

**Βασίλειος Δ. Ανδριτσάνος**

Διπλ. Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός  
Υπότροφος Ι.Κ.Υ.

**Βέλτιστος συνδυασμός επίγειων και δορυφορικών  
δεδομένων με τη χρήση φασματικών μεθόδων για  
εφαρμογές στη γεωδαισία και την ωκεανογραφία**

Διδακτορική διατριβή

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών  
της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ.





# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Η αναγκαιότητα της παρούσας έρευνας . . . . .	1
1.2	Η ανάλυση των σχέσεων γεωδαισίας και ωκεανογραφίας . . . . .	2
1.3	Η επίδραση της δορυφορικής τεχνολογίας . . . . .	4
1.4	Η αξιοποίηση των φασματικών τεχνικών . . . . .	5
1.5	Η ανάλυση των περιεχομένων της μελέτης . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Το πεδίο βαρύτητας</b>	<b>11</b>
2.1	Γενικά για τα γεωδαιτικά προβλήματα συνοριακών τιμών . . . . .	11
2.2	Τεχνική συνδυασμού «απομάκρυνσης – επαναφοράς» (remove – restore) . . . . .	17
2.3	Τεχνικές προσέγγισης της τοπογραφίας / βαθυμετρίας . . . . .	20
2.4	Ισοδυναμικές επιφάνειες και συστήματα υψών . . . . .	26
2.5	Μέθοδοι προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας . . . . .	27
2.5.1	Παρεμβολή και πρόγνωση στο πεδίο βαρύτητας . . . . .	28
2.5.2	Συναρτήσεις (συμ)μεταβλητότητας . . . . .	35
2.6	Εφαρμογές φασματικών τεχνικών στο πεδίο βαρύτητας . . . . .	41
2.6.1	Ο μετασχηματισμός Fourier στις δύο διαστάσεις . . . . .	42
2.6.2	Επίπεδες προσεγγίσεις στο πεδίο βαρύτητας με FFT . . . . .	47
2.6.3	Σφαιρικές προσεγγίσεις στο πεδίο βαρύτητας με FFT . . . . .	51
2.7	Συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος . . . . .	55
2.7.1	Εκτιμήσεις των συναρτήσεων συσχέτισης . . . . .	55
2.7.2	Προσδιορισμοί στο χώρο των συχνοτήτων . . . . .	57
2.7.3	Μη-παραμετρικές μέθοδοι . . . . .	57
2.7.4	Παραμετρικές μέθοδοι . . . . .	58
2.8	Ανακεφαλαίωση . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Η δορυφορική αλτιμετρία</b>	<b>73</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	73
3.2	Οι αλτιμετρικοί δορυφόροι . . . . .	73
3.3	Η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας . . . . .	80
3.4	Πηγές σφαλμάτων . . . . .	84
3.4.1	Σφάλματα του αλτιμέτρου . . . . .	84
3.4.2	Ατμοσφαιρικές επιδράσεις . . . . .	84
3.4.3	Ωκεάνιες επιδράσεις . . . . .	85
3.4.4	Επίδραση παλιρροιών . . . . .	86
3.4.5	Τροχιακά σφάλματα . . . . .	87
3.5	Προεπεξεργασία αλτιμετρικών δεδομένων . . . . .	94
3.5.1	Συλλογή και διαθεσιμότητα . . . . .	94
3.5.2	Διόρθωση-αξιολόγηση των αλτιμετρικών δεδομένων . . . . .	95
3.6	Η συνόρθωση των αλτιμετρικών δεδομένων . . . . .	97
3.6.1	Συγγραμμική επεξεργασία των παρατηρήσεων . . . . .	98

3.6.2	Συνόρθωση στις τομές των τροχιακών ιχνών . . . . .	99
3.7	Προσδιορισμός αλτιμετρικού γεωειδούς . . . . .	112
3.8	Ανακεφαλαίωση . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Η θαλάσσια βαρυτημετρία</b>	<b>121</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	121
4.2	Η μετρητική διαδικασία . . . . .	121
4.3	Οι διορθώσεις των μετρήσεων στη θάλασσα . . . . .	123
4.3.1	Μετρήσεις σε κινούμενες σχεδίες . . . . .	123
4.3.2	Διαταρακτικές επιταχύνσεις κατά την κατακόρυφο . . . . .	123
4.3.3	Οριζόντιες διαταρακτικές επιταχύνσεις . . . . .	124
4.3.4	Αδρανειακές επιταχύνσεις λόγω της γήινης περιστροφής . . . . .	126
4.4	Οι πηγές των σφαλμάτων . . . . .	127
4.4.1	Πηγές σφαλμάτων στην περίπτωση ομογενών βάσεων . . . . .	127
4.4.2	Η προεπεξεργασία των θαλάσσιων βαρυτημετρικών δεδομένων . . . . .	128
4.4.3	Η συνόρθωση των θαλάσσιων βαρυτημετρικών δεδομένων . . . . .	129
4.5	Προσδιορισμός θαλάσσιου βαρυτημετρικού γεωειδούς . . . . .	135
4.6	Ανακεφαλαίωση . . . . .	136
<b>5</b>	<b>Η ωκεάνια κυκλοφορία</b>	<b>139</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	139
5.2	Οι σχέσεις γεωδαισίας – ωκεανογραφίας: Δυναμική θαλάσσια τοπογραφία . . . . .	139
5.3	Ιδιότητες θαλάσσιου νερού – Μετρήσεις . . . . .	140
5.4	Αρχές ωκεάνιας κυκλοφορίας . . . . .	143
5.4.1	Φυσικοί νόμοι και δυνάμεις επίδρασης . . . . .	143
5.4.2	Η γενική εξίσωση κίνησης των ωκεάνιων υδάτων . . . . .	145
5.4.3	Γεωστροφική ροή . . . . .	146
5.5	Μοντέλα ωκεάνιας κυκλοφορίας . . . . .	149
5.6	Ωκεανογραφικές εφαρμογές του πεδίου βαρύτητας . . . . .	151
5.7	Ανακεφαλαίωση . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Μέθοδοι Βέλτιστου Συνδυασμού Ετερογενών Δεδομένων - Θεωρία Συστημάτων</b>	<b>157</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	157
6.2	Θεωρητικό υπόβαθρο . . . . .	157
6.3	Στοιχεία ανάλυσης τυχαίων δεδομένων . . . . .	160
6.3.1	Βασικές ιδιότητες περιγραφής στοχαστικών δεδομένων . . . . .	161
6.3.2	Συνήθεις συναρτήσεις συντονισμού . . . . .	162
6.3.3	Πολλαπλές συναρτήσεις συντονισμού . . . . .	163
6.3.4	Υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος . . . . .	163
6.3.5	Συναρτήσεις μερικού συντονισμού . . . . .	166
6.4	Θεωρία συστημάτων εισόδου – εξόδου . . . . .	167
6.4.1	Μοντέλο απλού σήματος εισόδου – εξόδου . . . . .	167
6.4.2	Μοντέλο απλής εισόδου – εξόδου με θόρυβο . . . . .	170
6.4.3	Βέλτιστες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας . . . . .	171
6.4.4	Μοντέλο πολλαπλού σήματος εισόδου – εξόδου . . . . .	175
6.4.5	Μοντέλο διπλής εισόδου / απλής εξόδου . . . . .	178
6.4.6	Υπό συνθήκη συστήματα πολλαπλής εισόδου . . . . .	181
6.4.7	Γενικευμένα μοντέλα πολλαπλής εισόδου/εξόδου . . . . .	184
6.4.8	Γενικευμένα μοντέλα πολλαπλής εισόδου – πολλαπλής εξόδου με θόρυβο . . . . .	187
6.5	Το πρόβλημα του θορύβου . . . . .	197
6.5.1	Προσομοίωση τυχαίου θορύβου . . . . .	198
6.5.2	Στάσιμα μοντέλα προσομοίωσης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος . . . . .	199
6.5.3	Προσδιορισμός συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου . . . . .	199

6.6	Ανακεφαλαίωση . . . . .	202
<b>7</b>	<b>Εφαρμογές της θεωρίας συστημάτων στο βέλτιστο προσδιορισμό παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας</b>	<b>209</b>
7.1	Εισαγωγή . . . . .	209
7.2	Μελέτες προσομοίωσης . . . . .	209
7.2.1	Φιλτράρισμα σε παρατηρήσεις αποχών του γεωειδούς και ανωμαλιών της βαρύτητας . . . . .	209
7.2.2	Μελέτη των συναρτήσεων μεταβλητότητας των σφαλμάτων στη διαδικασία προσέγγισης του γεωειδούς . . . . .	215
7.2.3	Προσέγγιση συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου – Επίδραση της μέσης τιμής και της χρήσης γεωδυναμικών μοντέλων διαφορετικής διακριτικής ικανότητας . . . . .	218
7.2.4	Συνδυασμός μετρήσεων GPS-γεωδαιτικής χωροστάθμησης και ανωμαλιών της βαρύτητας για την προσέγγιση του γεωειδούς . . . . .	222
7.2.5	Συνδυασμός υψομέτρων GPS, δεδομένων αλτιμετρικού γεωειδούς και ανωμαλιών ελευθέρου αέρα για την προσέγγιση γεωειδούς συνδυασμού . . . . .	226
7.3	Μελέτες με τη χρήση πραγματικών δεδομένων . . . . .	228
7.3.1	Εφαρμογή στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου – Προσέγγιση δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας . . . . .	228
7.3.2	Εφαρμογή σε περιφερειακή κλίμακα – Βόρειος Ατλαντικός - Στενά Labrador . . . . .	239
7.3.3	Προσδιορισμός γεωειδούς στον Ελληνικό χώρο. Εφαρμογή συστήματος απλής εισόδου - απλής εξόδου . . . . .	250
7.3.4	Συνδυασμός ανωμαλιών της βαρύτητας και μετρήσεων GPS για τον προσδιορισμό τοπικού γεωειδούς συνδυασμού – Περιοχή Θεσσαλονίκης . . . . .	260
7.4	Ανακεφαλαίωση . . . . .	264
<b>8</b>	<b>Συμπεράσματα – Προτάσεις</b>	<b>271</b>



# Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή ασχολείται με το βέλτιστο συνδυασμό ετερογενών δεδομένων (επίγειων και δορυφορικών) για τη λύση προβλημάτων σχετικών με το πεδίο βαρύτητας που αφορούν στην γεωδαισία, την υδρογραφία, την ωκεανογραφία και τις γεωεπιστήμες γενικότερα. Προτείνεται μία φασματική μέθοδος συνδυασμού, η οποία στηρίζεται στη θεωρία των συστημάτων εισόδου - εξόδου και παρουσιάζονται για πρώτη φορά οι γενικευμένες σχέσεις συνδυασμού πολλών δεδομένων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αντιμετώπιση του προβλήματος του θορύβου εισόδου και παρουσιάζονται νέοι αλγόριθμοι προσέγγισης των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας.

Η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του Τμήματος Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών (ΤΑΤΜ) του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (ΑΠΘ), υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Ηλία Ν. Τζιαβού.

Στο σημείο αυτό αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω:

- το Δάσκαλό μου, Καθηγητή του ΤΑΤΜ/ΑΠΘ Ηλία Τζιαβό, για τη συνεχή καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής, την ουσιαστική υποστήριξή του και τις πολύτιμες συμβουλές του στις πρώτες αυτές ερευνητικές μου δραστηριότητες, καθώς επίσης και για την αμέριστη συμπαράστασή του στις αγωνίες και τους προβληματισμούς μου,
- τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου του Calgary Μιχάλη Σιδερά, για τη βοήθειά του στη θεωρητική ανάπτυξη και τεκμηρίωση των μεθόδων συνδυασμού, καθώς επίσης και για τις διευκολύνσεις που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της παραμονής μου στο Πανεπιστήμιο του Calgary,
- τους Καθηγητές του ΤΑΤΜ/ΑΠΘ Δημήτριο Αραμπέλο και Κώστα Κατσάμπαλο για τις αξιόλογες συμβουλές τους και τις υποδείξεις τους κατά τη διάρκεια της έρευνας,
- τους Καθηγητές του ΤΑΤΜ/ΑΠΘ Χριστογεώργη Καλτσίκη, Ευάγγελο Λιβιεράτο, Δημήτριο Ρωσσικόπουλο και Αριστείδη Φωτίου για τη συνεργασία τους σε τμήματα της μελέτης και για τη συμβολή τους στη βελτίωση της διατριβής,
- το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική υποστήριξή του,
- τους φίλους και συναδέλφους Χρήστο Πικριδά, διδάκτορα του ΤΑΤΜ/ΑΠΘ και Ελένη Πασχαλάκη, υποψήφια διδάκτορα του ΤΑΤΜ/ΑΠΘ, για την πολύτιμη βοήθειά τους στις κοινές ώρες αγωνίας και για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις μας,
- το Χριστόφορο Κωτσάκη, διδάκτορα του Department of Geomatics Engineering του Πανεπιστημίου του Calgary και τη Γεωργία Φωτοπούλου, μεταπτυχιακή σπουδάστρια του ίδιου Πανεπιστημίου, για τη φιλοξενία τους και τη βοήθειά τους στην προσαρμογή μου κατά τη διάρκεια της παραμονής στο Calgary,
- την Κική Κεχαίδου, για την ηθική συμπαράσταση και υποστήριξή της καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης,
- ιδιαιτέρως τους γονείς μου, Δημήτρη και Δήμητρα και τον αδερφό μου Γιώργο για την καθολική υποστήριξή τους και την ενθάρρυνσή τους στα αρχικά, δύσκολα στάδια της εκπόνησης.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή υποβλήθηκε στο Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του ΑΠΘ. Η επταμελής εξεταστική επιτροπή είναι:

1. Η. Ν. Τζιαβός, Καθηγητής ΑΠΘ, επιβλέπων
2. Δ. Αραμπέλος, Καθηγητής ΑΠΘ, μέλος συμβουλευτικής επιτροπής
3. Κ. Κατσάμπαλος, Καθηγητής ΑΠΘ, μέλος συμβουλευτικής επιτροπής
4. Χ. Καλτσίκης, Καθηγητής ΑΠΘ
5. Ε. Λιβιεράτος, Καθηγητής ΑΠΘ
6. Δ. Ρωσσικόπουλος, Καθηγητής ΑΠΘ
7. Α. Φωτίου, Καθηγητής ΑΠΘ

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2000  
Βασίλειος Δ. Ανδριτσάνος

# Summary

The subject of the dissertation is the analysis of new spectral methods for the efficient combination of heterogeneous data. These methods are based on the system theory and combine terrestrial and satellite data. The theoretical background is extensively analyzed and some applications of the new algorithms in geodesy and oceanography are presented. Special emphasis to the input noise treatment is given and new algorithms for the power spectral density (PSD) computation of the input error are carried out.

The necessity of the study from the geodetic point of view is based on the large amount of today's observations. The different frequency content of the various data types used in geodesy as well as the current need for high accuracy operational products lead to the modification of the existing methodology. The operational phase of the oceanography is connected with the speed and the accuracy in the computations. The continuous monitoring and the efficient data assimilation in the oceanographic models yield the need of new methods of heterogeneous data combination.

Special attention is given to the multiple input - multiple output system analysis with the presence of noise. The matrix analysis of this method is presented originally in this study. Additionally, the case of repeated satellite missions, altimetric and future gravimetric ones, results in the extraction of new algorithms for the input error PSD estimation. Conclusions and recommendations for future studies are presented in the final part of the dissertation.

Analytically:

In the first part of the study an introduction in the main research aspects are given. The necessity for the present study is mentioned and the relations of geodesy and oceanography through the study of Earth gravity field are analyzed.

In the second chapter the basic methods used for gravity field modeling are described. The principles of the classical and modern geodetic boundary value problems are analyzed and their solutions are commented. The remove-restore technique and the various data types used in geodesy are presented. The analysis of the current form of the spectral methods is given and the properties of the PSD functions are itemized.

The third chapter is dedicated to satellite altimetry. The past, present and future altimetry missions are described as well as the principle and the basic properties of this method. The models of the cross-over adjustment for the orbit error minimization are analyzed and the methods of the altimetric geoid approximation are mentioned.

In the fourth chapter the measurement procedure in the sea gravimetry is described. The major corrections applied to the raw observations and the errors in the databases are described. Finally, techniques for sea gravimetric geoid determination are pointed out.

The fifth chapter is an introduction to the theories and methods extensively employed in the science of oceanography. The concept of dynamic ocean topography is presented with emphasis in the ocean circulation analysis. The physical properties of sea water are described and the basic principles of the ocean circulation theory are introduced. The major currents of our planet are mentioned and the simplified geostrophic theory is analyzed. Finally, the historical evolution of the ocean circulation and climate models is presented and their connection with gravity field modeling applications is analyzed.

In the sixth chapter the system theory is extensively considered. This chapter is the main research part of the dissertation. Many originally presented schemes are introduced in this chapter. The generalized multiple input - multiple output system is presented in matrix formulation and the error propagation is successfully achieved with the introduction of the output error covariance matrix estimation. Theoretical schemes are itemized in this chapter and the application of the theory in geodesy and oceanography is given through algorithmic equations. In the final part of this chapter the input noise problem is mentioned and new techniques for the noise treatment are proposed.

In the final chapter of the dissertation the applications of the multiple input - multiple output system theory in gravity field modeling are discussed. The test areas in the numerical experiments refer basically to the Hellenic territory where all available heterogeneous data sources are combined optimally. Areas outside Greece are selected according to their geophysical interest and their large dimensions, in order to investigate the efficiency of the new methods. Processing of simulation as well as real data are carried out and conclusions for the theory application are carefully drawn.

According to the numerical experiments, the theory fits practical applications of special interest like geoid and sea surface topography approximations, positioning applications and datum unification. Some recommendations for further improvement of the method, especially in the field of noise treatment and PSD estimation, are proposed for further research and investigation.

# Κατάλογος Πινάκων

3.1	Τα χαρακτηριστικά των αλτιμετρικών δορυφόρων. . . . .	81
7.1	Στατιστικά των σημάτων εισόδου. . . . .	210
7.2	Τα στατιστικά των θορύβων προσομοίωσης. . . . .	211
7.3	Οι διαφορές των εκτιμήσεων από τα σήματα εισόδου. . . . .	213
7.4	Οι εκτιμήσεις των αποχών του γεωειδούς ανάλογα με το θόρυβο στις ανωμαλίες εισόδου (τιμές σε m). . . . .	216
7.5	Οι μεταβλητότητες των σφαλμάτων των ανωμαλιών βαρύτητας και των αποχών του γεωειδούς. . . . .	216
7.6	Οι σημειακές τιμές των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα και οι ανηγμένες τιμές τους στα γεωδυναμικά μοντέλα (mGal). . . . .	218
7.7	Στατιστικά των σημάτων εισόδου του πλέγματος (mGal). . . . .	218
7.8	Τα κεντρωμένα πεδία των ανηγμένων ανωμαλιών ελεύθερου αέρα mGal. . . . .	220
7.9	Οι συγκρίσεις στα σημεία αστρογεωδαιτικών παρατηρήσεων (τιμές σε arcsec). . . . .	222
7.10	Τα στατιστικά του σήματος εισόδου των αποχών του γεωειδούς (m). . . . .	224
7.11	Τα στατιστικά της εκτίμησης των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς (m). . . . .	224
7.12	Τα πεδία των σημάτων εισόδου. . . . .	227
7.13	Τα στατιστικά στοιχεία των εκτιμήσεων των αποχών του γεωειδούς (m). . . . .	228
7.14	Τα στατιστικά των ανηγμένων ανωμαλιών ελεύθερου αέρα στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε mGal). . . . .	230
7.15	Οι χρονικές περίοδοι των αλτιμετρικών δεδομένων. . . . .	230
7.16	Οι μεταβλητότητες των σφαλμάτων για κάθε δορυφόρο (τιμές σε $\text{cm}^2$ ). . . . .	232
7.17	Οι εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας την περίοδο 1993–1998 για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε m, $\alpha$ : δεδομένα εισόδου ERS-1 και ERS-2, $\beta$ : δεδομένα εισόδου ERS-2). . . . .	233
7.18	Οι μεταβλητότητες της εκτίμησης της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας για κάθε έτος (τιμές σε $\text{cm}^2$ ). . . . .	234
7.19	Οι διαφορές των ετήσιων εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας (τιμές σε m). . . . .	234
7.20	Διαφορές στις συνιστώσες της σταθερής ταχύτητας ροής των υδάτων στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε m/sec). . . . .	237
7.21	Χρονικές περίοδοι και αλτιμετρικά δεδομένα. . . . .	240
7.22	Στατιστικά των ανηγμένων ανωμαλιών ελεύθερου αέρα και του θορύβου εισόδου. . . . .	241
7.23	Υπολογισμένες μεταβλητότητες για κάθε δορυφόρο και κάθε έτος (τιμές σε $\text{cm}^2$ ). . . . .	242
7.24	Μέσες ετήσιες εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας (τιμές σε m). . . . .	244
7.25	Διαφορές στις ετήσιες εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας από τη χρησιμοποίηση διαφορετικών μεθόδων για τον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων (τιμές σε m). . . . .	245
7.26	Διαφορές μεταξύ της φιλτραρισμένης εκτίμησης της ωκεάνιας τοπογραφίας και της παγκόσμιας λύσης σφαιρικών αρμονικών του μοντέλου POCM-4B (τιμές σε m). . . . .	247

7.27	Οι επιδράσεις του αναγλύφου. . . . .	250
7.28	Οι ανηγμένες στα γεωδυναμικά μοντέλα παρατηρήσεις (τιμές σε mGal). . . . .	250
7.29	Οι ανωμαλίες Faye στην περιοχή του Ελλαδικού χώρου (τιμές σε mGal). . . . .	251
7.30	Οι ανηγμένες τιμές των ανωμαλιών βαρύτητας, μετά την απομάκρυνση ύποπτων τιμών. . . . .	252
7.31	Η διαδικασία επαναφοράς στην προσέγγιση των αποχών του γεωειδούς με τη χρήση του γεωδυναμικού μοντέλου EGM96 (τιμές σε m). . . . .	253
7.32	Τα στατιστικά της επαναφοράς του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98 και των έμμεσων επιδράσεων στην περίπτωση πρόγνωσης των δεδομένων σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου (τιμές σε m). . . . .	254
7.33	Τα στατιστικά της επαναφοράς του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98 και των έμμεσων επιδράσεων στην περίπτωση πρόγνωσης των δεδομένων σε πλέγμα με τη βοήθεια καμπύλων splines (τιμές σε m). . . . .	254
7.34	Οι διαφορές μεταξύ των δύο λύσεων – GPM98 - EGM96 (τιμές σε m). . . . .	256
7.35	Οι διαφορές μεταξύ της βαρυτημετρικής λύσης και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλονίκης. . . . .	258
7.36	Οι διαφορές μεταξύ της βαρυτημετρικής λύσης και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή του Αστακού Αιτωλοακαρνανίας. . . . .	259
7.37	Οι διαφορές μεταξύ της βαρυτημετρικής λύσης και των υψών της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας του T/P (κύκλος 200 – τιμές σε m). . . . .	260
7.38	Οι διαφορές μεταξύ των αποχών των βαρυτημετρικών μοντέλων και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλονίκης. . . . .	260
7.39	Οι διαφορές μεταξύ των αποχών των βαρυτημετρικών μοντέλων και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή του Αστακού Αιτωλοακαρνανίας. . . . .	260
7.40	Οι αναγωγή των σημειακών ανωμαλιών βαρύτητας στην περιοχή της Θεσσαλονίκης (τιμές σε mGal). . . . .	261
7.41	Τα στατιστικά του πεδίου εισόδου των ανωμαλιών της βαρύτητας (τιμές σε mGal). . . . .	261
7.42	Η αναγωγή των αποχών GPS (τιμές σε m). . . . .	261
7.43	Τα στατιστικά του πεδίου εισόδου των αποχών GPS (τιμές σε m). . . . .	261
7.44	Οι τελικές αποχές συνδυασμού στην περιοχή της Θεσσαλονίκης (τιμές σε m). . . . .	263
7.45	Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς στα 35 σημεία του δικτύου της Θεσσαλονίκης (τιμές σε m). . . . .	263
7.46	Τα αποτελέσματα το συγκρίσεων με τη χρήση μόνο του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98. . . . .	264

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Οι σχέσεις γεωδαισίας και ωκεανογραφίας. . . . .	3
2.1	Οι θεμελιώδεις επιφάνειες στο πρόβλημα του Stokes. . . . .	13
2.2	Οι θεμελιώδεις επιφάνειες στο πρόβλημα του Molodensky. . . . .	13
2.3	Σχηματική αναπαράσταση της διόρθωσης λόγω αναγλύφου. . . . .	22
2.4	Τα ισοστατικά μοντέλα των Pratt – Hayford και Airy – Heiskanen. . . . .	23
2.5	Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος δειγματοληψίας. . . . .	43
2.6	Εφαρμογή της προσθήκης μηδενικών τιμών και αντιμετώπιση του φαινομένου της κυκλικής συνέλιξης. . . . .	46
3.1	Ο δορυφόρος Skylab (NASA). . . . .	74
3.2	Ο δορυφόρος Geos-3 (NASA). . . . .	74
3.3	Ο δορυφόρος Seasat (NASA). . . . .	75
3.4	Ο δορυφόρος Geosat (NOAA - NODC Laboratory for Satellite Altimetry). . . . .	75
3.5	Η βελτίωση στην τροχιά του Geosat από τη χρησιμοποίηση του παγκόσμιου μοντέλου βαρύτητας JGM-3 (NOAA - NODC Laboratory for Satellite Altimetry). . . . .	77
3.6	Ο δορυφόρος ERS1 (ESA). . . . .	77
3.7	Ο δορυφόρος TOPEX/POSEIDON (AVISO - Altimetrie). . . . .	78
3.8	Ο δορυφόρος ERS2 (ESA). . . . .	79
3.9	Ο δορυφόρος Geosat-Follow-On (U.S. Navy). . . . .	80
3.10	Ο δορυφόρος Jason-1 (AVISO - Altimetrie). . . . .	80
3.11	Οι χρησιμοποιούμενοι όροι για την περιγραφή του αλτιμετρικού συστήματος (AVISO - Altimetrie). . . . .	81
3.12	Η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας (AVISO - Altimetrie). . . . .	82
3.13	Προσαρμοσμένη χαμπύλη στους ανακλώμενους αλτιμετρικούς παλμούς για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις θαλάσσιας κατάστασης. . . . .	83
3.14	Η επίδραση του ελλειψοειδούς σχήματος της Γης στις αλτιμετρικές μετρήσεις. . . . .	84
3.15	Τα στοιχεία Kepler της τροχιάς. . . . .	88
3.16	Τα στάδια της προεπεξεργασίας των αλτιμετρικών παρατηρήσεων (CERSAT). . . . .	95
3.17	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των διαφορών της θαλάσσιας στάθμης, όπως υπολογίζεται από τα δεδομένα του T/P και μετρήσεις παλιρροιογράφων (NASA/GSFC Ocean Pathfinder Project). . . . .	97
3.18	Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των διαφορών της θαλάσσιας στάθμης, όπως υπολογίζεται από τα δεδομένα του ERS2 και μετρήσεις παλιρροιογράφων (NASA/GSFC Ocean Pathfinder Project). . . . .	98
3.19	Τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ονομαστικής τροχιάς ενός δορυφόρου. . . . .	99
3.20	Υπολογισμός των χρονικών μεταβλητών στα σημεία τομής των τροχιακών ιχνών. . . . .	101
3.21	Υπολογισμός των αδιάστατων χρονικών μεταβλητών. . . . .	103
3.22	Η επιφάνεια παραμόρφωσης στην περίπτωση της χρονολογικής συνόρθωσης παγκόσμιας κλίμακας. . . . .	108

3.23 Η επιφάνεια παραμόρφωσης στην περίπτωση του γενικευμένου μοντέλου συνόρθωσης. . . . .	110
4.1 Επιδράσεις των οριζόντιων διαταρακτικών επιταχύνσεων. . . . .	124
4.2 Το φαινόμενο της δια-σύνδεσης στα βαρυτήμετρα οριζόντιου ελατηρίου στρέψης. . . . .	125
4.3 Οι επιταχύνσεις λόγω της γήινης περιστροφής. . . . .	126
4.4 Η γεωμετρία στο σημείο της τομής. . . . .	130
5.1 Ο πολυαισθητήρας Horiba U-10. . . . .	142
5.2 Ο ρευματογράφος Valeport-Model 105. . . . .	142
5.3 Το μοντέλο της αέριας και ωκεάνιας κυκλοφορίας. . . . .	143
6.1 Ιδεατό σύστημα απλής εισόδου-εξόδου. . . . .	162
6.2 Σύστημα δύο σημάτων εισόδου και ενός εξόδου. . . . .	165
6.3 Σύστημα ισοδύναμο με το σχήμα 6.2. . . . .	165
6.4 Σύστημα ισοδύναμο με το σχήμα 6.3. . . . .	165
6.5 Ιδεατό σύστημα απλής εισόδου – εξόδου. . . . .	167
6.6 Σύστημα απλής εισόδου – εξόδου με θόρυβο. . . . .	170
6.7 Σύστημα απλής εισόδου – εξόδου του πεδίου βαρύτητας. . . . .	174
6.8 Σύστημα πολλαπλής εισόδου – εξόδου με θόρυβο. . . . .	175
6.9 Σύστημα διπλής εισόδου / απλής εξόδου με θόρυβο. . . . .	178
6.10 Σύστημα διπλής εισόδου / απλής εξόδου του πεδίου βαρύτητας με θόρυβο. . . . .	180
6.11 Σύστημα πολλαπλής εισόδου για υπολοιπόμενα δεδομένα. . . . .	181
6.12 Απλά συστήματα ισοδύναμα με το πολλαπλό του σχ. 6.11. . . . .	183
6.13 Σύστημα πολλαπλής εισόδου – πολλαπλής εξόδου με θόρυβο. . . . .	187
6.14 Σύστημα δύο δεδομένων εισόδου / δύο εξόδου. . . . .	189
6.15 Προσέγγιση των συνιστωσών απόκλισης της καταχορύφου με τη χρήση συστήματος απλής εισόδου – διπλής εξόδου. . . . .	192
6.16 Εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων στην επεξεργασία των παρατηρήσεων της από αέρα βαρυτημετρίας. . . . .	193
6.17 Η εφαρμογή της γενικευμένης θεωρίας των συστημάτων στην προσέγγιση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας. . . . .	196
7.1 Το πεδίο σημάτων εισόδου των ανωμαλιών της βαρύτητας. . . . .	210
7.2 Το πεδίο σημάτων εισόδου των αποχών του γεωειδούς. . . . .	211
7.3 Ο θόρυβος στις αποχές του γεωειδούς (ομογενής κατανομή, TA 3 cm). . . . .	212
7.4 Ο θόρυβος στις ανωμαλίες της βαρύτητας (κανονική κατανομή, TA 10 mGal). . . . .	212
7.5 Τα σφάλματα εκτίμησης των αποχών του γεωειδούς. . . . .	214
7.6 Τα σφάλματα εκτίμησης των ανωμαλιών της βαρύτητας. . . . .	214
7.7 Σύγκριση θορύβων εισόδου και σφαλμάτων εξόδου στα σήματα των ανωμαλιών βαρύτητας. Κανονική κατανομή των θορύβων. □: TA θορύβου αποχών εισόδου 3 cm. Δ: TA θορύβου αποχών εισόδου 10 cm. . . . .	215
7.8 Σύγκριση θορύβων εισόδου και σφαλμάτων εξόδου στα σήματα των αποχών γεωειδούς. Ομογενής κατανομή των θορύβων. □: TA θορύβου ανωμαλιών εισόδου 3 mGal. Δ: TA θορύβου αποχών εισόδου 10 mGal. . . . .	215
7.9 Η συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος προσδιορισμού των αποχών του γεωειδούς (τιμές σε cm <sup>2</sup> ). TA θορύβου ανωμαλιών της βαρύτητας 10 mGal. . . . .	217
7.10 Η συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος προσδιορισμού των αποχών του γεωειδούς (τιμές σε cm <sup>2</sup> ). TA θορύβου ανωμαλιών της βαρύτητας 5 mGal. . . . .	217
7.11 Οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα στην περιοχή μελέτης. . . . .	219
7.12 Το πεδίο των ανηγμένων στο παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο GPM ανωμαλιών ελευθέρου αέρα. . . . .	219
7.13 Οι μεσημβρινές συνιστώσες της απόκλισης της καταχορύφου με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο GPM98 (arcsec). . . . .	221

7.14	Οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου κατά παράλληλο με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο EGM96 (arcsec).	221
7.15	Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας των σφαλμάτων εκτίμησης της μεσημβρινής συνιστώσας της απόκλισης της κατακορύφου με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο GPM98 (arcsec <sup>2</sup> ).	223
7.16	Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας των σφαλμάτων εκτίμησης της συνιστώσας της απόκλισης της κατακορύφου κατά παράλληλο με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο EGM96 (arcsec <sup>2</sup> ).	223
7.17	Η διδιάστατη συνάρτηση συμμεταβλητότητας των σφαλμάτων εκτίμησης των συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο EGM96 (arcsec <sup>2</sup> ).	224
7.18	Οι εκτιμήσεις των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς.	225
7.19	Η συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος της εκτίμησης των αποχών γεωειδούς συνδυασμού.	226
7.20	Οι εκτιμήσεις των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς (m).	228
7.21	Οι εκτιμήσεις των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς μετά την επαναφορά του πεδίου αναφοράς EGM96 (m).	229
7.22	Η συνάρτηση μεταβλητότητας των εκτιμήσεων των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς (cm <sup>2</sup> ).	229
7.23	Η εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας της Ανατολικής Μεσογείου για το έτος 1995.	233
7.24	Η συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος της εκτίμησης της θαλάσσιας τοπογραφίας για το 1995 (τιμές σε cm <sup>2</sup> ).	234
7.25	Οι μεταβολές της μέσης τιμής της εκτίμησης της ετήσιας στάσιμης συνιστώσας της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας ως προς το έτος αναφοράς 1993 για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε cm).	235
7.26	Οι μεταβολές της τυπικής απόκλισης της εκτίμησης της ετήσιας στάσιμης συνιστώσας της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας ως προς το έτος αναφοράς 1993 για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε cm).	235
7.27	Τα διανύσματα σταθερής ροής της Ανατολικής Μεσογείου για το έτος 1995.	236
7.28	Το μέγεθος των διανυσμάτων σταθερής ροής για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου και στο έτος 1995 (τιμές σε m/sec).	237
7.29	Οι διευθύνσεις των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1993 και 1994.	238
7.30	Τα μεγέθη των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1993 και 1994 (τιμές σε m/sec).	238
7.31	Οι διευθύνσεις των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1995 και 1996.	239
7.32	Τα μεγέθη των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1995 και 1996 (τιμές σε m/sec).	239
7.33	Οι μετρήσεις βαρύτητας στην περιοχή του Βορείου Ατλαντικού.	241
7.34	Διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος και η μονοδιάστατη αναπαράστασή της για τα δεδομένα του T/P και για το έτος 1998, ακολουθώντας την προσέγγιση CORSSH. Τα σημεία αντιπροσωπεύουν τις εμπειρικές τιμές και η συνεχής γραμμή την αναλυτική έκφραση, η οποία βασίζεται στο εκθετικό μοντέλο $C = a \cdot e^{-b\psi}$ , όπου $a = 20.852$ και $b = 0.746$ . Ισοδιάσταση χαμπύλων 1 cm <sup>2</sup> .	243
7.35	Διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος και η μονοδιάστατη αναπαράστασή της για τα δεδομένα του T/P και για το έτος 1998, ακολουθώντας την προσέγγιση SLA. Τα σημεία αντιπροσωπεύουν τις εμπειρικές τιμές και η συνεχής γραμμή την αναλυτική έκφραση, η οποία βασίζεται στο εκθετικό μοντέλο $C = a \cdot e^{-b\psi}$ , όπου $a = 19.326$ και $b = 0.606$ . Ισοδιάσταση χαμπύλων 1 cm <sup>2</sup> .	244
7.36	Εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας για το έτος 1996. Ισοδιάσταση χαμπύλων 0.1 m.	245

7.37	Εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας για το έτος 1996 μετά την εφαρμογή χαμηλοπερατού φίλτρου. Ισοδιάσταση χαμπύλων 0.1 m. . . . .	246
7.38	Διαφορές μεταξύ της τοπικής φιλτραρισμένης εκτίμησης της ωκεάνιας τοπογραφίας και της παγκόσμιας λύσης για το 1994, ύστερα από την απομάκρυνση της διαφοράς στάθμης και της μέσης τάσης. Ισοδιάσταση χαμπύλων 0.01 m. . . . .	247
7.39	Διαφορές στη μέση τιμή των εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας με έτος αναφοράς το 1993 (τιμές σε cm). □: CORSSH μέθοδος. ο: SLA μέθοδος. . . . .	248
7.40	Διαφορές στην τυπική απόκλιση των εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας με έτος αναφοράς το 1993 (τιμές σε cm). □: CORSSH μέθοδος. ο: SLA μέθοδος. . . . .	248
7.41	Οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των ρευμάτων στην περιοχή του Labrador ακολουθώντας τη γεωστροφική θεώρηση της ωκεάνιας κυκλοφορίας. . . . .	249
7.42	Το μέγεθος της ταχύτητας ροής των ρευμάτων στην περιοχή του Labrador. . . . .	249
7.43	Η κατανομή των ανηγμένων ανωμαλιών βαρύτητας πριν την απομάκρυνση των «ύποπτων» παρατηρήσεων (75158 τιμές). . . . .	252
7.44	Η κατανομή των ανηγμένων ανωμαλιών βαρύτητας μετά την απομάκρυνση των «ύποπτων» παρατηρήσεων (72143 τιμές). . . . .	253
7.45	Οι τελικές αποχές του γεωειδούς στον Ελλαδικό χώρο χρησιμοποιώντας το γεωδυναμικό μοντέλο EGM96 ως μοντέλο αναφοράς. . . . .	254
7.46	Οι εκτιμήσεις των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς με μοντέλο αναφοράς το GPM98 και πρόγνωση των ανωμαλιών της βαρύτητας σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου (τιμές σε m). . . . .	255
7.47	Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος των εκτιμήσεων των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς με μοντέλο αναφοράς το GPM98 και πρόγνωση των ανωμαλιών της βαρύτητας σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου (τιμές σε cm <sup>2</sup> ). . . . .	255
7.48	Οι διαφορές στην εκτίμηση των αποχών του γεωειδούς της μεθόδου εισόδου - εξόδου εξαιτίας των διαφορετικών τεχνικών πρόγνωσης σε πλέγμα. Μοντέλο GPM98 (τιμές σε m). . . . .	256
7.49	Οι τελικές αποχές του γεωειδούς στον Ελλαδικό χώρο χρησιμοποιώντας το γεωδυναμικό μοντέλο GPM98 ως μοντέλο αναφοράς. . . . .	257
7.50	Οι διαφορές μεταξύ των δύο λύσεων - GPM98 - EGM96 (τιμές σε m). . . . .	258
7.51	Η κατανομή των μετρήσεων του T/P. . . . .	259
7.52	Το πεδίο εισόδου των ανηγμένων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα. . . . .	262
7.53	Το πεδίο εισόδου των ανηγμένων αποχών GPS. . . . .	263
7.54	Οι τελικές αποχές συνδυασμού του γεωειδούς στην περιοχή της Θεσσαλονίκης. . . . .	264

# Κατάλογος Συμβόλων

$\nabla$	Τελεστής Laplace
$V$	Γήινο δυναμικό έλξης
$G$	Σταθερά παγκόσμιας έλξης
$\rho$	Πυκνότητα των γήινων μαζών
$\rho_a$	Απόσταση δορυφόρου-στιγμιαίας θαλάσσιας στάθμης
$T$	Διαταραχτικό δυναμικό
$W$	Πραγματικό δυναμικό της βαρύτητας
$U$	Κανονικό δυναμικό της βαρύτητας
$V'$	Κανονικό δυναμικό έλξης
$\Phi$	Φυγοκεντρικό δυναμικό
$P$	Σημείο υπολογισμού
$Q$	Τρέχον σημείο υπολογισμού
$h$	Ελλειψοειδές υψόμετρο
$H$	Ορθομετρικό υψόμετρο
$N$	Αποχή του γεωειδούς
$H^*$	Κανονικό υψόμετρο
$\zeta$	Ανωμαλία ύψους
$\gamma$	Κανονική τιμή της βαρύτητας
$\Delta g$	Ανωμαλία της βαρύτητας
$R$	Μέση γήινη ακτίνα ( $\approx 6371$ km)
$\sigma$	Σφαιρική επιφάνεια
$S(\psi)$	Συνάρτηση του Stokes
$\psi$	Σφαιρική απόσταση
$\xi$	Μεσημβρινή συνιστώσα της απόκλισης της κατακορύφου
$\eta$	Συνιστώσα της απόκλισης της κατακορύφου κατά παράλληλο
$V(\psi)$	Συνάρτηση του Vening-Meinesz
$a$	Αζιμούθιο
$g$	Πραγματική τιμή της βαρύτητας
$G_n$	Διορθωτικοί όροι του Molodensky
$\beta$	Γωνία κλίσης του εδάφους
$\phi, \lambda$	Γεωγραφικές συντεταγμένες
$P_{nm}(\cos \theta)$	Πολώνυμο Legendre
$\theta$	$= 90^\circ - \phi$
$\Delta g_{FA}$	Ανωμαλίες ελευθέρου αέρα
$\Delta g_B$	Ανωμαλίες Bouguer
$\Delta g_{GM}$	Ανωμαλίες προερχόμενες από μοντέλο
$M$	Μέση γήινη μάζα
$r$	Γεωκεντρική απόσταση
$a, b$	Μεγάλος και μικρός ημιάξονας του ελλειψοειδούς αναφοράς
$n, m$	Βαθμός και τάξη ανάπτυξης των γεωδυναμικών μοντέλων
$\bar{P}_{nm}$	Πλήρως κανονικοποιημένες συναρτήσεις Legendre
$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$	Συντελεστές του γήινου πεδίου βαρύτητας
$N_{GM}$	Αποχές του γεωειδούς προερχόμενες από μοντέλο
$N_{\Delta g}$	Συνεισφορά των ανωμαλιών βαρύτητας στις αποχές του γεωειδούς
$N_h$	Έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς
$c_P$	Διόρθωση λόγω αναγλύφου
$\delta$	Έμμεση επίδραση στη βαρύτητα (δευτερεύουσα έμμεση επίδραση)
$C_P$	Γεωδυναμικός αριθμός
$k(P, Q)$	Αναπαραγωγός πυρήνας
$C(P, Q)$	Συνάρτηση συμμεταβλητότητας

$E\{ \cdot \}$	Μαθηματική προσδοκία
$M_u\{ \cdot \}$	Μέση τιμή στο πεδίο ορισμού
$k_n$	Συντελεστές μεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού
$c_n$	Συντελεστές μεταβλητότητας των ανωμαλιών της βαρύτητας
$\epsilon_n$	Συντελεστές μεταβλητότητας σφάλματος του μοντέλου
$\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm}$	Σφάλματα υπολογισμού των συντελεστών του μοντέλου
$\mathbf{F}, \mathbf{F}^{-1}$	Τελεστές ευθύ και αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier
*	Σύμβολο συνέλιξης
$u, v$	Ορίσματα συχνοτήτων κατά $x$ και $y$
$r_{xx}$	Συνάρτηση συσχέτισης
$x^*$	Συζυγής μιγαδικός του $x$
$P_{xx}$	Συνάρτηση πυκνότητας φάσματος
$a_{km}$	Συντελεστές μοντέλου AR
$b_{km}$	Συντελεστές μοντέλου MA
$r_s$	Γεωκεντρική απόσταση του δορυφόρου
$r_e$	Ακτινική απόσταση του ίχνους του δορυφόρου από το ελλειψοειδές αναφοράς
$e$	Εκκεντρότητα
$I$	Κλίση της τροχιάς ενός δορυφόρου
$\Omega$	Ορθή αναφορά του αναβιβάζοντος σημείου
$\omega$	Όρισμα του περιγείου
$\bar{F}_{lmp}(I)$	Κανονικοποιημένες συναρτήσεις κλίσης
$G_{lpq}(e)$	Συναρτήσεις εκκεντρότητας
$\Delta r$	Ακτινικό τροχιακό σφάλμα
$\delta g_{Br}$	Διόρθωση Brownie
$\delta g_{off}$	Διόρθωση λόγω του φαινομένου της μη-επιπεδότητας
$\delta \bar{g}_{CC}$	Διόρθωση δια-σύνδεσης
$\delta g_E$	Διόρθωση Eötvös
$SSH$	Ύψος της θαλάσσιας στάθμης
$SST$	Τοπογραφία της θαλάσσιας επιφάνειας
$SST_s$	Σχεδόν στάσιμο μέρος της τοπογραφίας της θαλάσσιας επιφάνειας
$SST_d$	Χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος της τοπογραφίας της θαλάσσιας επιφάνειας
$p$	Υδροστατική πίεση
$\theta(\rho, \phi, \lambda, t)$	Θερμοκρασία του θαλάσσιου νερού
$S(\rho, \phi, \lambda, t)$	Αλατότητα του θαλάσσιου νερού
$\delta(m, n)$	Συνεχής συνάρτηση δέλτα ή συνάρτηση Dirac
$H(u, v)$	Συνάρτηση απόκρισης συχνότητας
$\gamma_{xy}^2$	Συνάρτηση συντονισμού
$\gamma_{x:y}^2$	Συνάρτηση πολλαπλού συντονισμού
$\gamma_{x^2:1}^2$	Συνάρτηση μερικού συντονισμού
$Y(u, v)$	Φάσμα του σήματος εισόδου
$M(u, v)$	Φάσμα του θορύβου εισόδου
$Y_o(u, v)$	Φάσμα της παρατήρησης εισόδου
$X(u, v)$	Φάσμα του σήματος εξόδου
$E(u, v)$	Φάσμα του σφάλματος εκτίμησης
$X_o(u, v)$	Φάσμα της εκτίμησης
$\hat{H}_o(u, v)$	Βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η παρούσα μελέτη εξετάζει νέες μεθόδους συνδυασμού ετερογενών δεδομένων του πεδίου βαρύτητας και παρουσιάζει τις εφαρμογές τους στην ανάλυση των συνιστωσών του πεδίου, όπως επίσης και τη σύνδεσή τους με τα δεδομένα υδρογραφικών και ωκεανογραφικών παρατηρήσεων. Αναλύονται όλες οι σύγχρονες θεωρήσεις που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση του γήινου πεδίου βαρύτητας με βάση είτε ντετερμινιστικά είτε στοχαστικά κριτήρια. Έμφαση δίνεται στο θαλάσσιο περιβάλλον των μετρήσεων, αφού οι ιδιαιτερότητες του συστήματος των μετρήσεων καθιστούν τις διαδικασίες παρατηρήσεων δυσλειτουργικές. Η ανάλυση των παλαιότερων μεθόδων μέτρησης, όπου το μετρητικό σύστημα επηρεαζόταν από τα χαρακτηριστικά του μέσου, καθώς επίσης και η εξέλιξή τους σε μεθόδους μέτρησης «εξ αποστάσεως», αποτελεί ένα από τα κύρια αντικείμενα της παρούσας έρευνας.

