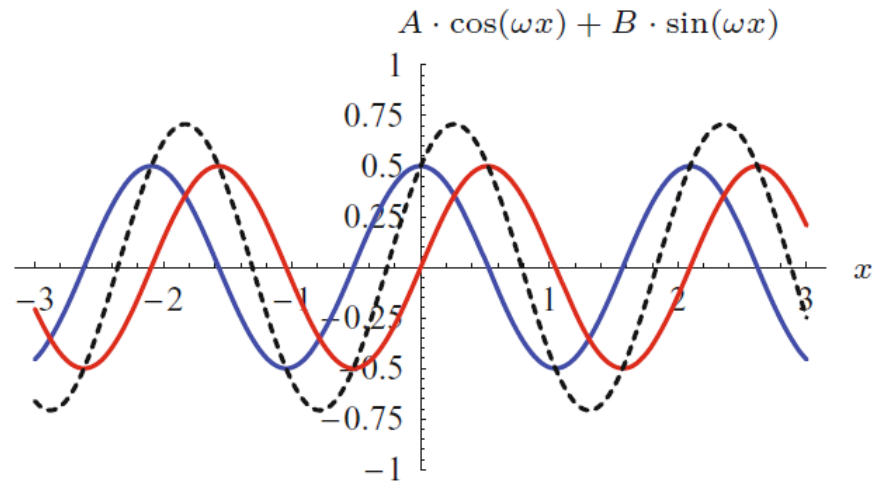
$$A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x) = C \cdot \cos(\omega x - \varphi)$$

με πλάτος $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

και γωνία φάσης $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$

Ημιτονοειδείς συναρτήσεις οποιουδήποτε πλάτους, συχνότητας και φάσης μπορούν να περιγραφούν ως σταθμισμένο άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων.

Οι συνιστώσες ημιτόνου και συνημιτόνου είναι **ορθογώνιες** μεταξύ τους



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

➤ Μιγαδική απεικόνιση $z=a+ib$

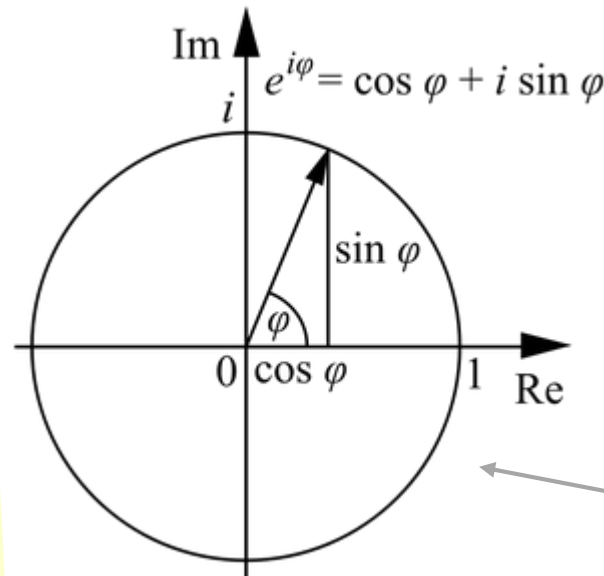
Απεικόνιση στο επίπεδο των μιγαδικών αριθμών όπου το πραγματικό μέρος του αριθμού a απεικονίζεται στο άξονα x και το φανταστικό μέρος του αριθμού b απεικονίζεται στον άξονα y .

Ταυτότητα του Euler

$$e^{i\varphi} = e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \cdot \sin(\omega x)$$

όπου $e \approx 2.71828$ ο αριθμός του Euler.

Ενσωμάτωση ορθογωνίων ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών συναρτήσεων ίδιας συχνότητας σε **μια** παράσταση $e^{i\varphi}$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{i\varphi}) &= \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(e^{i\varphi}) &= \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Σειρές Fourier

➤ Αναπαράσταση περιοδικών συναρτήσεων

Μια περιοδική συνάρτηση $g(x)$ με βασική συχνότητα ω_0 μπορεί να περιγραφεί ως άθροισμα αρμονικών ημιτονοειδών συναρτήσεων

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 x) + B_k \cdot \sin(k\omega_0 x)$$

- Οι συντελεστές A_k και B_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** της συνάρτησης $g(x)$.
- Οι συχνότητες των συναρτήσεων \cos και \sin είναι **ακέραια πολλαπλάσια (αρμονικές)** της βασικής συχνότητας ω_0 .

Ολοκλήρωμα Fourier

➤ Αναπαράσταση (και ΜΗ περιοδικών) συναρτήσεων

Μια συνάρτηση $g(x)$ (όχι απαραίτητα περιοδική) μπορεί να περιγραφεί ως σταθμισμένο άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων

$$g(x) = \int_0^{\infty} A_{\omega} \cdot \cos(\omega x) + B_{\omega} \cdot \sin(\omega x) d\omega$$

- Οι συντελεστές A_{ω} και B_{ω} δίνουν το πλάτος της αντίστοιχης συνάρτησης ημιτόνου και συνημιτόνου.

$$A_{\omega} = A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x) dx$$

$$B_{\omega} = B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x) dx$$

- Οι συντελεστές A_{ω} και B_{ω} είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς ω και εκφράζουν το **φάσμα** του αρχικού σήματος $g(x)$ δηλαδή την **συνεχή** κατανομή συχνοτήτων που περιέχονται σε αυτό.
- Το αρχικό σήμα $g(x)$ μπορεί να ανακτηθεί πλήρως από τους συντελεστές A_{ω} και B_{ω} .

Μετασχηματισμός Fourier

➤ Ευθύς μετασχηματισμός Fourier

Η συνάρτηση $g(x)$ όπως και το αντίστοιχο φάσμα εκφράζονται ως **μιγαδικές** συναρτήσεις.

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot [A(\omega) - iB(\omega)] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x) dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot [\cos(\omega x) - i \cdot \sin(\omega x)] dx \end{aligned}$$

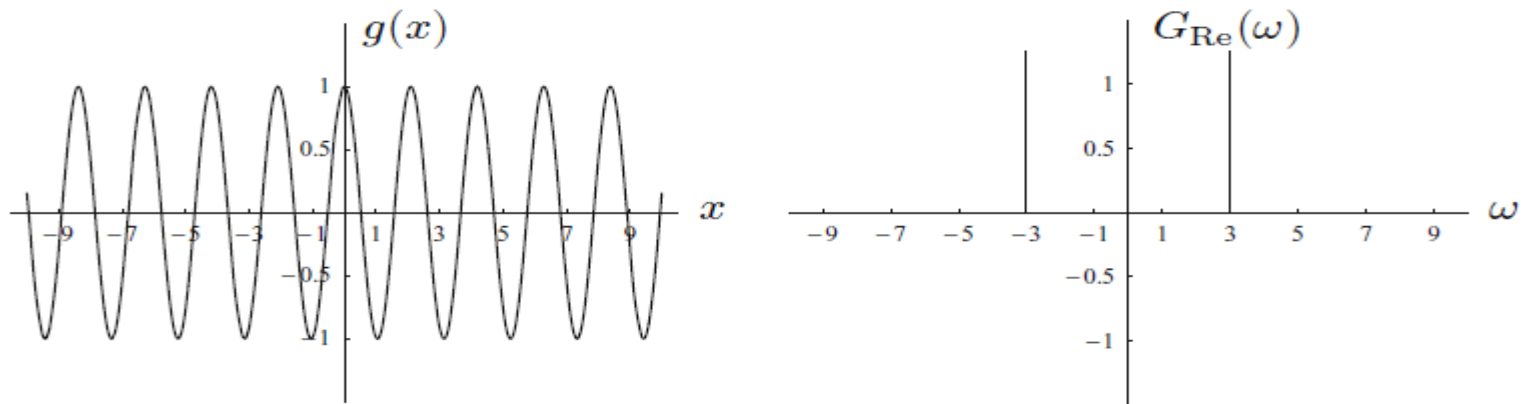
και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler μπορεί να γραφεί ως

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\omega x} dx$$

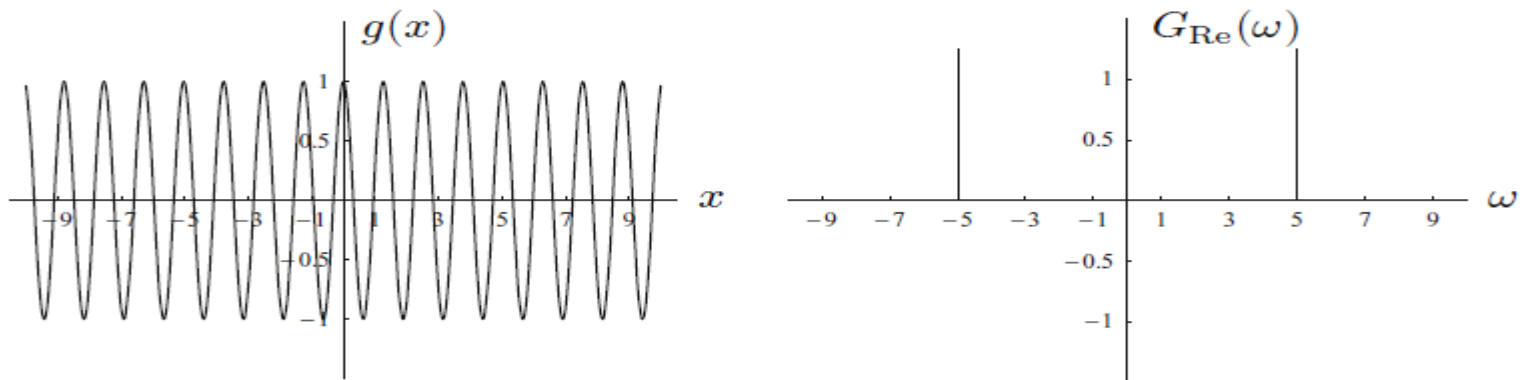
Μετασχηματισμός Fourier

➤ Παραδείγματα

Συνημίτονο $g(x) = \cos(\omega_0 x) \leftrightarrow G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$



(a) Cosine ($\omega_0 = 3$): $g(x) = \cos(3x) \circ \bullet G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega + 3) + \delta(\omega - 3))$

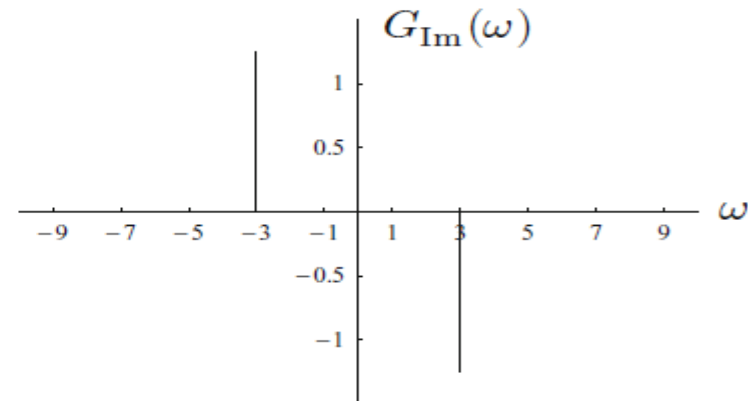
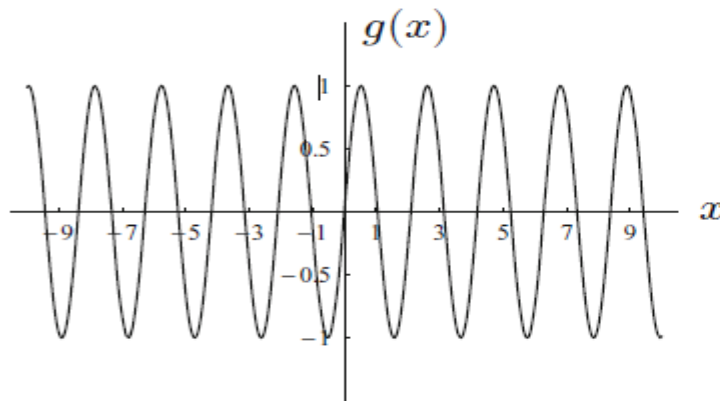


(c) Cosine ($\omega_0 = 5$): $g(x) = \cos(5x) \circ \bullet G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5))$

Μετασχηματισμός Fourier

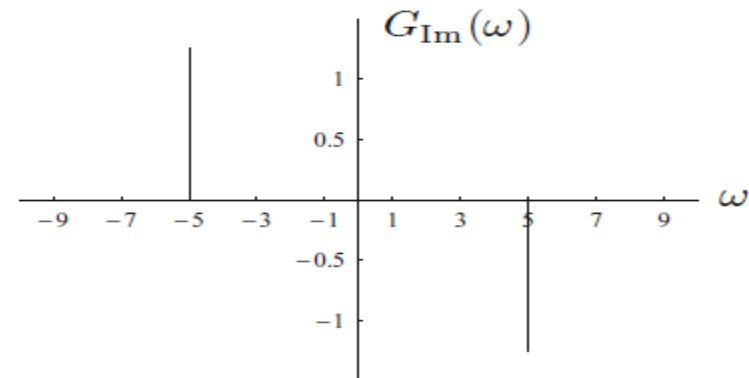
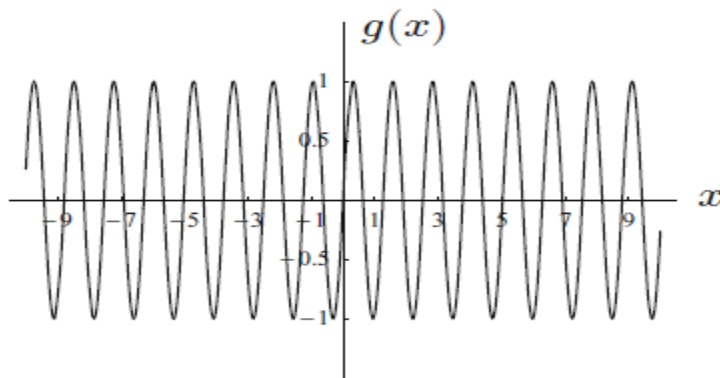
➤ Παραδείγματα

Ημίτονο $g(x) = \sin(\omega_0 x) \leftrightarrow G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$



(b) Sine ($\omega_0 = 3$): $g(x) = \sin(3x)$

• $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega + 3) - \delta(\omega - 3))$



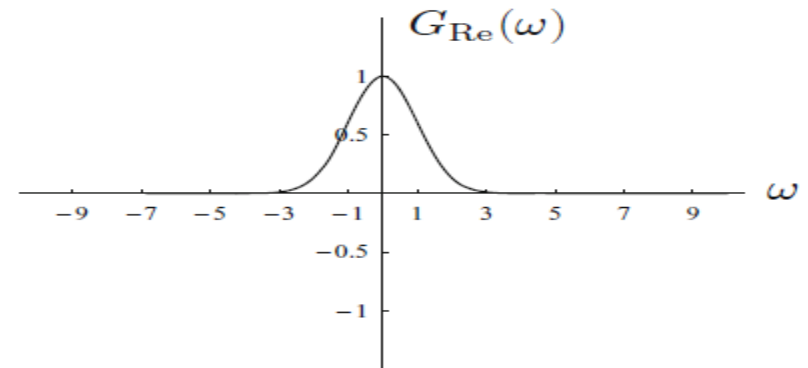
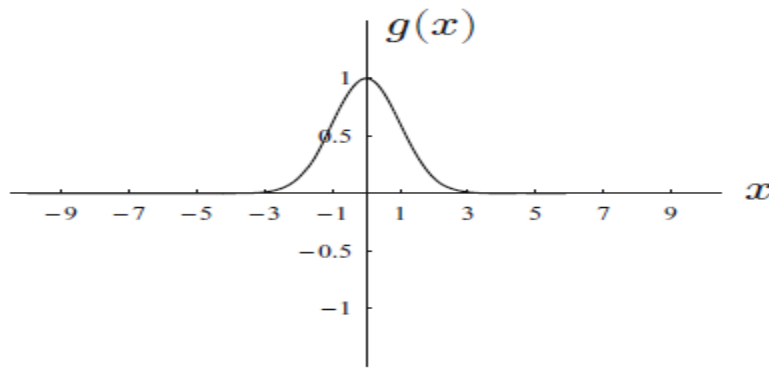
(d) Sine ($\omega_0 = 5$): $g(x) = \sin(5x)$

• $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega + 5) - \delta(\omega - 5))$

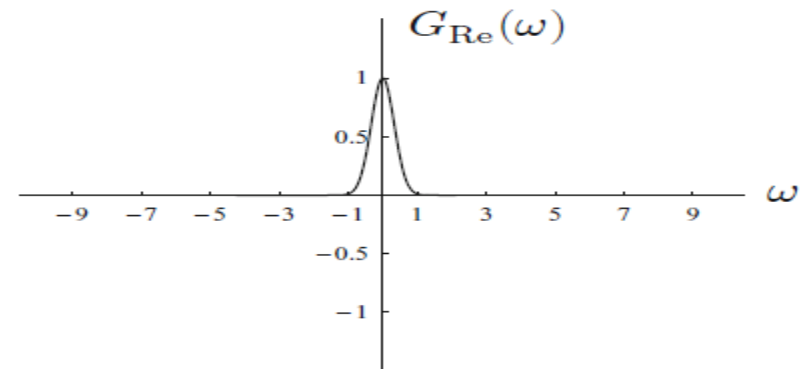
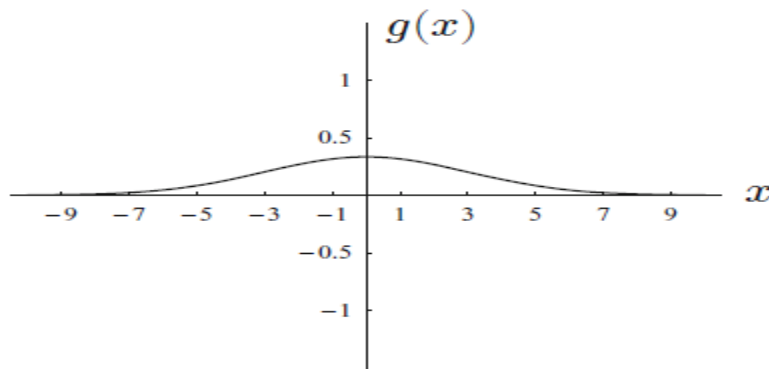
Μετασχηματισμός Fourier

➤ Παραδείγματα

$$\text{Gaussian } g(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \leftrightarrow G(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$



(a) Gauss. ($\sigma=1$): $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\circ \bullet$ $G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

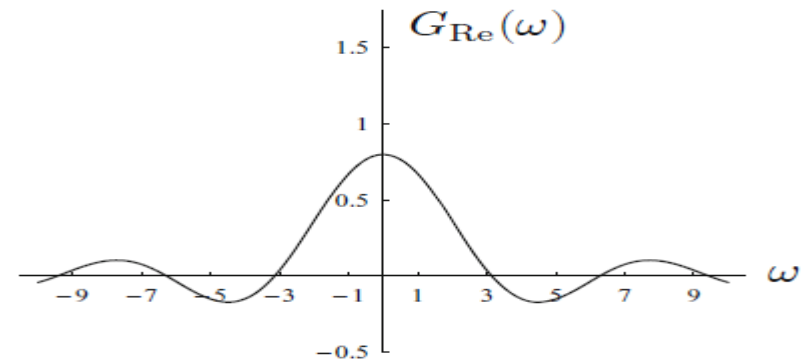
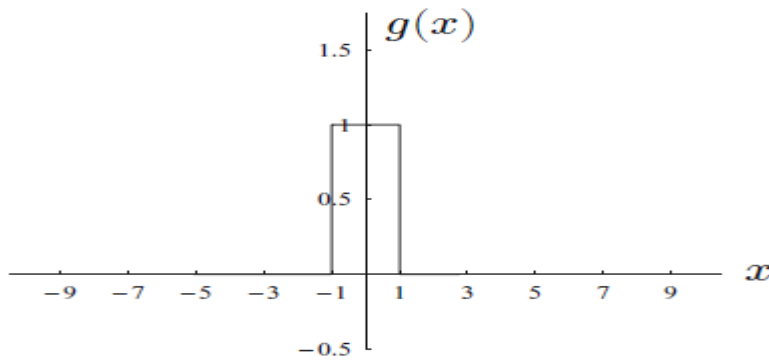


(b) Gauss. ($\sigma=3$): $g(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 9}}$ $\circ \bullet$ $G(\omega) = e^{-\frac{9\omega^2}{2}}$

Μετασχηματισμός Fourier

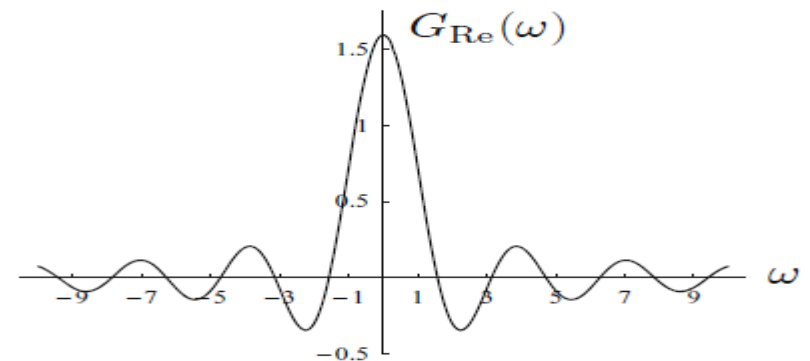
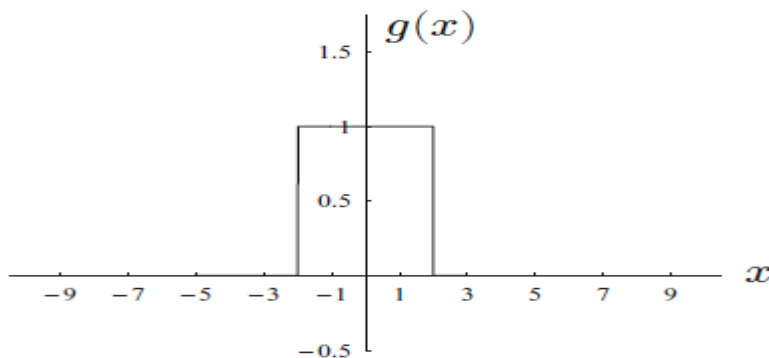
➤ Παραδείγματα

$$\text{Τετραγωνική } g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \leftrightarrow G(\omega) = \frac{2b \sin(b\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$$