Η αναφορά στην υδρογραφία και την ωκεανογραφία πραγματοποιήθηκε με σκοπό την παρουσίαση της πληθώρας των κοινών στοιχείων που συνδέουν τις επιστήμες αυτές με τη γεωδαισία και σε καμιά περίπτωση η ανάλυση των όρων που αναφέρονται δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι καλύπτει πλήρως το ευρύ αντικείμενο των δύο επιστημών. Στη συνέχεια της εργασίας, για λόγους συντομίας, θα γίνεται αναφορά μόνο στην ωκεανογραφία, καθώς η υδρογραφία, όντας η επιστήμη της παράκτιας ζώνης χρησιμοποιεί ένα μεγάλο τμήμα των τεχνικών και μεθόδων της ωκεανογραφίας.

### 1.1 Η αναγκαιότητα της παρούσας έρευνας

Τα τελευταία χρόνια, και ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία, οι μέθοδοι και οι τεχνικές των μετρήσεων έχουν παρουσιάσει μια εκρηκτική ανάπτυξη. Ανάλογη της προόδου που υφίστανται οι μετρητικές διαδικασίες είναι και η διαθεσιμότητα σε δεδομένα. Συνεπώς, τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται μια πληθώρα δεδομένων, η αξιοποίηση των οποίων αποτελεί το ζητούμενο των τεχνικών ανάλυσης και επεξεργασίας.

Ο μεγάλος αριθμός των διαθέσιμων δεδομένων έχει επιδράσει θετικά σε ένα πλήθος επιστημών που ασχολούνται με την περιγραφή του φυσικού χώρου που ζούμε και ενεργούμε και γενικότερα του γήινου πλανήτη. Οι επιστήμες που ασχολούνται με την περιγραφή των φυσικών φαινομένων που δρουν εντός, επί και στη γειτονιά του πλανήτη Γη ονομάζονται **γεωεπιστήμες** (geosciences). Τμήμα των γεωεπιστημών αποτελούν και οι επιστήμες της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας. Γενικά, η επιστήμη της γεωδαισίας ασχολείται με την προσέγγιση του σχήματος της Γης και την ανάλυση του εξωτερικού πεδίου βαρύτητας [4]. Η επιστήμη της ωκεανογραφίας ασχολείται κυρίως με την αλληλεπίδραση των φυσικών φαινομένων της βιόσφαιρας και της κίνησης των γήινων υδάτινων μαζών, την επίδραση στο γήινο κλίμα και τη φυσική ισορροπία όλων των οργανισμών που ζουν εντός του υδάτινου φυσικού περιβάλλοντος [9].

Τόσο η γεωδαισία, όσο και η ωκεανογραφία συνδέονται με μια έννοια κλειδί στην αντιμετώπιση των φυσικών φαινομένων: το γήινο πεδίο βαρύτητας. Η αντίληψη και η ανάλυση του γήινου πεδίου βαρύτητας αποτέλεσε την κυριότερη ενασχόληση των φυσικών φιλοσόφων

ήδη από τον 16<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. [8]. Περιορίζοντας τις επιστήμες που αναφέρονται στην παρούσα εργασία στη σχέση τους με το γήινο πεδίο βαρύτητας αναφερόμαστε στην επιστήμη της φυσικής γεωδαισίας και της φυσικής ωκεανογραφίας. Η ανάλυση και προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας αποτέλεσε και αποτελεί τη βασικότερη διαδικασία στην εξήγηση ποικίλων φυσικών φαινομένων.

Η αναγκαιότητα της μελέτης από την πλευρά της γεωδαισίας έγκειται στο σημερινό μεγάλο πλήθος γεωδαιτικών δεδομένων. Ο βέλτιστος συνδυασμός των ετερογενών δεδομένων που χρησιμοποιούνται, αποτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα θέματα στην παρούσα έρευνα. Τα δεδομένα που διατίθενται σήμερα καλύπτουν το σύνολο σχεδόν του φάσματος του πεδίου βαρύτητας. Οι διαφορετικές συχνότητες του πεδίου βαρύτητας, τις οποίες περιγράφουν τα διαφορετικά είδη δεδομένων, καθώς επίσης και η σύγχρονη αναγκαιότητα για υψηλές ακρίβειες στη μέτρηση και την επεξεργασία, προαπαιτούν την ανάπτυξη λύσεων συνδυασμού. Ταυτόχρονα, μια προϋπόθεση της ασφαλούς προσέγγισης είναι και η έννοια της ακρίβειας της εκτίμησης, έτσι όπως παρουσιάζεται από την αβεβαιότητα στις προσδιοριστέες ποσότητες. Στις μεθόδους βέλτιστου συνδυασμού, που σχολιάζονται στην παρούσα μελέτη, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έκφραση της εσωτερικής ακρίβειας της προσέγγισης, η οποία ποικίλλει ανάλογα με το θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων. Η εξέλιξη της δορυφορικής εποχής έχει οδηγήσει την επιστήμη της γεωδαισίας σε νέες μεθόδους και τεχνικές παρακολούθησης, ιδιαίτερα στις θαλάσσιες περιοχές του πλανήτη. Η ανάγκη συνδυασμού των δορυφορικών δεδομένων, που προσφέρει η σύγχρονη τεχνολογία, με τα παραδοσιακά επίγεια δεδομένα αποτέλεσε το βασικότερο στόχο στην παρούσα έρευνα. Η αντιμετώπιση των θεωριών ενοποίησης των τοπικών συστημάτων αναφοράς, οι οποίες θα οδηγήσουν στη λειτουργική (operational) φάση της γεωδαισίας, απαιτούν την αξιοποίηση όλων των διαθέσιμων δεδομένων και το βέλτιστο συνδυασμό τους με ταχείες και ακριβείς τεχνικές. Η έννοια της ταχύτητας, που αναφέρεται συνεχώς τα τελευταία χρόνια, σχετίζεται με την πληθώρα των νέων δεδομένων που εισέρχονται στο παγκόσμιο μετρητικό σύστημα, όπως επίσης και στην αναγκαιότητα συνεχούς καταγραφής και παρακολούθησης των γήινων φυσικών ιδιοτήτων.

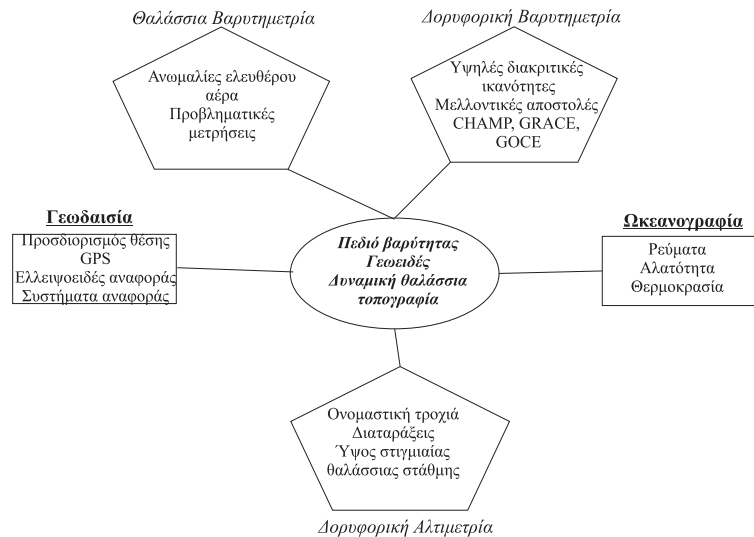
Οι έννοιες της ταχύτητας, της λειτουργικότητας και της ακρίβειας συνδέονται και με την αναγκαιότητα της παρούσας μελέτης από την πλευρά της επιστήμης της ωκεανογραφίας. Η εξέλιξη της εν λόγω επιστήμης έγκειται στο γεγονός της μεταβολής στη διαδικασία παρατήρησης και της επίδρασης της δορυφορικής τεχνολογίας. Οι σύγχρονες τεχνικές παρακολούθησης επιτρέπουν την πληρέστερη κατανόηση των μηχανισμών κίνησης των υδάτων και αλληλεπίδρασής τους με τη μεταβολή του παγκόσμιου κλίματος. Η χρονική περίοδος της τήξης των πάγων, η συνεχής άνοδος της μέσης θαλάσσιας στάθμης και η ανθρώπινη επίδραση στο περιβάλλον έχουν οδηγήσει σε μία αλλαγή του παγκόσμιου κλίματος, η οποία επιδρά σε κάθε φυσική διεργασία στον πλανήτη [2], [3]. Τα ακραία περιβαλλοντικά φαινόμενα που παρουσιάστηκαν την τελευταία δεκαετία παρατηρήθηκαν με ακρίβεια χάρη στις σύγχρονες μεθόδους παρακολούθησης και επινοήθηκαν νέα μοντέλα περιγραφής των φυσικών καταστροφών. Η συνεχής παρακολούθηση και ο εμπλουτισμός των μοντέλων περιγραφής του κλίματος μέσω της αποτελεσματικότερης αφομοίωσης (assimilation) των δεδομένων οδήγησε στην αναγκαιότητα νέων μεθόδων βέλτιστου συνδυασμού ετερογενών δεδομένων.

## 1.2 Η ανάλυση των σχέσεων γεωδαισίας και ωκεανογραφίας

Από όσα αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής διαφαίνεται ότι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των επιστημών της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας, εκτός από το κοινό φυσικό περιβάλλον των μετρήσεων, είναι το πεδίο που είναι υπεύθυνο για τις φυσικές ιδιότητες που περιγράφουν: το πεδίο της γήινης βαρύτητας [5]. Η κατανόηση της εξάρτησης των δύο επιστημών από το πεδίο αυτό οδηγεί στα σημεία σύνδεσής τους και στην κοινή αντιμετώπιση των προβλημάτων που προκύπτουν.

Οι επιμέρους έννοιες που σχετίζονται με τις δύο επιστήμες, οι σχέσεις σύνδεσης μεταξύ

τους και τα σημαντικότερα κομβικά σημεία των σχέσεων παρουσιάζονται στο σχήμα 1.1. Οι



Σχήμα 1.1: Οι σχέσεις γεωδαισίας και ωκεανογραφίας.

λέξεις-κλειδιά στη σύνδεση των επιστημών είναι το γεωειδές και η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία. Το γεωειδές είναι συνήθως προϊόν της επιστήμης της φυσικής γεωδαισίας και προκύπτει με διαδικασίες που θα αναφερθούν στο κεφάλαιο 2. Το γεωειδές ορίζεται ως η ισοδυναμική επιφάνεια του γήινου πεδίου βαρύτητας, η οποία προσεγγιστικά ταυτίζεται με τη μέση θαλάσσια στάθμη σε παγκόσμια κλίμακα, χωρίς να λάβουμε υπόψη την επίδραση των θαλασσίων ρευμάτων, των παλιρροιών και των πλανητικών και μετεωρολογικών φαινομένων. Η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία είναι η διαφορά της μέσης θαλάσσιας στάθμης από το γεωειδές, η οποία οφείλεται στην επίδραση των μετεωρολογικών φαινομένων, των θαλασσίων ρευμάτων και της θερμοκρασίας και αλατότητας του νερού των ωκεανών. Η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία ήταν, μέχρι και πριν μια εικοσαετία, αποκλειστικό αντικείμενο της φυσικής ωκεανογραφίας.

Το κοινό σημείο, στο οποίο τέμνονται οι επιστήμες της φυσικής γεωδαισίας και ωκεανογραφίας και το οποίο πρόσφερε τα μέγιστα στην κοινή εξέλιξη και των δύο επιστημών είναι η δορυφορική αλτιμετρία [10]. Με την έλευση των αλτιμετρικών δορυφόρων, η στιγμιαία στάθμη της θάλασσας παρατηρείται πλέον σε παγκόσμια κλίμακα και όχι μόνο σε περιορισμένα ηπειρωτικά σημεία παλιρροϊκών μετρήσεων. Το γεγονός αυτό δίνει τη δυνατότητα απευθείας προσδιορισμού της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας, χωρίς την ανάγκη μετρήσεων θερμοκρασίας και αλατότητας και τη χρήση πολύπλοκων ολοκληρωματικών σχέσεων [7] (βλ. κεφ. 5). Επίσης, μία ολοκληρωμένη αντιμετώπιση θα ήταν ο βέλτιστος συνδυασμός των δεδομένων και των δύο επιστημών μέσω των μεθόδων που μελετώνται. Απαραίτητη για την ωκεανογραφία είναι η γνώση του γεωειδούς, γιατί καθορίζεται με τον τρόπο αυτό μία επιφάνεια αναφοράς και είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι ταχύτητες των ρευμάτων σε οποιοδήποτε βάθος του θαλάσσιου όγκου. Αντιστοίχως, απαραίτητη για τη γεωδαισία είναι και η γνώση της ωκεανογραφικής δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας, έτσι ώστε να είναι δυνατή η ακριβέστερη προσέγγιση του γεωειδούς. Αυτή η σύνδεση και, σε ένα μέρος, η αλληλεξάρτηση των δύο επιστημών οδήγησε στην παρουσίαση μεθόδων συνδυασμού των διαθέσιμων σήμερα ετερογενών μετρήσεων.

### 1.3 Η επίδραση της δορυφορικής τεχνολογίας

Η δορυφορική τεχνολογία αποτέλεσε και αποτελεί ακόμη το σημαντικότερο εφαλτήριο στην εξέλιξη των επιστημών παρακολούθησης των γήινων διεργασιών. Η δορυφορική γεωδαισία, μέχρι και πριν από μερικά χρόνια, φάνταζε κάτι εξαιρετικά δύσκολο, λόγω των υψηλών ακριβειών που προϋποθέτει η επιστήμη στον προσδιορισμό της θέσης. Ήδη όμως από το 1984, με την έναρξη της λειτουργίας του παγκόσμιου συστήματος προσδιορισμού θέσης GPS (Global Positioning System) [6] ξεπεράστηκαν οι δυσκολίες στη χρήση των δορυφόρων για εργασίες υψηλής ακριβείας. Σήμερα πλέον η προσέγγιση της θέσης στην ξηρά, στη θάλασσα και στο διάστημα πραγματοποιείται με πολύ μεγάλη ακρίβεια, αρκετές φορές μεγαλύτερη από τις παλαιότερες μεθόδους προσδιορισμού, είτε πρόκειται για εφαρμογές στατικού χαρακτήρα, είτε για καθαρά κινηματικές εφαρμογές. Η ακρίβεια στη θέση συμβάλλει κατά ένα μεγάλο βαθμό και στην αύξηση της ακριβείας στη μέτρηση, τόσο στις γεωδαιτικές, όσο και στις ωκεανογραφικές μετρήσεις. Η δυνατότητα ακριβούς προσδιορισμού στη θέση παρέχει ικανότερη ταυτοποίηση της τοπολογίας της μέτρησης και επιπλέον εξαλείφει σφάλματα που οφείλονται στην εν γένει αβεβαιότητα.

Επιπλέον, η εισαγωγή της δορυφορικής αλτιμετρίας στις μεθόδους παρακολούθησης και καταγραφής των ιδιοτήτων των γήινων φυσικών διεργασιών και ειδικότερα στην παρατήρηση των ωκεανών, οδήγησε στην περαιτέρω ανάπτυξη και τον εμπλουτισμό με δεδομένα της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας. Οι δυνατότητες επιλογής της απόστασης μεταξύ των τροχιακών ιχνών (track separation) των αλτιμετρικών δορυφόρων οδήγησε στη λήψη, τόσο καθαρά γεωδαιτικών δεδομένων [γεωδαιτικές αποστολές (Geodetic Missions – GM)], όσο και παρατηρήσεων καθαρά ωκεανογραφικού ενδιαφέροντος [ακριβώς επαναλαμβανόμενες αποστολές (Exact Repeat Missions – ERM)]. Η δορυφορική αλτιμετρία οδήγησε στη σύνδεση των δύο επιστημών, αφού παρέχει σε παγκόσμια κλίμακα τα ύψη της στιγμαϊας στάθμης της θάλασσας από το ελλειψοειδές αναφοράς. Ο όγκος των δεδομένων, που πρόσφερε η αλτιμετρία την τελευταία δεκαετία, έχει ξεπεράσει κατά πολύ το διπλάσιο του όγκου των δεδομένων που έχουν συλλεχθεί με παραδοσιακούς τρόπους από τις αρχές του αιώνα. Η επαναλαμβανόμενη τροχιά και η μικρή περίοδος περιστροφής επιτρέπουν πλέον τη μελέτη φυσικών φαινομένων ταχείας εξέλιξης, τα οποία είναι αδύνατο να ανιχνευθούν με τις κλασικές μεθόδους παρατήρησης.

Επιπλέον, η εφαρμογή της δορυφορικής τεχνολογίας σε αποστολές προσανατολισμένες αποκλειστικά στη μελέτη και καταγραφή των ιδιοτήτων του γήινου πεδίου βαρύτητας θα οδηγήσει στην περαιτέρω εξέλιξη της επιστήμης της φυσικής γεωδαισίας και στον ακριβέστερο προσδιορισμό της επιφάνειας του γεωειδούς. Οι προγραμματισμένες αποστολές θα διαρκέσουν περίπου 5 χρόνια και μέσα στο διάστημα αυτό θα εξετάσουν, τόσο το μέσο πεδίο της γήινης βαρύτητας, όσο και τις μικρομεταβολές που αυτό παρουσιάζει. Κατά σειρά παρουσίασης και προγραμματισμού εκτόξευσης οι ειδικές αποστολές είναι:

- CHallenging Mini-Satellite Payload – CHAMP, με προγραμματισμένη εκτόξευση μέσα στο 2000 (<http://www.gfz-potsdam.de/pb1/CHAMP/champ.htm>)
- Gravity Recovery And Climate Experiment – GRACE, με προγραμματισμένη εκτόξευση τον Ιούνιο του 2001 (<http://www.csr.texas.edu/grace/mission>)
- Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer – GOCE, με προγραμματισμένη εκτόξευση το 2004 (<http://www.gfy.ku.dk/~cct/gocefi11.htm>)

Οι αποστολές αυτές θα βοηθήσουν στην εξέλιξη της γεωδαισίας, της ωκεανογραφίας και των γεωεπιστημών γενικότερα, καθώς θα προσφέρουν μετρήσεις υψηλής ακριβείας και κατ'επέκταση μεγάλο όγκο δεδομένων σε μικρό σχετικά χρόνο. Η απαίτηση της ταχείας επεξεργασίας των δεδομένων των δορυφορικών αποστολών και οι αυξημένες απαιτήσεις στην ακρίβεια των προσδιοριστέων παραμέτρων οδηγούν στην αναπόφευκτη τροποποίηση των παλαιότερων μεθόδων επεξεργασίας ή την πρόταση νέων μεθόδων συνδυασμού, όπως παρουσιάζονται στην παρούσα μελέτη.

## 1.4 Η αξιοποίηση των φασματικών τεχνικών

Το πλήθος των σύγχρονων δεδομένων στις επιστήμες της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας οδήγησαν στην τροποποίηση των μεθόδων επεξεργασίας. Η επιπλέον ανάπτυξη της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών συνέβαλε στη μεταβολή αυτή, αφού πλέον πολύπλοκες διαδικασίες είναι δυνατό να εκτελεστούν με υψηλή ακρίβεια, δίχως αξιόλογο χρονικό κόστος. Οι σύγχρονοι υπολογιστές παρέχουν τη δυνατότητα της συνεχούς και συλλογικής αντιμετώπισης των δεδομένων, το διαχωρισμό της συνεισφοράς τους και την αξιολόγηση της ποιότητάς τους.

Τις τελευταίες δεκαετίες παρουσιάστηκαν τροποποιημένες μέθοδοι επεξεργασίας στο χώρο των συχνοτήτων, οι οποίες στηρίζονται στην εφαρμογή των μετασχηματισμών Fourier και ειδικότερα μίας συγκεκριμένης μορφής τους, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στα προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών, της μορφής των ταχέων μετασχηματισμών Fourier (Fast Fourier Transforms – FFT) [11]. Η εφαρμογή των τεχνικών FFT στη φυσική γεωδαισία παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 2.

Παρόλα τα αναμφισβήτητα πλεονεκτήματα των FFT στην επεξεργασία των γεωδαιτικών δεδομένων, όσον αφορά στην ταχύτητα των διαδικασιών, υπάρχει η βασική αδυναμία αξιολόγησης της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται χωρίς τη συνοδεία κάποιας ποσότητας, η οποία να εκφράζει την εσωτερική έστω ακρίβεια της εκτίμησης. Μία εκτίμηση της ακρίβειας είναι δυνατό να προκύψει εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων. Οπωσδήποτε όμως η διαδικασία αυτή ακολουθεί τη διαδικασία της προσέγγισης και σε καμιά περίπτωση δεν αντιμετωπίζεται ως μέρος της μεθόδου εκτίμησης. Επιπλέον, οι τεχνικές των FFT αδυνατούν να συνδυάσουν ετερογενείς πηγές δεδομένων και να «μεταδώσουν» τα σφάλματα των παρατηρήσεων στις εκτιμήσεις-προγνώσεις. Οι δύο αυτές βασικές αδυναμίες ήταν το κίνητρο για τη μελέτη και την ολοκληρωμένη παρουσίαση των μεθόδων εισόδου-εξόδου, οι οποίες αναλύονται στην παρούσα μελέτη.

Η θεωρία των συστημάτων εισόδου-εξόδου [1], [12] είναι μία ακόμη φασματική τεχνική και βασίζεται στην εφαρμογή των FFT στη γεωδαισία. Βασικός στόχος της θεωρίας είναι ο συνδυασμός της ετερογενούς φύσης των δεδομένων αξιοποιώντας τη γνώση των φασματικών τους ιδιοτήτων μέσα από ένα κλασικό κριτήριο ελαχιστοποίησης του σφάλματος της εκτίμησης. Η φασματική φύση της μεθόδου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα στην ταχεία και αποτελεσματική αντιμετώπιση μεγάλου όγκου δεδομένων. Η μέθοδος βασίζεται στην κατάλληλη τροποποίηση των συναρτήσεων σύνδεσης των εμπλεκόμενων ποσοτήτων, η οποία επιτυγχάνεται μετά από την ελαχιστοποίηση του λόγου του θορύβου-προς-σήμα (noise-to-signal ratio). Με τον τρόπο αυτό, τα σφάλματα των παρατηρήσεων είναι πλέον δυνατό να «μεταδοθούν» στις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων. Ο θόρυβος στην είσοδο απομακρύνεται με την εφαρμογή καταλλήλου φίλτρου και παρέχονται οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των αγνώστων ποσοτήτων. Μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου των συστημάτων εισόδου-εξόδου αποτελεί και η μικρότερη διάσταση των πινάκων που χρησιμοποιούνται σε σύγκριση με τις τεχνικές στο χώρο των αποστάσεων (π.χ., σημειακή προσαρμογή). Η φασματική φύση της μεθόδου επιτρέπει την διαίρεση των πινάκων που αναλύονται (διαίρεση συχνότητα με συχνότητα), αντί της πολύπλοκης διαδικασίας της αντιστροφής, που χρησιμοποιείται στις κλασικές μεθόδους.

Παρόλα τα αναμφισβήτητα πλεονεκτήματα της μεθόδου παρουσιάζονται και μερικές αδυναμίες στην εφαρμογή της με τη χρήση γεωδαιτικών δεδομένων. Απαραίτητη για τη θεωρητική τεκμηρίωση της μεθόδου είναι η παραδοχή της μη ύπαρξης συσχέτισης μεταξύ του καθαρού σήματος και του θορύβου στην είσοδο. Επίσης, απαιτείται η γνώση της φασματικής μορφής των σφαλμάτων στην είσοδο και όχι απλώς τα σφάλματα αυτά καθεαυτά. Στην όλη διαδικασία εμπλέκεται και η στασιμότητα του πεδίου του θορύβου, αφού όταν αυτή παραλείπεται χάνεται η αλγεβρική απλότητα της λύσης. Περισσότερα για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της μεθόδου παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6, όπου προτείνονται και λύσεις για την αντιμετώπιση των μειονεκτημάτων.

## 1.5 Η ανάλυση των περιεχομένων της μελέτης

Στην παρούσα μελέτη δίνεται έμφαση στην ολοκληρωμένη παρουσίαση της θεωρίας των συστημάτων εισόδου-εξόδου και ιδιαίτερα στην περίπτωση ετερογενών δεδομένων βαρύτητας, υψομετρίας, δεδομένων GPS και αλτιμετρίας. Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στην ανάλυση των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου-πολλαπλής εξόδου με θόρυβο και στην ανάπτυξη των σχέσεων πινάκων που συνδέουν τις εκτιμήσεις των σημάτων εξόδου των γενικευμένων συστημάτων και τις εκτιμήσεις των συναρτήσεων σφαλμάτων των εκτιμήσεων. Η ανάπτυξη σε μητρική μορφή των ανωτέρω σχέσεων παρουσιάζεται για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία.

Η περίπτωση των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων των αλτιμετρικών δορυφόρων αποτελεί την κατάλληλη μορφή δεδομένων για την εφαρμογή των αλγορίθμων προσδιορισμού των συναρτήσεων περιγραφής του θορύβου στην είσοδο. Παρουσιάζονται για πρώτη φορά κατάλληλες διαδικασίες προσέγγισης των συναρτήσεων αυτών, αξιοποιώντας την επαναλαμβανόμενη πληροφορία των σύγχρονων αλτιμετρικών δορυφόρων. Παρουσιάζεται η επίδραση της επιλογής της συνάρτησης περιγραφής των σφαλμάτων στην είσοδο στην τελική εσωτερική ακρίβεια της εκτίμησης. Διατυπώνονται τέλος ορισμένες προτάσεις για την αντιμετώπιση των προβλημάτων και των δυσκολιών της εφαρμογής της μεθόδου στις γεωεπιστήμες.

Ακολουθεί αναλυτικά η παρουσίαση των κεφαλαίων της διατριβής:

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι γενικές αρχές ανάλυσης του πεδίου βαρύτητας και δίνονται οι θεμελιώδεις εξισώσεις προσέγγισης των παραμέτρων του. Περιγράφονται οι αρχές των προβλημάτων των συνοριακών τιμών που ισχύουν στη φυσική γεωδαισία και οι κύριες λύσεις που προτείνονται για την επίλυσή τους. Αναφέρεται η τεχνική συνδυασμού «απομάκρυνσης – επαναφοράς» που χρησιμοποιείται στην προσέγγιση του γεωειδούς σε συνάρτηση με τις λύσεις των συνοριακών προβλημάτων. Αναλύονται οι πηγές των δεδομένων που χρησιμοποιούνται στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας και το φάσμα των συχνοτήτων, στο οποίο αυτά αναφέρονται. Στη συνέχεια, αναπτύσσονται οι τεχνικές που εφαρμόζονται για τις αναγωγές και τις διορθώσεις των βαρυτημετρικών δεδομένων από την επίδραση της τοπογραφίας και της βαθυμετρίας, έτσι ώστε οι μετρήσεις να βρίσκονται στο σύνορο της επιφάνειας που προσεγγίζεται. Παρουσιάζονται οι αναγωγές και οι διορθώσεις σε συνάρτηση με τους αλγόριθμους «απομάκρυνσης – επαναφοράς» του πεδίου και αναλύονται οι φάσεις προσέγγισης σε βήματα. Ακολουθεί η παρουσίαση των διαφορετικών συστημάτων υψών που χρησιμοποιούνται στη γεωδαισία και προσεγγίζονται οι μέθοδοι περιγραφής του πεδίου βαρύτητας. Έμφαση δίνεται στην κατανόηση των θεμελιωδών αξιωματών κάθε προσέγγισης. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι εφαρμογές των φασματικών τεχνικών του πεδίου βαρύτητας σε επίπεδη και σε σφαιρική προσέγγιση. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αναλύονται οι τεχνικές προσέγγισης των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, οι οποίες αποτελούν τις θεμελιακές συναρτήσεις περιγραφής των φασματικών ιδιοτήτων των δεδομένων και των σφαλμάτων τους στη θεωρία των συστημάτων.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στη δορυφορική αλτιμετρία. Περιγράφονται εν συντομία οι αποστολές των δορυφόρων μέχρι σήμερα, καθώς και οι προγραμματισμένες για το άμεσο μέλλον. Παρουσιάζεται η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας και αναλύονται οι πηγές των σφαλμάτων και οι τρόποι αντιμετώπισής τους. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στο τροχιακό ακτινικό σφάλμα και παρουσιάζονται και συγκρίνονται τρόποι μοντελοποίησής του. Ακολουθεί η περιγραφή της προεπεξεργασίας και της συνόρθωσης των αλτιμετρικών δεδομένων, όπου αναλύονται τα τρία κυριότερα μοντέλα συνόρθωσης και περιγράφονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του καθενός. Τέλος, παρουσιάζονται οι τρόποι προσέγγισης του αλτιμετρικού γεωειδούς.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρονται οι βασικές αρχές της θαλάσσιας βαρυτημετρίας, η οποία, μέχρι στιγμής, αποτελεί τη βασική πηγή πρωτογενών βαρυτημετρικών δεδομένων στη θάλασσα. Αναλύεται η μετρητική επεξεργασία και αναφέρονται οι διορθώσεις που εφαρμόζονται στις αρχικές μετρήσεις, λόγω του ιδιόμορφου θαλάσσιου περιβάλλοντος. Κατηγοριοποιούνται οι βασικές πηγές των σφαλμάτων μέτρησης της βαρύτητας στη θάλασσα και αναπτύσσονται τρόποι προεπεξεργασίας, συνόρθωσης και ποιοτικού ελέγχου των παρατηρήσε-

ων. Τέλος, παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογών προσέγγισης θαλάσσιου βαρυτημετρικού γεωειδούς.

Το πέμπτο κεφάλαιο αποτελεί ουσιαστικά μία εισαγωγή στις θεωρίες και τις μεθόδους που ακολουθούνται στη φυσική ωκεανογραφία για την προσέγγιση της ωκεάνιας κυκλοφορίας και της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας. Περιγράφονται οι ιδιότητες του θαλάσσιου νερού και η διαδικασία και οι αδυναμίες των μετρήσεων των ιδιοτήτων αυτών. Εισάγονται οι βασικές αρχές της ωκεάνιας κυκλοφορίας, οι φυσικοί νόμοι και οι δυνάμεις επίδρασης που τη διέπουν. Αναφέρονται τα κυρίαρχα ρεύματα του πλανήτη και αποδεικνύεται η γενική εξίσωση της κίνησης των ωκεάνιων ρευμάτων. Παρουσιάζεται η απλοποιημένη θεωρία της γεωστροφικής ροής και οι ενδιαφέρουσες εφαρμογές της στη γεωδαισία και την ωκεανογραφία. Τέλος, αναφέρεται η ιστορική εξέλιξη των μοντέλων της ωκεάνιας κυκλοφορίας και οι σχέσεις τους με τα μοντέλα πρόγνωσης των κλιματολογικών φαινομένων, όπως επίσης και οι ωκεανογραφικές εφαρμογές του πεδίου βαρύτητας.

Στο έκτο κεφάλαιο αναλύεται η θεωρία των συστημάτων εισόδου-εξόδου. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί το κύριο ερευνητικό μέρος της διατριβής. Μελετώνται οι νέες μέθοδοι συνδυασμού ετερογενών δεδομένων και προτείνονται λύσεις για τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η εφαρμογή τους στις γεωεπιστήμες. Αναπτύσσονται οι βασικές ιδιότητες περιγραφής των στοχαστικών δεδομένων και παρουσιάζονται οι συναρτήσεις συντονισμού που εκφράζουν τη γραμμικότητα των συστημάτων. Η θεωρία των συστημάτων εισάγεται καταρχήν με την απλούστερη μορφή της, δηλαδή το σύστημα απλής εισόδου-απλής εξόδου, χωρίς την παρουσία θορύβου. Η εισαγωγή του θορύβου συνεπάγεται την ανάλυση καταλλήλων κριτηρίων με στόχο την ελαχιστοποίησή του στην έξοδο. Περιγράφονται έτσι οι διαδικασίες για την αρχική εκτίμηση της βέλτιστης συνάρτησης απόκρισης συχνότητας, η οποία αποτελεί τον παράγοντα σύνδεσης των παρατηρήσεων και των εκτιμήσεων των αγνώστων στο χώρο των συχνοτήτων. Αναφέρεται η εφαρμογή των απλών συστημάτων στον προσδιορισμό του γεωειδούς και παρουσιάζεται ο αλγόριθμος προσδιορισμού των εκτιμήσεων των αγνώστων και της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων. Ακολουθεί το μοντέλο πολλαπλού σήματος εισόδου-απλής εξόδου, το οποίο και αποτελεί την αρχική γενίκευση των συστημάτων. Περιγράφεται η ενιαία ανάλυση του πολλαπλού συστήματος, καθώς επίσης και η διαδικασία κατά βήματα, που προϋποθέτει τον υπολογισμό των συσχετίσεων μεταξύ των σημάτων εισόδου. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η γενικευμένη μορφή της θεωρίας των συστημάτων, το σύστημα πολλαπλής εισόδου-πολλαπλής εξόδου, και αναπτύσσονται οι γενικευμένοι αλγόριθμοι σε μητρική μορφή. Αναλύεται η μορφή του συστήματος με την παρουσία θορύβου και παρουσιάζονται θεωρητικά παραδείγματα εφαρμογής των γενικευμένων συστημάτων στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη μορφή των τελικών σχέσεων πινάκων με στόχο την εύκολη αλγοριθμική τους επεξεργασία. Το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου ασχολείται με το πρόβλημα του θορύβου εισόδου. Παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι προσομοίωσης του θορύβου των μετρήσεων και προτείνονται νέες μέθοδοι προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων των μετρήσεων με τη χρησιμοποίηση επαναλαμβανόμενων δειγματικών τιμών, όπως στην περίπτωση της δορυφορικής αλτιμετρίας και των επικείμενων δορυφορικών αποστολών παρατήρησης του γήινου πεδίου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εφαρμογές της θεωρίας των συστημάτων στο βέλτιστο συνδυασμό ετερογενών δεδομένων. Οι περιοχές που επιλέγονται βρίσκονται κατά κανόνα στην ελληνική επικράτεια, όπου τα διαθέσιμα ετερογενή δεδομένα συνδυάζονται βέλτιστα για την εκτίμηση παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας. Περιοχές εκτός Ελλάδας χρησιμοποιούνται κυρίως λόγω των γεωφυσικών ιδιαιτεροτήτων τους και της μεγάλης τους έκτασης, έτσι ώστε να είναι εφικτή η δοκιμή των μεθόδων σε ευρύτερες περιοχές εφαρμογών. Το κεφάλαιο χωρίζεται σε δύο μέρη: τις μελέτες προσομοίωσης και τις μελέτες με πραγματικά δεδομένα. Στις μελέτες προσομοίωσης δημιουργούνται πεδία τυχαίων θορύβων μέσω γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Μελετάται η επίδραση της μορφής της κατανομής του θορύβου εισόδου στην εκτίμηση εξόδου και η διαφορά μεταξύ του σήματος εισόδου και εξόδου. Δοκιμάζεται με τον τρόπο αυτόν η ευαισθησία της μεθόδου στο θόρυβο εισόδου και παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις ανάλυσης των επιδράσεων του θορύβου στα αποτελέσματα. Ακολουθεί

η μελέτη των συναρτήσεων μεταβλητοτήτων των σφαλμάτων ανάλογα με τη μορφή και το μέγεθος του θορύβου εισόδου. Παρουσιάζεται στη συνέχεια η εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων στην προσέγγιση των αποκλίσεων της καταχορύφου. Μελετάται η επίδραση της μέσης τιμής των πεδίων στον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, καθώς επίσης και του βαθμού ανάπτυξης του γεωδυναμικού μοντέλου που χρησιμοποιείται. Περιγράφεται ακόμα η διαδικασία συνδυασμού μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης και μετρήσεων βαρύτητας στην προσέγγιση του γεωειδούς συνδυασμού σε τοπική κλίμακα (περιοχή της Θεσσαλονίκης), όπως επίσης και ο συνδυασμός μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης, αλτιμετρικού γεωειδούς και ανωμαλιών ελευθέρου αέρα στην προσέγγιση του θαλάσσιου γεωειδούς. Στις μελέτες με τη χρήση πραγματικών δεδομένων ακολουθούνται οι διαδικασίες προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6. Εξετάζεται η συνδυασμένη προσέγγιση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας χρησιμοποιώντας τις σύγχρονες αλτιμετρικές μετρήσεις και τα θαλάσσια βαρυτημετρικά δεδομένα για την περιοχή της Μεσογείου. Μελετάται η ετήσια συμπεριφορά των δεδομένων της αλτιμετρίας μέσω της προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος σε ετήσια βάση. Ακολουθεί η προσέγγιση της γεωστροφικής ροής που προκύπτει από την εκτίμηση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας συνδυασμού. Η ίδια εφαρμογή πραγματοποιείται στην ευρύτερη περιοχή του Βόρειου Ατλαντικού ωκεανού. Τέλος, παρουσιάζονται οι μελέτες προσέγγισης του γεωειδούς στον ελληνικό χώρο και του τοπικού γεωειδούς της ευρύτερης περιοχής του νομού Θεσσαλονίκης χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γενικευμένων συστημάτων για το συνδυασμό των ετερογενών δεδομένων.