(c) Pulse ($b=1$): $g(x) = \Pi_1(x)$

$$\bullet \circ \bullet \quad G(\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$$



(d) Pulse ($b=2$): $g(x) = \Pi_2(x)$

$$\bullet \circ \bullet \quad G(\omega) = \frac{4 \sin(2\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$$

Μετασχηματισμός Fourier

➤ Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot [\cos(\omega x) + i \cdot \sin(\omega x)] d\omega$$

ή

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega x} d\omega$$

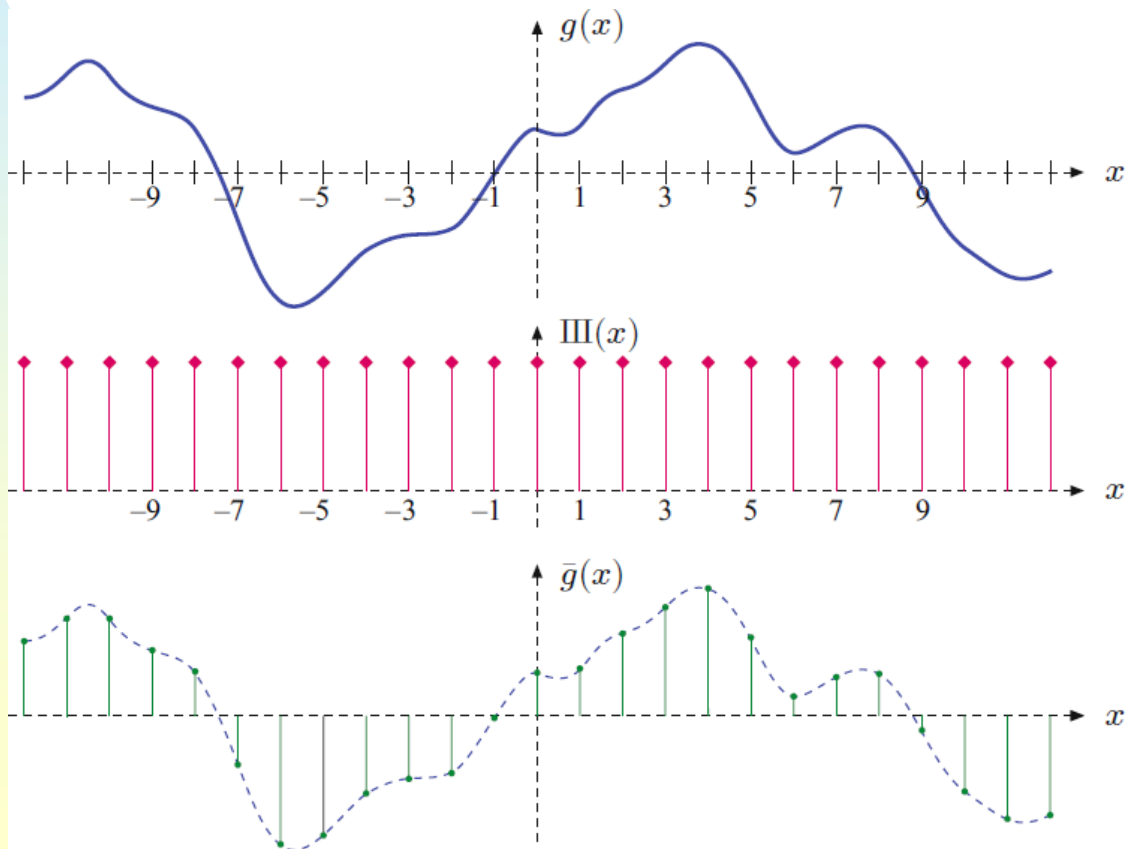
- Ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι δυικοί
 - ένα σήμα (στο χώρο ή τον χρόνο) μπορεί να αναπαρασταθεί με **μοναδικό** τρόπο από το Fourier φάσμα του στο πεδίο της συχνότητας
 - για κάποιο Fourier φάσμα συχνοτήτων αντιστοιχεί ένα **μοναδικό** σήμα (στον χώρο ή στο χρόνο)
- Στην γενική περίπτωση, ακόμη και αν μια από τις δύο αναπαραστάσεις αποτελείται από πραγματικές τιμές (όπως συνήθως συμβαίνει για το $g(x)$) η απεικόνιση στο άλλο πεδίο είναι μιγαδική.

Μετασχηματισμός Fourier

➤ Δειγματοληψία

Μετατροπή ενός συνεχούς σήματος σε ψηφιακό.

- Λήψη δειγμάτων του συνεχούς σήματος σε (ισαπέχοντα) διαστήματα στο χρόνο ή τον χώρο.

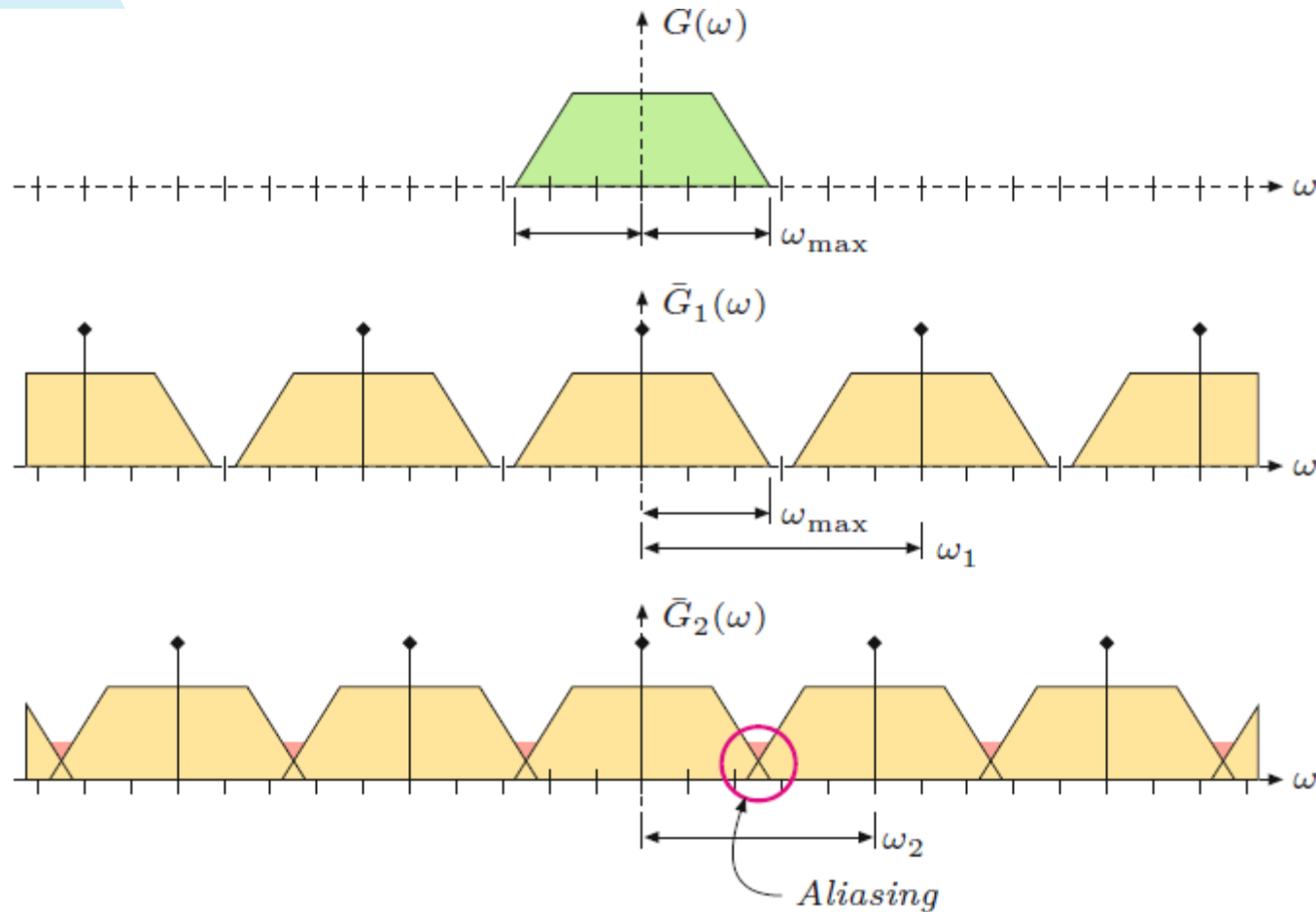


Μετασχηματισμός Fourier

➤ Θεώρημα δειγματοληψίας (Shannon & Nyquist)

Η συχνότητα δειγματοληψίας ω_s πρέπει να είναι τουλάχιστον διπλάσια από την μέγιστη συχνότητα του σήματος ω_{max} .

$$\omega_s \geq 2 \cdot \omega_{max}$$

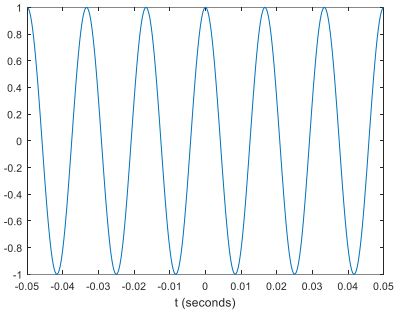


Μετασχηματισμός Fourier

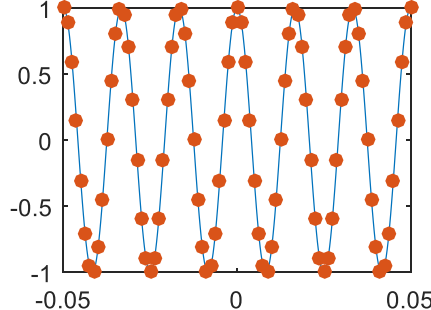
➤ Θεώρημα δειγματοληψίας (Shannon & Nyquist)