Από το σύνολο των αριθμητικών πειραμάτων αποδεικνύεται η δυνατότητα χρήσης πολύπλοκων θεωριών σε πρακτικά και εφαρμοσμένα θέματα, καθώς δίνουν λύσεις σε προβλήματα καθορισμού επιφανειών αναφοράς, προσδιορισμού θέσης, ενοποίησης και ομογενοποίησης γειτονικών datum, κ.α. Τα προβλήματα αυτά καλύπτουν τις απαιτήσεις διεπιστημονικών εφαρμογών κοινού προσανατολισμού σε όλο το φάσμα των γεωεπιστημών. Αποδεικνύεται έτσι, ότι η βασική θεωρητική έρευνα, μέσα από την κατάλληλη αλγοριθμική επεξεργασία, είναι δυνατό να καταστεί χρήσιμο εργαλείο επίλυσης προβλημάτων εφαρμογών.

# Βιβλιογραφία

- [1] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Random data - Analysis and measurements procedures*. 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [2] European Commission. *Climate Change and Impacts*. European Commission, Belgium, 1999.
- [3] European Commission. *Global Change: Proceedings of the first Demetra meeting*. European Commission, Chianciano Terme, Italy, 1999.
- [4] W. Heiskanen and H. Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co, 1967.
- [5] W. A. Heiskanen and F. A. Moritz. *The earth and its gravity field*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [6] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and J. Collins. *GPS. Theory and Practice*. Springer, New York, 1992.
- [7] E. Lisitzin. *Sea Level Changes*. Elsevier, 1974.
- [8] I. Newton. *Principia*. London, England, 1687.
- [9] D. A. Ross. *Introduction to Oceanography*. HarperCollins College Publishers, New York, 1995.
- [10] R. Rummel. Principle of Satellite Altimetry and Elimination of Radial Orbit Errors. In *Satellite Altimetry for Geodesy and Oceanography*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 50, pp. 189–241. Springer, 1993.
- [11] M.G. Sideris. Computation of gravimetric terrain corrections using fast Fourier transform techniques. Msc Thesis, UCSE Report 20007, Division of Surveying Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, March 1984.
- [12] M.G. Sideris. On the use of heterogeneous noisy data in spectral gravity field modeling methods. *Journal of Geodesy*, 70, pp. 470–479, 1996.



## Κεφάλαιο 2

# Το πεδίο βαρύτητας

### 2.1 Γενικά για τα γεωδαιτικά προβλήματα συνοριακών τιμών

Όπως είναι γνωστό, το αντικείμενο της επιστήμης της γεωδαισίας σχετίζεται με τον προσδιορισμό του σχήματος της επιφάνειας της Γης και την προσέγγιση του εξωτερικού γήινου πεδίου βαρύτητας. Για την προσέγγιση του εξωτερικού πεδίου βαρύτητας χρησιμοποιούνται οι θεωρίες των γεωδαιτικών προβλημάτων συνοριακών τιμών, σύμφωνα με τις οποίες η προσέγγιση επιτυγχάνεται με την ανάλυση παρατηρήσεων διαφόρων συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας, οι οποίες αναφέρονται στο σύνορο της γήινης επιφάνειας. Η έννοια της συνοριακής γήινης επιφάνειας ως αναφοράς όλων των επίγειων παρατηρήσεων, με σκοπό την προσέγγιση του εξωτερικού πεδίου, σχετίζεται άμεσα με τη θεμελιώδη διαφορική σχέση των Laplace και Poisson.

Το γήινο δυναμικό (gravity potential) διακρίνεται σε δύο συνιστώσες:

- Το δυναμικό έλξης (gravitational or attraction potential) που οφείλεται στην έλξη των μαζών με βάση τη Νευτώνεια θεωρία.
- Το φυγοκεντρικό δυναμικό (centrifugal potential) που οφείλεται στην ύπαρξη της περιστροφικής κίνησης της Γης.

Το δυναμικό έλξης ικανοποιεί την εξίσωση του Poisson:

$$\Delta V = -4\pi G\rho, \quad (2.1)$$

όπου με  $\Delta$  συμβολίζεται ο τελεστής του Laplace,  $G$  είναι η Νευτώνεια σταθερά της παγκόσμιας έλξης και  $\rho$  η πυκνότητα των μαζών.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

ενώ στην περίπτωση που το σημείο υπολογισμού βρίσκεται εκτός των μαζών ισχύει η εξίσωση του Laplace:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

Οι εξισώσεις που ικανοποιούν την (2.3) αποτελούν μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων και ονομάζονται αρμονικές (harmonic functions). Το γήινο πεδίο βαρύτητας δεν ικανοποιεί τη συνθήκη της αρμονικότητας, γιατί περιέχει και τον όρο που οφείλεται στο φυγοκεντρικό δυναμικό [32]. Το δυναμικό της βαρύτητας μπορεί να διαχωριστεί σε ένα κανονικό μέρος, το

οποίο μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων και σε ένα υπολοιοπόμενο διαταρακτικό μέρος. Για το διαταρακτικό δυναμικό  $T$  ισχύει:

$$T = W - U = V + \Phi - (V' + \Phi) = V - V', \quad (2.4)$$

όπου  $V$  το πραγματικό δυναμικό έλξης,  $V'$  το κανονικό δυναμικό έλξης και  $\Phi$  το φυγοκεντρικό δυναμικό. Το διαταρακτικό δυναμικό προκύπτει από τη διαφορά δύο αρμονικών συναρτήσεων και επομένως ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. Η ιδιότητα της αρμονικότητας είναι θεμελιώδης στα γεωδαιτικά προβλήματα, γιατί μόνο αρμονικές συναρτήσεις μπορούν να προσδιοριστούν επάνω στη συνοριακή επιφάνεια.

Η έννοια του διαχωρισμού σχετίζεται με την κλασική αντιμετώπιση των προβλημάτων της φυσικής γεωδαισίας: το παρατηρούμενο μέγεθος διαχωρίζεται στο μέρος που μπορεί να υπολογιστεί θεωρητικά, μέσω κάποιου μοντέλου, και ενός υπολοιοπόμενου μέρους που αποτελεί τη διαφορά του μοντέλου από τη φυσική πραγματικότητα.

Στην περίπτωση του γήινου πεδίου βαρύτητας τη θέση του μοντέλου της Γης καταλαμβάνει ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής, για το οποίο ισχύουν οι παραδοχές:

1. Η μάζα του ελλειψοειδούς-μοντέλου λαμβάνεται ίση με την πραγματική γήινη μάζα.
2. Η ταχύτητα περιστροφής του ελλειψοειδούς-μοντέλου ισούται με την ταχύτητα περιστροφής της πραγματικής Γης.
3. Το κέντρο μάζας του ελλειψοειδούς-μοντέλου συμπίπτει με το κέντρο μάζας της πραγματικής Γης.

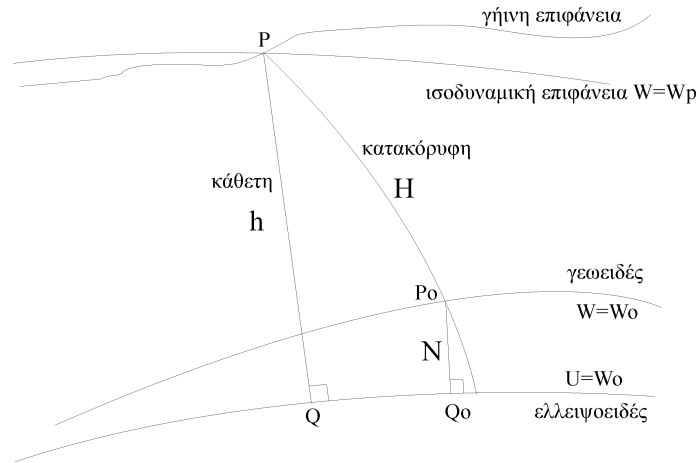
Πριν αναλυθούν οι κατηγορίες των γεωδαιτικών προβλημάτων συνοριακών τιμών, θα δοθεί ένας ορισμός της συνοριακής επιφάνειας. Ένας πρώτος ορισμός θα ήταν ότι η συνοριακή επιφάνεια συμπίπτει με την επιφάνεια του εδάφους. Ο ορισμός αυτός όμως δεν θα ήταν απολύτως σωστός. Και αυτό γιατί στην επιφάνεια του εδάφους υπάρχουν διάφορα αντικείμενα, των οποίων η χαμηλή πυκνότητα δε σχετίζεται με τις πυκνότητες των μαζών που λαμβάνονται υπόψη στις μετρήσεις βαρύτητας. Μπορεί επίσης να λεχθεί ότι τα αντικείμενα αυτά εισάγουν ένα ποσοστό θορύβου υψηλής συχνότητας στο βαρυτημετρικό σήμα. Εκτός αυτών, η λεπτομερής επιφάνεια του πραγματικού εδάφους καθιστά τις αναγωγές των βαρυτημετρικών ποσοτήτων αδύνατες. Θα πρέπει λοιπόν, ως συνοριακή επιφάνεια να θεωρηθεί μια επιφάνεια ομαλή, τέτοια που να πραγματοποιούνται με ευκολία οι αναγωγές των μετρήσεων στο σύνορο, χωρίς την εισαγωγή μεγάλων σφαλμάτων του μοντέλου σε σύγκριση με το θόρυβο. Οι διορθώσεις που εφαρμόζονται στις βαρυτημετρικές ποσότητες, λόγω των τοπογραφικών επιδράσεων, έχουν ως αποτέλεσμα την αναγωγή των μετρήσεων σε μια ομαλή συνοριακή επιφάνεια.

Αν η γεωμετρία της συνοριακής επιφάνειας είναι γνωστή, τότε το διαταρακτικό δυναμικό  $T$  είναι η μοναδική άγνωστη ποσότητα του προβλήματος. Το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών ονομάζεται **ορισμένο** (fixed geodetic boundary value problem). Όταν στο διάστημα των αγνώστων προστίθενται και τα γεωμετρικά στοιχεία της θέσης της συνοριακής επιφάνειας, τότε τα αντίστοιχα προβλήματα ονομάζονται **ελεύθερα** (free). Στην περίπτωση αυτή, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι άγνωστες ποσότητες είναι, εκτός από το διαταρακτικό δυναμικό, και οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος θέσης των σημείων της συνοριακής επιφάνειας. Το είδος αυτό του συνοριακού προβλήματος ονομάζεται **διανυσματικά ελεύθερο** (vectorial free). Είναι δυνατό να θεωρηθούν ως γνωστές οι οριζόντιες συντεταγμένες των σημείων της συνοριακής επιφάνειας και ως άγνωστες ποσότητες η κατακόρυφη συντεταγμένη και το διαταρακτικό δυναμικό. Το πρόβλημα ονομάζεται σε αυτήν την περίπτωση **ελεύθερο κατά κλίμακα** (scalar free) [31].

Οι λύσεις στα προβλήματα των συνοριακών τιμών που αναφέρθηκαν, διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: Τις κλασικές, με αντιπροσωπευτικότερη την προσέγγιση του Stokes και τις σύγχρονες, με αντιπροσωπευτικότερη τη λύση του Molodensky.

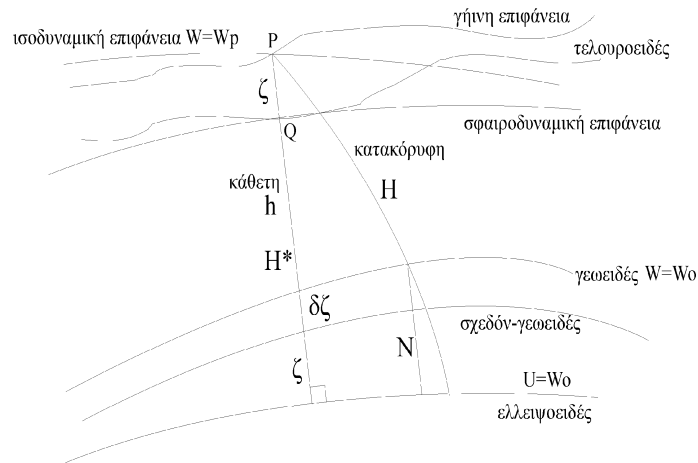
Σύμφωνα με τον Stokes [79], «υπάρχει μόνο μία αρμονική συνάρτηση που να έχει δοσμένες συνοριακές τιμές επάνω σε μία επιφάνεια, εφόσον μια τέτοια συνάρτηση υπάρχει». Ο Stokes θεωρεί ως συνοριακή επιφάνεια το **γεωειδές** (geoid), δηλαδή την ισοδυναμική επιφάνεια του

πεδίου βαρύτητας που προσεγγίζει τη μέση στάθμη των θαλασσών σε παγκόσμια κλίμακα, χωρίς να λάβουμε υπόψη την επίδραση των θαλασσίων ρευμάτων, των παλιρροιών, των πλανητικών επιδράσεων και των μετεωρολογικών φαινομένων.



Σχήμα 2.1: Οι θεμελιώδεις επιφάνειες στο πρόβλημα του Stokes.

Σύμφωνα με το Molodensky [53], ως συνοριακή επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί η επιφάνεια του εδάφους, στην οποία πραγματοποιούνται οι μετρήσεις. Το πρόβλημα του Molodensky μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «Εάν επάνω σε όλα τα σημεία της γήινης επιφάνειας δοθούν το δυναμικό της βαρύτητας και το διάνυσμα της βαρύτητας, να προσδιοριστεί η επιφάνεια».



Σχήμα 2.2: Οι θεμελιώδεις επιφάνειες στο πρόβλημα του Molodensky.

Η κλασική λύση που αναφέρει ο Stokes προϋποθέτει την αναγωγή όλων των μετρήσεων στη συνοριακή επιφάνεια του γεωειδούς. Με τη σειρά τους οι αναγωγές των μετρήσεων απαιτούν γνώση της πυκνότητας των μαζών μεταξύ της γήινης επιφάνειας μετρήσεων και της συνοριακής επιφάνειας του γεωειδούς και επομένως την εισαγωγή παραδοχών για την κατανομή των γήινων μαζών. Οι παραδοχές αυτές δεν υφίστανται, όταν η λύση δίνεται από τη σύγχρονη θεωρία του Molodensky, γιατί ως συνοριακή επιφάνεια λαμβάνεται η γήινη επιφάνεια. Σύμφωνα με τη λύση του Stokes, ως προσδιοριστέες ποσότητες μπορεί να θεωρηθούν το γεωειδές (ως συνοριακή επιφάνεια) και το διαταραχτικό δυναμικό, ενώ σύμφωνα με το Molodensky, ως

προσδιοριστέες ποσότητες μπορεί να θεωρηθούν η γήινη επιφάνεια (ως συνοριακή επιφάνεια) και το διαταραχτικό δυναμικό.

Σύμφωνα με τη λύση του Stokes, αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν μάζες εκτός της επιφάνειας του γεωειδούς, τότε το διαταραχτικό δυναμικό  $T$  θα ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. Στην περίπτωση αυτή η αποχή του γεωειδούς, που αντιπροσωπεύει την απόσταση της συνοριακής επιφάνειας από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς-μοντέλου, θα δίνεται από τη θεμελιώδη σχέση του Bruns:

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (2.5)$$

όπου  $\gamma$  είναι η τιμή της κανονικής βαρύτητας. Από τον ορισμό της ανωμαλίας της βαρύτητας και τη σχέση του Bruns προκύπτει η θεμελιώδης εξίσωση της φυσικής γεωδαισίας [32], [82]:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T. \quad (2.6)$$

Η θεμελιώδης εξίσωση της φυσικής γεωδαισίας αποτελεί τη συνοριακή συνθήκη, την οποία πρέπει να ικανοποιεί το  $T$  στην επιφάνεια του γεωειδούς. Η παραπάνω συνθήκη που ισχύει στην επιφάνεια του συνόρου, καθώς επίσης και η διαφορική εξίσωση του Laplace, η οποία ισχύει εκτός συνόρου, αποτελούν τις βασικές σχέσεις για τον προσδιορισμό του διαταραχτικού δυναμικού και επομένως και του γεωειδούς. Αναπτύσσοντας την αρμονική συνάρτηση του διαταραχτικού δυναμικού σε σειρά αρμονικών συναρτήσεων λαμβάνουμε την εξίσωση του Stokes για τον προσδιορισμό του γεωειδούς σε σφαιρική προσέγγιση:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma, \quad (2.7)$$

όπου  $R$  η μέση γήινη ακτίνα,  $\gamma$  μια μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας,  $\sigma$  η σφαιρική επιφάνεια, στην οποία ισχύει η σχέση και  $S(\psi)$  η συνάρτηση του Stokes, η οποία εξαρτάται από τη σφαιρική απόσταση  $\psi$  και δίνεται από την κλειστή σχέση [32]:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin(\psi/2) + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln [\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)] \quad (2.8)$$

Στην ενότητα 2.6 η εξίσωση του Stokes παρουσιάζεται σε συνελικτική μορφή (convolution form), γεγονός που επιτρέπει την εφαρμογή φασματικών τεχνικών στην προσέγγιση του γεωειδούς. Οι κλίσεις του γεωειδούς ως προς τη διεύθυνση βορρά-νότου και ανατολής-δύσης εκφράζονται με τις συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου κατά μεσημβρινό και κατά παράλληλο, αντίστοιχα [32]:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} V(\psi) \Delta g \cos \alpha d\sigma \\ \eta &= \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} V(\psi) \Delta g \sin \alpha d\sigma \end{aligned} \quad (2.9)$$

όπου  $\alpha$  το αζιμούθιο στο σημείο υπολογισμού και  $V(\psi)$  η συνάρτηση Vening-Meinesz, η οποία δίνεται από την κλειστή σχέση [32]:

$$\begin{aligned} V(\psi) = \frac{dS}{d\psi} &= -\frac{\cos(\psi/2)}{2 \sin^2(\psi/2)} + 8 \sin \psi \\ &- 6 \cos(\psi/2) - 3 \frac{1 - \sin(\psi/2)}{\sin \psi} \\ &+ 3 \sin \psi \ln[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Η λύση που προτείνει ο Molodensky αναφέρει τη γήινη επιφάνεια ως σύνορο και οι μετρήσεις που σχετίζονται με τον προσδιορισμό της αναφέρονται στην ίδια την επιφάνεια. Επομένως, η επιφάνεια μπορεί να προσδιοριστεί ως συνάρτηση του δυναμικού και του διανύσματος της βαρύτητας:

$$S = f(W_S, \vec{g}_S), \quad (2.11)$$

όπου  $f$  είναι ο άγνωστος τελεστής του Molodensky και  $\vec{g}_S = \text{grad}W_S$ . Ο τελεστής του Molodensky είναι μη γραμμικός τελεστής και ακολουθείται διαδικασία γραμμικοποίησής του κατά Taylor [81]. Η επιφάνεια  $S$  προσεγγίζεται από μια γνωστή επιφάνεια που ονομάζεται **τελουροειδής** (telluroid), το δυναμικό της βαρύτητας  $W_S$  από το κανονικό δυναμικό της βαρύτητας  $U_S$  και το διάνυσμα της βαρύτητας  $\vec{g}_S$  από την κανονική βαρύτητα  $\vec{g}_S = \text{grad}U_S$ . Σε σφαιρική προσέγγιση η συνοριακή συνθήκη είναι η ίδια με τη λύση του Stokes (2.7). Οι Molodensky et al. [53] δίνουν τη λύση στο πρόβλημα των συνοριακών τιμών εκφράζοντας το διαταρακτικό δυναμικό  $T$  ως αρμονικό δυναμικό μιας λεπτής επιφάνειας επάνω στο τελουροειδές. Η λύση του απλού γραμμικού προβλήματος του Molodensky δίνει το διαταρακτικό δυναμικό σε σειρά απείρων όρων [81]:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad (2.12)$$

$$T_n = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma. \quad (2.13)$$

Για τους όρους μηδενικής και πρώτης τάξης ( $n = 0, 1$ ) ισχύουν:

$$\begin{aligned} G_0 &= \Delta g \\ G_1 &= R^2 \iint_{\sigma} \frac{h - h_P}{l_0^3} k_0 d\sigma \end{aligned} \quad (2.14)$$

και

$$l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2} \quad (2.15)$$

με τη βοηθητική συνάρτηση

$$k_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \Delta g + \frac{3T_0}{2R} \right). \quad (2.16)$$

Η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών του Molodensky οδηγεί στον προσδιορισμό των **ανωμαλιών ύψους**  $\zeta$  (height anomalies) [32], οι οποίες αποτελούν την αποχή του τελουροειδούς από τη γήινη επιφάνεια, ή, αντίστοιχα, την αποχή του ελλειψοειδούς αναφοράς από την επιφάνεια του **σχεδόν-γεωειδούς** (quasi-geoid). Στη λύση του Molodensky οι ανωμαλίες ύψους είναι δυνατό να εκφραστούν με την ανάπτυξη μιας σειράς [9], [55], [71], [47], [12]:

$$\zeta' = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \dots, \quad (2.17)$$

όπου

$$\zeta_n = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma, \quad n = 0, 1, \quad (2.18)$$

$$\zeta_n = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} G_n S(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^2}{l_0^3} G_{n-2} d\sigma, \quad n = 2, 3. \quad (2.19)$$

$G_0 = \Delta g'$  είναι οι ανωμαλίες βαρύτητας που αναφέρονται στο τελουροειδές. Οι επόμενοι τρεις όροι έχουν τη μορφή [12]:

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)}{l_0^3} G_0 d\sigma,$$

$$G_2 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)}{l_0^3} G_1 d\sigma + G_0 \tan^2 \beta, \quad (2.20)$$

$$G_3 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)}{l_0^3} G_2 d\sigma + G_1 \tan^2 \beta - \frac{3R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^3}{l_0^5} G_0 d\sigma,$$

όπου  $\beta$  είναι η συνολική γωνία κλίσης του εδάφους. Οι αντίστοιχες σχέσεις για τον υπολογισμό των συνιστωσών της απόκλισης της κατακόρυφου υπολογίζονται ως εξής [32]:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \\ -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Οι συνιστώσες της απόκλισης δίνονται σύμφωνα με το πρόβλημα του Molodensky ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} G_n V(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma, \quad n = 0, 1 \quad (2.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} G_n V(\psi) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma - \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \frac{3R \cos(\psi/2)(h_P - h)^2}{l_0^4} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} G_{n-2} d\sigma, \quad n = 2, 3 \quad (2.23)$$

και οι συντελεστές  $G_n$  δίνονται από τις (2.20).

Στο κλασικό πρόβλημα συνοριακών τιμών του Stokes οι αποχές του γεωειδούς  $N$  υπολογίζονται από τιμές ανωμαλιών βαρύτητας ανηγμένες στο γεωειδές, με τη βοήθεια της εξίσωσης του Stokes. Οι αναγωγές στην επιφάνεια του γεωειδούς πραγματοποιούνται υιοθετώντας κάποιες παραδοχές για την πυκνότητα των μαζών που μεσολαβούν μεταξύ της γήινης επιφάνειας και του γεωειδούς. Οι αναγωγές τελικά υλοποιούνται με τη βοήθεια της κατακόρυφης βαθμίδας της κανονικής βαρύτητας σύμφωνα με την:

$$g_{P_0} \approx g_P - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H, \quad (2.24)$$

όπου  $P$  είναι το σημείο της επιφάνειας της γης και  $P_0$  είναι το αντίστοιχο σημείο στη επιφάνεια του γεωειδούς. Η μεταφορά του σημείου  $P$  πραγματοποιείται κατά μήκος της κατακόρυφου, σύμφωνα με την προβολή **Helmert** [32] (βλ. σχήμα 2.1).

Στο πρόβλημα συνοριακών τιμών του Molodensky οι ανωμαλίες ύψους υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\zeta = \frac{T_Q}{\gamma_Q}, \quad (2.25)$$

όπου  $Q$  το σημείο υπολογισμού στο τελουροειδές (βλ. σχήμα 2.2). Η σχέση που συνδέει την αποχή του γεωειδούς  $N$  με την ανωμαλία ύψους  $\zeta$  δίνεται ως εξής:

$$h = \zeta + H^* = N + H, \quad (2.26)$$

όπου  $H^*$  είναι η απόσταση του ελλειψοειδούς αναφοράς από το τελουροειδές και ονομάζεται **κανονικό υψόμετρο** (normal height). Από την (2.26) προκύπτει η σχέση:

$$N = \zeta + (H^* - H) = \zeta + \delta\zeta \quad (2.27)$$

και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του ορθομετρικού υψομέτρου και του κανονικού υψομέτρου λαμβάνεται η ποσότητα  $\delta\zeta$  ως [32]:

$$\delta\zeta = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H \approx \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H, \quad (2.28)$$

όπου  $\bar{g}$  είναι η μέση τιμή της βαρύτητας κατά μήκος της κατακορύφου,  $\bar{\gamma}$ , η μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας κατά μήκος της καθέτου και  $\Delta g_B$  η τιμή της ανωμαλίας Bouguer στο σημείο υπολογισμού  $P$ . Η ποσότητα  $\delta\zeta$  στην εξίσωση (2.28) είναι δυνατό να ερμηνευθεί ως ο διορθωτικός παράγοντας για την «προς τα άνω επέκταση» (upward continuation) των υψομέτρων του γεωειδούς από την επιφάνεια της θάλασσας στο επίπεδο της επιφάνειας του εδάφους [73]. Κατά μέσο όρο, η τιμή της διόρθωσης  $\delta\zeta$  κυμαίνεται από μερικά εκατοστά έως και 1 μέτρο, σε πολύ ορεινές περιοχές [82]. Η διόρθωση αυτή πρέπει να γίνεται στις ανωμαλίες ύψους, έτσι ώστε τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα με αποχές του γεωειδούς που λαμβάνονται από άλλες πηγές μετρήσεων, όπως, π.χ., αλτιμετρικά δεδομένα ή μετρήσεις GPS.

## 2.2 Τεχνική συνδυασμού «απομάκρυνσης – επαναφοράς» (remove – restore)

Η σύγχρονη γεωδαιτική θεώρηση για την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας προϋποθέτει τη μεταφορά του προβλήματος του βέλτιστου συνδυασμού των δεδομένων από το χώρο των αποστάσεων στο χώρο των συχνοτήτων. Η ανάλυση του σήματος στις κυρίαρχες συχνότητες του σχετίζεται με την τεχνική της «απομάκρυνσης – επαναφοράς». Η τεχνική αυτή αναφέρεται στον τρόπο διαχωρισμού των υψηλών και των χαμηλών συχνοτήτων από το μετρούμενο σήμα, έτσι ώστε να προκύψει μια ομαλοποιημένη σειρά δεδομένων, η οποία θα μπορεί να προσεγγιστεί με τις παραδοχές μιας στοχαστικής διαδικασίας. Μια στοχαστική διαδικασία, όταν εφαρμόζεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας, έχει τη μορφή σειρών σφαιρικών αρμονικών [55]:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda], \quad (2.29)$$

όπου  $P_{nm}$  είναι τα πολυώνυμα του Legendre και  $a_{nm}$ ,  $b_{nm}$  οι συντελεστές του αναπτύγματος. Ο βαθμός ανάπτυξης των σφαιρικών αρμονικών εξαρτάται από την πυκνότητα κάλυψης των μετρήσεων βαρύτητας στο σύνορο της επιφάνειας. Η προσέγγιση του πεδίου γίνεται σήμερα με τη βοήθεια μεγάλου πλήθους ετερογενών δεδομένων. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται μπορεί να είναι δορυφορικά, από αέρα ή επίγεια. Τα δορυφορικά δεδομένα διακρίνονται σε απευθείας παρατηρήσεις της τροχιάς των δορυφόρων, σε αλτιμετρικές παρατηρήσεις πάνω από ωκεάνιες εκτάσεις και τέλος σε άμεσες δορυφορικές μετρήσεις του πεδίου (αναμενόμενοι δορυφόροι GRACE, CHAMP και GOCE). Οι από αέρα παρατηρήσεις διακρίνονται στα δεδομένα της από αέρα βαρυτημετρίας και βαθυδομετρίας. Τα επίγεια δεδομένα αποτελούνται από μετρήσεις βαρύτητας στη στεριά ή τη θάλασσα, μετρήσεις πυκνοτήτων και υψόμετρα του γήινου αναγλύφου (συνήθως ψηφιακά μοντέλα εδάφους). Το μεγάλο πλήθος των δεδομένων καθιστά αναγκαία τη χρήση των φασματικών τεχνικών για τη γρήγορη προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας.

Η χρήση των (2.7) και (2.13) απαιτούν την ύπαρξη ανωμαλιών βαρύτητας κατανομημένων σε ολόκληρη τη συνοριακή επιφάνεια. Κάτι τέτοιο δεν είναι καθόλου πρακτικό στην περίπτωση τοπικών προσεγγίσεων του πεδίου βαρύτητας. Επομένως, απαραίτητες είναι κατάλληλες τροποποιήσεις των μεθόδων, έτσι ώστε οι υπολογισμοί να καλύπτουν το σύνολο του φάσματος του πεδίου. Οι (2.7) και (2.13) εφαρμόζονται σε μια περιορισμένη περιοχή. Αν τα αποτελέσματα των εφαρμογών των σχέσεων μεταφερθούν στο χώρο των συχνοτήτων καλύπτουν μόνον ένα μέρος του συνολικού φάσματος του πεδίου βαρύτητας, δηλαδή τις μέσες συχνότητες και τμήματα των υψηλών συχνοτήτων. Για την πλήρη απεικόνιση του φάσματος του πεδίου εφαρμόζεται η τεχνική «απομάκρυνσης – επαναφοράς».

Οι χαμηλές συχνότητες του φάσματος του πεδίου βαρύτητας προσδιορίζονται με τη βοήθεια **Παγκόσμιων Μοντέλων Βαρύτητας** (Global Gravity Models). Ουσιαστικά εφαρμόζονται υπολογισμένοι εκ των προτέρων συντελεστές σε αναπτύγματα σφαιρικών αρμονικών ανάλογων της (2.29). Οι συντελεστές αυτοί έχουν υπολογιστεί από δεδομένα κατανομημένα σε ολόκληρη

την επιφάνεια της Γης με ανάλυση σε μεγάλα υπολογιστικά συστήματα (π.χ., CRAY supercomputers). Τα μοντέλα αυτά μπορούν να διακριθούν σε **Δορυφορικά Μοντέλα** (Satellite-only Models), όταν για τον υπολογισμό των συντελεστών έχουν χρησιμοποιηθεί αμιγώς δορυφορικά δεδομένα και σε **Μοντέλα Συνδυασμού** (Combined Models), όταν χρησιμοποιούνται δορυφορικά και επίγεια δεδομένα [6]. Οι στρατηγικές ελέγχου και οι διαδικασίες συνόρθωσης των δεδομένων παρουσιάζονται αναλυτικά από τους Rapp [63] και Pavlis [61]. Το μοντέλο συνδυασμού που κατά κανόνα χρησιμοποιείται στις εφαρμογές σήμερα είναι το Earth Gravity Model – EGM96, το οποίο προσδιορίστηκε από το κέντρο διαστημικών πτήσεων Goddard (Goddard Space Flight Center – GSFC) της NASA σε συνεργασία με την Εθνική Υπηρεσία Απεικόνισης και Χαρτογράφησης των Η.Π.Α. (National Imagery and Mapping Agency – NIMA) [42]. Οι συντελεστές του μοντέλου έχουν υπολογιστεί για βαθμό και τάξη 360 και επομένως το μοντέλο έχει μια διακριτική ικανότητα 30" [42]. Με την εφαρμογή των παγκόσμιων μοντέλων βαρύτητας καλύπτεται το μέρος του φάσματος του πεδίου που αφορά στις χαμηλές συχνότητες.

Μέρος των υψηλών και πολύ υψηλών συχνοτήτων στο φάσμα του πεδίου βαρύτητας προσδιορίζεται ύστερα από επεξεργασία των πληροφοριών που παρέχουν οι εγγύς γεωμορφολογικοί σχηματισμοί της περιοχής υπολογισμού. Ένα λεπτομερές **Ψηφιακό Μοντέλο Εδάφους** (Digital Terrain Model – DTM) παρέχει την απαραίτητη πληροφορία για την απεικόνιση του φάσματος στις υψηλές συχνότητες. Τα ψηφιακά μοντέλα εδάφους αποτελούν την τριδιάστατη απεικόνιση του αναγλύφου της περιοχής και υπολογίζονται είτε από ψηφιοποιήσεις υψομετρικών χαρτών, είτε φωτογραμμετρικά, είτε τέλος με τη βοήθεια εικόνων τηλεπισκοπικών δορυφόρων. Ειδικές ομάδες εργασίας της Διεθνούς Ένωσης Γεωδαισίας (International Association of Geodesy – IAG) έχουν συσταθεί με σκοπό τον έλεγχο της αξιοπιστίας παγκόσμιων ψηφιακών μοντέλων εδάφους. Σύγχρονα μοντέλα είναι το ETOPO5 [17], το οποίο έχει διακριτική ικανότητα 5' × 5' και το GLOBE [23], το οποίο αποτελεί τη βελτίωση του ETOPO5 με διακριτική ικανότητα 30" × 30". Οι πληροφορίες για τη βαθυμετρία λαμβάνονται από ωκεανογραφικές βάσεις, όπως η βάση Digital Bathymetric Data Base-Variable Resolution Version 1.0 – DBDB-V [15]. Ο διαχωρισμός υψομετρίας - βαθυμετρίας σχετίζεται με τις διαφορετικές τεχνικές επεξεργασίας των δεδομένων. Οι τεχνικές προσέγγισης της τοπογραφίας/βαθυμετρίας ποικίλλουν, ανάλογα με τις παραδοχές για το γεωδαιτικό πρόβλημα των συνοριακών τιμών που εφαρμόζεται. Οι διαφορετικές τεχνικές θα παρουσιαστούν στην επόμενη ενότητα. Οι πολύ υψηλές συχνότητες του φάσματος μπορούν να προκύψουν από την πληροφορία ενός **Ψηφιακού Μοντέλου Πυκνοτήτων** (Digital Density Model – DDM). Το ψηφιακό μοντέλο πυκνοτήτων μπορεί να υπολογιστεί με κατάλληλες δειγματοληπτικές μεθόδους και, κυρίως, με παρατηρήσεις διάδοσης σεισμικών κυμάτων μέσα από τα στρώματα του γήινου φλοιού. Άλλη τεχνική παραγωγής ενός DDM είναι η ψηφιοποίηση γεωλογικού χάρτη. Τα τριδιάστατα ψηφιακά μοντέλα πυκνότητας δίνουν τη δυνατότητα χρησιμοποίησης πιο αξιόπιστων τιμών αντί μιας σταθερής μέσης τιμής πυκνότητας, όπως συνήθως γίνεται στους υπολογισμούς.

Η διαδικασία προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας με τη βοήθεια της τεχνικής «απομάκρυνσης – επαναφοράς» και, ταυτόχρονα, ένα παράδειγμα προσέγγισης του γεωειδούς από ανωμαλίες ελευθέρου αέρα δίνονται στη συνέχεια:

1. Ο διαχωρισμός στις κυρίαρχες συχνότητες επιβάλλει την απομάκρυνση της συνεισφοράς τους από τα δεδομένα εισόδου. Έτσι, από τα μετρούμενα δεδομένα απομακρύνονται οι συνιστώσες χαμηλών και κάποιες από τις υψηλές συχνότητες, οι οποίες οφείλονται σε συγκεκριμένες δομές, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$y = y_{obs} - y_{GM} - y_h, \quad (2.30)$$

όπου  $y$  τα ανηγμένα δεδομένα,  $y_{obs}$  τα αρχικά παρατηρούμενα δεδομένα,  $y_{GM}$  η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου και  $y_h$  η συνεισφορά της τοπογραφίας. Στην προσέγγιση του γεωειδούς με σήματα εισόδου ανωμαλίες ελευθέρου αέρα, ισχύει:

$$\Delta g = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM} - \Delta g_h, \quad (2.31)$$

όπου  $\Delta g$  οι ανηγμένες ανωμαλίες (reduced anomalies),  $\Delta g_{FA}$  οι αρχικές ανωμαλίες μετά από την εφαρμογή αναγωγής ελευθέρου αέρα [32], [107],  $\Delta g_{GM}$  η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου και  $\Delta g_h$  ο όρος των υψηλών συχνοτήτων, δηλαδή η συνεισφορά της τοπογραφίας. Η απομάκρυνση των χαμηλών συχνοτήτων πραγματοποιείται με την αφαίρεση της συνεισφοράς των τιμών ενός παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου. Στην περίπτωση προσδιορισμού του γεωειδούς με τη βοήθεια ανωμαλιών βαρύτητας σε σφαιρική προσέγγιση, οι ανωμαλίες βαρύτητας από το μοντέλο δίνονται από τη σχέση [107]:

$$\Delta g_{GM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda_P] \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_P), \quad (2.32)$$

όπου  $r$  η γεωκετρική απόσταση,  $a$  ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς-μοντέλου,  $G$  η σταθερά παγκόσμιας έλξης,  $M$  η μάζα της Γης  $\bar{P}_{nm}$  οι πλήρως κανονικοποιημένες συναρτήσεις Legendre [32] και  $n_{max}$  ο μέγιστος βαθμός ανάπτυξης του μοντέλου (360 για το EGM96). Οι πλήρως κανονικοποιημένοι συντελεστές του διαταρακτικού δυναμικού  $\bar{C}_{nm}^*$  και  $\bar{S}_{nm}^*$  δίνονται από τις σχέσεις [42], [61]:

$$\bar{C}_{nm}^* = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^N, \quad m = 0 \quad (2.33)$$

$$\bar{C}_{nm}^* = \bar{C}_{nm}, \quad m \neq 0 \quad (2.34)$$

$$\bar{S}_{nm}^* = \bar{S}_{nm}, \quad (2.35)$$

όπου  $\bar{C}_{nm}$  και  $\bar{S}_{nm}$  είναι οι συντελεστές του γήινου πεδίου βαρύτητας και  $\bar{C}_{n0}^N$  είναι οι συντελεστές ζώνης του κανονικού πεδίου του ελλειψοειδούς-μοντέλου. Η αρχική τιμή του βαθμού ανάπτυξης ( $n = 2$ ) σχετίζεται με τις παραδοχές για το κέντρο μάζας της Γης και για τη μάζα του ελλειψοειδούς που δόθηκαν στην ενότητα 2.1. Στις πρακτικές εφαρμογές ο βαθμός  $N$  των συντελεστών ζώνης φθάνει μέχρι την τιμή 8 ή 10. Η απομάκρυνση των υψηλών συχνοτήτων πραγματοποιείται με την αφαίρεση της συνεισφοράς της τοπογραφίας. Ο όρος  $y_h$ , ή ο  $\Delta g_h$  στην περίπτωση ανωμαλιών ελευθέρου αέρα ως σημάτων εισόδου, υπολογίζεται με κατάλληλες παραδοχές για την τοπογραφία, οι οποίες θα δοθούν στην επόμενη ενότητα.