Παράδειγμα Δειγματοληψία συνάρτησης συνημιτόνου με $\omega = 60$ για διάφορες συχνότητες δειγματοληψίας ω_s

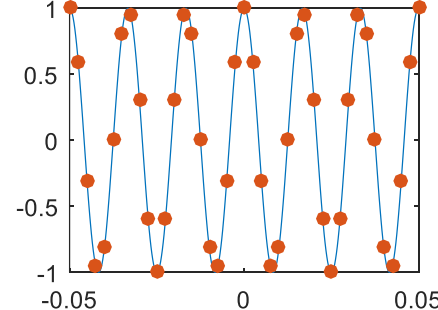
60 Hz



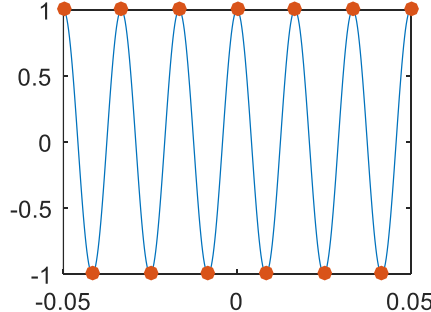
800 Hz



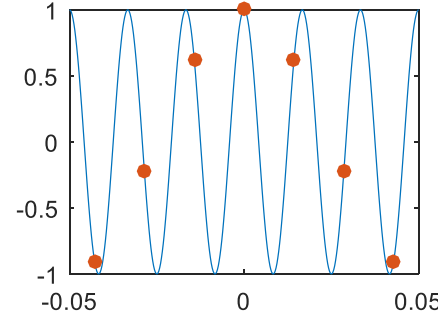
400 Hz



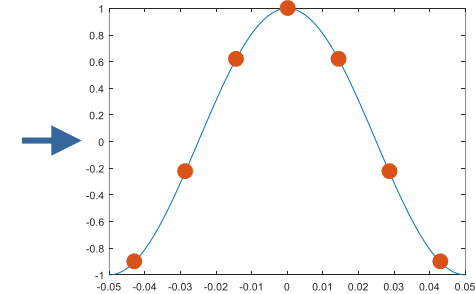
120 Hz



70 Hz



10 Hz



Για $\omega_s < 2 \cdot 60 = 120$ τα δείγματα αντιστοιχούν σε σήμα άλλης (μικρότερης) συχνότητας

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ 1D διακριτός μετασχηματισμός

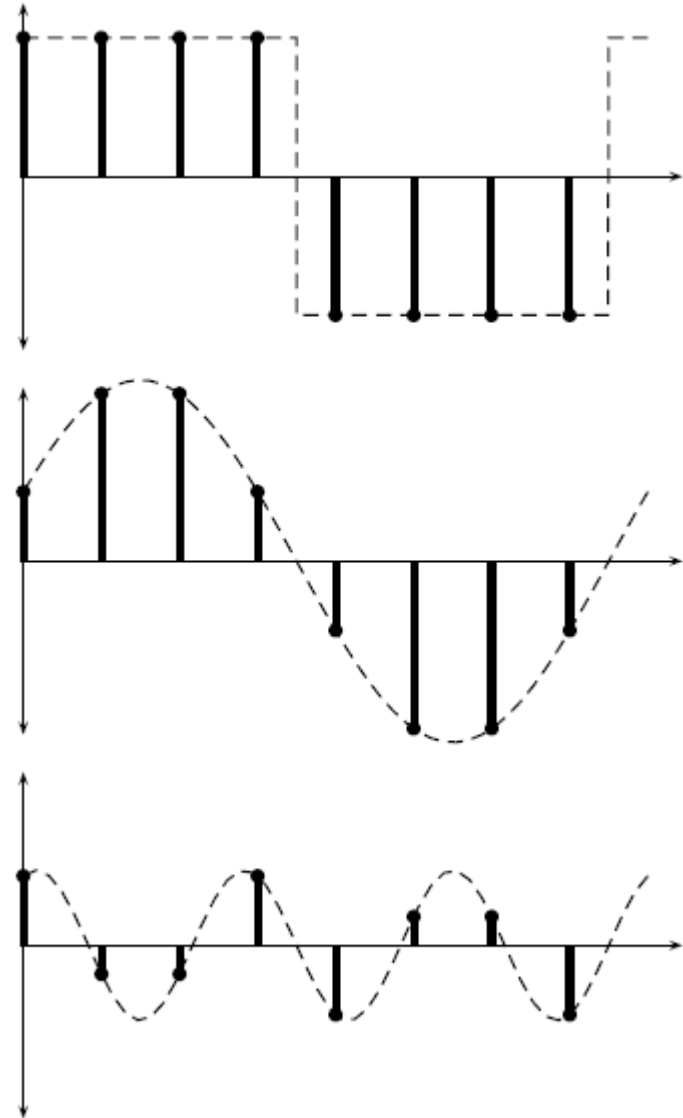
Παράδειγμα

Το διακριτό σήμα

$[1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1]$

(μια διακριτή προσέγγιση της
τετραγωνικής συνάρτησης)

μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα
δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων



Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ Ευθύς διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (**Discrete Fourier Transform – DFT**) ενός μονοδιάστατου σήματος μήκους N

$$f(x) = f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$$

δίνεται από την ακολουθία N τιμών

$$F(u) = F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$$

όπου

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi u}{N}x}$$

ή

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi u}{N}x\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi u}{N}x\right) \right)$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ Αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Το αρχικό σήμα $f(x)$ μπορεί να υπολογισθεί βάσει των συντελεστών Fourier $F(u)$ ως εξής

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot e^{i\frac{2\pi x}{N}u}$$

Συμβατότητα με τρόπο υπολογισμού στο MATLAB

ή

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{N}u\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{N}u\right) \right)$$

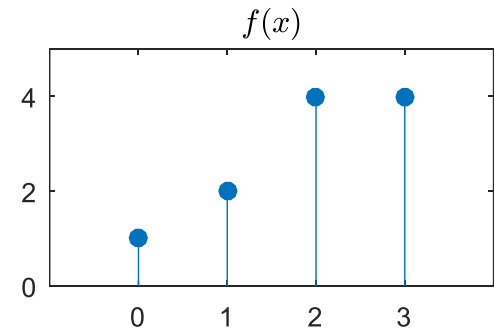
Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ Παράδειγμα

Έστω ένα σήμα που αποτελείται από $N = 4$ δείγματα $f(x) = [1, 2, 4, 4]$ με $x = 0, 1, 2$ και 3 .

Ο ευθύς DFT δίνεται από την σχέση:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi u}{N}x}$$



και είναι:

$$\begin{aligned} F(0) &= \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi 0}{N}x} = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= 1 + 2 + 4 + 4 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \sum_{x=0}^3 f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi 1}{N}x} = 1 \cdot e^0 + 2 \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} + 4 \cdot e^{-i\pi} + 4 \cdot e^{-\frac{i3\pi}{2}} \\ &= 1 \cdot (1) + 2 \cdot (-i) + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot (i) = -3 + 2i \end{aligned}$$

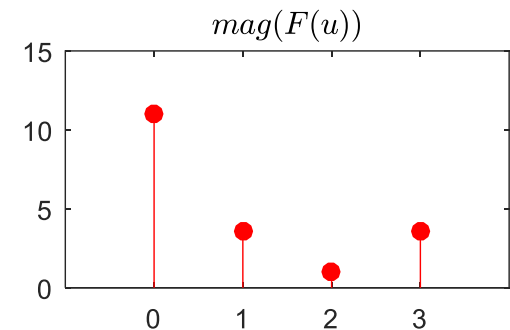
και ομοίως $F(2) = -1$ και $F(3) = -3 - 2i$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ Παράδειγμα

Ομοίως, ο **αντίστροφος DFT** υπολογίζεται από τα $F(u)$, με $u = 0, 1, 2$ και 3 και δίνεται από την σχέση

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \cdot e^{i\frac{2\pi x}{N}u}$$



και είναι:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) \cdot e^{i\frac{2\pi 0}{N}u} = F(0) + F(1) + F(2) + F(3) \\ &= \frac{1}{4} (11 - 3 + 2i - 1 - 3 - 2i) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 F(u) \cdot e^{i\frac{2\pi 1}{N}u} \\ &= \frac{1}{4} (11 \cdot 1 + (-3 + 2i) \cdot i + (-1) \cdot (-1) + (-3 - 2i) \cdot (-i)) \\ &= \frac{1}{4} (11 - 3i + 2i^2 + 1 + 3i + 2i^2) = \frac{1}{4} (11 - 2 + 1 - 2) = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \end{aligned}$$

και ομοίως $f(2) = 4$ και $f(3) = 4$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ Γρήγορος μετασχηματισμός Fourier

Για τον απευθείας υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι $O(N^2)$.

Ο γρήγορος μετασχηματισμός Fourier (**Fast Fourier transform - FFT**) προτάθηκε από τους Cooley and Tukey το 1965 και επιτρέπει τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier με πολυπλοκότητα $O(N \log_2 N)$.

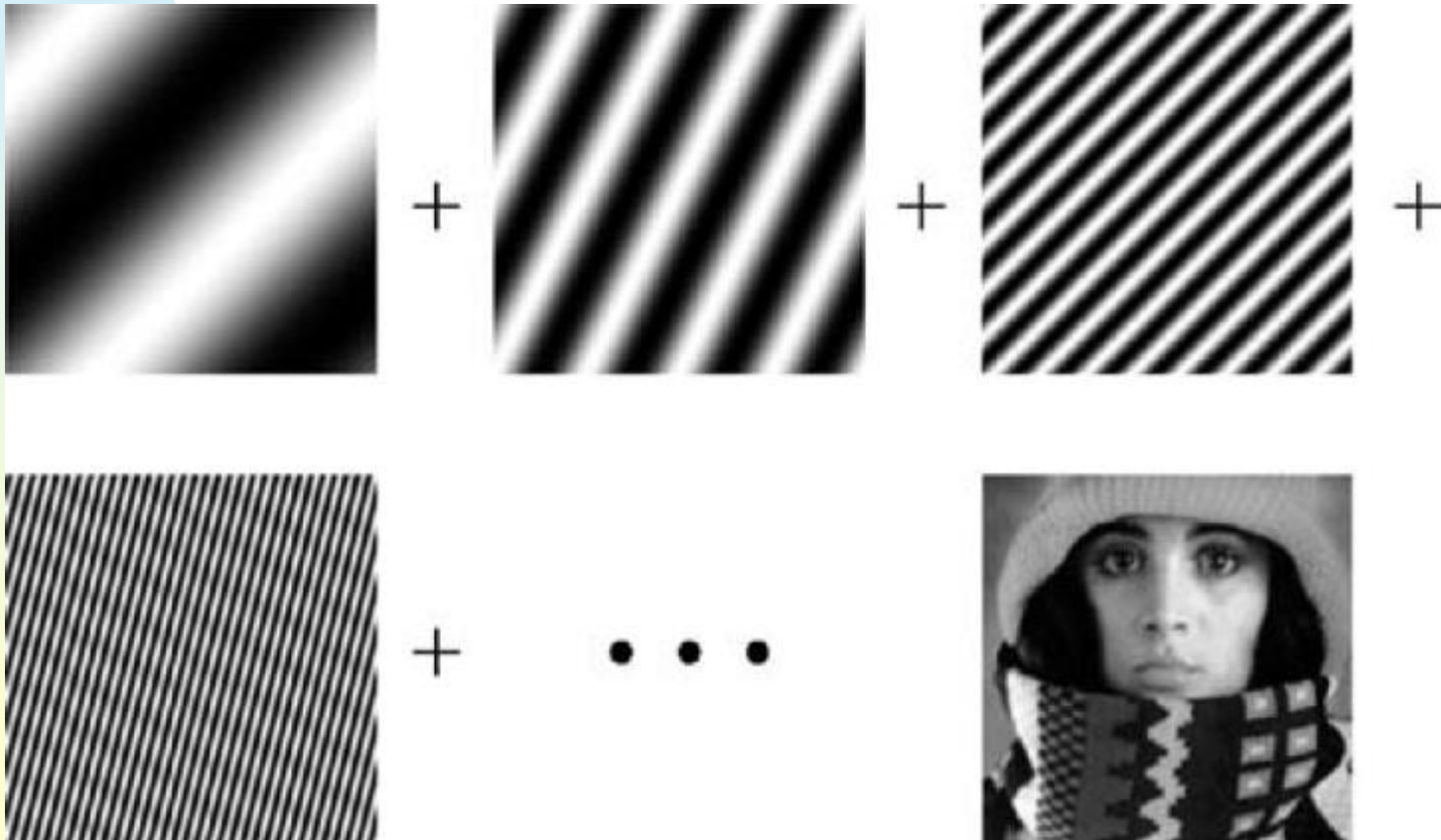
- Είναι **αναδρομικός** αλγόριθμος που διαιρεί το αρχικό σήμα στα δύο, υπολογίζει τον μετασχηματισμό για κάθε μέρος και τέλος συνθέτει τα αποτελέσματα. Βασίζεται στις συμμετρικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.
- Είναι πιο αποτελεσματικός όταν το μέγεθος N του σήματος είναι δύναμη του 2.

N	DFT	FFT	Κέρδος
4	16	8	2.0
8	64	24	2.7
16	256	64	4.0
32	1024	160	6.4
64	4096	384	10.7
128	16384	896	18.3
256	65536	2048	32.0
512	262144	4608	56.9
1024	1048576	10240	102.4

Δυσδιάστατος διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ Βασική ιδέα

Μια οποιαδήποτε χωρική συνάρτηση (π.χ. εικόνα) μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν συνδυασμό δυσδιάστατων αρμονικών από βασικές ημιτονοειδείς συναρτήσεις με διάφορα πλάτη και φάσεις.



Δυσδιάστατος διακριτός μετασχηματισμός Fourier

➤ 2D DFT

Μετασχηματίζει ένα δυσδιάστατο σήμα $f(x, y)$ (π.χ. τιμές φωτεινότητας μιας εικόνας) με $x \in [0 \dots M - 1]$ και $y \in [0 \dots N - 1]$ στο πεδίο της συχνότητας $F(u, v)$.

Ευθύς μετασχηματισμός

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{yv}{N}\right)}$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{yv}{N}\right)}$$

Συμβατότητα με τρόπο
υπολογισμού στο MATLAB

Δυσδιάστατος διακριτός μετασχηματισμός Fourier

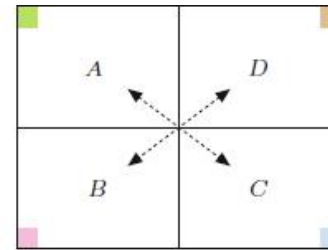
➤ Κεντραρισμένη αναπαράσταση του 2D φάσματος

Σε περίπτωση πραγματικής χωρικής συνάρτησης, όπως είναι μια εικόνα, το φάσμα είναι **συμμετρικό** ως προς την αρχή των αξόνων.

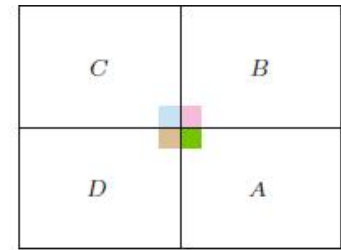
$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιείται μια **κεντραρισμένη** αναπαράσταση του φάσματος.

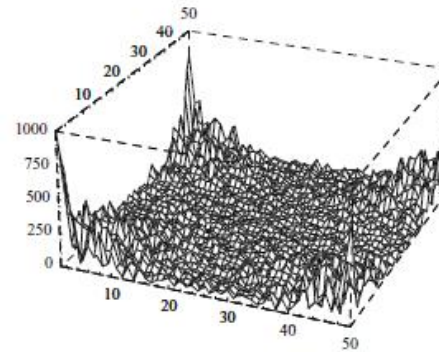
Οι χαμηλές συχνότητες είναι στο κέντρο ενώ οι υψηλές στα άκρα.



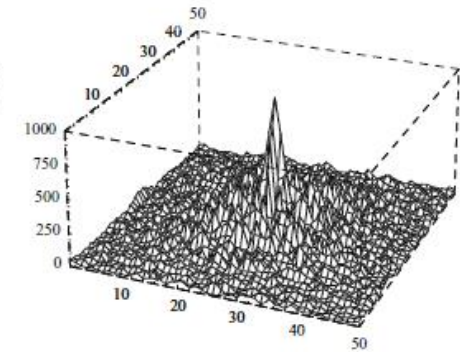
(a)



(b)



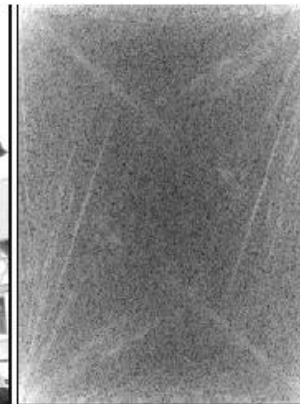
(c)



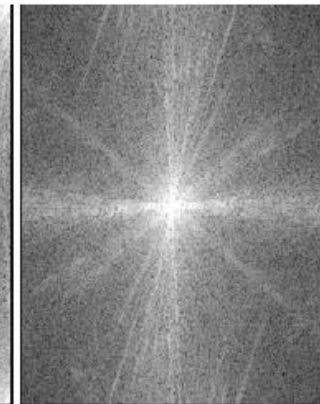
(d)



(a)



(b)



(c)

Ιδιότητες 2D μετασχηματισμού Fourier

➤ Χρήση προϋπολογισμένων πινάκων

Ο όρος $e^{\pm i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{yv}{N}\right)}$, τόσο στον ευθύ όσο και στον αντίστροφο μετασχηματισμό, **δεν εξαρτάται** από τις τιμές $f(x, y)$ και $F(u, v)$, αντίστοιχα.

Συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς μέσω προϋπολογισμένων πινάκων.

➤ Ο 2D μετασχηματισμός Fourier ως χωρικό φίλτρο

Ο υπολογισμός μια τιμής του $F(u, v)$ γίνεται μέσω του αθροίσματος των γινομένων των τιμών $f(x, y)$ με κάποιες σταθερές τιμές (όροι $e^{\pm i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{yv}{N}\right)}$).

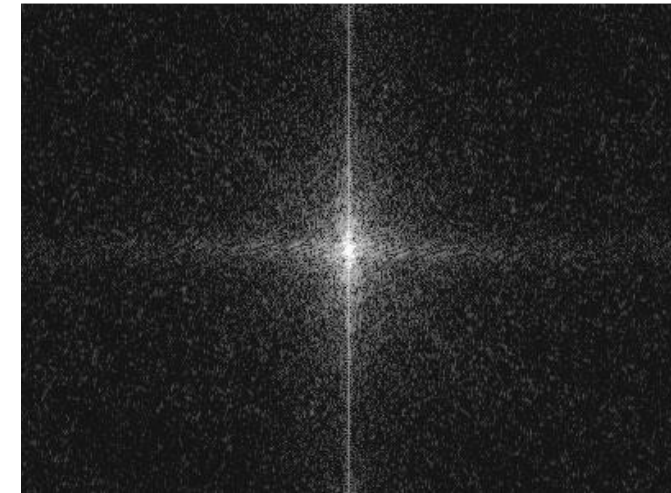
Συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ως **ένα γραμμικό χωρικό φίλτρο** με μέγεθος μάσκας όσο είναι το μέγεθος της εικόνας.

- Η εικόνα θεωρείται ότι **επαναλαμβάνεται περιοδικά** προς όλες τις κατευθύνσεις ώστε να είναι πάντοτε δυνατός ο υπολογισμός του φίλτρου.

Ιδιότητες 2D μετασχηματισμού Fourier

➤ Ο 2D μετασχηματισμός Fourier ως χωρικό φίλτρο

Παράδειγμα



Οι απότομες **ασυνέχειες** της περιοδικότητας (κυρίως στην κάθετη διεύθυνση) εμφανίζονται ως γραμμές στο φάσμα της εικόνας (έντονη κάθετη γραμμή)

Ιδιότητες 2D μετασχηματισμού Fourier

➤ Διαχωριστικότητα

Εξαρτάται μόνο από
το x και το u

Εξαρτάται μόνο από
το y και το v

Ο όρος $e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{yv}{N}\right)}$ μπορεί να γραφεί ως $e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)} \cdot e^{i2\pi\left(\frac{yv}{N}\right)}$

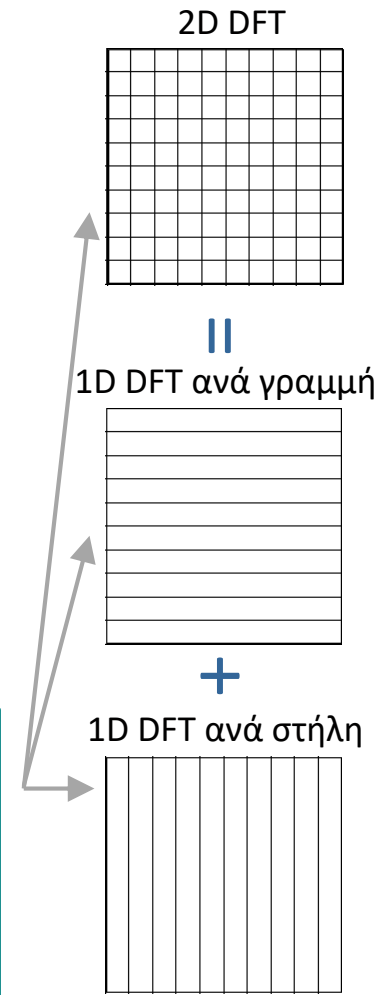
Συνεπώς, ο ευθύς 2D μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{yv}{N}\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{yv}{N}\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} F(x, u) \cdot e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:
Υπολογισμός του 1D DFT
για όλες τις γραμμές και
έπειτα 1D DFT για όλες
τις στήλες (ή
αντιστρόφως)