2. Τα ανηγμένα σήματα της (2.30) αποτελούν τα δεδομένα εισαγωγής στις διάφορες μεθόδους προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας, όπως αυτές παρουσιάζονται στην ενότητα 2.5. Η απομάκρυνση των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων έχει ως αποτέλεσμα την ομαλοποίηση των σημάτων αυτών και τη δυνατότητα στατιστικών μεθόδων προσέγγισης του πεδίου. Η εξομάλυνση των δεδομένων συμβάλλει και με άλλους τρόπους στη βελτιστοποίηση της προσέγγισης. Ιδιαίτερα στις φασματικές μεθόδους, όπου υπάρχει η απαίτηση για δεδομένα σε μορφή καννάβου, η εξομάλυνση των δεδομένων οδηγεί σε διακριτά σήματα κατάλληλα για μετατροπή σε μητρική μορφή, εφαρμόζοντας τεχνικές παρεμβολής και πρόγνωσης [106]. Η εφαρμογή στατιστικών μεθόδων στη σύγχρονη γεωδαιτική επιστήμη αναφέρεται στη χρήση των ιδιοτήτων των στοχαστικών αλγορίθμων. Επομένως, τα ανηγμένα δεδομένα αντιμετωπίζονται ως στοχαστικά σήματα εισόδου στις μεθόδους προσέγγισης.
3. Το τρίτο βήμα σχετίζεται με την επαναφορά των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων στα σήματα εξόδου. Η τελική προσέγγιση του σήματος εξόδου δίνεται από την εξίσωση:

$$x = x_{GM} + x_y + x_h, \quad (2.36)$$

όπου  $x$  το τελικό σήμα εξόδου, ανακατασκευασμένο στο φάσμα του μετά την επαναφορά των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων,  $x_{GM}$  η συνεισφορά του παγκόσμιου μοντέλου βαρύτητας, που αναφέρεται στην επαναφορά των χαμηλών συχνοτήτων,  $x_y$  η προσέγγιση του σήματος εξόδου που οφείλεται στα ανηγμένα δεδομένα εισόδου και  $x_h$  η συνεισφορά της τοπογραφίας στο σήμα εξόδου, η οποία επαναφέρει τις υψηλές συχνοτήτες

του σήματος. Ο όρος  $x_y$  έχει προσδιοριστεί στο προηγούμενο βήμα με την εφαρμογή των κατάλληλων τελεστών στα ανηγμένα δεδομένα [π.χ., τελεστές Stokes (2.7), Vening-Meinesz] και τη χρήση κατάλληλων μεθόδων προσδιορισμού (π.χ., στοχαστικές, φασματικές μέθοδοι). Ειδικότερα, στην περίπτωση προσέγγισης του γεωειδούς από ανωμαλίες ελευθέρου αέρα, η τελική λύση δίνεται από την εξίσωση:

$$N = N_{GM} + N_{\Delta g} + N_h \quad (2.37)$$

Οι χαμηλές συχνότητες επανέρχονται με την εισαγωγή της συνεισφοράς των αποχών που προέρχονται από το παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο, σύμφωνα με τη σχέση [107]:

$$N_{GM} = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda_P + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda_P] \bar{P}_{nm}(\sin \varphi_P), \quad (2.38)$$

όπου  $\gamma$  η μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας. Η επαναφορά των υψηλών συχνοτήτων του πεδίου  $N_h$  γίνεται με τη μορφή έμμεσων επιδράσεων που αναλύονται στην ενότητα 2.3.

Η σημασία της τεχνικής «απομάκρυνσης – επαναφοράς» συνίσταται στο διαχωρισμό του συνολικού σήματος στις επιμέρους συχνότητες του και στην ομαλοποίηση του σήματος εισόδου. Πρόκειται ουσιαστικά για μια διαδικασία φιλτραρίσματος του αρχικού σήματος εισόδου. Το φίλτρο που χρησιμοποιείται μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ζωνοπερατό φίλτρο (Band Pass Filter), εφόσον απομονώνει τις μέσες συχνότητες.

### 2.3 Τεχνικές προσέγγισης της τοπογραφίας / βαθυμετρί- ας

Η λύση των γεωδαιτικών προβλημάτων συνοριακών τιμών απαιτεί την ύπαρξη μιας συνοριακής επιφάνειας, επάνω στην οποία να βρίσκεται το σύνολο των μετρήσεων. Το κλασικό γεωδαιτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών, όπως αυτό διατυπώθηκε από τον Stokes [79], απαιτεί την μεταφορά των μετρήσεων από τη γήινη επιφάνεια στην επιφάνεια του γεωειδούς. Η μεταφορά αυτή ονομάζεται **τοπογραφική αναγωγή** (terrain reduction) και σχετίζεται άμεσα με την προσέγγιση της τοπογραφίας μεταξύ της γήινης επιφάνειας και της επιφάνειας του γεωειδούς.

Η τοπογραφία σε μια ορεινή περιοχή επηρεάζει την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας με δύο τρόπους [19]:

1. Ένα ισχυρό σήμα βαρύτητας οφείλεται στην έλξη των ίδιων των τοπογραφικών μαζών. Το παραπάνω σήμα κυριαρχεί στις υψηλές συχνότητες του φάσματος του πεδίου και, με αυτόν τον τρόπο, η πληροφορία για την τοπογραφία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξομάλυνση του πεδίου βαρύτητας.
2. Η παρουσία της τοπογραφίας έχει ως αποτέλεσμα οι παρατηρήσεις να μη βρίσκονται σε μια ισοδυναμική επιφάνεια και να μην ισχύουν κατά συνέπεια οι απαιτήσεις του ολοκληρώματος του Stokes.

Οι τοπογραφικές αναγωγές συμβάλλουν στην ομαλοποίηση του πεδίου βαρύτητας. Η ομαλοποίηση είναι απαραίτητη για την κατάλληλη διαχείριση των δεδομένων πριν τη διαδικασία προσέγγισης (π.χ., μετατροπή σε μορφή καννάβου, πρόγνωση σε σημεία αραιής κάλυψης), αλλά και κατά την προσέγγιση (π.χ., χρήση στατιστικών τεχνικών προσέγγισης, θεωρήσεις στοχαστικών διαδικασιών, στασιμότητας, εργοδικότητας). Οι αναγωγές από μόνες τους δεν οδηγούν στον ορισμό της ισοδυναμικής συνοριακής επιφάνειας, αλλά συνοδεύονται από κατάλληλες **διορθώσεις συμπίκνωσης των μαζών** (terrain condensation corrections). Οι διορθώσεις αυτές σχετίζονται με τις διορθώσεις στο πεδίο βαρύτητας, λόγω της μεταφοράς των μαζών. Οι δύο βασικές διορθώσεις συμπίκνωσης ακολουθούν τη θεωρία του Molodensky και του Helmert.

Αν η επίδραση των τοπογραφικών μαζών υπολογιστεί σύμφωνα με τη θεωρία συμπύκνωσης του Helmert, τότε προσδιορίζονται οι αποχές του γεωειδούς, ενώ αν ακολουθηθεί η θεωρία συμπύκνωσης του Molodensky προσδιορίζονται οι ανωμαλίες ύψους.

Το γεωειδές και το σχεδόν-γεωειδές που προκύπτουν από την εφαρμογή των θεωριών που αναφέρθηκαν ταυτίζονται στις επιφάνειες των ωκεανών και οι παρατηρήσεις της βαρύτητας αναφέρονται στο γεωειδές. Η βαθυμετρία επηρεάζει γενικά έντονα την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας στο θαλάσσιο περιβάλλον. Η επίδραση της βαθυμετρίας είναι συγκρίσιμη και, πολλές φορές, μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τοπογραφική επίδραση [19].

Οι δύο βασικές τοπογραφικές αναγωγές είναι η **αναγωγή ελευθέρου αέρα** (free-air gravity reduction) και η **αναγωγή Bouguer** (Bouguer gravity reduction). Η αναγωγή ελευθέρου αέρα θεωρεί την ανυπαρξία μαζών μεταξύ της επιφάνειας του εδάφους και του γεωειδούς, ενώ η αναγωγή Bouguer αφαιρεί εντελώς τις ενδιάμεσες μάζες. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω αναγωγές στις μετρήσεις βαρύτητας προκύπτουν οι ανάλογες ανωμαλίες της βαρύτητας, τα σήματα εισόδου στην προσέγγιση του γεωειδούς.

Η **ανωμαλία ελευθέρου αέρα** (free-air gravity anomaly) προκύπτει ως εξής (βλ. σχήμα 2.1):

$$\Delta g_{P_o} = g_P - \gamma_{Q_o} = g_P - \frac{\partial g}{\partial H} H - \gamma_{Q_o}, \quad (2.39)$$

όπου  $P$  το σημείο μέτρησης της βαρύτητας στη γήινη επιφάνεια,  $P_o$  το αντίστοιχο σημείο στην επιφάνεια του γεωειδούς και  $Q_o$  το σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς αναφοράς. Με τη θεώρηση αυτή, οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα αναφέρονται στην επιφάνεια του γεωειδούς. Η ποσότητα  $(\partial g / \partial H)H$  είναι η αναγωγή ελευθέρου αέρα,  $H$  είναι το ορθομετρικό υψόμετρο του σημείου μέτρησης και η  $\partial g / \partial H$  ονομάζεται **βαθμίδα βαρύτητας ελευθέρου αέρα** (free-air gravity gradient). Η πραγματική βαθμίδα βαρύτητας δεν μπορεί να υπολογιστεί, αλλά προσεγγίζεται από την **κανονική βαθμίδα βαρύτητας ελευθέρου αέρα** (normal free-air gravity gradient), σύμφωνα με την εξίσωση:

$$-\frac{\partial g}{\partial H} \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial H} = 0.3086 \text{ mGal/m} \quad (2.40)$$

Η τιμή της πραγματικής βαθμίδας μπορεί να διαφέρει από 5%–10% από την τιμή της κανονικής βαθμίδας σε περιοχές με έντονες ορεινές εξάρσεις. Σε πολλές σύγχρονες μελέτες, οι ανωμαλίες δεν αναφέρονται πλέον στο γεωειδές, αλλά στο σημείο μέτρησης  $P$ . Οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα υπολογίζονται ως η διαφορά μεταξύ της παρατηρούμενης τιμής της βαρύτητας στη γήινη επιφάνεια και της κανονικής βαρύτητας υπολογιζόμενης σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση  $H$  επάνω από το ελλειψοειδές. Ισχύει:

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q = g_P - \gamma_{Q_o} - \frac{\partial \gamma}{\partial h} H. \quad (2.41)$$

Η (2.41) αναφέρεται στη γήινη επιφάνεια και δεν είναι απαραίτητη η προσέγγιση που εισάγεται με την (2.40). Εξαιτίας του ότι οι μετρήσιμες ποσότητες του πεδίου βαρύτητας αναφέρονται στη γήινη επιφάνεια, εισάγεται η προσέγγιση του σχεδόν-γεωειδούς.

Η **ανωμαλία Bouguer** (Bouguer gravity anomaly) προκύπτει ως εξής:

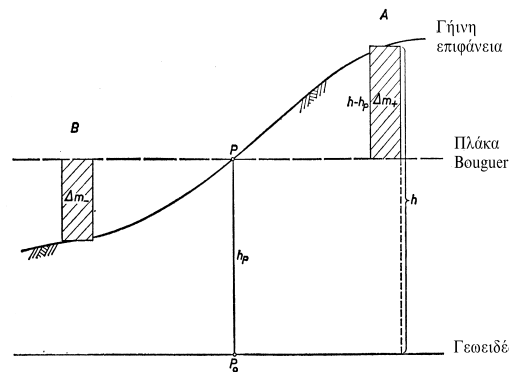
$$\Delta g_B = g_B - \gamma_{Q_o} = g_P - 2\pi G \rho H - \frac{\partial \gamma}{\partial H} H - \gamma_{Q_o} = g_P + 0.1967 H - \gamma_{Q_o}, \quad (2.42)$$

όπου  $G$  η σταθερά παγκόσμιας έλξης και  $\rho$  η πυκνότητα των τοπογραφικών μαζών. Η ανωμαλία Bouguer αναφέρεται στην επιφάνεια του γεωειδούς. Η ποσότητα  $2\pi G \rho H$  αναφέρεται στην αφαίρεση μιας πλάκας σταθερού πάχους  $H$  και πυκνότητας  $\rho$  και ονομάζεται **πλάκα Bouguer** (Bouguer plate). Ύστερα από την αφαίρεση της πλάκας Bouguer ένα μεγάλο μέρος της τοπογραφικής επίδρασης έχει αφαιρεθεί. Η υπολοιπούμενη τοπογραφική επίδραση, δηλαδή, οι επιμέρους εξάρσεις τις τοπογραφίας από την επιφάνεια της πλάκας, υπολογίζεται

από τη διόρθωση λόγω αναγλύφου (terrain correction). Σε επίπεδες συντεταγμένες και για σταθερή πυκνότητα η διόρθωση λόγω αναγλύφου δίνεται από την εξίσωση [56], [32]:

$$c_P = G\rho \iint_{-\infty}^{\infty} \int_{z=H_P}^{z=H(x,y)} \frac{z - H_P}{[(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z - H_P)^2]^{3/2}} dx_Q dy_Q dz_Q, \quad (2.43)$$

όπου  $P$  το σημείο υπολογισμού (computation point) και  $Q$  το τρέχον σημείο (running point). Η διόρθωση λόγω αναγλύφου αφαιρεί τις περισσείες μάζες επάνω από το σημείο υπολογισμού  $P$ , με αποτέλεσμα να αυξάνει το δυναμικό στο  $P$ . Η ίδια διόρθωση προσθέτει μάζες, όπου υπάρχουν κενά κάτω από την επιφάνεια του  $P$ . Το αποτέλεσμα είναι να αυξάνεται πάλι το δυναμικό. Επομένως, η διόρθωση αυτή είναι πάντοτε μία θετική ποσότητα. Ο υπολογισμός της διόρθωσης λόγω αναγλύφου περιγράφεται σχηματικά στο σχήμα 2.3. Η διόρθωση λόγω



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση της διόρθωσης λόγω αναγλύφου.

αναγλύφου σχετίζεται άμεσα με τις εξάρσεις της τοπογραφίας και είναι ανάλογη της κλίσης του εδάφους στην περιοχή των μετρήσεων. Το τριπλό ολοκλήρωμα της (2.43) μπορεί να μετατραπεί σε συνελικτική μορφή και να επιλυθεί με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Fourier, όπως παρουσιάζεται στην ενότητα 2.6.

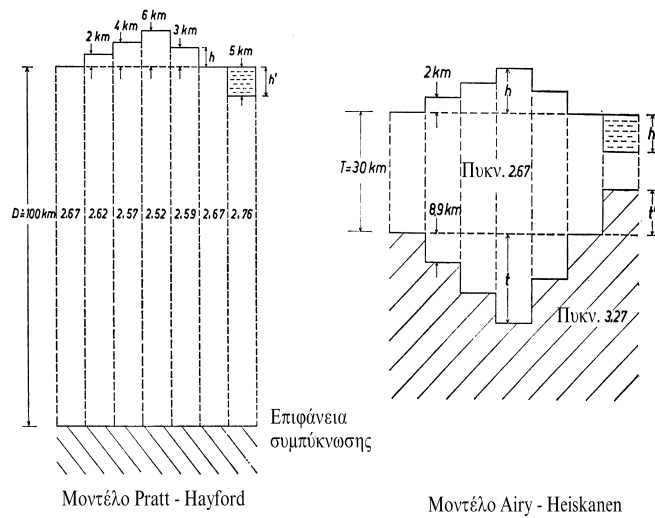
Όταν στις απλές ανωμαλίες Bouguer προστεθεί και η διόρθωση λόγω αναγλύφου το πεδίο παρουσιάζεται πλήρως εξομαλυνμένο και οι ανωμαλίες ονομάζονται **πλήρεις ή βελτιωμένες ανωμαλίες Bouguer** (complete or refined Bouguer gravity anomalies).

Όπως γίνεται φανερό, οι ανωμαλίες Bouguer παρουσιάζονται πιο εξομαλυνμένες σε σύγκριση με τις ανωμαλίες ελευθέρου αέρα, επειδή η επίδραση των υψηλών συχνοτήτων της τοπογραφίας έχει αφαιρεθεί. Οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα είναι άμεσα συσχετισμένες με την υψομετρία της περιοχής και χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση του γεωειδούς, ενώ οι ανωμαλίες Bouguer χρησιμοποιούνται σε γεωφυσικές μελέτες, γιατί με την αφαίρεση των ορατών μάζων αντανάκλουν γεωφυσικά χαρακτηριστικά του υπεδάφους. Επίσης, λόγω της εξομάλυνσης του πεδίου, οι πλήρεις ανωμαλίες Bouguer χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή και πρόγνωση των τιμών σε περιοχές με αραιή κάλυψη.

Οι αναγωγές των μετρήσεων βαρύτητας που περιγράφηκαν μέχρι στιγμής προϋποθέτουν την ομογένεια του γήινου φλοιού. Διάφορα όμως γεγονότα έρχονται σε αντίθεση με την παραπάνω παραδοχή. Οι πλήρεις ανωμαλίες Bouguer πρέπει να παρουσιάζουν πολύ χαμηλές τιμές και να κατανέμονται τυχαία γύρω από το μηδέν. Κάτι τέτοιο όμως δε συμβαίνει. Οι ανωμαλίες Bouguer παρουσιάζουν συστηματικά αρνητικές τιμές σε ορεινές περιοχές [32]. Είναι παραδεκτό σήμερα ότι οι ηπειρωτικές μάζες (οι υπερκείμενες των ωκεανών) και οι θαλάσσιες μάζες βρίσκονται σε μια κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μάζες αυτές κατά ένα μεγάλο βαθμό αντισταθμίζονται στο εσωτερικό της Γης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ισοστασία** (isostasy) και περιγράφεται με τη βοήθεια δύο παγκόσμιων

μοντέλων: του **ισοστατικού μοντέλου του Pratt-Hayford** και του **ισοστατικού μοντέλου του Airy-Heiskanen** [32]. Το πρώτο μοντέλο στηρίζεται στην αρχή του σταθερού ύψους αντιστάθμισης των μαζών και της μεταβλητής πυκνότητας και το δεύτερο στην αρχή της μεταβλητής πυκνότητας των αντισταθμισμένων μαζών και του μεταβλητού επιπέδου αντιστάθμισης. Περισσότερα για τα ισοστατικά μοντέλα δίνονται από τους Heiskanen and Moritz [32] και από τους Κατσάμπαλο και Τζιαβό [107].

Ακολουθώντας τη θεωρία της ισοστασίας οι αναγωγές στις μετρήσεις βαρύτητας της γήινης επιφάνειας ονομάζονται **ισοστατικές αναγωγές** (isostatic reductions) και οι αντίστοιχες ανωμαλίες που προκύπτουν **ισοστατικές ανωμαλίες** (isostatic anomalies) της βαρύτητας. Το αντικείμενο της ισοστατικής αναγωγής είναι η κανονικοποίηση του φλοιού της Γης σύμφωνα με κάποιο μοντέλο ισοστασίας [32]. Οι τοπογραφικές μάζες δεν αφαιρούνται εντελώς, όπως συμβαίνει στις ανωμαλίες Bouguer, αλλά μετατοπίζονται εντός του γεωειδούς με σκοπό την αντιμετώπιση της έλλειψης των μαζών κάτω από τις ηπειρωτικές εκτάσεις. Το φαινόμενο της ισοστασίας και οι ισοστατικές αναγωγές παρουσιάζονται στο σχήμα 2.4. Στη συνέχεια, πα-



Σχήμα 2.4: Τα ισοστατικά μοντέλα των Pratt – Hayford και Airy – Heiskanen.

ρουσιάζεται η διαδικασία προσέγγισης του γεωειδούς με τη χρήση των θεωριών συμπύκνωσης του Molodensky και του Helmert. Η διαδικασία θα παρουσιαστεί σε συνδυασμό με την τεχνική «απομάχρυνσης-επαναφοράς» για την ολοκληρωμένη παρουσίαση της προσέγγισης του γεωειδούς.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Molodensky τα σήματα εισόδου στην προσέγγιση του γεωειδούς αναφέρονται στη γήινη επιφάνεια. Οι ανωμαλίες βαρύτητας εξομαλύνονται με τη χρήση της τεχνικής «απομάχρυνσης-επαναφοράς» και οι τελικές ανωμαλίες ύψους προκύπτουν σύμφωνα με τις σχέσεις [12]:

$$\Delta g_P = g_P - \gamma_Q$$

$$\Delta g' = \Delta g_P - \Delta g_P^{GM} - \Delta g_P^H \quad (2.44)$$

$$\zeta = \zeta' + \zeta^{GM} + \zeta^H, \quad (2.45)$$

όπου  $P$  είναι το σημείο των μετρήσεων στη γήινη επιφάνεια και  $Q$  είναι το αντίστοιχο σημείο στην επιφάνεια του τελουροειδούς. Το  $\zeta^{GM}$  παρέχει τη συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου, ενώ το  $\zeta^H$  δίνει τη συνεισφορά της τοπογραφίας. Ο όρος  $\zeta'$  παρέχει τη συνεισφορά των ανηγμένων ανωμαλιών βαρύτητας.

Μία παραλλαγή της μεθόδου του Molodensky, η οποία εφαρμόζεται κατά την πρακτική προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας, είναι η μέθοδος του **Μοντέλου Υπολοιπόμενης Τοπογραφίας** (Residual Terrain Model – RTM) [21], [18], [19]. Στην περίπτωση αυτή, η επίδραση της τοπογραφίας, με επιφάνεια αναφοράς μια μέση υψομετρική επιφάνεια της περιοχής, απομακρύνεται και επαναφέρεται στους υπολογισμούς. Το πλεονέκτημα της τεχνικής αυτής έγκειται στο γεγονός ότι οι τελικά ανηγμένες ανωμαλίες βαρύτητας εμφανίζονται πλήρως εξομαλυσμένες σε σύγκριση με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο αναγωγής. Επειδή οι ανωμαλίες πυκνότητας λαμβάνουν, τόσο θετικές, όσο και αρνητικές τιμές, οι υπολογισμοί των τοπογραφικών επιδράσεων γίνονται μόνο μέχρι μια κατάλληλη απόσταση από το σημείο υπολογισμού και η επίδραση της απομακρυσμένης τοπογραφίας ελαχιστοποιείται. Επίσης, οι έμμεσες επιδράσεις στις ανωμαλίες ύψους είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τις επιδράσεις στα υψόμετρα του γεωειδούς μέσω άλλων μεθόδων (π.χ., Helmert). Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής σε σύγκριση με τις μεθόδους ισοστατικής αναγωγής είναι το ότι δεν απαιτείται υπόθεση ισοστατικής συμπύκνωσης [21]. Το βασικό μειονέκτημα της χρήσης της μεθόδου του Μοντέλου Υπολοιπόμενης Τοπογραφίας είναι ότι το δυναμικό της βαρύτητας δεν είναι πλέον αρμονική συνάρτηση στις περιοχές που τα σημεία υπολογισμού βρίσκονται θεωρητικά κάτω από την προκύπτουσα μέση τοπογραφία. Κάποιος σταθμός, ο οποίος βρίσκεται σε μια πεδιάδα, μετά την εφαρμογή της μεθόδου, θα βρίσκεται εντός της εξομαλυνσμένης τοπογραφικής επιφάνειας που ορίζεται από τα όρια της μέσης επιφάνειας των υψών [21], [18]. Η τελική τιμή της παρατήρησης ευρίσκεται πλέον εντός των μαζών, όπου το δυναμικό της βαρύτητας δεν είναι αρμονική συνάρτηση. Για να είναι δυνατή η χρήση των σύγχρονων στατιστικών τεχνικών που προϋποθέτουν την αρμονικότητα του πεδίου, πρέπει να εφαρμοστεί μια κατάλληλη διόρθωση, η οποία ονομάζεται **αρμονική διόρθωση** (harmonic correction). Περισσότερα για τη διόρθωση αυτή και για τον υπολογισμό της δίνονται από τους Forsberg and Tscherning [21] και από τον Forsberg [18]. Η χρήση της τεχνικής αυτής οδηγεί στην προσέγγιση της επιφάνειας του σχεδόν-γεωειδούς σύμφωνα με τις θεωρίες του Molodensky. Με τη μέθοδο αυτή μόνον οι υψηλές συχνότητες της τοπογραφίας λαμβάνονται υπόψη στους υπολογισμούς. Η μέση επιφάνεια των υψόμετρων μπορεί να είναι οποιαδήποτε ομαλή επιφάνεια, η οποία θα αναπαριστά το μέσο υψόμετρο στην περιοχή μελέτης [18]. Η προσέγγιση του γεωειδούς πραγματοποιείται πάντοτε με τη βοήθεια της τεχνικής «απομάκρυνσης–επαναφοράς». Στην περίπτωση προσέγγισης της επιφάνειας του σχεδόν-γεωειδούς με τη χρήση της τεχνικής του μοντέλου υπολοιπόμενης τοπογραφίας, ακολουθείται η εξής αλγοριθμική διαδικασία για τον υπολογισμό των τοπογραφικών διορθώσεων [48], [11], [74]:

1. Απομάκρυνση των χαμηλών συχνοτήτων του φάσματος του πεδίου βαρύτητας μέσω της αφαίρεσης των τιμών ενός παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου.
2. Υπολογισμός των βαρυτημετρικών διορθώσεων λόγω αναγλύφου  $c_P$ . Οι τοπογραφικές διορθώσεις δίνονται από τη σχέση (2.43).
3. Υπολογισμός των RTM ανωμαλιών σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Delta g_{red} = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM} - 2\pi G\rho(H - H_{ref}) + c_P, \quad (2.46)$$

όπου  $2\pi G\rho(H - H_{ref})$  είναι η ποσότητα που υπολογίζεται από τις εξάρσεις της τοπογραφίας της περιοχής ύστερα από την αφαίρεση της ομαλής επιφάνειας αναφοράς. Η επιφάνεια αναφοράς είναι δυνατό να προκύψει από ένα υψηλής διακριτικής ικανότητας ψηφιακό μοντέλο εδάφους εφαρμόζοντας κατάλληλο **χαμηλοπερατό φίλτρο** (low-pass filter).

4. Στη συνέχεια οι εξομαλυνσμένες ανωμαλίες χρησιμοποιούνται για την παρεμβολή και πρόγνωση τιμών σε περιοχές αραιής κάλυψης ή, στην περίπτωση φασματικών τεχνικών, για τη δημιουργία καννάβου ανωμαλιών βαρύτητας.
5. Προσέγγιση του σχεδόν-γεωειδούς  $\zeta_{red}$  με σήματα εισαγωγής τις εξομαλυνσμένες ανωμαλίες βαρύτητας και χρησιμοποίηση των φασματικών ή στοχαστικών τεχνικών που παρουσιάζονται στις ενότητες 2.5 και 2.6.

6. Επαναφορά των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων στις ανωμαλίες ύψους με την προσθήκη των ανωμαλιών ύψους  $\zeta_{GM}$ , οι οποίες προέρχονται από το παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο και των επιδράσεων της τοπογραφίας στις ανωμαλίες ύψους  $\zeta_{RTM}$ , αντίστοιχα:

$$\zeta = \zeta_{red} + \zeta_{GM} + \zeta_{RTM}. \quad (2.47)$$

Οι Dahl and Forsberg [11] δίνουν μια τροποποιημένη διαδικασία για την RTM μέθοδο. Μετά την εξομάλυνση των ανωμαλιών και την παρεμβολή και πρόγνωση επαναφέρεται η επίδραση της τοπογραφίας σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\Delta g_{faye} = \Delta g_{red} + 2\pi G\rho(H - H_{ref}) + c_p \quad (2.48)$$

Στη συνέχεια προσεγγίζονται οι υπολοιπόμενες ανωμαλίες ύψους με τις στοχαστικές ή φασματικές μεθόδους που παρουσιάζονται στις ενότητες 2.5 και 2.6. Η τελική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta = \zeta_{red} + \zeta_{GM}, \quad (2.49)$$

όπου επαναφέρεται πλέον μόνον η συνεισφορά των χαμηλών συχνοτήτων του γεωδυναμικού μοντέλου. Με τον τρόπο αυτόν, η επίδραση της τοπογραφίας επαναφέρεται με τον όρο  $2\pi G\rho(H - H_{ref})$  πριν τα σήματα εισόδου χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της επιφάνειας του σχεδόν-γεωειδούς [11]. Έτσι η RTM μέθοδος σχετίζεται άμεσα με την κλασική μέθοδο του Helmert. Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο συμπύκνωσης των μαζών κατά Helmert<sup>1</sup>, η επιφάνεια του γεωειδούς προσεγγίζεται από τις υπάρχουσες ανωμαλίες ελευθέρου αέρα, αφού αφαιρεθούν η επίδραση της τοπογραφίας και η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου. Η διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου περιγράφεται ως εξής [11]:

1. Αφαιρείται η επίδραση του γεωδυναμικού μοντέλου.
2. Οι αρχικές μετρήσεις των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα εξομαλύνονται μετά την απομάκρυνση του μοντέλου και της τοπογραφικής επίδρασης. Οι τελικές εξομαλυνσμένες τιμές είναι οι πλήρεις ανωμαλίες Bouguer, οι οποίες δίνονται από της σχέση:

$$\Delta g_{red} = \Delta g_{FA} - \Delta g_{GM} - 2\pi G\rho H + c_p. \quad (2.50)$$

3. Το πεδίο των ανωμαλιών που προκύπτει είναι πλέον πολύ ομαλό και κατάλληλο για την παρεμβολή και πρόγνωση τιμών σε περιοχές αραιής κάλυψης ή την πρόγνωση διακριτών τιμών σε κάρναβο, όταν χρησιμοποιούνται φασματικές τεχνικές.
4. Επαναφέρεται η τοπογραφική επίδραση και προκύπτουν οι ανωμαλίες Faye, με τη βοήθεια των οποίων προσεγγίζεται η επιφάνεια του γεωειδούς. Οι ανωμαλίες Faye προκύπτουν σύμφωνα με:

$$\Delta g_{Faye} = \Delta g_{red} + 2\pi G\rho H. \quad (2.51)$$

5. Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνεισφορά των ανηγμένων ανωμαλιών Faye στον προσδιορισμό του γεωειδούς. Η προσέγγιση αυτή γίνεται, είτε μέσω στοχαστικών, είτε με τη βοήθεια φασματικών τεχνικών, όπως παρουσιάζεται στις ενότητες 2.5 και 2.6.
6. Προσεγγίζεται η επιφάνεια του γεωειδούς επαναφέροντας τη συνεισφορά του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου και της έμμεσης επίδρασης στα υψόμετρα του γεωειδούς (indirect effect on the geoid), σύμφωνα με:

$$N = N_{red} + N_{GM} + N_{ind}, \quad (2.52)$$

όπου  $N_{ind}$  είναι η έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς.

<sup>1</sup>Στην πρώτη μέθοδο του Helmert η συμπύκνωση των μαζών γίνεται σε μία παράλληλη επιφάνεια που βρίσκεται 21km κάτω από την επιφάνεια του γεωειδούς. Η επιλογή της επιφάνειας συμπύκνωσης γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα σύγκλισης των σειρών σφαιρικών αρμονικών του δυναμικού της βαρύτητας [32].

Με ανάλογες διαδικασίες προσεγγίζεται το **ισοστατικό γεωειδές** (isostatic geoid) με τη χρησιμοποίηση των ισοστατικών ανωμαλιών. Αγνοώντας τις περιοχές εκείνες που δε βρίσκονται σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, οι ισοστατικές ανωμαλίες παρουσιάζουν μικρές τιμές και χαρακτηρίζονται από ομαλές μεταβολές [82]. Για αυτόν το λόγο, χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία μέσω των τιμών ανωμαλιών βαρύτητας και για την πρόγνωση σε περιοχές αραιής κάλυψης. Η έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς στην περίπτωση χρήσης των ισοστατικών ανωμαλιών μπορεί να φτάσει τα 10 m. Εξαιτίας του γεγονότος αυτού και λόγω του μεγάλου υπολογιστικού φόρτου στον υπολογισμό τους, οι ισοστατικές ανωμαλίες χρησιμοποιούνται ελάχιστα για την προσέγγιση του γεωειδούς. Παρόλα αυτά, παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για το εσωτερικό της Γης και χρησιμεύουν σε γεωφυσικές μελέτες [82].

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στις **έμμεσες επιδράσεις** (indirect effects) στη βαρύτητα και στα υψόμετρα του γεωειδούς [105]. Λόγω της συμπύκνωσης των μαζών σε μια ισοδυναμική επιφάνεια, το δυναμικό της βαρύτητας αλλάζει και επομένως μεταβάλλεται και η επιφάνεια του γεωειδούς [32]. Αυτή η μεταβολή της επιφάνειας είναι η **έμμεση επίδραση των αναγωγών της βαρύτητας στα υψόμετρα του γεωειδούς**. Επομένως, η επιφάνεια που υπολογίζεται με τη βοήθεια του ολοκληρώματος του Stokes δεν είναι πλέον το γεωειδές, άλλα μια επιφάνεια που βρίσκεται κοντά σε αυτό και ονομάζεται **αντισταθμισμένο γεωειδές** (co-geoid – compensated geoid). Σε κάθε διαφορετική αναγωγή αντιστοιχεί και διαφορετικό αντισταθμισμένο γεωειδές. Έτσι και οι ανωμαλίες βαρύτητας πρέπει να μετακινηθούν από το γεωειδές, στο οποίο βρίσκονται μετά τη συμπίεση, στη επιφάνεια του αντισταθμισμένου γεωειδούς, με σκοπό η επιφάνεια αυτή πλέον να χρησιμοποιηθεί ως συνοριακή στη λύση του προβλήματος κατά Stokes. Η μεταφορά των ανωμαλιών βαρύτητας από την επιφάνεια του γεωειδούς στην επιφάνεια του αντισταθμισμένου γεωειδούς πραγματοποιείται με μια διόρθωση, η οποία αποτελεί την **έμμεση επίδραση στη βαρύτητα ή δευτερεύουσα έμμεση επίδραση** (indirect effect on gravity or secondary indirect effect) και η οποία υπολογίζεται με τη βοήθεια της κανονικής βαθμίδας της βαρύτητας σύμφωνα με τη σχέση:

$$\delta = 0.3086N_{ind} \quad (2.53)$$

όπου  $N_{ind}$  η έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς. Οι τιμές της δευτερεύουσας έμμεσης επίδρασης δύσκολα ξεπερνούν την τιμή των 3 mGals και συνήθως δε λαμβάνονται υπόψη στους πρακτικούς υπολογισμούς τοπικών μοντέλων γεωειδούς. Η έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς μπορεί να φτάσει το όριο των ορισμένων εκατοστών σε περιοχές με έντονο τοπογραφικό ανάγλυφο και για το λόγο αυτό λαμβάνεται πάντοτε υπόψη στους υπολογισμούς ακριβείας [98], [99].

## 2.4 Ισοδυναμικές επιφάνειες και συστήματα υψών

Στη φυσική γεωδαισία συναντώνται δύο συστήματα υψών. Το πρώτο σύστημα έχει καθαρά δυναμικό χαρακτήρα, σχετίζεται με το πεδίο της γήινης βαρύτητας και βασίζεται στην κλασική μεταφορά υψομέτρων και δεδομένων βαρύτητας μέσω γεωμετρικής χωροστάθμησης κατά μήκος **χωροσταθμικών επιφανειών** (level surfaces). Οι χωροσταθμικές επιφάνειες είναι θεωρητικές επιφάνειες, οι οποίες έχουν την ιδιότητα σταθερού δυναμικού σε κάθε σημείο τους. Οι επιφάνειες αυτές ονομάζονται και **ισοδυναμικές επιφάνειες** του πεδίου βαρύτητας. Το δεύτερο σύστημα έχει καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα και σχετίζεται με την απόσταση των σημείων από ένα ελλειψοειδές σύστημα αναφοράς. Το δεύτερο σύστημα δεν εμπεριέχει καμία δυναμική φυσική πληροφορία και συσχέτιση με το πεδίο βαρύτητας, αλλά αντιπροσωπεύει ένα μοντέλο επιφάνειας, το οποίο στηρίζεται κυρίως σε δορυφορικές παρατηρήσεις.

Οι τρόποι σύνδεσης των δύο συστημάτων διαφέρουν, ανάλογα με το πρόβλημα των συνοριακών τιμών που ακολουθείται. Στο πρόβλημα του Stokes και ακολουθώντας την προβολή κατά Helmert, το **ορθομετρικό υψόμετρο** (orthometric height) ενός σταθμού συνδέεται με το **ελλειψοειδές ή γεωμετρικό υψόμετρο** (ellipsoidal height) από τη σχέση [32] (βλ. σχήμα 2.1):

$$H = h - N \quad (2.54)$$

όπου  $h$  το ελλειψοειδές υψόμετρο, δηλαδή η απόσταση του σταθμού από το ελλειψοειδές αναφοράς, η οποία μετράται κατά μήκος της **καθέτου** (normal line) στο ελλειψοειδές και  $N$  η **αποχή του γεωειδούς** (geoid undulation), δηλαδή η διαφορά μεταξύ του γεωειδούς και του ελλειψοειδούς αναφοράς.

Οι επιφάνειες αναφοράς που προαναφέρθηκαν χαρακτηρίζονται από την τιμή του δυναμικού τους. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι παντού κάθετες στο διάνυσμα της βαρύτητας. Μία συγκεκριμένη επιφάνεια, για την οποία ισχύει:

$$W(x, y, z) = W_o \quad (2.55)$$

και η οποία προσεγγίζει τη μέση στάθμη των θαλασσών σε παγκόσμια κλίμακα ονομάζεται **γεωειδές** (geoid). Η σύγχρονη αντίληψη για την τρίτη διάσταση γενικεύεται με τη χρησιμοποίηση του ίδιου του δυναμικού της βαρύτητας  $W$  ως της συντεταγμένης που καθορίζει την υψομετρική πληροφορία. Με τον τρόπο αυτόν, εισάγεται η έννοια του **γεωδυναμικού αριθμού** (geopotential number), που ορίζεται ως εξής:

$$C_P = W_o - W_P, \quad (2.56)$$

όπου  $C_P$  ο γεωδυναμικός αριθμός στο σημείο  $P$ ,  $W_o$  το δυναμικό της βαρύτητας στην επιφάνεια αναφοράς του γεωειδούς και  $W_P$  το δυναμικό της βαρύτητας κατά μήκος της ισοδυναμικής επιφάνειας που περνάει από το  $P$ . Η σύνδεση του ορθομετρικού υψομέτρου με το γεωδυναμικό αριθμό δίνεται από την εξίσωση [32]:

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \approx \frac{C}{g_P + 0.0424} \quad (2.57)$$

Ακολουθώντας το πρόβλημα του Molodensky, το **κανονικό υψόμετρο** (normal height), δηλαδή η απόσταση μεταξύ ελλειψοειδούς και τελουροειδούς συνδέεται με το ελλειψοειδές υψόμετρο σύμφωνα με [32] (βλ. σχήμα 2.2):

$$h = H^* + \zeta, \quad (2.58)$$

όπου  $\zeta$  είναι η απόκλιση του τελουροειδούς από τη γήινη επιφάνεια ή η απόσταση μεταξύ ελλειψοειδούς και σχεδόν-γεωειδούς και ονομάζεται **ανωμαλία ύψους** (height anomaly). Η σύνδεση του κανονικού υψομέτρου με το γεωδυναμικό αριθμό προκύπτει ως εξής [32]:

$$H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}}, \quad (2.59)$$

όπου  $\bar{\gamma}$  η μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας στο ελλειψοειδές αναφοράς.

Η επιλογή του κατάλληλου συστήματος υψομετρίας έχει μεγάλη σημασία στην περίπτωση συνδυασμού ετερογενών δεδομένων. Το υψομετρικό σύστημα αναφοράς πρέπει να παραμένει μοναδικό σε όλη τη διαδικασία του συνδυασμού. Π.χ., αν ο στόχος κατά τον ακριβή προσδιορισμό του γεωειδούς είναι η αντικατάσταση της κλασικής χωροστάθμησης με μετρήσεις GPS, απαραίτητος είναι ο καθορισμός της επιφάνειας αναφοράς των υψομέτρων. Οι χωροσταθμικές επιφάνειες αποτελούν θεμελιώδεις επιφάνειες αναφοράς των υψομέτρων. Η υιοθέτηση μιας κοινής παγκόσμιας επιφάνειας αναφοράς αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της σύγχρονης γεωδαιτικής έρευνας.

## 2.5 Μέθοδοι προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας

Τα τελευταία τριάντα χρόνια αναπτύχθηκαν διάφορες μέθοδοι για την προσέγγιση του σχήματος της Γης και του πεδίου βαρύτητας. Οι μέθοδοι αυτές διακρίνονται στις κλασικές ντετερμινιστικές μεθόδους και στις μεθόδους που προσδίδουν στοχαστικά χαρακτηριστικά στο πεδίο βαρύτητας. Οι μέθοδοι αυτές παρουσιάζουν σημαντικές θεωρητικές διαφορές.

Η βασική διαφωνία στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας έγκειται στο χαρακτηρισμό του διαταρακτικού δυναμικού της βαρύτητας ως ενός φυσικού φαινομένου ντετερμινιστικού χαρακτήρα, του οποίου η εμφάνιση διέπεται από σταθερούς φυσικούς νόμους ή ως μιας στοχαστικής διαδικασίας, η οποία ορίζεται μέσα από νόμους των πιθανοτήτων. Το ζήτημα λοιπόν τίθεται στο αν το διαταρακτικό δυναμικό (οι ανωμαλίες της βαρύτητας που χρησιμοποιούνται συνήθως ως παρατηρήσεις) είναι μια στοχαστική συνάρτηση. Σύμφωνα με τον Moritz [55], υπάρχουν δύο απαντήσεις. Ας θεωρήσουμε ότι οι παρατηρήσεις της ανωμαλίας της βαρύτητας επαναλαμβάνονται συνεχώς σε ένα σημείο, τα σφάλματα των μετρήσεων θεωρούνται αμελητέα και οι παρατηρήσεις έχουν διορθωθεί από κάθε είδους γεωφυσικές επιδράσεις. Τότε, οι μετρήσεις σε διαφορετικές εποχές πρακτικά συμπίπτουν. Προφανώς, λοιπόν, η πρώτη απάντηση στο κύριο ερώτημα είναι άμεση: Το διαταρακτικό δυναμικό έχει καθαρά ντετερμινιστικό χαρακτήρα. Η απάντηση αυτή είναι προφανής, όταν η όλη διαδικασία συγκρίνεται με το κλασικό πείραμα της ρίψης ενός ζαριού σε περιβάλλον σταθερών συνθηκών. Το αποτέλεσμα στην περίπτωση αυτή είναι καθαρά στοχαστικού χαρακτήρα, γιατί το αποτέλεσμα των δοκιμών δεν ακολουθεί κάποιους φυσικούς νόμους, αλλά κάποιους νόμους πιθανοτήτων.

Η άμεση σύγκριση του περάματος της ρίψης του ζαριού και των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων βαρύτητας οδηγεί στην ντετερμινιστική θεώρηση του γήινου πεδίου βαρύτητας. Υπάρχει όμως και η άλλη άποψη. Σύμφωνα πάντοτε με τον Moritz [55], οι ανωμαλίες της βαρύτητας που παρατηρούνται στην επιφάνεια της Γης είναι αποτέλεσμα κάποιων αντιστοίχων ανωμαλιών στις κατανομές της γήινης μάζας, τόσο στο εξωτερικό, όσο και στο εσωτερικό της. Σε περιφερειακή και παγκόσμια κλίμακα, αυτή η κατανομή των μαζών δεν παρουσιάζει μια κανονική μορφή, αλλά εξαρτάται από την κίνηση των τεκτονικών πλακών, την κίνηση του νερού και του πάγου. Τα αποτελέσματα από τις επιδράσεις των παραπάνω δεν ακολουθούν μια κανονική μορφή και έως ένα σημείο μπορεί να χαρακτηριστούν τυχαία. Η τεχνική απομάκρυνσης και επαναφοράς (remove-restore) που αναλύεται στην ενότητα 2.2, απομακρύνοντας τα γνωστά χαρακτηριστικά του πεδίου, το εξομαλύνει τόσο, ώστε οι τιμές του να μπορούν να χαρακτηριστούν ως τιμές μιας στοχαστικής διαδικασίας. Στην περίπτωση αυτή, ο στοχαστικός χαρακτήρας των ανωμαλιών της βαρύτητας είναι ανεξάρτητος της χρονικής παραμέτρου, όπως προηγουμένως (μετρήσεις στο ίδιο σημείο, αλλά διαφορετικές εποχές), αλλά σχετίζεται με τη χωρική παράμετρο (μετρήσεις ίδιας εποχής σε διαφορετικά σημεία). Στο σημείο αυτό βρίσκεται και η διαφοροποίηση από τις συνήθεις στοχαστικές διαδικασίες στις επιστήμες επεξεργασίας σημάτων επικοινωνιών: Η χρονική παράμετρος αντικαθίσταται με τη χωρική. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, η στοχαστική συμπεριφορά των παρατηρήσεων του διαταρακτικού δυναμικού του πεδίου βαρύτητας είναι ανεξάρτητη της θέσης των σημείων επάνω στη σφαίρα, όπως επίσης και της διεύθυνσης. Με τον τρόπο αυτόν, εισάγονται οι έννοιες της ομογένειας και της ισοτροπίας.

Η παραπάνω ανάλυση συνδέεται άμεσα με την έννοια της συνάρτησης συμμεταβλητότητας, η επιλογή της οποίας στηρίζεται σε καθαρά ντετερμινιστικά ή στοχαστικά κριτήρια.

### 2.5.1 Παρεμβολή και πρόγνωση στο πεδίο βαρύτητας

Αντικειμενικός σκοπός της φυσικής γεωδαισίας είναι η προσέγγιση του σχήματος της Γης και του γήινου πεδίου βαρύτητας με τη βοήθεια διακριτών μετρήσεων, οι οποίες σχετίζονται με το πεδίο και πραγματοποιούνται στην προς προσέγγιση επιφάνεια. Το πρόβλημα ανάγεται σε μια διαδικασία παρεμβολής και πρόγνωσης των τιμών μιας συνάρτησης, όταν είναι γνωστές διακριτές τιμές της συνάρτησης αυτής. Η ίδια η συνάρτηση προφανώς δεν μπορεί να προσδιοριστεί, αλλά υπολογίζεται μια συνάρτηση που προσεγγίζει βέλτιστα την πραγματική. Η διαδικασία προσέγγισης αρχίζει με την επιλογή του χώρου των συναρτήσεων, μέσα στον οποίο αναζητείται η εν λόγω συνάρτηση. Η επιλογή του χώρου που θα αναζητηθεί η συνάρτηση σχετίζεται με τις πληροφορίες μας για τις ιδιότητές της.

Η συνάρτηση που προσεγγίζουμε μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτήσεων γνωστής δομής και συμπεριφοράς, οι οποίες ονομάζονται *συναρτήσεις βάσης*

(base functions), ως εξής:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m, \quad (2.60)$$

όπου το διάνυσμα

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m]^T \quad (2.61)$$

είναι το διάνυσμα των συντελεστών που προσεγγίζονται. Σε κάθε σημείο γνωστών τιμών της συνάρτησης ισχύει:

$$f(P_i) = a_1 f_1(P_i) + a_2 f_2(P_i) + \cdots + a_m f_m(P_i) = s_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.62)$$

και σε μορφή πινάκων

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{s} \quad (2.63)$$

Ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης μπορεί να είναι πεπερασμένος ( $m < \infty$ ), όποτε μιλούμε για συναρτήσεις του **Ευκλείδειου χώρου**, ή άπειρος ( $m = \infty$ ), οπότε μιλούμε για συναρτήσεις του **χώρου Hilbert**. Προφανώς, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης, τόσο καλύτερα προσεγγίζεται η άγνωστη συνάρτηση του πεδίου βαρύτητας.

Δύο είναι τα κριτήρια, σύμφωνα με τα οποία επιλέγεται η συνάρτηση μέσα από το σύνολο των συναρτήσεων του χώρου. Το κριτήριο της **ομαλότητας** και το κριτήριο της **πιστότητας** [106]. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης, τόσο αυξάνεται και ο χώρος μέσα στον οποίο αναζητείται η βέλτιστη συνάρτηση. Το κριτήριο της ομαλότητας είναι απαραίτητο, όταν διακριτά δεδομένα χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της συνάρτησης. Το κριτήριο της πιστότητας προσαρμόζει τη συνάρτηση βέλτιστα στα δεδομένα του προβλήματος. Ακόμα και όταν η πραγματική συνάρτηση έχει λιγότερο ομαλό χαρακτήρα, δεν έχει κανένα νόημα να επιλέξουμε μια συνάρτηση που να εμφανίζει λεπτομέρειες, τις οποίες η πυκνότητα των σημείων των μετρήσεων δεν μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε [106].

Ένα κριτήριο ομαλότητας μιας συνάρτησης είναι η **νόρμα**, η οποία είναι ένας θετικός αριθμός που είναι τόσο μικρότερος, όσο ομαλότερη είναι η συνάρτηση. Συνήθως η νόρμα εκφράζεται μέσα από μία σχέση της μορφής:

$$(f, g) = \frac{1}{|A|} \int_A f g dP, \quad (2.64)$$

όπου  $A$  είναι μια περιοχή του πεδίου τιμών της  $f$ , μέσα στην οποία βρίσκονται τα σημεία γνωστών τιμών  $P_i$ . Στη περίπτωση που έχουμε περισσότερες συναρτήσεις βάσης από τις γνωστές τιμές της συνάρτησης, τότε ζητούμενο είναι η ομαλότητα της συνάρτησης μέσα από την ελαχιστοποίηση της νόρμας. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται **πιστή εφαρμογή ελάχιστης νόρμας** [106] και το μαθηματικό της μοντέλο δίνεται συνήθως από την ελαχιστοποίηση του εσωτερικού γινομένου:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= (f, f) = \left( \sum_i a_i f_i, \sum_j a_j f_j \right) \\ &= \sum_i \sum_j a_i a_j (f_i, f_j) = \sum_i \sum_j a_i a_j R_{ij} = \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

όπου  $\mathbf{R}$  είναι ο πίνακας με στοιχεία τα εσωτερικά γινόμενα των συναρτήσεων βάσης. Επομένως, το μαθηματικό μοντέλο της πιστής εφαρμογής ελάχιστης νόρμας δίνεται από:

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} = \min \quad (2.66)$$

Η τελική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{f}(P) = \mathbf{k}_P^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}, \quad (2.67)$$

όπου

$$\mathbf{K} = \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{F}^T \quad (2.68)$$

$$\mathbf{k}_P = \mathbf{FR}^{-1}\mathbf{f}_P \quad (2.69)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη βοηθητική συνάρτηση δύο σημείων

$$k(P, Q) = \sum_i \sum_j (\mathbf{R}^{-1})_{ij} f_i(P) f_j(Q) \quad (2.70)$$

τότε τα στοιχεία των πινάκων  $\mathbf{K}$  και  $\mathbf{k}_P$  είναι:

$$K_{ij} = k(P_i, P_j) \quad (2.71)$$

$$(\mathbf{k}_P)_i = k(P_i, P) \quad (2.72)$$

Η συνάρτηση  $k(P, Q)$  είναι ο αναπαραγωγός πυρήνας (reproducing kernel) του συναρτησιακού χώρου  $F$  και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$k(P, Q) \in F \quad \forall Q, \quad (2.73)$$

$$f(Q) = (f(P), k(P, Q))_P \quad \forall f \in F \quad (2.74)$$

Αποδεικνύεται, ότι ο αναπαραγωγός πυρήνας είναι μια συνάρτηση συμμετρική και θετικά ορισμένη [55]. Ο αναπαραγωγός πυρήνας έχει την ιδιότητα να αναπαράγει κάθε συνάρτηση του χώρου  $F$  μέσα από ένα εσωτερικό γινόμενο. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική στις μεθόδους προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας, γιατί η ίδια η συνάρτηση, ή άλλες συναρτήσεις, που εξαρτώνται άμεσα από αυτήν, μπορούν να αναπαραχθούν από γνωστές τιμές τους.

Με τη χρήση του μοντέλου της πιστής εφαρμογής ελάχιστης νόρμας μπορεί να δοθεί μια ερμηνεία για τον αναπαραγωγό πυρήνα  $k(P, Q)$ . Αν θεωρηθεί, ακολουθώντας τις μεθόδους συνόρθωσης, ο πίνακας  $\mathbf{R}^{-1}$  πίνακας συμμεταβλητότητας του  $\mathbf{a}$  σε αναλογία με τον πίνακα συμμεταβλητότητας στις μεθόδους συνόρθωσης, μπορεί να υπολογιστεί η συμμεταβλητότητα ανάμεσα σε δύο σημεία τιμών της συνάρτησης  $P$  και  $Q$ . Ισχύει [106]:

$$\begin{aligned} \sigma(f_P, f_Q) &= \sum_i \sum_j \frac{\partial f_P}{\partial a_i} \frac{\partial f_Q}{\partial a_j} \sigma_{a_i a_j} = \\ &= \sum_i \sum_j f_i(P) f_j(Q) (\mathbf{R}^{-1})_{ij} = k(P, Q) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Επομένως, ο αναπαραγωγός πυρήνας  $k(P, Q)$  εκφράζει τη συμμεταβλητότητα μεταξύ των τιμών της συνάρτησης  $f$  ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία  $P$  και  $Q$  και μπορεί να ταυτιστεί σε πρώτη προσέγγιση με τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας.

Στις παραπάνω σχέσεις προσδιορισμού της βέλτιστης συνάρτησης  $\hat{f}$  απαραίτητο στοιχείο για τη λύση είναι η γνώση του αναπαραγωγού πυρήνα  $k(P, Q)$ . Η επιλογή της νόρμας μέσα από τη δομή του πίνακα  $\mathbf{R}$ , όπως και το είδος και ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης δεν παρουσιάζονται στην τελική σχέση (2.67), αφού οι χρησιμοποιούμενοι πίνακες  $\mathbf{K}$  και  $\mathbf{k}_P$  προσδιορίζονται μέσω του αναπαραγωγού πυρήνα σύμφωνα με τις (2.71). Βέβαια, ο αναπαραγωγός πυρήνας μπορεί να υπολογιστεί γνωρίζοντας τις συναρτήσεις βάσης και τη νόρμα από τις (2.70), αλλά μπορεί να επιλεγεί και απευθείας.

Όπως είδαμε, δύο είναι οι επιλογές για τον προσδιορισμό του αναπαραγωγού πυρήνα  $k(P, Q)$ :

1. Μια πρώτη επιλογή είναι η χρήση απείρων συναρτήσεων βάσης, οι οποίες έχουν τις ίδιες ιδιότητες με την άγνωστη συνάρτηση. Π.χ., στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις βάσης οι επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές. Γνωρίζοντας ότι το εξωτερικό πεδίο βαρύτητας ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace,

επιλέγεται η οικογένεια των αρμονικών συναρτήσεων στη σφαίρα, που προσεγγίζει τη γήινη επιφάνεια. Στην περίπτωση που επιλέγονται άπειρες συναρτήσεις βάσης, ο κλασικός Ευκλείδειος χώρος ανάγεται στον απειροδιάστατο χώρο Hilbert. Όπως και ο κλασικός Ευκλείδειος χώρος, ο χώρος Hilbert έχει την ιδιότητα της ορθοκανονικότητας των συναρτήσεων βάσης. Ισχύει δηλαδή  $(f_i, f_j) = 0$  για κάθε  $i \neq j$  και  $\|f_i\|^2 = (f_i, f_i) = 1$ . Στην περίπτωση του χώρου Hilbert ο αναπαραγωγός πυρήνας δίνεται από τη σχέση:

$$k(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(P)f_i(Q), \quad (2.76)$$

αφού οι πίνακες  $\mathbf{R}$  και  $\mathbf{R}^{-1}$  γίνονται μοναδιαίοι. Αν ακολουθηθεί η επιλογή των άπειρων συναρτήσεων βάσης, απαραίτητος είναι ο προσδιορισμός του αθροίσματος της (2.76) για την εύρεση του  $k(P, Q)$ .

2. Η άλλη επιλογή, είναι ο απευθείας ορισμός του αναπαραγωγού πυρήνα, χωρίς τη γνώση της βάσης ή τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου του χώρου Hilbert. Ο αναπαραγωγός πυρήνας πρέπει στην περίπτωση αυτή να ικανοποιεί δύο βασικές ιδιότητες: ο πίνακας  $\mathbf{K}$  με στοιχεία τα  $K_{ij} = k(P_i, P_j)$  να είναι θετικά ορισμένος και να ισχύει η **συμμετρία** ( $k(P, Q) = k(Q, P)$ ). Ο αναπαραγωγός πυρήνας πρέπει να έχει και ιδιότητες αντίστοιχες με εκείνες της άγνωστης συνάρτησης, δηλαδή να είναι **ομογενής** (ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς – αμετάβλητος στη μετάθεση – translation invariant) και **ισότροπος** (ανεξάρτητος της στροφής – rotation invariant). Αν με  $\mathbf{r}_i$  συμβολίζεται το διάνυσμα θέσης ενός σημείου  $P_i$ , οι δύο τελευταίες ιδιότητες ικανοποιούνται μόνον όταν:

$$k(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = k(|r_i - r_j|) = k(r_{ij}), \quad (2.77)$$

δηλαδή, όταν ο αναπαραγωγός πυρήνας εξαρτάται μόνο από την απόσταση  $r_{ij}$  μεταξύ των σημείων.

Εκτός από τη διαδικασία της παρεμβολής μιας συνάρτησης σε γνωστές τιμές της υπάρχει και το αντίστοιχο πρόβλημα της πρόγνωσης τυχαίων μεταβλητών, όταν είναι γνωστές οι τιμές κάποιων άλλων τυχαίων μεταβλητών και η στοχαστική εξάρτηση ανάμεσα στις δύο μεταβλητές. Αποδεικνύεται [106] ότι, όταν τα διανύσματα των τυχαίων μεταβλητών έχουν μηδενικές προσδοκίες, η βέλτιστη γραμμική πρόγνωση καταλήγει στη μορφή:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{y}, \quad (2.78)$$

όπου  $\mathbf{y}$  οι παρατηρηθείσες τιμές της τυχαίας μεταβλητής,  $\hat{\mathbf{x}}$  οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής πρόγνωσης,  $\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$  ο πίνακας συμμεταβλητότητας μεταξύ των γνωστών μεταβλητών και των μεταβλητών της πρόγνωσης και  $\mathbf{C}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$  ο πίνακας μεταβλητότητας των παρατηρηθεισών μεταβλητών. Η μέθοδος της **σημειακής προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων** (least-squares collocation), η οποία εφαρμόζεται ευρύτατα στις γεωεπιστήμες, στηρίζεται στο μοντέλο της βέλτιστης γραμμικής πρόγνωσης [55], [106]. Ό,τι ισχύει για τις τυχαίες μεταβλητές ισχύει και για μια ειδική κατηγορία συναρτήσεων, τα ορίσματα των οποίων αποτελούν τυχαίες μεταβλητές και ονομάζονται **στοχαστικές συναρτήσεις** (stochastic functions). Υπάρχει, λοιπόν, η δυνατότητα, με τη βοήθεια ορισμένων παραδοχών να εισαχθούν στοιχεία από τη θεωρία των πιθανοτήτων για την περιγραφή ενός ντετερμινιστικού φαινομένου. Το πρόβλημα της παρεμβολής μιας ντετερμινιστικής συνάρτησης μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια στοχαστικών μεθόδων, αρκεί η συνάρτηση να μπορεί να θεωρηθεί ως μια δειγματική τιμή της στοχαστικής συνάρτησης, για την οποία η μέση συνάρτηση και η συνάρτηση συμμεταβλητότητας να είναι γνωστές. Αν ενδιαφερόμαστε για την πρόγνωση των τιμών της δειγματικής συνάρτησης σε ορισμένα σημεία ισχύει:

$$s'_i = f(P'_i) \quad i = 1, 2, \dots, n' \quad (2.79)$$

και η οποία, με την υπόθεση μηδενικών προσδοκιών των συναρτήσεων καταλήγει στη μορφή [106]:

$$\hat{s}' = C_{s'} C_{ss}^{-1} s. \quad (2.80)$$

Συγκρίνοντας τις (2.67) και (2.80) προκύπτει ότι οι δύο μέθοδοι δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα, όταν ο αναπαραγωγός πυρήνας  $k(P, Q)$  είναι ο ίδιος με τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας  $C(P, Q)$ . Επομένως η άγνωστη συνάρτηση, για την οποία έχουμε γνωστές κάποιες μόνο τιμές της, ή και τιμές άλλων συναρτήσεων παρόμοιας συμπεριφοράς, οι οποίες σχετίζονται με αυτήν, μπορεί να προσεγγιστεί με δύο τρόπους:

- Με καθαρά ντετερμινιστικό τρόπο, μέσα από διαδικασίες βέλτιστης γραμμικής παρεμβολής ελάχιστης νόρμας, όπου το κυριότερο πρόβλημα είναι η επιλογή της νόρμας και ο ορισμός του αναπαραγωγού πυρήνα. Στις περιπτώσεις αυτές η ίδια η συνάρτηση  $C(P, Q)$  θεωρείται ως αναπαραγωγός πυρήνας χωρίς στοχαστική σημασία (υπολογίζεται δηλαδή μέσα από μέσους όρους των τιμών της συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της και όχι μέσα από τελεστές προσδοκίας – μέσες τιμές απείρων δειγμάτων, κατά τη στατιστική ερμηνεία –). Το κριτήριο ελαχιστοποίησης της νόρμας που ακολουθείται είναι συνήθως κάποιο κριτήριο ομαλότητας της συνάρτησης (αφού οι συναρτήσεις βάσης επιλέγονται συνήθως μέσα από τον απειροστό χώρο Hilbert) και ταυτόχρονα κάποιο κριτήριο ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων (πιστότητα).
- Με τη χρησιμοποίηση στοχαστικών θεωριών, όταν ως αναπαραγωγός πυρήνας θεωρηθεί η συνάρτηση συμμεταβλητότητας  $C(P, Q)$ , η οποία υπολογίζεται στοχαστικά, αφού η συνάρτηση που προσεγγίζεται θεωρείται ως μια δειγματική τιμή της αντίστοιχης στοχαστικής συνάρτησης. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση προσεγγίζεται μέσα από τις στοχαστικές θεωρίες της βέλτιστης πρόγνωσης. Η εφαρμογή των στοχαστικών θεωριών για την προσέγγιση ενός ντετερμινιστικού φαινομένου επιτρέπεται μόνο μέσα από την έννοια της **εργοδικότητας** (ergodicity) της συνάρτησης  $f$ . Πολλά έχουν γραφτεί για την ισχύ της εργοδικότητας σε στοχαστικές συναρτήσεις που αναπτύσσονται στον κύκλο ή στη σφαίρα με κυριότερη ένσταση από τον Lauritzen [40]. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν ανεπτυγμένες οι θεωρίες αυτές, όπως και οι αντιμετώπισεις της στοχαστικής θεωρίας από τον Moritz [55] και τον Sansò [65].

Για την επίλυση του προβλήματος της εύρεσης της μορφής μιας άγνωστης συνάρτησης από τις διακριτές τιμές της τα δύο βασικά ζητούμενα είναι η επιλογή του χώρου, μέσα στον οποίο θα αναζητηθεί η συγκεκριμένη συνάρτηση και ο ορισμός της σχετικής νόρμας ως κριτήριο επιλογής. Όταν επιλέγεται ως χώρος αναζήτησης ο απειροδιάστατος χώρος συναρτήσεων βάσης Hilbert, τότε το πρόβλημα περιορίζεται στην επιλογή της νόρμας, δηλαδή του εσωτερικού γινομένου που χρησιμοποιείται ως κριτήριο επιλογής. Με την επιλογή του εσωτερικού γινομένου προκύπτει και ο αναπαραγωγός πυρήνας, μέσα από τον οποίο προσεγγίζεται η συνάρτηση με ελαχιστοποίηση της νόρμας.

Η επιλογή της νόρμας μπορεί να γίνει και μέσα από τη στοχαστική θεώρηση της όλης διαδικασίας. Όταν δηλαδή η προς προσέγγιση συνάρτηση θεωρηθεί ως μια δειγματική τιμή της πραγματικής συνάρτησης και όταν αυτή αποκτήσει στοχαστικό χαρακτήρα. Τότε προκύπτει ([55], [106]) ότι η επιλογή της νόρμας πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε ο αντίστοιχος αναπαραγωγός πυρήνας  $k(P, Q)$  να ταυτίζεται με τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας  $C(P, Q)$  της στοχαστικής συνάρτησης. Στην περίπτωση, λοιπόν, που η αναζητούμενη συνάρτηση  $f$  θεωρηθεί ως δειγματική τιμή μιας αντίστοιχης στοχαστικής συνάρτησης με μηδενική μέση τιμή και συνάρτηση συμμεταβλητότητας  $C(P, Q)$ , τότε το κριτήριο του ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος οδηγεί σε πρόγνωση-παρεμβολή που είναι ισοδύναμη με την ντετερμινιστική παρεμβολή ελάχιστης νόρμας με αναπαραγωγό πυρήνα  $k(P, Q) = C(P, Q)$  [55], [106], [86]. Το ζητούμενο που αμέσως προκύπτει εδώ είναι η εύρεση της συνάρτησης συμμεταβλητότητας.

Υιοθετώντας τη στοχαστική αντιμετώπιση της πρόγνωσης των τιμών της άγνωστης συνάρτησης, υποθέτουμε την ύπαρξη μιας στοχαστικής συνάρτησης, δειγματική τιμή της οποίας αποτελεί η εν λόγω συνάρτηση. Όμως στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας έχουμε μόνο

μία συνάρτηση και μάλιστα μόνον ορισμένες διακριτές τιμές της. Η δυσκολία αυτή ξεπερνιέται με την εισαγωγή της έννοιας της εργοδικότητας. Σύμφωνα με τη θεωρία, υπάρχει μια ειδική κατηγορία στοχαστικών συναρτήσεων, των οποίων τα στατιστικά χαρακτηριστικά μπορούν να προσδιοριστούν με μία και μόνη δειγματική συνάρτηση. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται εργοδικές συναρτήσεις. Με τον τρόπο αυτόν, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις είναι δυνατή η αντικατάσταση της προσδοκίας για την εύρεση της συνάρτησης συμμεταβλητότητας, δηλαδή η μέση τιμή ανάμεσα σε άπειρες δειγματικές συναρτήσεις, από τη μέση τιμή της μιας δειγματικής συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της. Μια ομογενής και ισότροπη στοχαστική συνάρτηση έχει εργοδική συνάρτηση συμμεταβλητότητας, όταν:

$$C(P, Q) = E\{f(P), f(Q)\} = M_u\{f(uP), f(uQ)\}, \quad (2.81)$$

όπου  $E\{\cdot\}$  είναι η προσδοκία από την πλευρά της στατιστικής και  $M_u\{\cdot\}$  είναι η μέση τιμή στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, η οποία προκύπτει από μια παράλληλη μετάθεση και στροφή των αρχικών σημείων  $P$  και  $Q$ . Στην παραπάνω ιδιότητα στηρίζεται και ο υπολογισμός της εμπειρικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας (empirical covariance function), η οποία προκύπτει από τη μέση τιμή των γινομένων των συναρτήσεων  $f$  στα διακριτά σημεία τιμών, όπως θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα υπολογισμού των συναρτήσεων συμμεταβλητότητας.

Το πρόβλημα λοιπόν της επιλογής της νόρμας μπορεί να αντιμετωπιστεί από στοχαστική πλευρά με την εισαγωγή της έννοιας των εργοδικών στοχαστικών συναρτήσεων. Υπάρχει όμως η δυνατότητα εισαγωγής εργοδικών συναρτήσεων στο πεδίο βαρύτητας; Σύμφωνα με τον Lauritzen [40], είναι αδύνατο να ικανοποιείται το κριτήριο της εργοδικότητας, όταν η συνάρτηση  $f$  έχει στοχαστικό χαρακτήρα, από τη στιγμή που οι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης  $a_i$  ( $a_{nm}$  στην περίπτωση σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων βάσης) είναι τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή. Οι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης στην περίπτωση που ακολουθούν την κατανομή του Gauss είναι **ασυσχέτιστοι** (uncorellated) και **στατιστικά ανεξάρτητοι** (statistical independent) [106]. Με βάση τους ορισμούς του Lauritzen ισχύει, ότι για μια στοχαστική συνάρτηση που ακολουθεί την κανονική κατανομή στη σφαίρα, οι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης της είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστοι και στατιστικά ανεξάρτητοι και δεν μπορεί να ισχύει η ιδιότητα της εργοδικότητας. Ως απάντηση των παραπάνω, ο Moritz απέδειξε ότι για την ισχύ της εργοδικότητας αρκεί οι συντελεστές να είναι ασυσχέτιστοι, χωρίς να είναι απαραίτητη η ισχύς της στατιστικής ανεξαρτησίας [55].

Οι παραπάνω στοχαστικές ερμηνείες της άγνωστης συνάρτησης του πεδίου βαρύτητας αποτέλεσαν, και αποτελούν ακόμη, σημείο έντονων διαφωνιών μεταξύ των υπέρμαχων της πιθανοιστικής αντιμετώπισης του πεδίου βαρύτητας και των υποστηρικτών της ντετερμινιστικής θεώρησης. Ο Sansò [65] ανέλυσε τις αρχές του Moritz δίνοντας μία μη-στοχαστική ερμηνεία στην παρουσίαση της σημειακής προσαρμογής. Ξεκινώντας από το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος – μέσου όμως όχι με τη στοχαστική ερμηνεία της μαθηματικής προσδοκίας, αλλά με την έννοια της μέσης τιμής στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης – υπέθεσε μόνο τις ιδιότητες της ομογένειας και της ισοτροπίας. Η ανάλυση έγινε για τη συνάρτηση του διαταρακτικού δυναμικού, αλλά εδώ θα παρουσιαστεί η ερμηνεία για μια γενικότερη συνάρτηση  $f$ . Σύμφωνα με τον Δερμάνη [106], η πρόγνωση των τιμών μιας άγνωστης συνάρτησης  $\hat{f}(P)$  δίνεται ως:

$$\hat{f}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(P_i), \quad (2.82)$$

όπου αναζητούνται οι βέλτιστες τιμές των συντελεστών  $\lambda_i$ , οι οποίοι είναι συναρτήσεις των σημείων μέτρησης. Απαραίτητη είναι η εισαγωγή της απαίτησης της συμμετρίας για τους συντελεστές  $\lambda_i$ , των ιδιοτήτων δηλαδή της ομογένειας και της ισοτροπίας. Για να μην εξαρτάται η προσέγγιση της συνάρτησης από την επιλογή του συστήματος αναφοράς, πρέπει οι συντελεστές

να είναι ανεξάρτητοι των μεταθέσεων και των στροφών. Πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned}\hat{f}(uP) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(uP, uP_1, \dots, uP_n) f(uP_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(P, P_1, \dots, P_n) f(uP_i),\end{aligned}\quad (2.83)$$

όπου  $u$  αντιπροσωπεύει έναν άκαμπτο μετασχηματισμό του συστήματος, δηλαδή οποιαδήποτε στροφή και μετάθεση στο σύστημα των σημείων, δίχως όμως αλλαγή της κλίμακας. Το σφάλμα στην προσέγγιση δίνεται [106]:

$$\begin{aligned}\epsilon = \epsilon(u) &= \hat{f}(uP) - f(uP) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(P, P_1, \dots, P_n) f(uP_i) - f(uP)\end{aligned}\quad (2.84)$$

Εισάγοντας το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (ντετερμινιστική προσέγγιση) έχουμε:

$$M\{\epsilon^2\} = M_u\{\epsilon(u)^2\} = \min \quad (2.85)$$

και

$$\begin{aligned}M\{\epsilon^2\} &= M_u\left\{f(uP)^2 - 2 \sum_i \lambda_i f(uP) f(uP_i) + \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j f(uP_i) f(uP_j)\right\} = \\ &= M_u\left\{f(uP)^2\right\} - 2 \sum_i \lambda_i M_u\left\{f(uP) f(uP_i)\right\} + \\ &\quad + \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j M_u\left\{f(uP_i) f(uP_j)\right\} = \\ &= k(P, P) - 2 \sum_i \lambda_i k(P, P_i) + \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j k(P_i, P_j),\end{aligned}\quad (2.86)$$

όπου ως γνωστόν με  $k$  συμβολίζεται ο αναπαραγωγός πυρήνας. Η παραπάνω σχέση γράφεται με μορφή πινάκων ως εξής:

$$M\{\epsilon^2\} = \varphi = k(P, P) - 2\mathbf{k}_P^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \min \quad (2.87)$$

όπου  $\mathbf{k}_P$  και  $\mathbf{K}$  οι πίνακες που δίνονται από τις σχέσεις (2.71) και  $\boldsymbol{\lambda}$  είναι το διάνυσμα των συντελεστών. Η παραπάνω ποσότητα ελαχιστοποιείται ως προς τους συντελεστές  $\boldsymbol{\lambda}$  σύμφωνα με την σχέση:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -2\mathbf{k}_P^T + 2\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0 \quad (2.88)$$

και είναι:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{k}_P. \quad (2.89)$$

Η τελική σχέση προσέγγισης της συνάρτησης  $\hat{f}(P)$ , θέτοντας  $\mathbf{s}$  το διάνυσμα των διαθέσιμων τιμών  $s_i = f(P_i)$ , δίνεται ως εξής (2.67):

$$\hat{f}(P) = \mathbf{k}_P^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s}. \quad (2.90)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο αναπαραγωγός πυρήνας δεν είναι άγνωστος, ή αυθαίρετα επιλεγμένος, αλλά ταυτίζεται με τη «δειγματική-εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας», που ορίζεται από τις μέσες τιμές στο πεδίο ορισμού της ντετερμινιστικής συνάρτησης  $f$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$k(P, Q) = C(P, Q) = M_u\{f(uP), f(uQ)\} \quad (2.91)$$

Με την παραπάνω συλλογιστική, η αρχή του Moritz εισάγεται ως *αρχή ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος της εκτίμησης* (minimum mean square estimation principle [65]) δίχως τη χρησιμοποίηση κάποιας στοχαστικής έννοιας. Η μόνη αρχή που χρησιμοποιήθηκε είναι η παραδοχή της σταθερότητας του τελεστή εκτίμησης στις τυχαίες στροφές επάνω στη σφαίρα (rotational invariance property [65], [67], [55]). Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι στην περίπτωση που η συνάρτηση που εκτιμάται μετακινηθεί τυχαία στην επιφάνεια της σφαίρας, οι στατιστικές τις ιδιότητες θα παραμείνουν σταθερές.

Ανακεφαλαιώνοντας, οι επιλογές που πρέπει να γίνουν για την προσέγγιση μιας συνάρτησης είναι δύο: η επιλογή των συναρτήσεων βάσης επάνω στις οποίες θα ανακατασκευαστεί η άγνωστη συνάρτηση από γνωστές διακριτές μετρήσεις και τη γνώση συναρτησιακών που τις συνδέουν και η επιλογή του εσωτερικού γινομένου (νόρμα), μέσα από το οποίο θα προκύψει ο αναπαραγωγός πυρήνας του χώρου.

Η επιλογή των συναρτήσεων βάσης σχετίζεται συχνά με τις βασικές ιδιότητες της άγνωστης συνάρτησης που προσεγγίζεται. Στην περίπτωση του διαταραχτικού δυναμικού του γήινου πεδίου βαρύτητας η οικογένεια των συναρτήσεων που αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες του πεδίου είναι οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Είναι επίσης δυνατό να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις βάσης πεπερασμένα στοιχεία [52], μόνο που λόγω της μη-αρμονικότητάς τους, χρειάζεται να επιλυθούν επιπλέον εξισώσεις [88]. Έχει προταθεί ακόμα η χρήση «δικυβικών» συναρτήσεων (splines) και σημειακών μαζών (point mass base functions) [41].

Η επιλογή του εσωτερικού γινομένου, σύμφωνα με το οποίο θα προσδιοριστεί και ο αναπαραγωγός πυρήνας, αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της προσέγγισης, όταν αναζητείται η «βέλτιστη» προσέγγιση. Η νόρμα μπορεί να ανήκει ή και να μην ανήκει στον κοινό χώρο Hilbert [38], [87], [88], [66], αλλά στην περίπτωση που αναζητείται η βέλτιστη προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων, η μοναδική επιλογή είναι η εύρεση της εμπειρικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Η διαδικασία του προσδιορισμού της εμπειρικής συνάρτησης είναι από τα πιο σημαντικά βήματα στη σωστή εφαρμογή της προσέγγισης της άγνωστης συνάρτησης. Ο Lauritzen [40] έδειξε, ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, είναι δυσκολότερο να προσεγγιστεί η συνάρτηση συμμεταβλητότητας από την ίδια την προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης του διαταραχτικού δυναμικού! (Περισσότερα για το παράδοξο αυτό δίνονται από τον Sansò [66]).

Στην ενότητα αυτή καταβλήθηκε προσπάθεια να συμπυκνωθεί η γενικότερη φιλοσοφία για την αντιμετώπιση της προσέγγισης της συνάρτησης του διαταραχτικού δυναμικού του πεδίου βαρύτητας. Είναι βέβαια κατανοητό, ότι σε μία μόνο ενότητα δεν θα μπορούσε να αναλυθεί πλήρως ένα από τα κυριότερα προβλήματα που απασχόλησαν – και απασχολούν ακόμα – την επιστήμη της γεωδαισίας. Σκόπιμη, λοιπόν, κρίνεται η αναφορά σε κάποιες από τις πολυάριθμες βιβλιογραφίες για περαιτέρω αναζήτηση. Ειδικότερα επισημαίνονται οι εξής εργασίες: [32], [55], [102], [82], [27], [4], [107], [106], [13], [14], [87], [88], [87], [90], [84], [38], [39], [40], [25], [26], [54], [65], [66], [67].

### 2.5.2 Συναρτήσεις (συμ)μεταβλητότητας

Η συνάρτηση (συμ)μεταβλητότητας περιγράφει τα στατιστικά χαρακτηριστικά σημάτων που σχετίζονται με το διαταραχτικό δυναμικό του πεδίου βαρύτητας. Τέτοια σήματα μπορεί να είναι ανωμαλίες της βαρύτητας, αποχές του γεωειδούς, συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου, οι βαθμίδες του δυναμικού, αλλά και αλτιμετρικά σήματα.

Όπως είναι γνωστό, όλες οι παρατηρήσεις που σχετίζονται με την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας συνδέονται με τη βοήθεια της βασικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας του διαταραχτικού δυναμικού  $K(P, Q)$ , της οποίας η μέση τιμή στην επιφάνεια της σφαίρας θεωρείται ίση με μηδέν:

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= K(\psi) = M\{T(P)T(Q)\} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda)T(\theta', \lambda') \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha, \end{aligned} \quad (2.92)$$

όπου το  $M$  αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της συνάρτησης επάνω στη σφαίρα (ιδιότητα της ομογένειας). Επίσης, η (2.92) είναι ανεξάρτητη ως προς το αζιμουθιο του  $PQ$  (ιδιότητα της ισοτροπίας). Επομένως, η συνάρτηση  $K(P, Q)$  εξαρτάται μόνο από τη σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων και όχι από τη θέση των σημείων. Όπως είδαμε, για την ισχύ της παραπάνω σχέσης πρέπει:

$$M\{T\} = 0 \quad (2.93)$$

και

$$\begin{aligned} M\{T\} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} T(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} T(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται μηδενικό, μόνον όταν η συνάρτηση του διαταρακτικού δυναμικού  $T(\theta, \lambda)$  δεν περιέχει αρμονικές μηδενικού βαθμού, το οποίο συμβαίνει όταν η μάζα του ελλειψοειδούς μοντέλου θεωρηθεί ίση με τη μάζα της Γης [32]. Ταυτόχρονα, με κατάλληλη επιλογή του συστήματος αναφοράς, ο πρώτος αρμονικός όρος του ολοκληρώματος είναι ίσος με το μηδέν. Από καθαρά ντετερμινιστική θεώρηση, ο χώρος Hilbert που περιέχει το σύνολο των συναρτήσεων βάσης, αποτελείται από συναρτήσεις κανονικές στο άπειρο και επομένως μόνο συναρτήσεις βάσης με δείκτη  $i > 1$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν [87].

Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας που ενδιαφέρει στις πρακτικές εφαρμογές είναι η συνάρτηση αυτο-συμμεταβλητότητας των ανωμαλιών του πεδίου βαρύτητας, αφού οι παρατηρήσεις αυτές αποτελούν τις πρωτογενείς πληροφορίες για τη δομή του πεδίου. Όλες οι υπόλοιπες συναρτήσεις συμμεταβλητότητας των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας λαμβάνονται μέσα από τις γνωστές σχέσεις του νόμου μετάδοσης των (συμ)μεταβλητοτήτων και τις θεωρίες της συναρτησιακής ανάλυσης [55], [86], [51], [107]. Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας των ανωμαλιών του πεδίου βαρύτητας δίνεται από μια σχέση ανάλογη της (2.92):

$$\begin{aligned} C(P, Q) &= C(\psi) = M\{C(P)C(Q)\} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g'_P \Delta g'_Q \sin \theta d\theta d\lambda d\alpha, \end{aligned} \quad (2.95)$$

Οι συναρτήσεις συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού και των ανωμαλιών της βαρύτητας μπορούν να εκφραστούν ως σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \\ C(P, Q) &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+2} P_n(\cos \psi), \end{aligned} \quad (2.96)$$

όπου  $R$  είναι η σφαιρική γήινη ακτίνα,  $r$  και  $r'$  είναι οι ακτινικές (πολικές) αποστάσεις των σημείων  $P$  και  $Q$  αντίστοιχα,  $P_n$  τα πολυώνυμα του Legendre,  $n$  ο βαθμός ανάπτυξης της σειράς και  $\psi$  η σφαιρική απόσταση των δύο σημείων. Οι συντελεστές των σφαιρικών αρμονικών  $k_n$  και  $c_n$  ονομάζονται αντίστοιχα **συντελεστές μεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού** (potential degree variances) και **συντελεστές μεταβλητότητας των**

ανωμαλιών της βαρύτητας (anomaly degree variances). Οι αρμονικές συναρτήσεις της παραπάνω μορφής ονομάζονται επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές (surface spherical harmonics) και εκφράζουν τις συναρτήσεις συμμεταβλητότητας, τόσο στο σύνορο της σφαιρικής επιφάνειας, όσο και εκτός του συνόρου. Η άθροιση, όπως αναφέρθηκε, αρχίζει από την τιμή 2 και όχι από το 0.