Ιδιότητες 2D μετασχηματισμού Fourier

➤ Ο συντελεστής $F(0,0)$

Για $u = v = 0$ ο 2D DFT δίνει

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cdot e^{-i2\pi(0)} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Δηλαδή ο συντελεστής $F(0,0)$ δίνει το **άθροισμα των τιμών** της αρχικής εικόνας

➤ Γραμμικότητα

Ο πολλαπλασιασμός της εικόνας με μια σταθερά ισοδυναμεί με κλιμάκωση του φάσματος κατά την ίδια σταθερά

$$\mathbf{F}(k \cdot f) = k\mathbf{F}(f)$$

Ο 2D μετασχηματισμός του αθροίσματος δύο σημάτων ισούται με το άθροισμα των ξεχωριστών 2D μετασχηματισμών τους

$$\mathbf{F}(g_1 + g_2) = \mathbf{F}(g_1) + \mathbf{F}(g_2)$$

Ιδιότητες 2D μετασχηματισμού Fourier

➤ Θεώρημα συνέλιξης

Η μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξη $f * h$ μιας εικόνας f με ένα χωρικό φίλτρο h ισούται με τον (ανά στοιχείο) πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier:

$$\mathbf{F}(f * h) = \mathbf{F}(f) \cdot \mathbf{F}(h)$$

Και αντιστρόφως:

$$\mathbf{F}(f \cdot h) = \mathbf{F}(f) * \mathbf{F}(h)$$

Συνεπώς, η συνέλιξη στο πεδίο του χώρου (εικόνας) μπορεί να υπολογιστεί (πολύ πιο αποτελεσματικά) ως:

$$f * h = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(f) \cdot \mathbf{F}(h))$$

Μέθοδος:

Επαύξηση (με χρήση μηδενικών) του φίλτρου $h(x, y)$ σε διαστάσεις $M \times N$ ίδιες με της εικόνας $f(x, y)$. Έστω $h_p(x, y)$ το νέο φίλτρο που δημιουργείται.

$$f(x, y) * h_p(x, y) = f'(x, y)$$

$$\mathbf{F} \downarrow \quad \quad \mathbf{F} \downarrow \quad \quad \mathbf{F}^{-1} \uparrow$$

$$F(u, v) \cdot H_p(u, v) = F'(u, v)$$

Ιδιότητες 2D μετασχηματισμού Fourier

➤ Θεώρημα συνέλιξης

Σημαντικό εργαλείο μείωσης του κόστους υπολογισμού της συνέλιξης.

Παράδειγμα

Υπολογισμός της συνέλιξης εικόνας f διαστάσεων 512×512 pixel με φίλτρο h διαστάσεων 32×32 pixel.

- Εφαρμογή του φίλτρου σε ένα pixel της εικόνας: $32^2 = 1024$ πράξεις.

Σύνολο για όλη την εικόνα: $1024 \times 512 \times 512 = 268.435.456$ πράξεις.

- Υπολογισμός $\mathbf{F}(f)$ με χρήση του FFT (για γραμμές και στήλες ξεχωριστά):

Για κάθε γραμμή 4608 πράξεις, για όλες τις γραμμές $4608 \times 512 = 2359296$ πράξεις. Ομοίως και άλλες τόσες πράξεις για τις στήλες οπότε για την εικόνα απαιτούνται συνολικά 4718592 πράξεις.

Το ίδιο και για την $\mathbf{F}(h_p)$ και άλλα τόσα για τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(f) \cdot \mathbf{F}(h))$.

Πολλαπλασιασμός ανά στοιχείο $\mathbf{F}(f) \cdot \mathbf{F}(h)$: $512 \times 512 = 262144$ πράξεις.

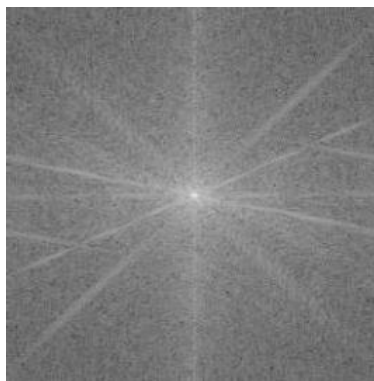
Σύνολο: $4718592 \times 3 + 262144 = 14.417.920$ πράξεις.

$$\text{Σύγκριση: } \frac{14417920}{268435456} = 5.4\%$$

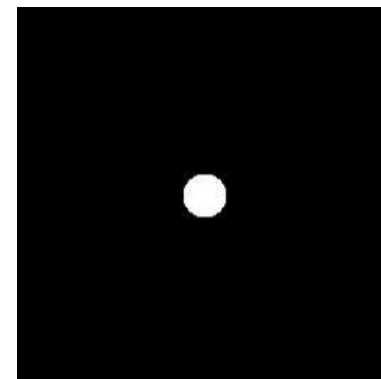
Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο

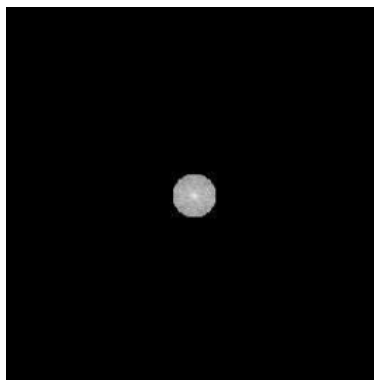
Το θεώρημα συνέλιξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για γρήγορο φιλτράρισμα μιας εικόνας στο πεδίο της συχνότητας π.χ. για την αποκοπή υψηλών συχνοτήτων (**χαμηλοπερατό φίλτρο**).



$$\text{Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο}$$
$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \sqrt{u^2 + v^2} \leq D \\ 0, & \sqrt{u^2 + v^2} > D \end{cases}$$



$$D = 15$$



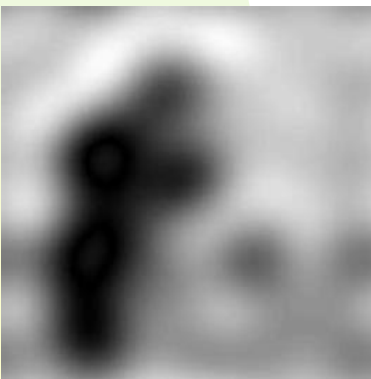
«Δακτυλίδια»
(ringing effect)
εξαιτίας της
απότομης
αποκοπής του
κύκλου

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

- Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο

Παράδειγμα

Χρήση διαφόρων ορίων αποκοπής.



$D = 5$



$D = 15$

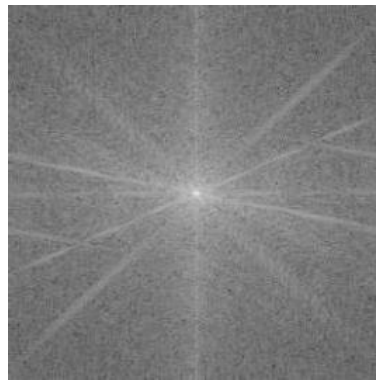


$D = 30$

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

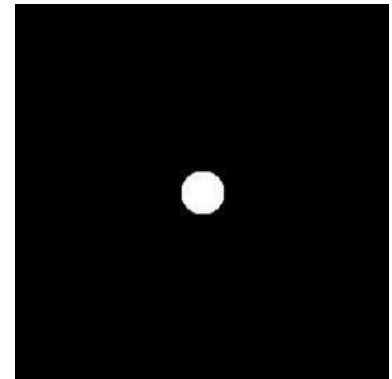
➤ Ιδεατό υπερερατό φίλτρο

Το φίλτρο αποκοπής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αντιστρόφως ώστε να επιτρέπει την διέλευση των **υψηλών** μόνο συχνοτήτων.

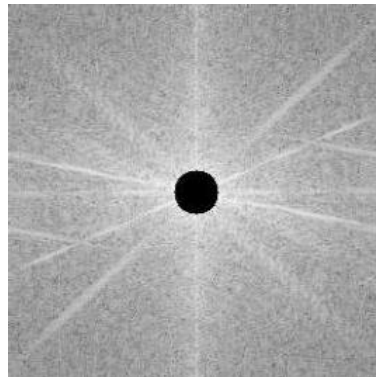


Ιδεατό υπερερατό φίλτρο

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \sqrt{u^2 + v^2} \geq D \\ 0, & \sqrt{u^2 + v^2} < D \end{cases}$$



$$D = 15$$

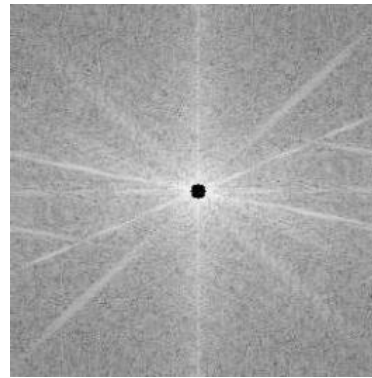


Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

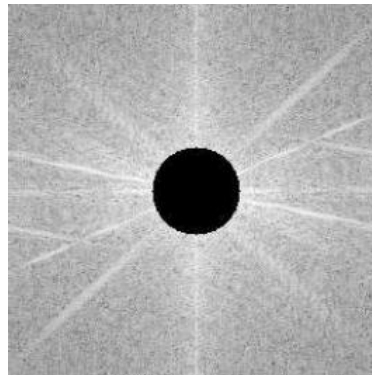
➤ Ιδεατό υπερερατό φίλτρο

Παράδειγμα

Χρήση διαφόρων ορίων αποκοπής.