Οι συντελεστές μεταβλητότητας συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$c_n = \left(\frac{n-1}{R}\right)^2 k_n \quad (2.97)$$

Ο πρακτικός υπολογισμός των συναρτήσεων συμμεταβλητότητας του πεδίου βαρύτητας αποτελεί τη σημαντικότερη διαδικασία στην προσέγγιση του πεδίου. Ο σωστός υπολογισμός της συνάρτησης οδηγεί σε ασφαλείς στατιστικές πληροφορίες για τη μορφή και τις ιδιότητες του πεδίου που προσεγγίζεται. Πρέπει καταρχήν να πραγματοποιηθεί μια διάκριση ανάμεσα στον τοπικό και τον παγκόσμιο χαρακτήρα της συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Μια παγκόσμια συνάρτηση συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού του πεδίου βαρύτητας περιγράφει τα στατιστικά χαρακτηριστικά του πεδίου σε παγκόσμια κλίμακα. Η μορφή της συνάρτησης αυτής δεν θα περιέχει καμιά πληροφορία για τα τοπικά χαρακτηριστικά μιας περιορισμένης περιοχής, αφού οι ιδιότητες της ομογένειας και της ιστροπίας που ισχύουν, προσδίδουν ένα μέσο χαρακτήρα στο σύνολο των τιμών που χρησιμοποιούνται. Αυτό σημαίνει, ότι μια παγκόσμια συνάρτηση συμμεταβλητότητας, ενώ σε παγκόσμια κλίμακα μπορεί να παρουσιάζει τις στατιστικές ιδιότητες του πεδίου, εντούτοις σε περιπτώσεις τοπικών ιδιαιτεροτήτων δεν έχει τη δυνατότητα λεπτομερούς απεικόνισης των χαρακτηριστικών αυτών. Αντίθετα, η εύρεση τοπικών συναρτήσεων συμμεταβλητότητας από τις τιμές των μετρήσεων σε κάποια περιοχή παρουσιάζει τη μέση στατιστική τάση του πεδίου στην περιοχή αυτή. Η ίδια όμως συνάρτηση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή των στατιστικών χαρακτηριστικών μιας άλλης περιοχής. Η τοπική συμπεριφορά των συναρτήσεων συμμεταβλητότητας έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας. Οι Schwarz and Lachapelle [68] περιέγραψαν τα τοπικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης συμμεταβλητότητας των ανωμαλιών βαρύτητας. Ο Forsberg [18] παρουσίασε μια ανάλυση τοπικών συναρτήσεων συμμεταβλητότητας συνδυάζοντας τις τοπικές πληροφορίες που παρέχουν με τις κατανομές των πυκνοτήτων στο εσωτερικό της Γης. Οι Goad et al. [24] παρουσίασαν τα τοπικά χαρακτηριστικά του πεδίου στην ηπειρωτική περιοχή των Η.Π.Α., δίνοντας έμφαση στην ανυπαρξία στασιμότητας του πεδίου. Οι τοπικές πληροφορίες παρουσιάστηκαν εξετάζοντας περιοχές  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  και δίνοντας ένα πρώτο ορισμό για την τοπική συνάρτηση: «Μια τοπική συνάρτηση συμμεταβλητότητας είναι μια ειδική περίπτωση της παγκόσμιας συνάρτησης συμμεταβλητότητας, όπου όμως οι πληροφορίες για μεγαλύτερα μήκη κύματος από την έκταση της περιοχής έχουν αφαιρεθεί και το πεδίο εκτός, αλλά κοντά στην περιοχή, θεωρείται ότι μεταβάλλεται με τρόπο ανάλογο με το πεδίο εντός της περιοχής». Ο Tscherning [87] παρουσίασε την εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής στην προσέγγιση του τοπικού πεδίου βαρύτητας και ο Knudsen [37] υπολόγισε μια τοπική συνάρτηση συμμεταβλητότητας από επίγεια δεδομένα ανωμαλιών της βαρύτητας και από δορυφορικά δεδομένα αλτιμετρίας. Αναλυτικά μοντέλα, τόσο για τοπικές συναρτήσεις συμμεταβλητότητας, όσο και για παγκόσμιες δίνονται από τον Moritz [55]. Όσον αφορά στα παγκόσμια μοντέλα, στηρίζονται στις αναπτύξεις επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών σύμφωνα με τις (2.96). Ο μοναδικός περιορισμός στη χρήση των παγκόσμιων μοντέλων συμμεταβλητοτήτων των ανωμαλιών του πεδίου βαρύτητας είναι η απαίτηση άθροισης απείρων όρων. Χρησιμοποιώντας μια παγκόσμια βάση δεδομένων ανωμαλιών βαρύτητας, οι Tscherning and Rapp [91] έδωσαν κλειστές σχέσεις για τον υπολογισμό των συντελεστών στα απειροστά αθροίσματα. Για την αναπαράσταση των συντελεστών του διαταρακτικού δυναμικού χρησιμοποιείται ευρύτατα το μοντέλο «4» των Tscherning and Rapp [91]:

$$k_i(T, T) = \frac{A}{(i-1)(i-2)(i+24)}, \quad (2.98)$$

όπου το  $A$  είναι μια σταθερά, η οποία προσδιορίζεται από την εκάστοτε κατανομή των δεδομένων με μονάδες  $(m/sec)^4$ . Οι συντελεστές των ανωμαλιών βαρύτητας σύμφωνα με το

μοντέλο έχουν τη μορφή:

$$c_i(\Delta g, \Delta g) = \frac{(i-2)^2}{(rr')k_i(T, T)} = \frac{A(i-1)}{(rr')(i-2)(i+24)}. \quad (2.99)$$

Στην πράξη, τα διαθέσιμα δεδομένα είναι ανωμαλίες της βαρύτητας και αποχές του γεωειδούς που προέρχονται από αλτιμετρικές μετρήσεις. Η υπολογιστική διαδικασία ξεκινά από την χρησιμοποίηση ανηγμένων τιμών δεδομένων. Η αναγωγή πραγματοποιείται για την απομάκρυνση των χαρακτηριστικών χαμηλών συχνοτήτων και της τοπογραφίας. Τα ανηγμένα δεδομένα αντιπροσωπεύουν καλύτερα τα τοπικά χαρακτηριστικά της περιοχής μελέτης. Η κοινή συσχέτιση των δεδομένων που χρησιμοποιούνται, αφού περιέχουν τις πληροφορίες των χαμηλών συχνοτήτων και της τοπογραφίας, πρέπει να γίνεται ελάχιστη για την αποφυγή των αριθμητικών προβλημάτων που παρουσιάζονται στην επίλυση του συστήματος της πρόγνωσης. Η απομάκρυνση της συσχέτισης των δεδομένων πραγματοποιείται με την απομάκρυνση των συνιστωσών των χαμηλών συχνοτήτων του πεδίου και της τοπογραφίας μέσα από τις τοπογραφικές αναγωγές που αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.3. Η απαίτηση για δεδομένα με μέση τιμή κοντά στο μηδέν (κεντρωμένα—centered) για την επίλυση του ολοκληρώματος (2.95) ικανοποιείται συνήθως με την προσεκτική προεπεξεργασία των δεδομένων και την ορθή εφαρμογή των κατάλληλων αναγωγών και διορθώσεων. Η αμετάβλητη στη στροφή (ισοτροπία) και στη μετάθεση (ομογένεια) αναπαράσταση της συνάρτησης συμμεταβλητότητας υπολογίζεται στην πράξη μέσα από τη μέση τιμή στο πεδίο ορισμού της των γινομένων των παρατηρήσεων σε ολόκληρη την περιοχή. Τα δεδομένα δίνονται σε διακριτά σημεία και επομένως η προσέγγιση του ολοκληρώματος (2.95) πραγματοποιείται καταρχήν με τη βοήθεια αριθμητικής ολοκλήρωσης. Έστω ότι κάθε διακριτή παρατήρηση  $y_i$  αναπαριστά το εμβαδόν μιας μικρής περιοχής  $A_i$  και η  $y_j$  αναπαριστά το εμβαδόν μιας άλλης περιοχής  $A_j$  τότε:

$$C_k = \frac{\sum A_i A_j y_i y_j}{\sum A_i A_j} \quad (2.100)$$

Εάν η περιοχή χωριστεί σε πολύ μικρές περιοχές, που η κάθε μία θα περιέχει μία παρατήρηση και οι περιοχές αυτές θεωρηθούν ισεμβαδικές, τότε η σχέση απλοποιείται σε:

$$C_k = \frac{\sum y_i y_j}{N_k}, \quad (2.101)$$

όπου  $N_k$  ο αριθμός των γινομένων στο  $k$  διάστημα επιλογής. Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι δυνατό να υπολογιστούν οι εμπειρικές τιμές της συνάρτησης (συμ)μεταβλητότητας των δεδομένων. Χωρίζοντας την περιοχή σε ίσα διαστήματα και υπολογίζοντας τα αθροίσματα που προαναφέρθηκαν για κάθε διάστημα, οι τιμές των (συμ)μεταβλητοτήτων που λαμβάνονται αντιστοιχούν στις εμπειρικές τιμές της συνάρτησης. Αν αναλυθούν οι εμπειρικές τιμές της συνάρτησης συμμεταβλητότητας στα διαφορετικά αζιμούθια προκύπτει η φυσιολογική ανισοτροπία του πραγματικού πεδίου βαρύτητας. Ένας δείκτης αυτής της ανισοτροπίας παρουσιάστηκε από τον Forsberg [18], ως ο λόγος του μεγαλύτερου ως προς το μικρότερο μήκος συσχέτισης για τα διαφορετικά αζιμούθια. Μια ισότροπη συνάρτηση συμμεταβλητότητας έχει δείκτη ίσο με 1. Τα κυρίαρχα ανισοτροπικά χαρακτηριστικά μιας εμπειρικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας είναι δυνατό να ελαχιστοποιηθούν με την αφαίρεση των συσχετίσεων λόγω τοπογραφίας. Ένα ακόμη πεδίο με εντονότερο ισοτροπικό χαρακτήρα λαμβάνεται με την αφαίρεση ενός παγκοσμίου μοντέλου μεγάλου βαθμού ανάπτυξης. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εμπειρικά υπολογισμένων τιμών της συνάρτησης συμμεταβλητότητας, υπολογίζονται οι εμπειρικά προσδιοριζόμενοι συντελεστές των ανωμαλιών του πεδίου βαρύτητας. Οι εμπειρικά υπολογισμένοι συντελεστές περιγράφουν την τοπική συμπεριφορά της συνάρτησης με βάση τα χρησιμοποιούμενα δεδομένα. Οι τιμές αυτές κατά κανόνα δεν ακολουθούν κάποιο μαθηματικό μοντέλο. Η προσαρμογή ενός αναλυτικού μοντέλου στις εμπειρικές τιμές είναι το επόμενο βήμα στον προσδιορισμό της συνάρτησης συμμεταβλητότητας του διαταρακτικού δυναμικού. Χρησιμοποιείται συνήθως το μοντέλο των Tscherning and Rapp (2.99) [91]. Από τη στιγμή

που υπολογίζεται μια τοπική συνάρτηση συμμεταβλητότητας απαραίτητη είναι η απομάκρυνση των χαμηλών συχνοτήτων του πεδίου που αντιπροσωπεύουν την επίδραση εκτός της περιοχής μελέτης. Η απομάκρυνση πραγματοποιείται με την αφαίρεση της συνεισφοράς ενός παγκόσμιου μοντέλου σφαιρικών αρμονικών. Οι συντελεστές του μοντέλου έχουν προσδιοριστεί, όπως έχει ήδη περιγραφεί, μετά από προσαρμογή παγκόσμιων βάσεων δεδομένων (επίγειων και δορυφορικών) σε μοντέλα σφαιρικών αρμονικών. Οι συντελεστές αυτοί συνοδεύονται και από τα αντίστοιχα σφάλματα προσδιορισμού τους. Συνεπώς η επίδραση αυτών των σφαλμάτων πρέπει να ληφθεί υπόψη. Για το λόγο αυτόν, χρησιμοποιούνται οι **συντελεστές συμμεταβλητότητας σφάλματος του μοντέλου** (error degree-variances), οι οποίοι δίνονται από την εξίσωση:

$$\epsilon_i = \gamma^2 R^2 \sum_{i=0}^m \left( \Delta C_{im}^2 + \Delta S_{im}^2 \right), \quad (2.102)$$

όπου  $\epsilon_i$  είναι οι συντελεστές μεταβλητότητας σφάλματος των συντελεστών του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου,  $\gamma$  μια μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας,  $R$  η μέση γήινη ακτίνα,  $i$  ο βαθμός με το  $n$  ως μέγιστο,  $m$  η μέγιστη τάξη ανάπτυξης και  $\Delta C_{im}$ ,  $\Delta S_{im}$  τα σφάλματα των συντελεστών του μοντέλου. Οι συντελεστές μεταβλητότητας σφάλματος εκφράζουν το σφάλμα στο παγκόσμιο μοντέλο, το οποίο μπορεί να είναι σημαντικό στην περιοχή μελέτης. Υποθέτοντας ότι οι συντελεστές μεταβλητότητας σφάλματος του μοντέλου δίνουν τουλάχιστον τη γενικότερη τάση (trend) στην περιγραφή του σφάλματος ανά βαθμό ανάπτυξης, στη μελέτη μιας τοπικής περιοχής οι τιμές των συντελεστών πολλαπλασιάζονται με μια κοινή σταθερά  $a$ . Ο ρόλος της παραμέτρου  $a$  ταυτίζεται με το ρόλο ενός συντελεστή κλίμακας για την ταυτόχρονη χρησιμοποίηση των συντελεστών σφάλματος και των συντελεστών του διαταρακτικού δυναμικού. Το τοπικό μοντέλο για την προσέγγιση της συνάρτησης συμμεταβλητότητας καταλήγει στη μορφή:

$$K(P, Q) = a \sum_{i=2}^n \epsilon_i \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_i \left( \frac{R_B^2}{rr'} \right) P_i(\cos \psi) \quad (2.103)$$

Στην παραπάνω εξίσωση  $n$  είναι ο μέγιστος βαθμός ανάπτυξης του παγκόσμιου μοντέλου,  $R$  μια μέση ακτίνα της Γης,  $R_B$  είναι η ακτίνα της σφαίρας του Bjerhammar [32] και  $\psi$  είναι η σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων  $P$  και  $Q$ . Έχοντας γνωστή την τιμή της συνάρτησης συμμεταβλητότητας  $K(P, Q)$  από τους εμπειρικούς υπολογισμούς, οι άγνωστοι για τον προσδιορισμό της τοπικής συνάρτησης είναι η παράμετρος  $A$  του μοντέλου των Tscherning and Rapp, ο συντελεστής κλίμακας  $a$  και η τιμή της  $R_B$  της ακτίνας του Bjerhammar. Κάθε μία άγνωστη παράμετρος αντιστοιχεί σε διαφορετικές περιοχές του συνολικού φάσματος της συνάρτησης, αφού ο συντελεστής κλίμακας  $a$  σχετίζεται με τις χαμηλές συχνότητες του φάσματος, ενώ ο  $A$  και ιδιαίτερα ο  $R_B$  χαρακτηρίζουν τις υψηλές συχνότητες [1]. Η διαδικασία προσδιορισμού των τριών παραμέτρων παρουσιάστηκε από τον Tscherning [85], αναλύθηκε από τον Knudsen [37] για την περίπτωση ύπαρξης και αλτιμετρικών δεδομένων και ακολουθείται στο πρόγραμμα ανάλυσης γεωδαιτικών δεδομένων GEOCOL [83]. Η διαδικασία που προτείνεται για την προσέγγιση μιας τοπικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας, προϋποθέτει ότι η (2.99) αποτελεί ένα ισχύον μοντέλο για την εκτίμηση της (2.101). Το γεγονός αυτό συμβαίνει, όταν το γήινο πεδίο βαρύτητας, εκτός της τοπικής περιοχής, έχει την ίδια στατιστική συμπεριφορά ως προς τη μέση τιμή με το τοπικό πεδίο [88]. Είναι λοιπόν σημαντικό να αφαιρεθούν, εκτός από τη συνεισφορά του πεδίου αναφοράς και τα τοπικά τοπογραφικά χαρακτηριστικά της περιοχής με τη διαδικασία που περιγράφηκε στην ενότητα 2.3.

**Παράδειγμα: πρόγνωσης αποχών του γεωειδούς από διακριτά δεδομένα ανωμαλιών βαρύτητας**

Θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου της βέλτιστης γραμμικής πρόγνωσης για την περίπτωση που τα δεδομένα είναι ανωμαλίες της βαρύτητας και η πρόγνωση γίνεται σε αποχές του γεωειδούς. Έμφαση θα δοθεί κυρίως στα επιμέρους βήματα προεπεξεργασίας των

δεδομένων, αφού η ανάλυση του αλγορίθμου της σημειακής προσαρμογής έχει παρουσιαστεί από πολλούς ερευνητές (βλ., π.χ., [55] και [107]).

Το βασικότερο βήμα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι η κατάλληλη επιλογή και ο ακριβής υπολογισμός του αναπαραγωγού πυρήνα που θα χρησιμοποιηθεί στη διαδικασία της πρόγνωσης. Όταν ο αναπαραγωγός πυρήνας ταυτίζεται με τη εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας, η οποία προκύπτει από τη συνεισφορά του πλήθους των δεδομένων της περιοχής, τότε λαμβάνεται ως αποτέλεσμα η βέλτιστη γραμμική πρόγνωση ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Η λύση αυτή είναι η βέλτιστη για τη συγκεκριμένη περιοχή, τη συγκεκριμένη κάλυψη και ποιότητα των δεδομένων, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της εμπειρικής συνάρτησης. Για την περιγραφή από την εμπειρική συνάρτηση των τοπικών χαρακτηριστικών του πεδίου βαρύτητας είναι απαραίτητη η απομάκρυνση των χαμηλών συχνοτήτων του πεδίου, της συνεισφοράς δηλαδή των τιμών ενός παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου. Ακόμη, η απομάκρυνση των υψηλών συχνοτήτων του πεδίου μέσα από κατάλληλες αναγωγές και διορθώσεις λόγω της τοπογραφίας εξαλείφει τις ανισοτροπίες στον υπολογισμό της εμπειρικής συνάρτησης. Τα δεδομένα που τελικά χρησιμοποιούνται, χαρακτηρίζουν ένα εξομαλυνμένο πεδίο και εισάγονται στη σχέση (2.101). Η εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας που υπολογίζεται, κατά κανόνα, δεν ακολουθεί κάποιο αναλυτικό μοντέλο. Για τη χρήση της στη διαδικασία της σημειακής προσαρμογής απαραίτητη είναι η προσαρμογή των τιμών σε ένα μοντέλο της μορφής (2.99). Η προσαρμογή γίνεται, όπως περιγράψαμε παραπάνω, ακολουθώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων και προσεγγίζοντας βέλτιστα τις άγνωστες παραμέτρους  $R_B$ ,  $a$  και  $A$ .

Μετά από το βέλτιστο προσδιορισμό των παραμέτρων αυτών, έχει υπολογιστεί η μοντελοποιημένη εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας. Το πρόβλημα για την εφαρμογή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής είναι ο μεγάλος αριθμός των γραμμικών εξισώσεων που επιλύονται. Από τη σχέση (2.78) φαίνεται καθαρά ότι ο αριθμός των εξισώσεων ισούται με τον αριθμό των παρατηρήσεων που υπάρχουν διαθέσιμες. Για το λόγο αυτόν, είναι απαραίτητο, πριν την εφαρμογή του αλγορίθμου της σημειακής προσαρμογής να γίνεται μια διαδικασία επιλογής των παρατηρήσεων. Λεπτομέρειες για την επιλογή των δεδομένων έχουν δοθεί από τους [87], [24] [90]. Εδώ θα δοθεί μία σύντομη περιγραφή. Καταρχήν, τα δεδομένα πρέπει να αξιολογηθούν με κατάλληλες μεθόδους για την απομάκρυνση χονδροειδών σφαλμάτων [89]. Στη συνέχεια πρέπει να δοθούν κάποιοι κανόνες για την απαραίτητη πυκνότητα των δεδομένων, σε σχέση με το μήκος συσχέτισης της συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Ένας κανόνας (rule-of-thumb) για την κατάλληλη επιλογή της διακριτικής απόστασης των δεδομένων δίνεται από την εξίσωση [87]:

$$e_d^2 \approx C_o \left( \frac{0.3d}{\psi_1} \right)^2, \quad (2.104)$$

όπου  $e_d$  είναι η τυπική απόκλιση, η οποία αντιστοιχεί στην ακρίβεια προσδιορισμού των ανωμαλιών βαρύτητας,  $C_o$  είναι η μεταβλητότητα του συνόλου των δεδομένων βαρύτητας και  $\psi_1$  είναι το μήκος συσχέτισης των τιμών του πεδίου. Οι δύο τελευταίες ποσότητες λαμβάνονται απευθείας από τη διαδικασία προσδιορισμού της μοντελοποιημένης εμπειρικής συνάρτησης. Π.χ., αν το επιθυμητό σφάλμα στον προσδιορισμό των ανωμαλιών βαρύτητας είναι 3 mGal και από την εμπειρική συνάρτηση προκύπτει  $C_o = 625$  mGal και  $\psi_1 = 10'$ , τότε η απόσταση μεταξύ των δεδομένων αρκεί να είναι 4'. Ένα μέσο διάστημα λοιπόν μεταξύ των δεδομένων μπορεί να προσδιοριστεί από τη στιγμή που είναι γνωστά: (α) η επιθυμητή ακρίβεια προσδιορισμού του γεωειδούς, η οποία αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη ακρίβεια παρεμβολής των ανωμαλιών βαρύτητας, (β) η μεταβλητότητα του συνόλου των τιμών των ανωμαλιών βαρύτητας και (γ) το μήκος συσχέτισης του πεδίου, τα οποία προκύπτουν από τη μοντελοποίηση της εμπειρικής συνάρτησης συμμεταβλητότητας. Μια αρχική λύση μπορεί να προκύψει με τα αντίστοιχα σημεία των δεδομένων και στη συνέχεια μια πρόγνωση των τιμών στα σημεία που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί στη λύση. Δεδομένης της απομάκρυνσης ενδεχόμενων χονδροειδών σφαλμάτων από τις παρατηρήσεις [89], αν οι διαφορές που προκύπτουν από τη λύση, σε σχέση με τις αυθεντικές παρατηρήσεις, διαφέρουν σημαντικά (π.χ.,  $> 3e_d$ ), τότε οι τιμές αυτές συμπεριλαμβάνονται στην νέα επίλυση. Περισσότερα για τη διαδικασία επιλογής των παρατηρήσεων δίνονται από τους [87], [24].

Υστερα από την επιλογή των δεδομένων, ο αριθμός των εξισώσεων θα έχει ελαττωθεί αρκετά, ώστε η γενική λύση να είναι πλέον εφικτή. Στην περίπτωση που υπάρχουν ακόμη αριθμητικά προβλήματα ακολουθείται η μέθοδος της σημειακής προσαρμογής κατά βήματα [84], [55].

Μια παραλλαγή της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής παρουσιάστηκε από τους Bottoni and Barzaghi [5]. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της διαδικασίας της πρόγνωσης με τον κατάλληλο υπολογισμό των δεδομένων σε κάρναβο. Η **ταχεία σημειακή προσαρμογή** (fast collocation) έχει το πλεονέκτημα της επιτάχυνσης των υπολογιστικών διαδικασιών.

## 2.6 Εφαρμογές φασματικών τεχνικών στο πεδίο βαρύτητας

Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, αναλύθηκαν σε συνάρτηση με την φιλοσοφία που ακολουθούν για την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας. Οι φασματικές μέθοδοι προσέγγισης δε σχετίζονται με την αρχική φιλοσοφία της μεθόδου προσέγγισης, αλλά αποτελούν ένα επιπλέον εργαλείο στην αντιμετώπιση των πολύπλοκων μαθηματικών σχέσεων που προκύπτουν. Η ανάγκη για την ανάπτυξη των φασματικών τεχνικών προήλθε από το γεγονός της συνεχούς μεγάλης αύξησης των διαθέσιμων δεδομένων.

Με την ανάπτυξη νέων μεθόδων μετρήσεων (από-αέρα, δορυφορικές) παρουσιάστηκε η ανάγκη ανάπτυξης κατάλληλων μεθοδολογιών για την ταχεία επίλυση των προβλημάτων προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας. Πολλοί ερευνητές παρουσίασαν τροποποιήσεις των αρχικών σχέσεων, με σκοπό τον περιορισμό των αριθμητικών υπολογισμών. Παραδείγματα τροποποιήσεων της βασικής συνάρτησης του Stokes στον προσδιορισμό της επιφάνειας του γεωειδούς από μετρήσεις ανωμαλιών βαρύτητας έχουν δοθεί από τους [53], [34], [78], [103]. Τα ολοκληρώματα της μορφής (2.7) ονομάζονται **συνελικτικά ολοκληρώματα** (convolution integrals) και είναι δυνατό να επιλυθούν σχετικά απλά με τη χρήση των φασματικών τεχνικών, με την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα δίνονται σε μορφή κάρναβου. Επειδή οι βασικές σχέσεις προσέγγισης του πεδίου παρουσιάζονται σε μορφή συνελικτικών ολοκληρωμάτων, η εφαρμογή των φασματικών τεχνικών οδηγεί σε γρήγορες, από άποψη χρόνου υπολογισμού στον υπολογιστή (CPU time), λύσεις.

Ο όρος **φάσμα** (spectrum – specter (latin)) οφείλεται στον Sir Issac Newton, ο οποίος παρατήρησε την ανάλυση του ηλιακού φωτός σε χρώματα, όταν μια ακτίνα ηλίου περνά μέσα από ένα κομμάτι γυαλί. Παρατήρησε ότι κάθε χρώμα αναπαριστά ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος της ηλιακής ακτινοβολίας. Ο Newton στο κλασικό του έργο Principia [57] ανέλυσε με μαθηματικές εξισώσεις, όσα είχε παρατηρήσει για κάποια περιοδικά φυσικά φαινόμενα ο Πυθαγόρας τον 6 αιώνα π.Χ. Ο Γάλλος μηχανικός Jean Baptist Fourier παρουσίασε στη διατριβή του ότι οποιαδήποτε συνάρτηση  $u(x)$ , μπορεί να αναλυθεί σε ένα άθροισμα απείρων ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών όρων ως εξής [22]:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(kax) + B_k \sin(kax)]. \quad (2.105)$$

Η ανάλυση Fourier, όπως λέγεται, είναι η ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε όρους ημιτόνου και συνημιτόνου. Οι εφαρμογές της ανάλυσης αυτής αναπτύχθηκαν ιδιαίτερα στις ηλεκτρονικές επιστήμες [7], [8]. Τα τελευταία χρόνια έχει παρουσιαστεί πληθώρα εφαρμογών των μετασχηματισμών Fourier στην προσέγγιση παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας. Οι Sideris [77], [71] και Forsberg [18] χρησιμοποίησαν τους μετασχηματισμούς Fourier για τον υπολογισμό τοπογραφικών διορθώσεων. Ο Vassiliou [104] και οι Tziavos et al. [98] εφάρμοσαν την ίδια μεθοδολογία για τον υπολογισμό της επίδρασης του αναγλύφου σε από αέρα μετρήσεις της βαρύτητας και της βαθυδομετρίας (airborne gravity and gradiometry). Οι Harrison and Dickinson [30], Haagmans et al. [28] και οι Klose and Ilk [36] πρότειναν ειδικές τροποποιήσεις των

μετασχηματισμών Fourier για την απαλοιφή ορισμένων σφαλμάτων κατά την εφαρμογή τους. Οι Hofmann-Wellenhof and Moritz [33], οι Schwarz et al. [69] και ο Sideris [73] έδωσαν μια γενική επισκόπηση των εφαρμογών των μετασχηματισμών Fourier, ενώ συγκριτικές αναλύσεις των τεχνικών μέσω αριθμητικών αποτελεσμάτων παρουσιάστηκαν από τον Tziavos [94]. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα παρουσιαστούν μόνον οι βασικές σχέσεις του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier, αφού τα γεωδαιτικά δεδομένα αφορούν σε διδιάστατες κατανομές.

### 2.6.1 Ο μετασχηματισμός Fourier στις δύο διαστάσεις

Στη γενικότερη περίπτωση ο πολυδιάστατος μετασχηματισμός Fourier  $G$  της συνάρτησης  $g$  δίνεται από τις διανυσματικές εξισώσεις [73]:

$$G(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \mathbf{f}^T \mathbf{t}} d\mathbf{t} = \mathbf{F}\{g(\mathbf{t})\}, \quad (2.106)$$

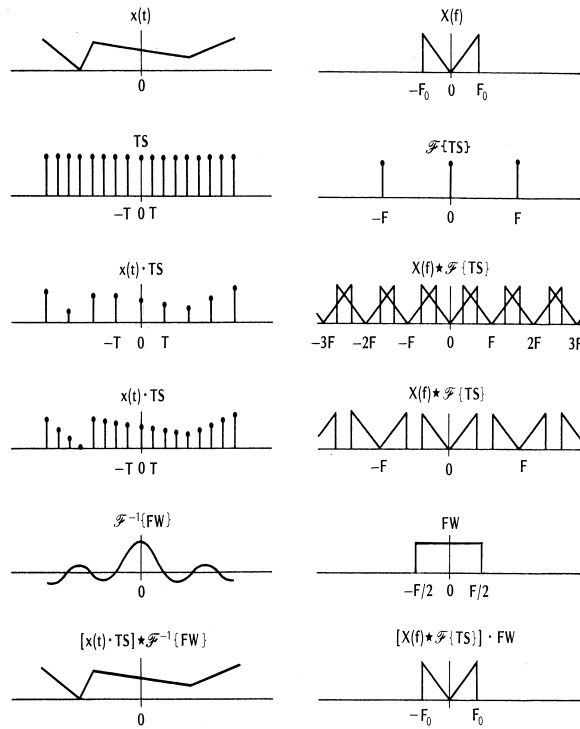
$$g(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{f}) e^{2\pi i \mathbf{f}^T \mathbf{t}} d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1}\{G(\mathbf{f})\}, \quad (2.107)$$

από τις οποίες η πρώτη αντιστοιχεί στον ευθύ και η δεύτερη στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Τα διανύσματα  $\mathbf{t}$  και  $\mathbf{f}$  αντιστοιχούν στις συντεταγμένες χώρου και συχνότητας, αντιστοίχως. Π.χ., για την περίπτωση του διδιάστατου μετασχηματισμού που ενδιαφέρει στην περίπτωση των γεωδαιτικών εφαρμογών, ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= [x \ y]^T \\ \mathbf{f} &= [u \ v]^T \\ \mathbf{f}^T \mathbf{t} &= ux + vy \\ d\mathbf{t} &= dx dy \\ d\mathbf{f} &= du dv \end{aligned} \quad (2.108)$$

όπου  $u, v$  είναι οι συντεταγμένες στο χώρο των συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις χωρικές συχνότητες  $x, y$  και τα ολοκληρώματα στις σχέσεις (2.106) είναι διπλά ολοκληρώματα. Οι ιδιότητες του διδιάστατου συνεχούς μετασχηματισμού δίνονται και αποδεικνύονται από τους [16], [77], [7], [8], [58], [69], [93].

Στην περίπτωση της φυσικής γεωδαισίας, τα διαθέσιμα δεδομένα έχουν συνήθως διδιάστατη κατανομή. Επίσης, δεν είναι γνωστή η συνάρτηση του πεδίου στην αναλυτική της μορφή, είναι όμως διαθέσιμες διακριτές τιμές της συνάρτησης αυτής σε μια περιορισμένης έκτασης περιοχή (ή κάποιας άλλης συνάρτησης που συνδέεται με τη ζητούμενη με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτησιακών, όπως φαίνεται στην ενότητα 2.5). Η διακριτοποίηση της συνάρτησης οδηγεί στην αντικατάσταση των συνεχών ολοκληρωμάτων με διακριτά αθροίσματα και η περιορισμένη έκταση της περιοχής στην μεταβολή των απειροστών ορίων των αθροισμάτων σε πεπερασμένα. Η διαδικασία διακριτοποίησης των σχέσεων του μετασχηματισμού στηρίζεται στην εφαρμογή του **θεωρήματος της δειγματοληψίας** (sampling theorem) και περιγράφεται στο σχήμα 2.5. Το θεώρημα της δειγματοληψίας καθορίζει τις προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες ένα συνεχές σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από δειγματικές διακριτές τιμές του δίχως απώλεια της πληροφορίας που παρείχε το αρχικό σήμα. Έστω, λοιπόν, ότι γνωρίζουμε ακριβώς τη δομή της διδιάστατης συνάρτησης του δυναμικού του πεδίου βαρύτητας, συνάρτηση, της οποίας η προσέγγιση είναι το κύριο αντικείμενο της φυσικής γεωδαισίας. Έστω ότι η μορφή της συνάρτησης περιορίζεται στις χαμηλές συχνότητες φτάνοντας σε μία μέγιστη τιμή. Τότε, η συνάρτηση παρουσιάζει περιορισμένο πεδίο ορισμού στο χώρο των συχνοτήτων (band limited). Έστω οι μέγιστες συχνότητες της συνάρτησης  $w(x, y)$  είναι  $U_0$  και  $V_0$  κατά  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier της  $w(x, y)$  είναι μηδέν για  $|U| > U_0$  ή  $|V| > V_0$ . Ο συνεχής μετασχηματισμός ενός πραγματικού σήματος είναι



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση του θεωρήματος δειγματοληψίας.

πάντοτε μια συμμετρική συνάρτηση [49], [7], με συνολικό μέγεθος  $2U_0$  και  $2V_0$  στο χώρο των συχνοτήτων, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.5. Μια δειγματοληπτική συνάρτηση (sampled function) της  $w(x, y)$  μπορεί να κατασκευαστεί από τον πολλαπλασιασμό της συνάρτησης αυτής με τη δειγματική συνάρτηση (sampling function). Η δειγματική συνάρτηση αποτελείται από πολλές συναρτήσεις παλμού και παρουσιάζεται ουσιαστικά ως ένα πλέγμα σημείων, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της συνεχούς συνάρτησης  $w(x, y)$  με τη δειγματική συνάρτηση «διασπά» το συνεχές χαρακτήρα σε διακριτές τιμές. Οι διακριτές τιμές της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 w_s(x, y) &= w(x, y) \cdot TS \\
 &= T_x T_y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(nT_x, mT_y) \delta(x - nT_x, y - mT_y), \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

όπου  $TS$  είναι η διδιάστατη δειγματική συνάρτηση,  $T_x, T_y$  είναι το βήμα της δειγματικής συνάρτησης κατά  $x$  και  $y$  αντίστοιχα. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία των μετασχηματισμών Fourier, τα συνελκτικά ολοκληρώματα στο χώρο των αποστάσεων μετατρέπονται σε απλές σχέσεις πολλαπλασιασμού στο χώρο των συχνοτήτων. Στο γεγονός αυτό έγκειται και η μεγάλη σημασία των μετασχηματισμών στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας. Επίσης, η συνέλιξη στο χώρο των συχνοτήτων μεταφράζεται σε πολλαπλασιασμό στο χώρο των αποστάσεων. Η διακριτοποίηση της συνεχούς συνάρτησης στο χώρο των αποστάσεων με απλό πολλαπλασιασμό συνεπάγεται τη συνέλιξη των φασμάτων στο χώρο των συχνοτήτων σύμφωνα με την εξίσωση:

$$W_s(u, v) = W(u, v) * F\{TS\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(u - kU, v - lV), \quad (2.110)$$

όπου  $W_s(u, v)$  ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $w_s(x, y)$  και  $\mathbf{F}\{TS\}$  ο μετασχηματισμός της δειγματικής συνάρτησης. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.5, η συνέλιξη μεταξύ του φάσματος της συνεχούς συνάρτησης και του φάσματος της δειγματικής συνάρτησης έχει ως αποτέλεσμα την «αντιγραφή» (replicating) της  $W(u, v)$  στο χώρο των συχνοτήτων ανά διαστήματα  $1/T_x$  και  $1/T_y$ , τα οποία αντιστοιχούν στη θέση κάθε μιας μετασχηματισμένης συνάρτησης παλμού. Η  $W_s(u, v)$  αποτελεί, λοιπόν, την περιοδική αντιγραφή της αρχικής  $W(u, v)$ , και ο μετασχηματισμός Fourier της δειγματικής συνάρτησης καλείται συχνά **συνάρτηση αντιγραφής** (replicating function). Ισχύει, δηλαδή, κάτι αντίστοιχο με τη συνέλιξη και τον πολλαπλασιασμό που περιγράψαμε παραπάνω: **Δειγματοληψία στον ένα χώρο μεταφράζεται σε αντιγραφή στον άλλο χώρο**. Μεγάλη σημασία, όπως αμέσως γίνεται αντιληπτό, αποκτά η επιλογή του διαστήματος (βήματος) διακριτοποίησης. Εάν το διάστημα διακριτοποίησης επιλεγεί μεγάλο, έτσι ώστε  $U < 2U_o$  και  $V < 2V_o$ , τότε τα πολλαπλά αντίγραφα της συνάρτησης  $W(u, v)$  θα υπερκαλύπτονται μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5. Όσο μικραίνει το διάστημα διακριτοποίησης ( $U \geq 2U_o$  και  $V \geq 2V_o$ ), τόσο τα αντίγραφα θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο, έτσι ώστε να είναι δυνατή η απομόνωση του ενός για την ανακατασκευή της αρχικής συνάρτησης. Η υπερκάλυψη των αντιγράφων οδηγεί στην **παραποίηση** (aliasing) του φάσματος της πραγματικής συνάρτησης. Για την ανακατασκευή της συνάρτησης από τις διακριτές τιμές της, δηλαδή για την παρεμβολή συνεχών τιμών μεταξύ των δειγμάτων, απαραίτητη είναι η εισαγωγή κατάλληλου χαμηλοπερατού (low pass) ορθογωνικού φίλτρου  $FW$  στο χώρο των συχνοτήτων. Η επίδραση του φίλτρου φαίνεται στο σχήμα 2.5.

Η ανακατασκευή της συνάρτησης περιγράφεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} W(u, v) &= W_s(u, v) \cdot FW \Rightarrow \\ w(x, y) &= w_s(x, y) * \mathbf{F}^{-1}\{FW\} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Συνήθως, εκτός από περιορισμένο πεδίο ορισμού στο χώρο των συχνοτήτων, η συνάρτηση έχει και περιορισμένο πεδίο ορισμού στο χώρο των αποστάσεων (spacelimited), γιατί αναφέρεται σε τοπική περιοχή. Αυτό σημαίνει, ότι η συνάρτηση  $W(x, y)$  είναι μηδέν για τιμές  $|x| > T_{ox}$  και  $|y| > T_{oy}$ . Ο περιορισμός της συνάρτησης στο χώρο των αποστάσεων έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση νέων συχνοτήτων, οι οποίες δεν περιέχονται στην αρχική συνάρτηση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φασματική διαρροή** (spectral leakage). Εάν εφαρμοστεί στην περίπτωση αυτή το θεώρημα της διακριτοποίησης στο χώρο των συχνοτήτων με διαστήματα  $U \leq 1/2T_{ox}$  και  $V \leq 1/2T_{oy}$ , τότε δημιουργείται μια μη υπερκαλυπτόμενη περιοδική έκφραση του αρχικού σήματος. Οι συχνότητες  $U = 1/2T_{ox}$  και  $V = 1/2T_{oy}$  ονομάζονται **συχνότητες Nyquist** και αποτελούν το όριο επάνω από το οποίο παραποιείται ο χαρακτήρας της αρχικής συνάρτησης.

Οι αρχές του θεωρήματος της δειγματοληψίας εφαρμόζονται στη διαδικασία μεταφοράς από το συνεχές στο διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Τα βήματα για τη διακριτοποίηση του μετασχηματισμού είναι:

1. Το πρώτο βήμα είναι η διακριτοποίηση της συνάρτησης με συγκεκριμένο βήμα, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή αντιγράφων του φάσματος της συνάρτησης στο χώρο των συχνοτήτων. Ανάλογα με την πυκνότητα του βήματος διακριτοποίησης, η αντιγραφή αυτή μπορεί να προκαλέσει υπερκαλύψεις μεταξύ των διαδοχικών αντιγράφων και να καταστρέψει το φάσμα εισάγοντας το σφάλμα της παραποίησης.
2. Το επόμενο βήμα είναι ο περιορισμός της συνεχούς συνάρτησης σε μια συγκεκριμένη έκταση, αποτελούμενη από συγκεκριμένο αριθμό δειγματικών σημείων. Αυτό πραγματοποιείται με τον πολλαπλασιασμό της διακριτής πλέον συνάρτησης με κατάλληλη **συνάρτηση παράθυρο** (window function) μήκους ίσου με το μήκος της έκτασης και

μοναδιαίου ύψους, το οποίο και αντιστοιχεί στη συνέλιξη του φάσματος της συνάρτησης με τη **συνάρτηση παρεμβολής** (interpolating function – sinc function) [97]. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια την εισαγωγή επιπλέον σφαλμάτων στο φάσμα της συνάρτησης λόγω φασματικής διαρροής.

3. Το τελευταίο βήμα σχετίζεται με τη διακριτοποίηση του υπολοιπούμενου φάσματος, το οποίο πολλαπλασιάζεται στο χώρο των συχνοτήτων με μια δειγματική συνάρτηση. Αυτό οδηγεί στη δημιουργία αντιγράφων της διακριτής συνάρτησης στο χώρο των αποστάσεων. Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier είναι σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία περιοδικός και στους δύο χώρους. Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει μια συγκεκριμένη μέγιστη συχνότητα και μια συγκεκριμένη ελάχιστη συχνότητα, οι οποίες μπορούν να ανακτηθούν από το διακριτό μετασχηματισμό (όριο Nyquist).

Για την ελαχιστοποίηση του φαινομένου της παραποίησης τα δείγματα της συνάρτησης πρέπει να επιλέγονται όσο το δυνατό πιο πυκνά και για την πλήρη αντιμετώπιση του φαινομένου πρέπει τα  $\Delta x$  και  $\Delta y$  να επιλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η συχνότητα Nyquist να είναι μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη συχνότητα που παρουσιάζεται στα δεδομένα. Το πρόβλημα στα γεωδαιτικά προβλήματα είναι ότι συνήθως τα δεδομένα είναι διαθέσιμα σε μορφή καννάβου και γι αυτό δεν μπορεί να επιλεγεί το κατάλληλο διάστημα διακριτοποίησης. Στην περίπτωση αυτή η εξομάλυνση του συνολικού σήματος, με την αφαίρεση χαρακτηριστικών υψηλών συχνοτήτων από τα δεδομένα (μέσω τοπογραφικών αναγωγών) μπορεί να οδηγήσει στην ελαχιστοποίηση του φαινομένου.

Όσον αφορά στο φαινόμενο της φασματικής διαρροής, θα είναι πάντοτε παρόν στα αποτελέσματα για το λόγο της περιορισμένης έκτασης εφαρμογής του μετασχηματισμού. Στην πράξη, για την αντιμετώπιση του φαινομένου, ο περιορισμός της αρχικής συνάρτησης δεν πραγματοποιείται με τη χρήση ορθογωνικών συναρτήσεων, αλλά με τη χρήση κατάλληλων συναρτήσεων-παραθύρων [29]. Στις γεωδαιτικές εφαρμογές το φαινόμενο της φασματικής διαρροής μπορεί να ελαχιστοποιηθεί αφαιρώντας τα χαρακτηριστικά χαμηλών συχνοτήτων του σήματος, αφαιρώντας δηλαδή, τη συνεισφορά ενός παγδόσιμου γεωδυναμικού μοντέλου [73].

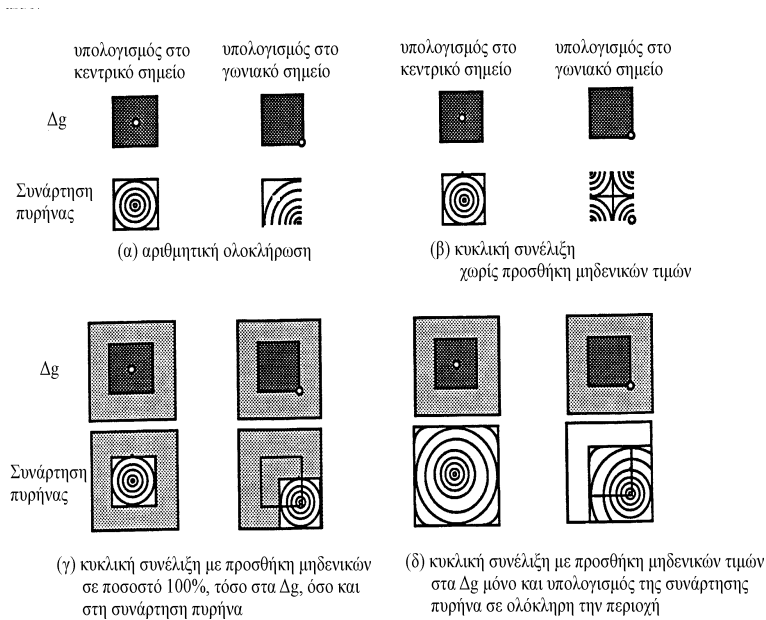
Η μέθοδος της απομάκρυνσης και επαναφοράς που περιγράφηκε στην παράγραφο 2.2 αποτελεί την ιδανικότερη προεπεξεργασία των δεδομένων, αφού αφαιρεί τη συνεισφορά της τοπογραφίας με τις κατάλληλες αναγωγές (ελαχιστοποίηση της παραποίησης) και ενός παγδόσιμου γεωδυναμικού μοντέλου (ελαχιστοποίηση της φασματικής διαρροής) πριν την εισαγωγή στους αλγόριθμους προσδιορισμού των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας. Στους υπολογισμούς αυτούς είναι δυνατό να εφαρμοστούν οι φασματικές τεχνικές που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, από τη στιγμή που το σύνολο των σχέσεων στο πεδίο βαρύτητας σχετίζεται με τη λύση συνελικτικών ολοκληρωμάτων. Η επαναφορά της συνεισφοράς των χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων ολοκληρώνει τη διαδικασία προσέγγισης των παραμέτρων.

Η εφαρμογή της διακριτοποίησης του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier στην επίλυση συνελικτικών ολοκληρωμάτων στις δύο διαστάσεις έχει τη μορφή:

$$x(k, l) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N g(m, n)h(k - m, l - n) \quad (2.112)$$

Όταν η παραπάνω σχέση επιλύεται με αριθμητική ολοκλήρωση τα αποτελέσματα οδηγούν στη **γραμμική συνέλιξη** (linear convolution). Στην περίπτωση που εφαρμόζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier για την επίλυση του διακριτού συνελικτικού αθροίσματος, τότε τα αποτελέσματα αποκλίνουν σε σύγκριση με τα αποτελέσματα από την αριθμητική ολοκλήρωση και αντιστοιχούν στην **κυκλική συνέλιξη** (circular convolution). Αυτό συμβαίνει, γιατί με την εφαρμογή του διακριτού μετασχηματισμού όλες οι συναρτήσεις που περιέχονται στους συνελικτικούς τύπους αντιμετωπίζονται ως περιοδικές. Από αυστηρά μαθηματική σκοπιά η κυκλική συνέλιξη μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμική συνέλιξη επηρεασμένη από το φαινόμενο της παραποίησης [58]. Τα αποτελέσματα της κυκλικής συνέλιξης μπορούν να αποφευχθούν

με την εφαρμογή μια ειδικής τεχνικής που ονομάζεται **προσθήκη μηδενικών τιμών** (zero-padding), κατά την οποία μηδενικές τιμές προστίθενται στις συναρτήσεις εισόδου, σύμφωνα με το σχήμα 2.6. Η εφαρμογή της προσθήκης μηδενικών τιμών πραγματοποιείται ως εξής:



Σχήμα 2.6: Εφαρμογή της προσθήκης μηδενικών τιμών και αντιμετώπιση του φαινομένου της κυκλικής συνέλιξης. (Σχήμα από [45]).

1. Εφαρμογή της προσθήκης μηδενικών και μορφοποίηση των νέων συναρτήσεων  $g^P(k, l)$  και  $h^P(k, l)$ .
2. Υπολογισμός των μετασχηματισμών  $G^P(u, v)$  και  $H^P(u, v)$  μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier.
3. Υπολογισμός της συνέλιξης:  $X^P(u, v) = G^P(u, v)H^P(u, v)$ .
4. Εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού για την εύρεση του  $x^P(k, l)$ .
5. Απομόνωση του κεντρικού πεδίου  $x(k, l)$ .

Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται είναι όμοια με τα αποτελέσματα της γραμμικής συνέλιξης, όταν υπολογίζεται με απλή αριθμητική ολοκλήρωση [45]. Ό,τι αναφέρθηκε για τη συνελικτική διαδικασία ισχύει ομοίως και για τη διαδικασία της συσχέτισης. Περισσότερα για την κυκλική συνέλιξη και συσχέτιση δίνονται από τους [7], [8], [58].

Η ανάλυση διακριτών δεδομένων στο πεδίο βαρύτητας επιταγχύνεται με τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier και ιδιαίτερα με την εφαρμογή του ταχέως αλγορίθμου (Fast Fourier Transform – FFT) [8]. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην εφαρμογή των αλγορίθμων στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Προβλήματα, όπως η χρήση των **κυματικών αριθμών** (wavenumbers), η θέση του συστήματος αναφοράς, οι ιδιότητες των συναρτήσεων που πολλαπλασιάζονται και τα επιπλέον σφάλματα παραποίησης που εισάγονται από τη δομή των προγραμματικών υπολογισμών έχουν μελετηθεί από τους [77], [45], [75] και [73], οι οποίοι έχουν προτείνει και τις κατάλληλες λύσεις για την αντιμετώπισή τους.

### 2.6.2 Επίπεδες προσεγγίσεις στο πεδίο βαρύτητας με FFT

Ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται για την επίλυση των συνελικτικών ολοκληρωμάτων που συνδέουν τις διάφορες παραμέτρους του πεδίου βαρύτητας. Τόσο η σχέση προσδιορισμού του γεωειδούς από ανωμαλίες βαρύτητας (εξίσωση του Stokes), οι σχέσεις υπολογισμού των αποκλίσεων της κατακόρυφου (εξισώσεις Vening-Meinesz), όσο και οι σχέσεις υπολογισμού άμεσων και έμμεσων τοπογραφικών διορθώσεων μπορούν να μετατραπούν σε σχέσεις συνελικτικών ολοκληρωμάτων.

Υιοθετώντας την επίπεδη προσέγγιση της γήινης επιφάνειας, γίνεται η υπόθεση μιας εφαπτομενικής επιφάνειας στο σημείο υπολογισμού. Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες οι αποχές γεωειδούς δίνονται από τη σχέση [107], [93]:

$$N(x_P, y_P) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \Delta g(x, y) \frac{1}{[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2]^{1/2}} dx dy, \quad (2.113)$$

όπου  $N(x_P, y_P)$  η αποχή του γεωειδούς στο σημείο υπολογισμού  $P$ ,  $\gamma$  μια μέση τιμή της κανονικής βαρύτητας στην περιοχή (για μεγαλύτερη ακρίβεια στο σημείο υπολογισμού),  $E$  το εμβαδό της περιοχής,  $\Delta g(x, y)$  η ανωμαλία ελευθέρου αέρα στο τρέχον σημείο,  $x_P, y_P$  και  $x, y$  οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου υπολογισμού και του τρέχοντος σημείου. Στην επίπεδη προσέγγιση χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες παραδοχές [32], [93]:

$$S(\psi) \approx \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \approx \frac{1}{\psi/2} = \frac{2}{\psi} \quad (2.114)$$

$$\psi \approx \frac{s}{R} \quad (2.115)$$

$$S(s) = \frac{2R}{s} \quad (2.116)$$

$$d\sigma = \frac{1}{R^2} dx dy \quad (2.117)$$

$$s = \sqrt{(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2} \quad (2.118)$$

Σύμφωνα με τη λύση του συνοριακού προβλήματος που προτείνουν οι Molodensky et al. [53], οι ανωμαλίες ύψους δίνονται σε επίπεδη προσέγγιση ως εξής:

$$\zeta_n(x_P, y_P) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{G_n(x, y)}{s} dx dy \quad n = 0, 1 \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n(x_P, y_P) &= \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{G_n(x, y)}{s} dx dy \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_E \frac{(h_P - h)^2}{s^3} G_{n-2}(x, y) dx dy \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.120)$$

και οι τρεις πρώτοι όροι  $G_n$  δίνονται στη συνέχεια:

$$G_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_E \frac{h_P - h}{s^3} G_0(x, y) dx dy \quad (2.121)$$

$$G_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_E \frac{h_P - h}{s^3} G_1(x, y) dx dy + G_0(x, y) \tan^2 \beta \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} G_3(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \iint_E \frac{h_P - h}{s^3} G_2(x, y) dx dy + G_1(x, y) \tan^2 \beta \\ &\quad - \frac{3}{4\pi} \iint_E \frac{(h_P - h)^3}{s^5} G_0(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.123)$$

Οι εξισώσεις του Vening-Meinesz στο επίπεδο προκύπτουν σύμφωνα με:

$$\begin{aligned}\xi(P) &= -\frac{\partial N(P)}{\partial y} \\ \eta(P) &= -\frac{\partial N(P)}{\partial x},\end{aligned}$$

και οδηγούν στις τελικές σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(x_P, y_P) \\ \eta(x_P, y_P) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \Delta g(x, y) \frac{1}{s^3} \left\{ \begin{array}{l} y_P - y \\ x_P - x \end{array} \right\} dx dy. \quad (2.124)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία του Molodensky, οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακόρυφου δίνονται σε επίπεδη προσέγγιση ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(x_P, y_P) \\ \eta(x_P, y_P) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{G_n(x, y)}{s^3} \left\{ \begin{array}{l} y_P - y \\ x_P - x \end{array} \right\} dx dy \quad n = 0, 1 \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \xi(x_P, y_P) \\ \eta(x_P, y_P) \end{array} \right\} &= \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{G_n(x, y)}{s^3} \left\{ \begin{array}{l} y_P - y \\ x_P - x \end{array} \right\} dx dy \\ &- \frac{3}{4\pi\gamma} \iint_E \frac{(h_P - h)^2}{s^5} \left\{ \begin{array}{l} y_P - y \\ x_P - x \end{array} \right\} G_{n-2}(x, y) dx dy \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Η σχέση υπολογισμού των διορθώσεων λόγω αναγλύφου σε επίπεδη προσέγγιση δίνεται, μετά από κατάλληλη ανάπτυξη του τριπλού ολοκληρώματος υπολογισμού σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, από τη γενική σχέση [107], [93]:

$$c(x_P, y_P) = G\rho \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \iint_E \frac{(h_P - h)^{2n}}{[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2]^{2n+1}} dx dy \quad (2.127)$$

όπου  $G$  η σταθερά παγκόσμιας έλξης και  $\rho$  η μέση πυκνότητα του στερεού φλοιού της Γης. Για το  $a_n$  ισχύει:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \quad (2.128)$$

Η αντίστοιχη γενική σχέση για το ανάπτυγμα που προσεγγίζει την έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς είναι [93]:

$$\begin{aligned} \delta N(x_P, y_P) &= -\frac{\pi G\rho}{\gamma} h_P^2 + \\ &+ G\rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} a_n \iint_E \frac{h^{2n+1} - h_P^{2n+1}}{[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2]^{2n+1}} dx dy, \end{aligned} \quad (2.129)$$

ενώ για τις συνιστώσες της απόκλισης της κατακόρυφου η έμμεση επίδραση δίνεται από:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \xi(x_P, y_P) \\ \delta \eta(x_P, y_P) \end{array} \right\} = 2G\rho \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \iint_E \frac{h^{2n+1} - h_P^{2n+1}}{[(x_P - x)^2 + (y_P - y)^2]^{2(n+1)}} \left\{ \begin{array}{l} y_P - y \\ x_P - x \end{array} \right\} dx dy \quad (2.130)$$

Οι εξισώσεις Stokes και Vening-Meinesz μπορούν να γραφούν απευθείας σε συνελικτική μορφή στο επίπεδο σύμφωνα με τις:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x, y) * l_N(x, y) \quad (2.131)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x, y) * \left\{ \begin{array}{l} l_\xi(x, y) \\ l_\eta(x, y) \end{array} \right\}, \quad (2.132)$$

όπου

$$l_n(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2} \quad (2.133)$$

$$\begin{Bmatrix} l_\xi(x, y) \\ l_\eta(x, y) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \partial l_N(x, y) / \partial y \\ \partial l_N(x, y) / \partial x \end{Bmatrix} = (x^2 + y^2)^{-3/2} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}. \quad (2.134)$$

Αντιστοίχως, ακολουθώντας τη θεωρία του Molodensky έχουμε [71] [για απλοποίηση παραλείπεται το όρισμα  $(x, y)$ ]:

$$\zeta_n = \frac{1}{2\pi\gamma} G_n * l_\zeta \quad n = 0, 1 \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{1}{2\pi\gamma} G_n * l_\zeta \\ &- \frac{1}{4\pi\gamma} [h_P^2 (G_{n-2} * l_\zeta^3) - 2h_P ((hG_{n-2}) * l_\zeta^3) + (h^2 G_{n-2}) * l_\zeta^3] \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$G_0 = \Delta g \quad (2.137)$$

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} [h_P (G_0 * l_\zeta^3) - (hG_0) * l_\zeta^3] \quad (2.138)$$

$$G_2 = \frac{1}{2\pi} [h_P (G_1 * l_\zeta^3) - (hG_1) * l_\zeta^3] + G_0 [(h * d_x)^2 + (h * d_y)^2] \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} G_3 &= \frac{1}{2\pi} [h_P (G_2 * l_\zeta^3) - (hG_2) * l_\zeta^3] + G_1 [(h * d_x)^2 + (h * d_y)^2] \\ &- \frac{3}{4\pi} [h_P^3 (G_0 * l_\zeta^5) - 3h_P (h^2 G_0) * l_\zeta^5 + 3h_P^2 (hG_0 * l_\zeta^5) - (h^3 G_0) * l_\zeta^5] \end{aligned} \quad (2.140)$$

όπου  $l_\zeta = l_N$ ,  $d_x$  και  $d_y$  είναι οι πυρήνες κατά την οριζόντια διεύθυνση και ισχύει [71]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f * d_x = \mathbf{F}^{-1} \{FD_x\} \quad (2.141)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f * d_y = \mathbf{F}^{-1} \{FD_y\} \quad (2.142)$$

Ακολούθως, οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου παρουσιάζονται σε συνελικτική μορφή, σύμφωνα με τη θεωρία του Molodensky:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi\gamma} G_n * \begin{Bmatrix} l_\xi \\ l_\eta \end{Bmatrix} \quad n = 0, 1 \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2\pi\gamma} G_n * \begin{Bmatrix} l_\xi \\ l_\eta \end{Bmatrix} \\ &- \frac{3}{4\pi\gamma} [h_P^2 (G_{n-2} * \begin{Bmatrix} l'_\xi \\ l'_\eta \end{Bmatrix}) - 2h_P (hG_{n-2}) * \begin{Bmatrix} l'_\xi \\ l'_\eta \end{Bmatrix} \\ &+ (h^2 G_{n-2}) * \begin{Bmatrix} l'_\xi \\ l'_\eta \end{Bmatrix}] \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.144)$$

όπου

$$\begin{Bmatrix} l'_\xi \\ l'_\eta \end{Bmatrix} = (x^2 + y^2)^{-5/2} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}. \quad (2.145)$$

Οι συνελίξεις των αποχών του γεωειδούς και των αποκλίσεων της κατακορύφου επιλύονται με τη βοήθεια του διδιάστατου διακριτού μετασχηματισμού ως εξής:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1} [\Delta G(u, v) L_N(u, v)], \quad (2.146)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta G(u, v) L_\xi(u, v) \\ \Delta G(u, v) L_\eta(u, v) \end{Bmatrix}, \quad (2.147)$$

όπου  $\Delta G(u, v)$ ,  $L_N(u, v)$ ,  $L_\xi(u, v)$  και  $L_\eta(u, v)$  οι ευθείς μετασχηματισμοί Fourier (φάσματα) των  $\Delta g(x, y)$ ,  $l_N(x, y)$ ,  $l_\xi(x, y)$  και  $l_\eta(x, y)$ , αντίστοιχα, και  $\mathbf{F}^{-1}$  ο τελεστής του αντιστρόφου μετασχηματισμού. Οι αντίστοιχες σχέσεις για τον υπολογισμό των ανωμαλιών ύψους και των αποκλίσεων της κατακόρυφου σύμφωνα με τη λύση του συνοριακού προβλήματος του Molodensky παρουσιάζουν σαφώς πολυπλοκότερη μορφή. Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύονται και αναλύονται από τους [76]. Η απλοποίηση της μορφής των σχέσεων αυτών οδηγεί στην τροποποίηση της λύσης του Molodensky, όπως αυτή παρουσιάζεται από τον Sideris [71]. Οι νέες εξισώσεις που προκύπτουν αναφέρονται στην λύση της προς τα κάτω επέκτασης (downward continuation) [55], [71].

Οι σχέσεις (2.146) και (2.147) αναφέρονται στο διακριτό μετασχηματισμό, ενώ το φάσμα των συναρτήσεων πυρήνων μπορεί να δοθεί και αναλυτικά (analytical spectrum), οδηγώντας στις σχέσεις με αναλυτική έκφραση του πυρήνα:

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \frac{1}{2\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1} \left[ \Delta G(u, v) \frac{1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1} \left[ \Delta g(u, v) \frac{1}{q} \right] \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{\gamma} \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta G(u, v) iv / (u^2 + v^2)^{1/2} \\ \Delta G(u, v) iu / (u^2 + v^2)^{1/2} \end{Bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{\gamma} \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta G(u, v) iv / q \\ \Delta G(u, v) iu / q \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Τονίζεται στο σημείο αυτό, ότι οι συναρτήσεις πυρήνες στις σχέσεις του Stokes και του Vening-Meinesz απειρίζονται για  $x = y = 0$ . Το πρόβλημα αυτό της **απροσδιοριστίας της συνάρτησης πυρήνα** (singularity of the kernel function) αντιμετωπίζεται με χωριστό υπολογισμό της συνάρτησης στο σημείο υπολογισμού [32], [69], με τροποποίηση της συνάρτησης πυρήνα [71], με χρήση του τελεστή του Molodensky [72], με εφαρμογή κατάλληλων μετασχηματισμών στις μεταβλητές [3], ή με τη χρησιμοποίηση τεχνικών κανονικοποίησης [36].

Η περίπτωση των άμεσων επιδράσεων της τοπογραφίας στη βαρύτητα και των έμμεσων επιδράσεων αυτής στα υψόμετρα του γεωειδούς είναι πιο περίπλοκη, αφού σε πρώτη θεώρηση, τα ολοκληρώματα δεν είναι σε συνελκτική μορφή. Τα τριπλά ολοκληρώματα, από την επίλυση των οποίων προήλθαν τα διπλά ολοκληρώματα, είναι σε συνελκτική μορφή και είναι δυνατό να επιλυθούν με τη χρήση τριδιάστατου μετασχηματισμού Fourier [62]. Στην επίπεδη προσέγγιση η ανάλυση των διπλών ολοκληρωμάτων είναι απαραίτητη για την μορφοποίηση διπλών συνελίξεων. Η επεξεργασία δίνεται από τους [77], [93] και η τελική μορφή των τριών πρώτων όρων στην επίπεδη προσέγγιση δίνεται ως εξής [77], [93], [45], [75], [44], [96]:

$$c(x_P, y_P) = c_1 + c_2 + c_3 + \dots \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} G\rho \left[ \mathbf{F}^{-1} \{ H2 \cdot L3 \} - 2h_P \mathbf{F}^{-1} \{ H \cdot L3 \} \right. \\ &\quad \left. + h_P^2 L3(0, 0) \right] \\ c_2 &= -\frac{3}{8} G\rho \left[ \mathbf{F}^{-1} \{ H4 \cdot L5 \} - 4h_P \mathbf{F}^{-1} \{ H3 \cdot L5 \} \right. \\ &\quad \left. + 6h_P^2 \mathbf{F}^{-1} \{ H2 \cdot L5 \} - 4h_P^3 \mathbf{F}^{-1} \{ H \cdot L5 \} \right. \\ &\quad \left. + h_P^4 L5(0, 0) \right] \\ c_3 &= \frac{5}{16} G\rho \left[ \mathbf{F}^{-1} \{ H6 \cdot L7 \} - 6h_P \mathbf{F}^{-1} \{ H5 \cdot L5 \} \right. \\ &\quad \left. + 15h_P^2 \mathbf{F}^{-1} \{ H4 \cdot L7 \} - 20h_P^3 \mathbf{F}^{-1} \{ H3 \cdot L7 \} \right. \\ &\quad \left. + 15h_P^4 \mathbf{F}^{-1} \{ H2 \cdot L7 \} - 6h_P^5 \mathbf{F}^{-1} \{ H \cdot L7 \} \right. \\ &\quad \left. + h_P^6 L7(0, 0) \right], \end{aligned} \quad (2.151)$$

όπου με  $H$  και  $L$  συμβολίζονται οι ευθείς μετασχηματισμοί των  $h$  και  $l$ , αντίστοιχα, ενώ ο αριθμός που ακολουθεί αναφέρεται στον εκθέτη των συναρτήσεων. Η προϋπόθεση για την ανάπτυξη των διορθώσεων λόγω αναγλύφου σε σειρά είναι  $(\Delta h/l)^2 \leq 1$  και επομένως η σύγκλιση της σειράς εξαρτάται κυρίως από τις κλίσεις του εδάφους στη γειτονιά του σημείου υπολογισμού. Σύμφωνα με τους Klose and Ilk [36], η κλίση των τοπογραφικών μαζών δεν πρέπει να ξεπερνά τις  $45^\circ$ . Η απαίτηση αυτή προφανώς δεν είναι πάντοτε εφικτή. Ο Tsoylis [92] και οι Tziavos and Andritsanos [96] έλεγξαν τη σύγκλιση της σειράς για δύο διαφορετικές περιοχές των Άλπεων (Γερμανία και Αυστρία) και παρουσίασαν τα προβλήματα που δημιουργούνται στους όρους ανώτερης τάξης της διορθώσης λόγω αναγλύφου, λόγω της μεγάλης κλίσης του εδάφους και της χρήσης μεγάλης διακριτικής ικανότητας DTM. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού προτείνεται η εφαρμογή μεθόδων κανονικοποίησης [36] και μια τροποποιημένη μέθοδος υπολογισμού, η οποία συνδυάζεται με αριθμητική ολοκλήρωση σε μια εσωτερική ζώνη και τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier στην εξωτερική περιοχή [92], [96]. Ο Li [45], οι Li and Sideris [46] και οι Tziavos et al. [100] παρουσίασαν τις τροποποιημένες σχέσεις για τον υπολογισμό των διορθώσεων λόγω αναγλύφου, με την χρήση δύο διαφορετικών μοντέλων για τις τοπογραφικές μάζες (μοντέλο απλής γραμμής και πρίσματος – mass-line, mass-prism representation) και την εισαγωγή μιας νέας παραμέτρου για την βελτιστοποίηση της ταχύτητας σύγκλισης της σειράς. Το πρόβλημα της ταχύτητας της σύγκλισης και της αποτυχίας της σύγκλισης της σειράς, όταν υπολογίζονται οι τοπογραφικές διορθώσεις σε θαλάσσιες περιοχές, οι οποίες καλύπτονται και από πληθώρα νησιών αντιμετωπίστηκε από τον Parker [59] με το διαχωρισμό της περιοχής υπολογισμού και τη χρήση πολυωνύμων Chebyshev για την επιτάχυνση της σύγκλισης. Η ίδια τεχνική, ελαφρώς τροποποιημένη, μπορεί να εφαρμοστεί και σε ηπειρωτικές περιοχές [60].

Η έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς, όταν για τις αναγωγές χρησιμοποιείται ο δεύτερος νόμος συμπύκνωσης του Helmert, μπορεί να επιλυθεί μέσω του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier σε επίπεδη προσέγγιση ως εξής [70]:

$$N_h = -\frac{\pi G \rho h_P^2}{\gamma} + \frac{\pi G \rho \Delta x \Delta y}{6\gamma} h_P^3 \mathbf{F}^{-1} \left\{ \mathbf{F} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \mathbf{F} \{ 1 \} \right\} - \frac{\pi G \rho \Delta x \Delta y}{6\gamma} \mathbf{F}^{-1} \left\{ \mathbf{F} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \mathbf{F} \{ h_P^3 \} \right\} \quad (2.152)$$

### 2.6.3 Σφαιρικές προσεγγίσεις στο πεδίο βαρύτητας με FFT

Οι επίπεδες προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν, αν και οδηγούν σε ακριβή αποτελέσματα, ωστόσο εμπεριέχουν εξαρχής την επίπεδη παραδοχή. Οι σφαιρικές προσεγγίσεις, που δίνονται στην ενότητα αυτή, οδηγούν σε αποτελέσματα που δε διαφέρουν από τις επιλύσεις με άμεση αριθμητική ολοκλήρωση στη σφαίρα.

Οι προσεγγίσεις που εισάγονται από την επίπεδη λύση ελαχιστοποιούνται χρησιμοποιώντας τους τύπους των αντίστοιχων σφαιρικών προσεγγίσεων. Η λύση του κλασικού προβλήματος συνοριακών τιμών του πεδίου βαρύτητας εκφράζεται σε γεωγραφικές συντεταγμένες ως εξής [80]:

$$N(\phi_P, \lambda_P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda_Q} \int_{\phi_Q} \Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) S(\psi_{PQ}) \cos \phi_P d\phi_Q d\lambda_Q, \quad (2.153)$$

όπου  $P$  το σημείο υπολογισμού και  $Q$  το τρέχον σημείο,  $S$  είναι η συνάρτηση πυρήνας σε σφαιρικές συντεταγμένες, η οποία ονομάζεται και συνάρτηση του Stokes και  $\psi$  είναι η σφαιρική απόσταση ανάμεσα στο σημείο υπολογισμού και στο τρέχον σημείο. Η συνάρτηση του Stokes μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$S(\psi_{PQ}) = \frac{1}{s} - 4 - 6s + 10s^2 - (3 - 6s^2) \ln(s + s^2), \quad (2.154)$$

$$s = \sin\left(\frac{\psi_{PQ}}{2}\right)$$

Η ανάλυση του ολοκληρώματος του Vening-Meinesz για τον υπολογισμό των αποκλίσεων της κατακορύφου σε σφαιρική προσέγγιση δίνεται από την εξίσωση [32]:

$$\begin{Bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) V(\psi_{PQ}) \begin{pmatrix} \cos \alpha_{PQ} \\ \sin \alpha_{PQ} \end{pmatrix} \cos \phi_Q d\phi_Q d\lambda_Q, \quad (2.155)$$

όπου  $\Sigma$  το εμβαδό της σφαιρικής επιφάνειας,  $V$  η συνάρτηση πυρήνας στη σφαιρική προσέγγιση, η οποία ονομάζεται και συνάρτηση του Vening-Meinesz,  $\alpha$  το αζιμούθιο μεταξύ των σημείων  $P$  και  $Q$ . Η συνάρτηση του Vening-Meinesz δίνεται από τη σχέση [32]:

$$V(\psi_{PQ}) = \sin \psi_{PQ} S'(\psi_{PQ}) \quad (2.156)$$

$$S'(\psi) = S'(s) = 8 - \frac{3}{s} - \frac{1}{4s^3} - \frac{3}{4s^2(1+s)} + 3 \ln(s + s^2) \quad (2.157)$$

Η εξίσωση (2.153), μετά από κάποιες τροποποιήσεις στον υπολογισμό της σφαιρικής απόστασης, οι οποίες αναφέρονται λεπτομερώς από τους [80], [28], γράφεται σε συνελικτική μορφή διδιάστατου μετασχηματισμού ως εξής:

$$\begin{aligned} N(\phi_P, \lambda_P) &= \frac{R\Delta\phi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} [S(\psi_{PQ}) * \Delta g \cos \phi] = \\ &= \frac{R\Delta\phi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1} \left\{ \mathbf{F} \{S(\psi_{PQ})\} \mathbf{F} \{\Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \cos \phi_Q\} \right\} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Η παραπάνω βασική σχέση για την ανάπτυξη της σφαιρικής προσέγγισης του μετασχηματισμού Fourier παρουσιάζεται με πολλές παραλλαγές, ανάλογα με την προσέγγιση που δίνεται στο υπολογισμό της σφαιρικής απόστασης. Η αρχική θεώρηση του διδιάστατου σφαιρικού μετασχηματισμού παρουσιάζει ακριβή αποτελέσματα μόνο στον παράλληλο του μέσου πλάτους [80], [28], [93], [94]. Οι Forsberg and Sideris έδειξαν ότι η συνάρτηση του Stokes είναι δυνατό να λυθεί επακριβώς κατά μήκος ενός συγκεκριμένου παράλληλου και το γεγονός αυτό αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της **σφαιρικής προσέγγισης πολλαπλών ζωνών** (multi-band spherical FFT) [20]. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η περιοχή μελέτης χωρίζεται σε ισοπαράλληλες ζώνες, οι οποίες επεκτείνονται από το βόρειο μέχρι το νότιο μέρος. Με την τεχνική αυτήν, μια σύνθετη λύση μπορεί να επιτευχθεί μέσω γραμμικής παρεμβολής χωρίς την χρησιμοποίηση του μέσου πλάτους ολόκληρης της περιοχής [20]. Μια άλλη παραλλαγή του σφαιρικού μετασχηματισμού δόθηκε από τους Haagmans et al [28]. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του διδιάστατου μετασχηματισμού κατάφεραν να δώσουν ακριβείς αποχές του γεωειδούς σε όλα τα σημεία κατά μήκος του παράλληλου μέσου πλάτους. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα και το προσθετικό θεώρημα των FFT κατάφεραν να επιλύσουν με ακρίβεια το διακριτό ολοκλήρωμα του Stokes σε κάθε ξεχωριστό παράλληλο, μέσω του μονοδιάστατου μετασχηματισμού Fourier. Ισχύει [28]:

$$N(\phi_P, \lambda_P) = \frac{R\Delta\phi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} \mathbf{F}_1^{-1} \left\{ \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1 \{S(\psi_{PQ})\} \mathbf{F}_1 \{\Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \cos \phi_Q\} \right\}, \quad (2.159)$$

όπου με  $\mathbf{F}_1$  συμβολίζεται ο τελεστής του μονοδιάστατου μετασχηματισμού Fourier. Από την εξίσωση (2.159) υπολογίζονται ακριβείς αποχές του γεωειδούς και τα αποτελέσματα είναι ίδια με αυτά που προκύπτουν από την άμεση αριθμητική ολοκλήρωση στη σφαίρα.

Μετά από αριθμητικές απλοποιήσεις στη συνάρτηση του Vening-Meinesz [44], οι εξισώσεις για τον υπολογισμό των αποκλίσεων της κατακορύφου μπορούν να γραφούν ως διδιάστατες συνελίξεις στη σφαίρα σύμφωνα με [44]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \xi(\phi_P, \lambda_P) \\ \eta(\phi_P, \lambda_P) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \begin{Bmatrix} \cos \phi_Q \\ \cos^2 \phi_Q \end{Bmatrix} S'(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \cdot \\ &\quad \begin{Bmatrix} SC(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \\ \sin \Delta\lambda_{PQ} \end{Bmatrix} d\phi_Q d\lambda_Q, \end{aligned} \quad (2.160)$$

όπου  $\phi_m = (\phi_P + \phi_Q)/2$  και [44]

$$\begin{aligned} SC(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) &= \sin\psi_{PQ} \cos\alpha_{PQ} = \\ &= \sin 2\phi_m \sin^2 \frac{\Delta\lambda_{PQ}}{2} - \sin\Delta\phi_{PQ} \cos^2 \frac{\Delta\lambda_{PQ}}{2} \end{aligned} \quad (2.161)$$

$$\begin{aligned} s^2(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) &= \sin^2 \frac{\psi_{PQ}}{2} = \sin^2 \frac{\Delta\phi_{PQ}}{2} + \sin^2 \frac{\Delta\lambda_{PQ}}{2} \cdot \\ &\cdot \left( \cos^2 \phi_m - \sin^2 \frac{\Delta\phi_{PQ}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.162)$$

Τα διδιάστατα συνελικτικά ολοκληρώματα επιλύονται με τη βοήθεια διδιάστατου μετασχηματισμού στη σφαίρα ως εξής [44]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \xi(\phi_P, \lambda_P) \\ \eta(\phi_P, \lambda_P) \end{array} \right\} &= \frac{\Delta\phi_{PQ}\Delta\lambda_{PQ}}{4\pi\gamma} \cdot \\ \mathbf{F}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}\{\Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \cos\phi_Q\} \mathbf{F}\{S'(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ})SC(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ})\} \\ \mathbf{F}\{\Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \cos^2\phi_Q\} \mathbf{F}\{S'(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \sin(\Delta\lambda_{PQ})\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.163)$$

Το σφάλμα που εισάγεται στην τελευταία σχέση εξαιτίας της χρησιμοποίησης του μέσου πλάτους  $\phi_m$  ελαχιστοποιείται με την εφαρμογή της τεχνικής πολλαπλών ζωνών σε σφαιρική προσέγγιση [20].

Ακολουθώντας αντίστοιχη μεθοδολογία με την ανάπτυξη των αποχών του γεωειδούς μέσω μονοδιάστατου μετασχηματισμού, οι σχέσεις για τις αποκλίσεις της κατακορύφου δίνονται από τις σχέσεις [44], [95]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \xi(\phi_P, \lambda_P) \\ \eta(\phi_P, \lambda_P) \end{array} \right\} &= \frac{\Delta\phi_{PQ}\Delta\lambda_{PQ}}{4\pi\gamma} \cdot \\ &\sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_1(\Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \cos\phi_{PQ}) \left( \mathbf{F}_1\{V(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \cos\alpha_{PQ}\} \right) \\ \mathbf{F}_1\{V(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \sin\alpha_{PQ}\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.164)$$

Ο άμεσος υπολογισμός των ημιτόνων και συνημιτόνων της (2.164) μπορεί να αποφευχθεί με κατάλληλες μαθηματικές σχέσεις σφαιρικής τριγωνομετρίας [44] και οι τελικές σχέσεις έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \xi(\phi_P, \lambda_P) \\ \eta(\phi_P, \lambda_P) \end{array} \right\} &= \frac{\Delta\phi_{PQ}\Delta\lambda_{PQ}}{4\pi\gamma} \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_1(\Delta g(\phi_Q, \lambda_Q) \cos\phi_{PQ}) \\ \cdot \left( \begin{array}{l} \mathbf{F}_1\{S'(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ})SC(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ})\} \\ \mathbf{F}_1\{S'(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \cos\phi_Q \sin\Delta\lambda_{PQ}\} \end{array} \right) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (2.165)$$

όπου

$$\begin{aligned} s^2(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) &= \sin^2 \frac{\psi_{PQ}}{2} = \sin^2 \frac{\phi_P - \phi_Q}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_P - \lambda_Q}{2} \\ &\cdot \left( \cos^2 \frac{\phi_P + \phi_Q}{2} - \sin^2 \frac{\phi_P - \phi_Q}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.166)$$

και

$$\begin{aligned} SC(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) &= \sin(\phi_P + \phi_Q) \sin^2 \frac{1}{2}(\lambda_P - \lambda_Q) \\ &- \sin(\phi_P - \phi_Q) \cos^2 \frac{1}{2}(\lambda_P - \lambda_Q). \end{aligned} \quad (2.167)$$

Στην περίπτωση των διορθώσεων λόγω αναγλύφου, η απόσταση μεταξύ του σημείου υπολογισμού  $P$  και του τρέχοντος σημείου  $Q$  μπορεί να εκφραστεί ως [96]:

$$r = [(R + h_P)^2 + (R + h_Q)^2 - 2(R + h_P)(R + h_Q) \cos\psi_{PQ}]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.168)$$

όπου  $R$  η μέση ακτίνα της Γης. Στην παραπάνω σχέση είναι δυνατό να αντικατασταθούν τα  $h_P$  και  $h_Q$  με το μέσο υψόμετρο της περιοχής  $h_m$ . Τότε η  $r$  μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά ως:

$$r = 2(R + h_m) \sin \frac{\psi_{PQ}}{2}. \quad (2.169)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.169) οι δύο πρώτοι όροι της διόρθωσης λόγω αναγλύφου δίνονται σε σφαιρική προσέγγιση από τη σχέση [44], [96]:

$$\begin{aligned} c(x_P, y_P) &= \frac{G\rho}{16(R + h_m)} \iint_{\Sigma} \frac{\Delta h^2}{\sin^3 \frac{\psi_{PQ}}{2}} \cos \phi_Q d\phi d\lambda \\ &- \frac{3G\rho}{256(R + h_m)^3} \iint_{\Sigma} \frac{\Delta h^4}{\sin^5 \frac{\psi_{PQ}}{2}} \cos \phi_Q d\phi d\lambda. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Η σχέση (2.170) μπορεί να τροποποιηθεί σε διδιάστατη συνελικτική μορφή στη σφαίρα και να επιλυθεί χρησιμοποιώντας το διδιάστατο μετασχηματισμό Fourier ως εξής [95]:

$$\begin{aligned} c_1(x_P, y_P) &= \kappa_1 \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ h_Q^2 \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-3}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &+ \kappa_1 h_P^2 \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-3}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &- 2\kappa_1 h_P \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ h_Q \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-3}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \end{aligned} \quad (2.171)$$

$$\begin{aligned} c_2(x_P, y_P) &= \kappa_2 \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ h_Q^4 \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-5}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &- 4\kappa_2 h_P \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ h_Q^3 \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-5}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &+ 6\kappa_2 h_P^2 \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ h_Q^2 \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-5}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &- 4\kappa_2 h_P^3 \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ h_Q \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-5}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &+ \kappa_2 h_P^4 \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{F} \{ \cos \phi_Q \} \mathbf{F} \{ s^{-5}(\phi_m, \Delta\phi_{PQ}, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \end{aligned} \quad (2.172)$$

όπου  $\kappa_1 = \frac{G\rho\Delta\phi_{PQ}\Delta\lambda_{PQ}}{16(R + h_m)}$  και  $\kappa_2 = -\frac{3G\rho\Delta\phi_{PQ}\Delta\lambda_{PQ}}{256(R + h_m)^3}$ .