$$D = 5$$



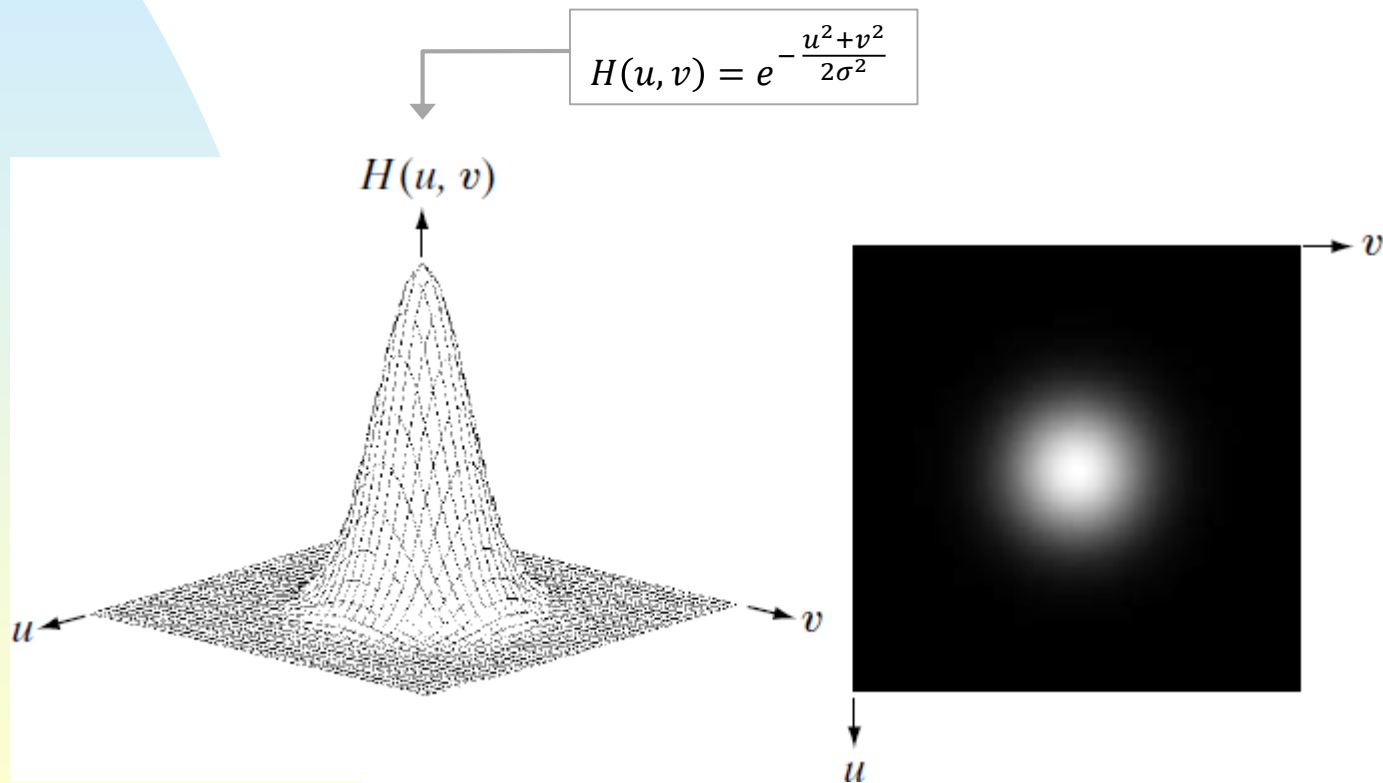
$$D = 30$$



Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Gaussian χαμηλοπερατό φίλτρο

Πλεονέκτημα: Ο μετασχηματισμός Fourier μιας Gaussian είναι επίσης Gaussian.

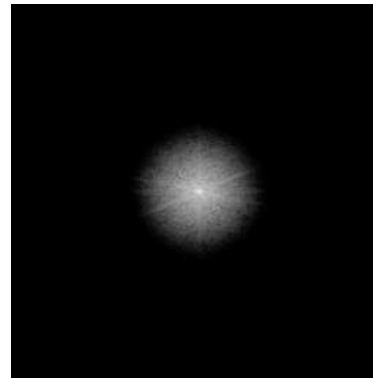


Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

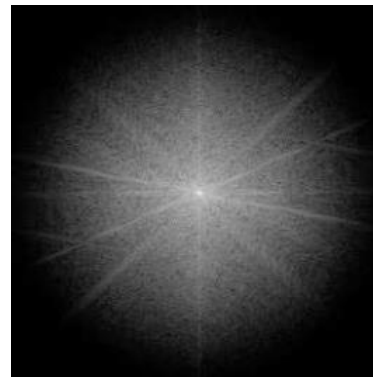
➤ Gaussian χαμηλοπερατό φίλτρο

Παράδειγμα

Χρήση διαφόρων τιμών τυπικής απόκλισης σ .



$$\sigma = 10$$



$$\sigma = 30$$



Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Gaussian υπερερατό φίλτρο

Παράδειγμα

Χρήση διαφόρων τιμών τυπικής απόκλισης σ .



$\sigma = 10$



$\sigma = 30$

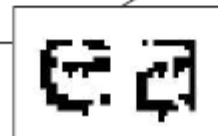
Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Gaussian φίλτρο

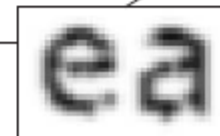
Εφαρμογές

Εξομάλυνση κειμένου.

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Αλλαγή κλίμακας σε κείμενο (anti-aliasing)

Welcome to Joe's webpage!

subsampling

Wlclcm to Joo's wcbpago!

Welcome to Joe's webpage!

smoothing

Welcome to Joe's webpage!

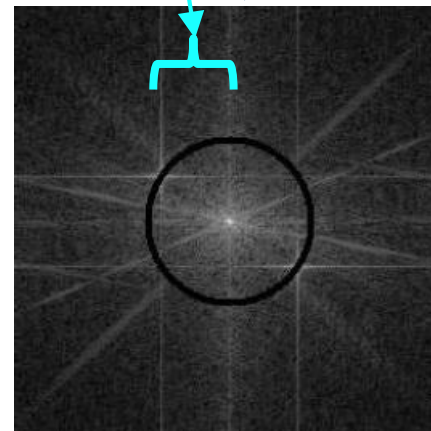
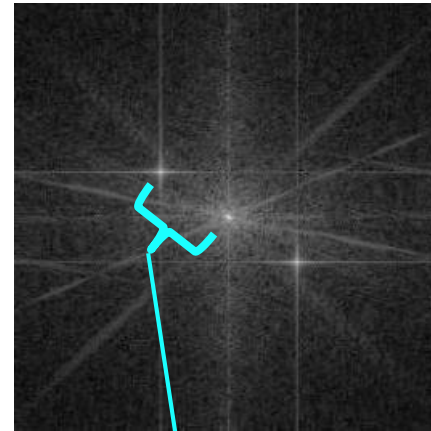
subsampling

Welcome to Joe's webpage!

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Αφαίρεση περιοδικού θορύβου

Εμφανίζεται συχνά λόγω παρεμβολών στα μέσα μετάδοσης/λήψης.



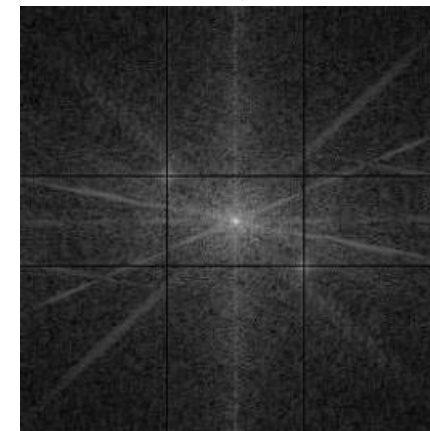
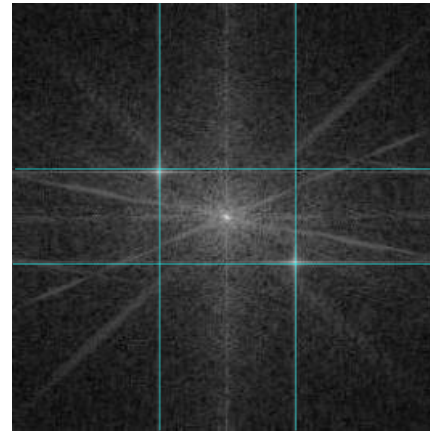
1^η μέθοδος

Αποκοπή εύρους
συχνοτήτων στο
φάσμα της εικόνας

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Αφαίρεση περιοδικού θορύβου

Εμφανίζεται συχνά λόγω παρεμβολών στα μέσα μετάδοσης/λήψης.



2^η μέθοδος

Αποκοπή γραμμών
και στηλών στο
φάσμα της εικόνας

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

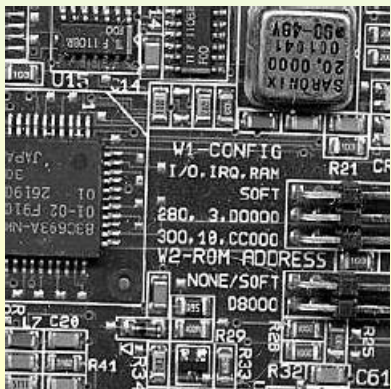
➤ Αντίστροφο φιλτράρισμα (Inverse filtering)

Η εφαρμογή ενός φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας απαιτεί τον (ανά στοιχείο) πολλαπλασιασμό του 2D DFT της εικόνας με το 2D DFT του φίλτρου.

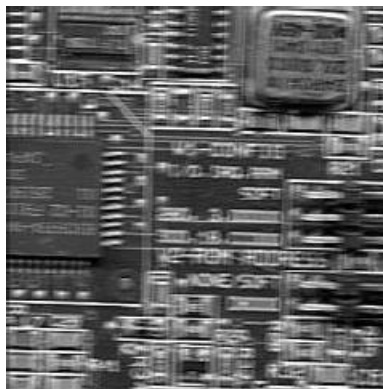
$$F'(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v)$$

Συνεπώς, εάν μας δίνεται το αποτέλεσμα $F'(u, v)$ και το φίλτρο $H(u, v)$ θα μπορούσαμε να ανακτήσουμε το 2D DFT της αρχικής εικόνας:

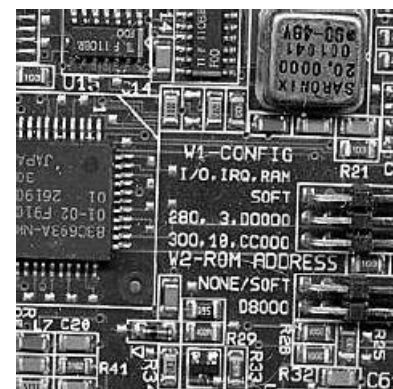
$$F(u, v) = \frac{F'(u, v)}{H(u, v)}$$



Motion blur



?



Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

➤ Αντίστροφο φιλτράρισμα (Inverse filtering)

Πρόβλημα: Πιθανοί συντελεστές του $H(u, v)$ που είναι (ή τείνουν) στο μηδέν

1^η Λύση: εφαρμογή χαμηλοπερατού φίλτρου $L(u, v)$ για την αφαίρεση των (σχεδόν) μηδενικών τιμών

$$F(u, v) = \frac{F'(u, v)}{H(u, v)} L(u, v)$$

2^η Λύση: Διάρθρωση υπό συνθήκη. Επιλογή ενός κατωφλίου d και εάν για τιμές του $H(u, v)$ είναι μικρότερες από d τότε δεν εφαρμόζεται η διαίρεση αλλά χρησιμοποιείται η $F'(u, v)$

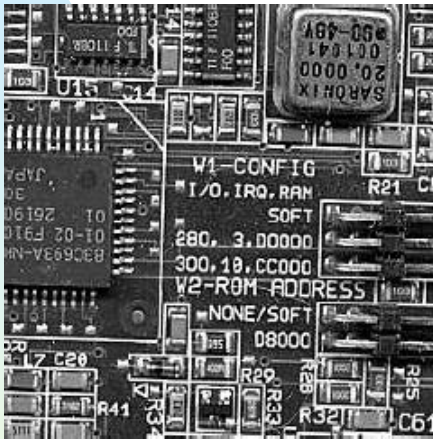
$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{F'(u, v)}{H(u, v)}, & \text{για } |H(u, v)| \geq d \\ F'(u, v), & \text{για } |H(u, v)| < d \end{cases}$$

Φιλτράρισμα στο πεδίο της συχνότητας

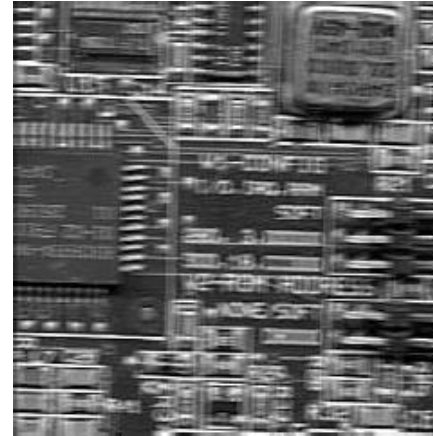
➤ Αντίστροφο φιλτράρισμα (Inverse filtering)

Παράδειγμα:

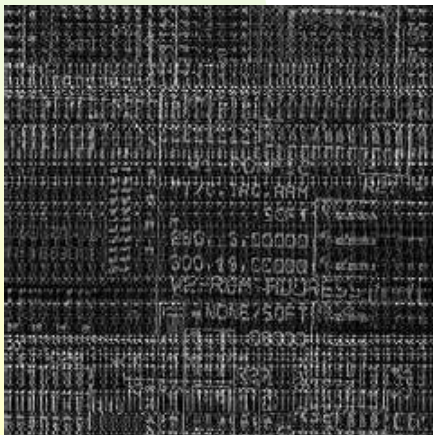
Αρχική εικόνα



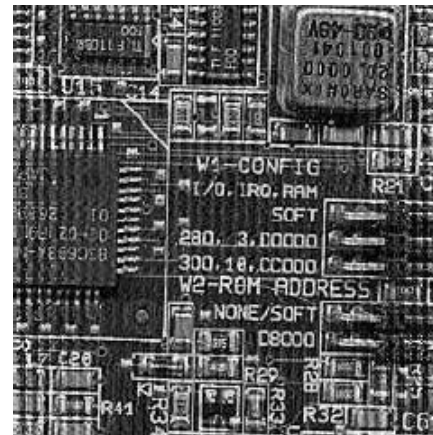
Motion blur



Απευθείας ανάκτηση



Ανάκτηση με διαίρεση υπό συνθήκη



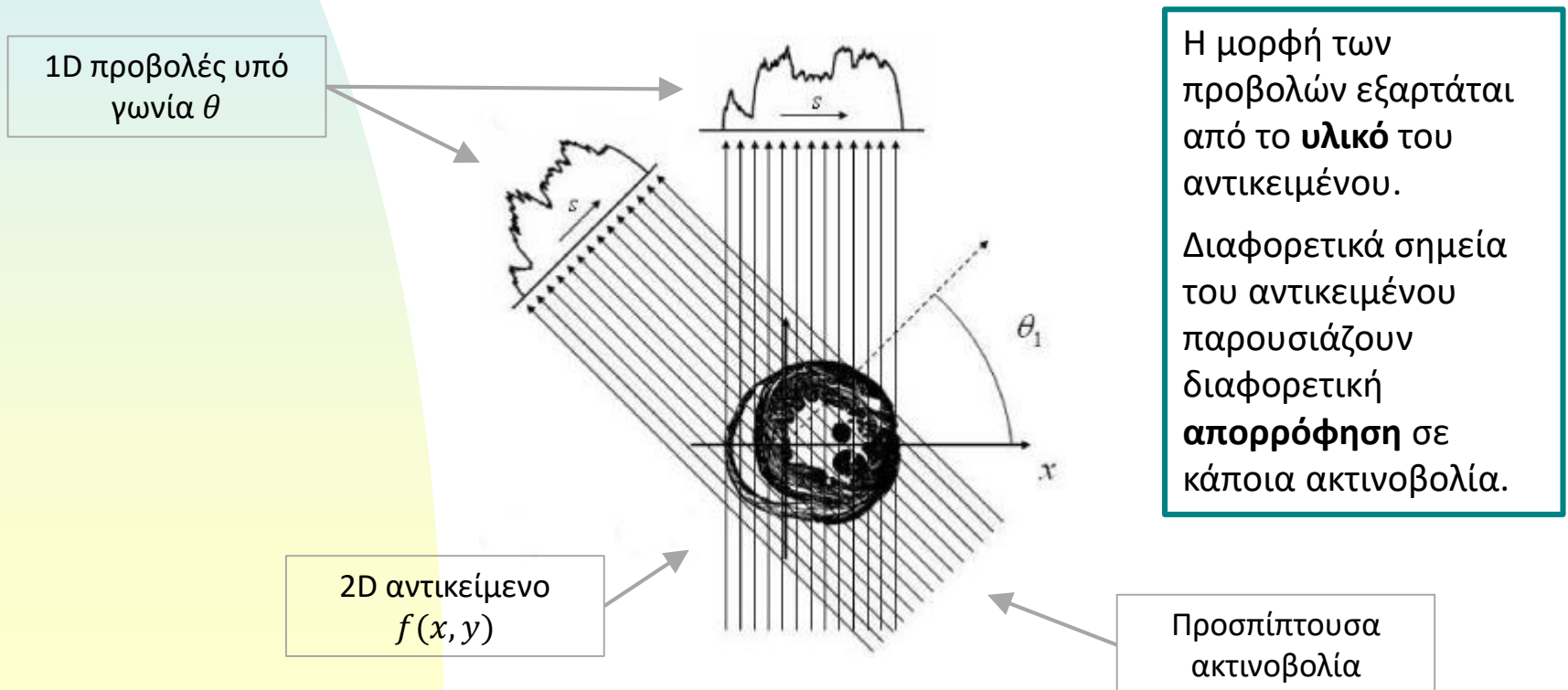
Υπολογιστική τομογραφία

➤ Γενικά

Προσδιορισμός του εσωτερικού στερεών σωμάτων με **μη επεμβατικό** τρόπο.

Βασίζεται στην **αλληλεπίδραση** του υλικού (π.χ. ιστός) με ακτινοβολίες διαφόρων μορφών.

Έχει ευρύτατη χρήση σε ιατρικές και απεικονιστικές εφαρμογές.



Υπολογιστική τομογραφία

➤ Μετασχηματισμός Radon

Τομογραφική ακτίνα $x\cos\theta + y\sin\theta = t$

Το γραμμικό ολοκλήρωμα της $f(x, y)$ κατά μήκος μιας τομογραφικής ακτίνας είναι

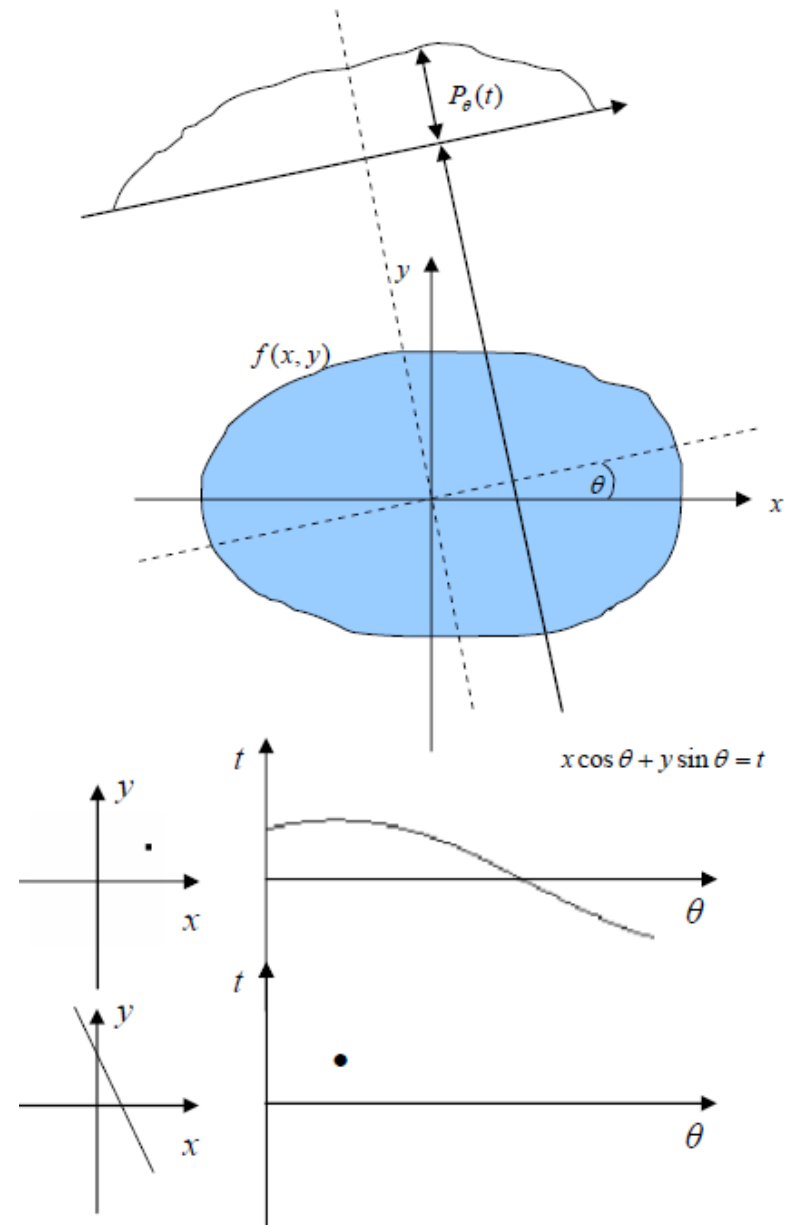
$$P_{\theta}(t) = \int_L f(x, y) ds$$

ή

$$P_{\theta}(t) = \iint f(x, y) \cdot \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t) dx dy$$



Johann Radon
1887-1956



Υπολογιστική τομογραφία

➤ Fourier slice θεώρημα

- Υπολογισμός των **προβολών** $P_\theta(t)$ σε γωνίες προβολής $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$
- Υπολογισμός του **ευθύ 1D** μετασχηματισμού Fourier $S_\theta(w)$ για κάθε $P_\theta(t)$
- Εισαγωγή των τιμών του $S_\theta(w)$ στις γωνίες $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ του 2D μετασχηματισμού Fourier $F(u, v)$
- Υπολογισμός του **αντίστροφου 2D** μετασχηματισμού Fourier για τον προσδιορισμό της αρχικής συνάρτησης $f(x, y)$