Οι Haagmans et al. [28] χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του ακριβούς υπολογισμού του μετασχηματισμού κατά μήκος ενός παραλλήλου εισήγαγαν τη μονοδιάστατη τεχνική μετασχηματισμού. Η εφαρμογή του μονοδιάστατου μετασχηματισμού ισχύει και στις σχέσεις υπολογισμού της διόρθωσης λόγω αναγλύφου. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι δύο πρώτοι όροι της σειράς [96]:

$$\begin{aligned} c_1(x_P, y_P) &= \kappa_1 \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ h_Q^2 \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ s^{-3}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &+ \kappa_1 h_P^2 \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ s^{-3}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &- 2\kappa_1 h_P \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ h_Q \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ s^{-3}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\begin{aligned} c_2(x_P, y_P) &= \kappa_2 \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ h_Q^4 \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ s^{-5}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\ &- 4\kappa_2 h_P \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ h_Q^3 \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ s^{-5}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6\kappa_2 h_P^2 \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ h_Q^2 \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ \bar{s}^{-5}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\
& -4\kappa_2 h_P^3 \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ h_Q \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ \bar{s}^{-5}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \} \\
& +\kappa_2 h_P^4 \sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \mathbf{F}_1^{-1} \{ \mathbf{F}_1 \{ \cos \phi_Q \} \mathbf{F}_1 \{ \bar{s}^{-5}(\phi_P, \phi_Q, \Delta\lambda_{PQ}) \} \}
\end{aligned} \tag{2.174}$$

Αριθμητικές εφαρμογές και αποτελέσματα των σφαιρικών προσεγγίσεων των σειρών της δι-όρθωσης λόγω αναγλύφου δίνονται από τους Tziavos and Andritsanos [96].

## 2.7 Συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος

Όπως είναι γνωστό, η **συνάρτηση πυκνότητας φάσματος** (power spectral density) ορίζεται ως ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης συσχέτισης. Επομένως, όπως είναι λογικό, οι τρόποι προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας σχετίζονται, έμμεσα ή άμεσα, με τη συσχέτιση των δεδομένων.

Η θεωρία της εκτίμησης ασχολείται με το βέλτιστο προσδιορισμό των ζητούμενων ποσοτήτων βάσει κάποιου κριτηρίου ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων. Η ακρίβεια της εκτίμησης μπορεί να περιγραφεί καταρχήν από το **μέσο τετραγωνικό σφάλμα** (mean square error) της εκτίμησης

$$m = E[(\hat{\phi} - \phi)^2], \tag{2.175}$$

όπου  $m$  είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης  $\hat{\phi}$  της ποσότητας  $\phi$ . Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι το άθροισμα δύο όρων: ο πρώτος όρος ονομάζεται **μεταβλητότητα** (variance -  $\sigma^2$ ) και αντιπροσωπεύει το τυχαίο μέρος του σφάλματος

$$\sigma^2[\hat{\phi}] = E[(\hat{\phi} - E[\hat{\phi}])^2] = E[\hat{\phi}^2] - E^2[\hat{\phi}]. \tag{2.176}$$

Ο δεύτερος όρος είναι το τετράγωνο της **διαφοράς στάθμης** (bias -  $b$ ) και περιγράφει το συστηματικό μέρος του σφάλματος

$$b^2[\hat{\phi}] = E[(E[\hat{\phi}] - \phi)^2]. \tag{2.177}$$

Επομένως, παραλείποντας τους όρους της εκτίμησης, ισχύει

$$rms^2 = \sigma^2 + b^2, \tag{2.178}$$

όπου  $rms$  είναι η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (root mean square).

### 2.7.1 Εκτιμήσεις των συναρτήσεων συσχέτισης

Έστω οι διακριτές μετρήσεις  $x[i, j]$  ενός διδιάστατου εργοδικού πεδίου. Η συνάρτηση αυτο-συσχέτισης δίνεται από τη σχέση

$$r_{xx}[k, l] = E\{x[i+k, j+l]x^*[i, j]\}, \tag{2.179}$$

όπου με  $*$  συμβολίζεται ο συζυγής μιγαδικός. Η παραπάνω συνάρτηση σπανίως είναι απολύτως γνωστή και για το λόγο αυτό προσδιορίζεται από τα δεδομένα. Έστω ότι  $N, M$  είναι τα δειγματικά διαστήματα των δεδομένων  $x[i, j]$ , τα οποία λαμβάνουν τιμές από  $(i, j) = (0, 0)$

έως  $(i, j) = (N - 1, M - 1)$ . Τότε μια εκτίμηση της συνάρτησης αυτο-συσχέτισης μπορεί να δοθεί από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\hat{r}_{xx}[k, l] &= \frac{1}{(N - k)T_k} \frac{1}{(M - l)T_l} \sum_{i=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{M-l-1} x[j + k, j + l] x^*[i, j] T_k T_l \\ &= \frac{1}{N - k} \frac{1}{M - l} \sum_{i=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{M-l-1} x[i + k, j + l] x^*[i, j].\end{aligned}\quad (2.180)$$

Η εκτίμηση της διακριτής σειράς  $\hat{r}_{xx}[k, l]$  είναι μία **ανεπηρέαστη** (unbiased) εκτίμηση της πραγματικής συνάρτησης συσχέτισης, γιατί ισχύει

$$E\{\hat{r}_{xx}[k, l]\} = \frac{1}{N - k} \frac{1}{M - l} \sum_{i=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{M-l-1} E\{x[i + k, j + l] x^*[i, j]\} = r_{xx}[k, l] \quad (2.181)$$

Η μεταβλητότητα της εκτίμησης της αυτο-συσχέτισης μιας στοχαστικής διαδικασίας που ακολουθεί την κανονική κατανομή ως συνάρτηση του αριθμού των δειγματικών τιμών αποδεικνύεται ότι τείνει προς το μηδέν όταν το πλήθος των δειγματικών τιμών  $N, M$  αυξάνει [35]. Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση  $\hat{r}_{xx}[k, l]$  είναι στατιστικά συνεπής στον προσδιορισμό της συνάρτησης αυτο-συσχέτισης διακριτών δεδομένων.

Ένας άλλος εκτιμητής αυτο-συσχέτισης μπορεί να δοθεί από [49]

$$\check{r}_{xx}[k, l] = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{M-l-1} x[i + k, j + l] x^*[i, j] \quad (2.182)$$

Ο παραπάνω εκτιμητής διαφέρει από τον αρχικό μόνο κατά τον παράγοντα κανονικοποίησης

$$\check{r}_{xx}[k, l] = \frac{N - k}{N} \frac{M - l}{M} \hat{r}_{xx}[k, l] \quad (2.183)$$

Η εκτίμηση της αυτο-συσχέτισης που προσδιορίζεται είναι **επηηρεασμένη** (biased) διότι ισχύει:

$$E\{\check{r}_{xx}[k, l]\} = \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(1 - \frac{l}{M}\right) r_{xx}[k, l]. \quad (2.184)$$

Όμως η 2.184 τείνει ασυμπτωτικά σε ανεπηρέαστη εκτίμηση, καθώς αυξάνονται οι δειγματικές τιμές ( $N, M \rightarrow \infty$ ). Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι η μεταβλητότητα της εκτίμησης τείνει στο μηδέν, όταν οι δειγματικές τιμές αυξάνουν. Στις συνήθεις εφαρμογές το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι μεγαλύτερο για την εκτίμηση  $\hat{r}_{xx}[k, l]$  από το σφάλμα της εκτίμησης  $\check{r}_{xx}[k, l]$ . Επίσης, η ανεπηρέαστη εκτίμηση μπορεί να οδηγήσει σε συναρτήσεις αυτο-συσχέτισης που να μην ικανοποιούν τις βασικές ιδιότητες της συσχέτισης [49]. Τέλος, η ανεπηρέαστη εκτίμηση μπορεί να οδηγήσει σε πίνακες αυτο-συσχέτισης δίχως λύση για ορισμένες από τις εξισώσεις. Για τους παραπάνω λόγους, η επηρεασμένη εκτίμηση συχνά προτιμάται στις συνήθεις εφαρμογές. Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα αθροίσματα στις παραπάνω εξισώσεις είναι δυνατό να αντικατασταθούν με γραμμικές συνελίξεις και να μετατραπούν σε απλές σχέσεις πολλαπλασιασμού στο χώρο των συχνοτήτων. Ομοίως, η επηρεασμένη εκτίμηση της συνάρτησης δια-συσχέτισης δίνεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\check{r}_{xy}[k, l] = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N-k-1} \sum_{j=0}^{M-l-1} x[i + k, j + l] y^*[i, j] \quad (2.185)$$

Η επηρεασμένη εκτίμηση της συνάρτησης διάσυσχέτισης έχει παρόμοιες ιδιότητες με την επηρεασμένη εκτίμηση της συνάρτησης αυτο-συσχέτισης και τα χαρακτηριστικά της μεταβλητότητας και της διαφοράς στάθμης της είναι ίδια.

### 2.7.2 Προσδιορισμοί στο χώρο των συχνοτήτων

Η εύρεση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο κυρίως μεθόδους. Τις *κλασικές* ή *μη-παραμετρικές* μεθόδους και τις *σύγχρονες παραμετρικές* μεθόδους.

Οι μη-παραμετρικές μέθοδοι στηρίζονται στην εφαρμογή των αλγορίθμων FFT, με τους όποιους περιορισμούς και τις όποιες παραδοχές αυτοί απαιτούν στους υπολογισμούς. Το βασικότερο μειονέκτημα της εφαρμογής των μετασχηματισμών είναι ο περιοδικός χαρακτήρας που αποδίδεται σε διακριτή σειρά περιορισμένων δεδομένων. Οι μέθοδοι που στηρίζονται στην εφαρμογή των μετασχηματισμών Fourier είναι παραδείγματα «μη-παραμετρικών» μεθόδων στην επεξεργασία των σημάτων, γιατί υποθέτουν περιγραφές μη-παραμετρικών μοντέλων για το σήμα και το θόρυβο [64]. Αν και φαίνεται πιο επιθυμητή η μη χρησιμοποίηση παραδοχών για τη δομή και τα χαρακτηριστικά των δεδομένων, το πλεονέκτημα των κλασικών μεθόδων αντισταθμίζεται από τους περιορισμούς των μεθόδων.

Οι παραμετρικές μέθοδοι προσδιορισμού προσφέρουν τα παρακάτω πλεονεκτήματα [64]:

- Τα δεδομένα αναλύονται ως έχουν, δίχως τις παραδοχές της απεριόριστης έκτασης ή της ύπαρξης μιας περιοδικής έκφρασής τους.
- Τα διαστήματα εμπιστοσύνης και οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων αναφέρονται στο σύνολο των αποτελεσμάτων, αποδίδοντας αυστηρά στατιστική συμπεριφορά και τη δυνατότητα της αποδοχής ή της απόρριψης της ισχύος των μηδενικών υποθέσεων και των μοντέλων αυτών καθ'αυτών.
- Ισχύει ο συνδυασμός φυσικών και δυναμικών πληροφοριών και η δυνατότητα ταυτόχρονης αντιμετώπισης ετερογενών δεδομένων.
- Οι μέθοδοι προσαρμόζονται στα χαρακτηριστικά των δεδομένων που αναλύονται και μπορούν να ενσωματώσουν εκ των προτέρων πληροφορία για το σήμα και το θόρυβο.

Ακολουθεί η αναλυτική περιγραφή των μεθόδων προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος.

### 2.7.3 Μη-παραμετρικές μέθοδοι

Οι μη-παραμετρικές μέθοδοι χρησιμοποιούν για την ανάλυση τους FFT. Η κατηγορία αυτή διακρίνεται σε δύο επιμέρους μεθόδους προσδιορισμού: Την *άμεση* μέθοδο ή, όπως ονομάζεται στη βιβλιογραφία, *periodogram* και την *έμμεση* μέθοδο προσδιορισμού ή *correlogram*. Η άμεση μέθοδος εφαρμόζεται κατευθείαν στα δεδομένα και οδηγεί στην εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος, ενώ με την έμμεση μέθοδο πραγματοποιείται καταρχήν μια εκτίμηση της συνάρτησης συσχέτισης και στη συνέχεια με την κατάλληλη εφαρμογή FFT εκτιμάται η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος. Η εφαρμογή των FFT σε δεδομένα μη περιοδικής φύσης εισάγει τις γνωστές *παραποιήσεις* (spectral leakage) στα άκρα του πεδίου. Η αντιμετώπιση του παραπάνω φαινομένου πραγματοποιείται, όπως προαναφέρθηκε, με την εφαρμογή κατάλληλων συναρτήσεων-παραθύρων [49], [77] ή την εφαρμογή της προσθήκης μηδενικών τιμών στα άκρα του πεδίου (zero-padding) [45].

#### Άμεση μέθοδος προσδιορισμού

Η άμεση μέθοδος προσδιορισμού βασίζεται στην απευθείας εφαρμογή των μετασχηματισμών Fourier στα δεδομένα. Έστω  $x[i, j]$  τα διακριτά δεδομένα ενός εργοδικού πεδίου. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος μπορεί να δοθεί από [49]

$$P_{xx}(k, l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{(2N+1)(2M+1)T_k T_l} \left| T_k T_l \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-M}^M x[i, j] e^{-j2\pi[kiT_k + l j T_l]} \right|^2 \right\} \quad (2.186)$$

Ο παραπάνω ορισμός της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος διαφέρει από τους κλασικούς ορισμούς στην εισαγωγή των δειγματικών διαστημάτων  $T_k, T_l$  και πριν από τα αθροίσματα και στον εκθετικό όρο. Σύμφωνα με τον Sailor [64], η διαφορά αυτή δεν είναι σημαντική. Η (2.186) παρέχει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της εξάρτησης από τα δειγματικά διαστήματα στον ορισμό του μετασχηματισμού. Το γεγονός αυτό ελαχιστοποιεί την πιθανότητα υπολογιστικού λάθους λόγω ασυμβατότητας μονάδων [64]. Αν στην (2.186) θεωρήσουμε το διακριτό σύνολο των  $x[i, j]$ , όπου

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, \dots, N - 1 \\ j &= 0, 1, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

δηλαδή δείγματα  $N$  και  $M$  δεδομένων αντίστοιχα, τότε λαμβάνουμε

$$P_{xx}(k, l) = \frac{T_k T_l}{NM} \{X[k, l]X^*[k, l]\}, \quad (2.187)$$

όπου με  $X[k, l]$  συμβολίζεται ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier των διακριτών δεδομένων  $x[i, j]$  και με  $X^*[k, l]$  ο συζυγής μιγαδικός του  $X[k, l]$ . Η (2.187) διαφέρει από την (2.186) στην απουσία του τελεστή της προσδοκίας και ονομάζεται **δειγματικό φάσμα** (sample spectrum). Η (2.187) υπολογίζεται κατευθείαν από τα διακριτά δεδομένα και αποτελεί την αυθεντική αμετάβλητη εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος. Έχει αποδειχθεί [2], [49] ότι η παραπάνω εκτίμηση είναι στατιστικά ασταθής (inconsistent) λόγω της απουσίας του τελεστή της προσδοκίας. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι για μια διαδικασία «ψευδοεφαρμογής» μέσου όρου για την ομαλοποίηση της εκτίμησης [49].

#### Έμμεση μέθοδος προσδιορισμού

Η δεύτερη μέθοδος προσδιορισμού των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος στηρίζεται στη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης συσχέτισης. Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός της συνάρτησης συσχέτισης οδηγεί στη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος. Στην περίπτωση στοχαστικών δεδομένων μηδενικής μέσης τιμής, η συνάρτηση συσχέτισης ισούται με τη συνάρτηση συμμεταβλητότητας των δεδομένων. Επομένως, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση συμμεταβλητότητας προσδιορίζεται η φασματική συνάρτηση του δείγματος. Το αποτέλεσμα που λαμβάνεται σχετίζεται άμεσα με το είδος της εκτίμησης της συνάρτησης συσχέτισης που χρησιμοποιείται. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν και οι δύο εκτιμήσεις (ανεπηρέαστη και επηρεασμένη) της συνάρτησης συσχέτισης. Και οι δύο όμως οδηγούν σε επηρεασμένες εκτιμήσεις των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η συνάρτηση συμμεταβλητότητας, ισχύει [43]:

$$\hat{P}_{xx}[m, n] = \mathbf{F}\{\hat{C}_{xx}[k, l]\} \quad (2.188)$$

Στην περίπτωση αυτή, η εφαρμογή των μετασχηματισμών Fourier εισάγει παραποιήσεις στα άκρα, οι οποίες αντιμετωπίζονται με τη χρήση κατάλληλων συναρτήσεων παραθύρων-φίλτρων ή με τη χρήση της τεχνικής του zero-padding. Αποτέλεσμα της εφαρμογής των μετασχηματισμών Fourier στις συναρτήσεις συσχέτισης (ή συμμεταβλητότητας) είναι ο προσδιορισμός ισοτροπικών συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος [43], [101].

#### 2.7.4 Παραμετρικές μέθοδοι

Εκτός από τις μη-παραμετρικές μεθόδους προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος υπάρχουν και οι μέθοδοι που περιγράφουν παραμετρικά τις στατιστικές ποσότητες δεύτερης τάξης με την παραδοχή μοντέλων στοχαστικών διαδικασιών. Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος, που υπολογίζεται με τη βοήθεια παραμετρικών μοντέλων, εξαρτάται άμεσα από την επιλογή του μοντέλου, από το βαθμό ανάπτυξής του και προφανώς από το είδος των δεδομένων που περιγράφει. Τα παραμετρικά μοντέλα που περιγράφονται σχετίζονται με στοχαστικές διαδικασίες

λευκού θορύβου (white noise processes) και αναφέρονται στα μοντέλα αυτο-παλινδρόμησης (autoregressive models – AR) και στα μοντέλα αυτο-παλινδρόμησης κινητού μέσου όρου (autoregressive-moving average models – ARMA).

Η διαδικασία προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος με τη βοήθεια παραμετρικών μοντέλων μπορεί να διακριθεί σε τρία στάδια:

1. Επιλέγεται ένας τύπος παραμετρικού μοντέλου για την αναπαράσταση των δεδομένων. Η επιλογή στηρίζεται συνήθως σε κριτήρια αξιόπιστης αναπαράστασης του πεδίου των τιμών και σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με την εμπειρία του χρήστη του μοντέλου. Το κάθε μοντέλο που επιλέγεται αντιπροσωπεύει και την εκ των προτέρων γνώση του χρήστη για τη μορφή του φάσματος. Στην περίπτωση που επιλέγεται ένα AR μοντέλο, τότε η υπολογιζόμενη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος παρουσιάζει απότομες κορυφές και ελάχιστα κοίλα τμήματα, ενώ στην περίπτωση ενός MA μοντέλου τα κοίλα της συνάρτησης είναι έντονα και οι κορυφές ομαλές. Ένα μοντέλο τύπου ARMA μπορεί σε γενικές γραμμές να περιγράψει και τις δύο καταστάσεις.
2. Προσδιορίζεται ο βέλτιστος βαθμός ανάπτυξης του μοντέλου. Τα κριτήρια για την επιλογή του βαθμού περιγράφονται στη συνέχεια.
3. Οι συντελεστές του μοντέλου εισέρχονται στις εκφράσεις προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος.

Ακολουθεί η ανάλυση των παραμετρικών μοντέλων. Για την περίπτωση μονοδιάστατων σημάτων οι εξισώσεις των μοντέλων παρουσιάζονται αναλυτικά από τον Marple [49]. Στην περίπτωση των διδιάστατων δεδομένων, που αποτελεί και την περίπτωση μετρήσεων του πεδίου βαρύτητας, ακολουθείται η ανάλυση των Cadzow and Ogino [10] και McClellan [50]. Η διαφορά στην αντιμετώπιση των διαφορετικών διαστάσεων έγκειται στο γεγονός της διαφορετικής θεωρίας των γραμμικών συστημάτων. Έτσι, στην περίπτωση των μονοδιάστατων δεδομένων το σύστημα που τα χαρακτηρίζει δίνεται από την εξίσωση

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[n-k]x[k] \quad (2.189)$$

Η διακριτή μονοδιάστατη συνάρτηση απόκρισης λαμβάνει τιμές μη μηδενικές μόνο στα σημεία  $h[0], h[1], \dots, h[\infty]$ . Το σύστημα αυτό ονομάζεται **αιτιακό** (causal), όταν το σήμα εξόδου βασίζεται σε ολοκληρωματικές σχέσεις συνελίξεων, οι οποίες περιλαμβάνουν μόνον σήματα εισόδου του παρόντος και του παρελθόντος. Η φυσική σημασία του συστήματος αντιστοιχεί σε σήματα που αποτελούν συναρτήσεις του χρόνου (χρονοσειρές). Στη περίπτωση όμως των διδιάστατων σημάτων, τα οποία αντιπροσωπεύουν χωρικές μεταβλητές, η συνθήκη αυτή παύει να ισχύει. Για το λόγο αυτό εισάγεται στη θεωρία η έννοια της **περιοχής υποστήριξης** (region of support) για τις διακριτές διδιάστατες συναρτήσεις απόκρισης παλμού. Η περιοχή υποστήριξης ικανοποιεί την απαίτηση για ένα αιτιακό διδιάστατο σύστημα. Ένα παράδειγμα, που μπορεί να παρουσιαστεί για την αιτιακή περίπτωση διδιάστατων συστημάτων, είναι το ότι το σήμα εξόδου θα πρέπει να υπολογιστεί με έναν ανάλογο τρόπο, όπως σαρώνεται η τηλεοπτική εικόνα: υπολογισμός γραμμή-γραμμή, από επάνω προς τα κάτω και από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Έστω το πεδίο των διακριτών δεδομένων  $x[N_1, N_2]$  με διαστάσεις  $N_1$  και  $N_2$ . Η περιγραφή του παραπάνω μοντέλου με τη βοήθεια ενός μοντέλου ARMA βαθμού  $(p_1, p_2, q_1, q_2)$  δίνεται από τη σχέση [10]:

$$\begin{aligned} x[n_1, n_2] &= \sum_{k=0}^{q_1} \sum_{m=0}^{q_2} b_{km} \epsilon[n_1 - k, n_2 - m] \\ &- \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{km} x[n_1 - k, n_2 - m], \end{aligned} \quad (2.190)$$

όπου  $\epsilon[n_1, n_2]$  αντιστοιχεί σε λευκό θόρυβο μέσης μηδενικής τιμής και μεταβλητότητας  $\sigma^2$ ,  $a_{km}$  είναι οι συντελεστές του μέρους της αυτο-παλινδρόμησης (AR) του μοντέλου ARMA, ενώ οι  $b_{km}$  είναι οι συντελεστές του μοντέλου που αναφέρονται στον κινητό μέσο όρο (MA). Στην περίπτωση που οι συντελεστές  $b$  είναι ίσοι με το μηδέν, εκτός από τον  $b[0, 0] = 1$ , τότε η περίπτωση του μοντέλου ARMA απλοποιείται σε μοντέλο AR και ισχύει:

$$x[n_1, n_2] = \epsilon[n_1, n_2] - \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{km} x[n_1 - k, n_2 - m] \quad (2.191)$$

Επόμενο βήμα για τις παραμετρικές μεθόδους είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών  $a_{km}$  και  $b_{km}$ . Ο προσδιορισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί, αναλόγως των χρησιμοποιούμενων δεδομένων, είτε απευθείας από το σύνολο των δεδομένων, είτε με την χρησιμοποίηση του «διαδοχικού» αλγορίθμου. Σύμφωνα με την πρώτη διαδικασία, το σύνολο των δεδομένων λαμβάνει μέρος στην αλγοριθμική διαδικασία και οι συντελεστές προσδιορίζονται άμεσα. Περισσότερες πληροφορίες δίνονται από τον Marple [49].

Ο προσδιορισμός των συντελεστών των μοντέλων μπορεί να προκύψει από τέσσερις μεθόδους [49]:

- Τη μέθοδο Yule-Walker, όπου ο προσδιορισμός των βέλτιστων συντελεστών είναι άμεσος. Η μέθοδος θεωρείται κατάλληλη για περιορισμένο αριθμό δεδομένων και παράγει φάσματα με την ελάχιστη διακριτική ικανότητα από τις άλλες μεθόδους.
- Την αρμονική μέθοδο Burg, όπου ο προσδιορισμός των συντελεστών είναι άμεσος. Θεωρείται συγκρίσιμη μέθοδος με την μέθοδο των μεταβλητοτήτων, όσον αφορά στο αποτέλεσμα του φασματικού προσδιορισμού.
- Τη μέθοδο της μεταβλητότητας, όπου οι συντελεστές προσδιορίζονται έμμεσα από όρους γραμμικής πρόγνωσης.
- Τη τροποποιημένη μέθοδο της μεταβλητότητας, που παρουσιάζει, σύμφωνα με τη θεωρία, τα βέλτιστα αποτελέσματα για τους ημιτονοειδείς όρους των δεδομένων.

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι στηρίζονται στη ελαχιστοποίηση κάποιων κριτηρίων για το βέλτιστο προσδιορισμό των συντελεστών των μοντέλων. Το πιο συνηθισμένο κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων των σφαλμάτων. Περισσότερες πληροφορίες για τη θεωρητική τεκμηρίωση των μεθόδων δίνονται από τον Marple [49].

Θα αναλυθεί στη συνέχεια ένας τρόπος προσδιορισμού των συντελεστών ενός AR μοντέλου. Αν θεωρήσουμε ότι η εκτίμηση  $\hat{x}[n_1, n_2]$  δίνεται από [10]:

$$\hat{x}[n_1, n_2] = - \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{km} x[n_1 - k, n_2 - m], \quad (2.192)$$

τότε το σφάλμα της πρόγνωσης θα δίνεται από

$$\begin{aligned} e[n_1, n_2] &= x[n_1, n_2] - \hat{x}[n_1, n_2] \\ &= x[n_1, n_2] + \sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{km} x[n_1 - k, n_2 - m] \end{aligned} \quad (2.193)$$

Το ζητούμενο είναι η επιλογή των συντελεστών  $a_{km}$ , έτσι ώστε να οδηγηθούμε στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης [10]

$$f[a] = \sum_{n_1=p_1+1}^{N_1} \sum_{n_2=p_2+1}^{N_2} w[n_1, n_2] |e[n_1, n_2]|^2, \quad (2.194)$$

όπου  $w[n_1, n_2]$  είναι διακριτές τιμές θετικών συναρτήσεων βάρους. Η ελαχιστοποίηση της (2.194) ακολουθεί τους γνωστούς υπολογιστικούς τρόπους:

$$\sum_{k=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_2} a_{km} Q(k, m, i, j) = -Q(0, 0, i, j), \quad (2.195)$$

όπου  $(i, j) = (0, \dots, p_1, 0, \dots, p_2)$ ,  $i = j \neq 0$  ταυτόχρονα και η συνάρτηση  $Q(k, m, i, j)$  ορίζεται ως:

$$Q(k, m, i, j) = \sum_{n_1=p_1+1}^{N_1} \sum_{n_2=p_2+1}^{N_2} w[n_1, n_2] [x[n_1 - k, n_2 - m] x^*[n_1 - i, n_2 - j]] \quad (2.196)$$

Η τελική σχέση μπορεί να δοθεί σε μορφή πινάκων

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} = \mathbf{q}, \quad (2.197)$$

όπου  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{q}$  είναι διανύσματα διαστάσεων  $(p_1 p_2 - 1) \times 1$  και  $\mathbf{Q}$  είναι πίνακας διαστάσεων  $(p_1 p_2 - 1) \times (p_1 p_2 - 1)$ .

Μια άλλη μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών  $a_{km}$  ενός AR μοντέλου παρουσιάζεται από τον Marple [49]. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται στηρίζεται σε επαναληπτικούς αλγόριθμους. Ο πιο συνηθισμένος αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος του Levinson. Ο αλγόριθμος αυτός αναλύεται στις δύο διαστάσεις ως εξής:

$$a_{p_1 p_2}[n_1, n_2] = a_{p_1-1, p_2-1}[n_1, n_2] + k_{p_1, p_2} a_{p_1-1, p_2-1}^*[p_1 - n_1, p_2 - n_2], \quad (2.198)$$

όπου  $n_1, n_2$  τα σημεία υπολογισμού των συντελεστών,  $p_1, p_2$  ο βαθμός ανάπτυξης του μοντέλου ως προς την κάθε διάσταση και  $k_{p_1, p_2}$  οι **συντελεστές ανάκλασης** (reflection coefficients). Ο προσδιορισμός των συντελεστών ανάκλασης μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους [49]. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν οι δύο ευρύτερα διαδεδομένες μέθοδοι. Ο γεωμετρικός και ο αρμονικός αλγόριθμος.

### Ο γεωμετρικός αλγόριθμος

Το **έμπροσθεν γραμμικό σφάλμα πρόγνωσης** (forward linear prediction error) δίνεται στην περίπτωση διδιάστατων δεδομένων από τη σχέση:

$$e_{p_1, p_2}^f[n_1, n_2] = x[n_1, n_2] + \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{m=1}^{p_2} a_{p_1, p_2}^f[k, m] x[n_1 - k, n_2 - m] \quad (2.199)$$

και το **όπισθεν γραμμικό σφάλμα πρόγνωσης** (backward linear prediction error) δίνεται από

$$e_{p_1, p_2}^b[n_1, n_2] = x[n_1 - p_1, n_2 - p_2] + \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{m=1}^{p_2} a_{p_1, p_2}^{f*}[k, m] x[n_1 + k - p_1, n_2 + m - p_2] \quad (2.200)$$

Με την αντικατάσταση στις δύο τελευταίες εξισώσεις της (2.198) λαμβάνουμε τις επαναληπτικές εκφράσεις:

$$\begin{aligned} e_{p_1, p_2}^f[n_1, n_2] &= e_{p_1-1, p_2-1}^f[n_1, n_2] + k_{p_1, p_2} e_{p_1-1, p_2-1}^b[n_1 - 1, n_2 - 1] \\ e_{p_1, p_2}^b[n_1, n_2] &= e_{p_1-1, p_2-1}^b[n_1 - 1, n_2 - 1] + k_{p_1, p_2}^* e_{p_1-1, p_2-1}^f[n_1, n_2]. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την ανάλυση του Marple [49] για την περίπτωση μονοδιάστατων δεδομένων, ο προσδιορισμός των συντελεστών ανάκλασης στην περίπτωση των δύο διαστάσεων δίνεται από:

$$\hat{k}_{p_1, p_2} = \frac{-\sum_{n_1} \sum_{n_2} e_{p_1-1, p_2-1}^f [n_1, n_2] e_{p_1-1, p_2-1}^{b*} [n_1-1, n_2-1]}{\left( \sum_{n_1} \sum_{n_2} |e_{p_1-1, p_2-1}^f [n_1, n_2]|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n_1} \sum_{n_2} |e_{p_1-1, p_2-1}^b [n_1-1, n_2-1]|^2 \right)^{1/2}} \quad (2.201)$$

Για τις επαναληπτικές μεθόδους που αναλύθηκαν προηγουμένως, οι αρχικές τιμές του μηδενικού βαθμού των σφαλμάτων δίνονται στη συνέχεια:

$$e_{00}^f [n_1, n_2] = e_{00}^b [n_1, n_2] = x[n_1, n_2]. \quad (2.202)$$

### Ο αρμονικός αλγόριθμος (Burg)

Η διαδικασία προσδιορισμού των συντελεστών του μοντέλου AR είναι όμοια με την γεωμετρική μέθοδο, με τη διαφορά ότι παρουσιάζεται μια διαφορετική εκτίμηση για τους συντελεστές ανάκλασης, η οποία και στηρίζεται στο κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων. Η τελική τιμή για τους συντελεστές ανάκλασης δίνονται σε διδιάστατη προσέγγιση από τη σχέση:

$$\hat{k}_{p_1, p_2} = \frac{-2 \sum_{n_1} \sum_{n_2} e_{p_1, p_2}^{b*} [n_1-1, n_2-1]}{\sum_{n_1} \sum_{n_2} |e_{p_1-1, p_2-1}^f [n_1, n_2]|^2 + \sum_{n_1} \sum_{n_2} |e_{p_1-1, p_2-1}^b [n_1-1, n_2-1]|^2}, \quad (2.203)$$

όπου τα ορίσματα  $n_1$  και  $n_2$  στα αθροίσματα λαμβάνουν τις τιμές:

$$\begin{aligned} n_1 &= p_1 + 1, \dots, N_1 \\ n_2 &= p_2 + 1, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Διάφορες τροποποιήσεις της προηγούμενης σχέσης έχουν αναπτυχθεί για την απλοποίηση του υπολογισμού των συντελεστών ανάκλασης, όσο και για την αντιμετώπιση της διαφοράς στάθμης (bias) που φαίνεται να παρουσιάζεται στην περίπτωση εκτίμησης ημιτονοειδών συχνοτήτων. Οι διαφοροποιήσεις από τον αυθεντικό αλγόριθμο παρουσιάζονται αναλυτικά από τον Marple [49].

Οι συντελεστές του μοντέλου προκύπτουν από την εφαρμογή των συντελεστών ανάκλασης στη σχέση (2.198) μέχρι το συγκεκριμένο βαθμό ανάπτυξης. Στη συνέχεια και αφού έχουν προσδιοριστεί οι συντελεστές του AR μοντέλου, προσδιορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος από την εξίσωση:

$$P_{AR}[f_1, f_2] = \frac{T_1 T_2 \hat{\rho}_w}{\left| 1 + \sum_{n_1} \sum_{n_2} \hat{a}_{p_1, p_2} [n_1, n_2] e^{-j2\pi[f_1 n_1 T_1 + f_2 n_2 T_2]} \right|^2} \quad (2.204)$$

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται για τον προσδιορισμό ενός ARMA μοντέλου, με μόνη διαφορά την πολυπλοκότερη υπολογιστική διαδικασία, εξαιτίας των περισσότερων συντελεστών που είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν.

## 2.8 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν οι γενικές αρχές ανάλυσης των δεδομένων του πεδίου βαρύτητας και δόθηκαν οι θεμελιώδεις σχέσεις σύνδεσης των παραμέτρων του. Αναφέρθηκαν οι έννοιες των προβλημάτων των συνοριακών τιμών και αναλύθηκαν τόσο οι κλασικές, όσο και οι μοντέρνες λύσεις τους. Τα προβλήματα αναφέρονται στην προσέγγιση μιας επιφάνειας

από τιμές που βρίσκονται στο σύνορό της. Οι αναγωγές των παρατηρούμενων δεδομένων στο σύνορο της επιφάνειας αποτελούν σημαντικό τμήμα των θεωριών προσέγγισης. Η συνεισφορά παγκόσμιων μοντέλων λαμβάνεται υπόψη με την τεχνική συνδυασμού «απομάκρυνσης – επαναφοράς», η οποία παρουσιάστηκε αναλυτικά. Αναπτύχθηκε επίσης το θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων προσέγγισης, διαχωρίζοντας το ντετερμινιστικό και στοχαστικό χαρακτήρα τους. Επιπλέον, παρουσιάστηκε η εισαγωγή των φασματικών τεχνικών στις μεθόδους προσδιορισμού, αναλύοντας τόσο την επίπεδη, όσο και τη σφαιρική μορφή τους. Τέλος, κατηγοριοποιήθηκαν οι τρόποι προσέγγισης των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των γεωδαιτικών δεδομένων.

Η ανάπτυξη των φασματικών τεχνικών προσέγγισης, καθώς και οι τρόποι εύρεσης των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος αποτελούν τις βασικές έννοιες σύνδεσης για την παρουσίαση της θεωρίας των συστημάτων, η οποία αναλύεται στο κεφάλαιο 6. Το κεφάλαιο που παρουσιάστηκε παρέχει το θεωρητικό υπόβαθρο από την πλευρά της επιστήμης της γεωδαισίας για την ορθότερη κατανόηση του κεφαλαίου των νέων μεθόδων συνδυασμού.



# Βιβλιογραφία

- [1] D. Arabelos, P. Knudsen and C. C. Tscherning. Covariance and bias treatment when combining gravimetry, altimeter and gradiometer data by collocation. In *Proceedings of the IUGG XIX General Assembly*, Tome II, pp. 443–453, Vancouver, B.C., Canada, August 1987.
- [2] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Random data - Analysis and measurements procedures*. 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [3] S. Bian and H. Sun. The expression of common singular integrals in physical geodesy. *Manuscripta Geodaetica*, 19(2), pp. 62–69, 1994.
- [4] G. Bomford. *Geodesy*. Oxford University Press, N. York, 1980.
- [5] G. P. Bottoni and R. Barzaghi. Fast Collocation. *Bulletin Géodésique*, 67(2), 1993.
- [6] J. Bouman. A survey of global gravity models. Report No. 97.1, Delft Institute for Earth-Oriented Space Research, Delft, The Netherlands, 1997.
- [7] R.N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications, Second edition, revised*. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [8] E. O. Brigham. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [9] V. V. Brovar. On the solution of Molodensky’s boundary value problem. *Bulletin Géodésique*, 72, pp. 167–173, 1964.
- [10] J. A. Cadzow and K. Ogino. Two-Dimensional Spectral Estimation. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process*, ASSP-29, pp. 396–401, 1981.
- [11] O. C. Dahl and R. Forsberg. Different ways to handle topography in practical geoid determination. *Physics and Chemistry of the Earth*, 24(1), pp. 41–46, 1999.
- [12] H. Denker and I. N. Tziavos. Investigation of the Molodensky’s series terms for terrain reduced gravity field data. Presented at the 2nd Joint Meeting of the International Gravity Commission and the International Geoid Commission held in Trieste, September 1998. To appear in *Bollettino di Geofisica teorica ed applicata*, 1999.
- [13] A. Dermanis. *Probabilistic and Deterministic Aspects of Linear Estimation in Geodesy*. PhD Dissertation, OSU Report no 244, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A., October 1976.
- [14] A. Dermanis. Geodetic linear estimation techniques and the norm choice problem. *Manuscripta Geodaetica*, 2(1), pp. 15–97, 1977.
- [15] *Data base description for DBDB-V version 1.0*. Internet documentation, 1997.

- [16] D. E. Dudgeon and R. M. Mersereau. *Multidimensional Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [17] *ETOPO 5*. Internet resources: <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>, 1999.
- [18] R. Forsberg. Study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modeling. Report No. 355, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1984.
- [19] R. Forsberg. Terrain Effects in Geoid Computations. In *Lecture Notes from the International School for the Determination and Use of the Geoid*, pp. 101–134. International Geoid Service, Rio de Janeiro, September 10-16, 1997.
- [20] R. Forsberg and M. G. Sideris. Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach. *Manuscripta Geod.*, 18, pp. 82–90, 1993.
- [21] R. Forsberg and C. C. Tscherning. The use of height data in gravity field approximation by collocation. *J. Geophys. Res.*, 86(B9), pp. 7843–7854, 1981.
- [22] J. B. J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris, France, 1822.
- [23] *Global Land One-km Base Elevation (GLOBE) Project*. Internet resources: <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/topo/globe.shtml>, 1999.
- [24] C. C. Goad, C. C. Tscherning and M. M. Chin. Gravity Empirical Covariance Values for the Continental United States. *Journal of Geophysical Research*, 89(B9), pp. 7962–7968, 1984.
- [25] E. Grafarend. Geodetic prediction concepts. In *Lecture Notes of the International Summer School in the Mountains on Mathematical Methods in Physical Geodesy – Ramsau, Austria, 1973*, editors: B. Brosowski and E. Martensen, vol. 13, pp. 161–200. Bibliographisches Institut, Mannheim, Germany, 1975.
- [26] E. Grafarend. Operational Geodesy. In *Approximation methods in Geodesy*, editors: H. Moritz and H. Sünel, pp. 235–284. H. Wichmann, Karlsruhe, Germany, 1975.
- [27] E. Groten. *Geodesy and Earth’s Gravity Field*. Dümmler, Bonn, 1980.
- [28] R. Haagmans, E. de Min and M. van Gelderen. Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes’ integral. *Manuscr. Geod.*, 18, pp. 227–241, 1993.
- [29] F. J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. *Proc. IEEE*, 66(1), pp. 51–83, 1978.
- [30] J. C. Harrison and M. Dickinson. Fourier transform methods in local gravity field modelling. *Bulletin Géodésique*, 63, pp. 149–166, 1989.
- [31] B. Heck. Formulation and Linearization of Boundary Value Problems: From Observables to a Mathematical Model. In *Lecture Notes in Earth Sciences, “Geodetic Boundary Value Problems in View of One Centimeter Geoid”*, editors: F. Sansò and R. Rummel, vol. 65, pp. 121–160. Springer, 1997.
- [32] W. Heiskanen and H. Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co, 1967.
- [33] B. Hofmann-Wellenhof and H. Moritz. Introduction to spectral analysis. In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, editor: H. Sünel, Lecture Notes in Earth Sciences No 7, pp. 157–259. Springer-Verlag, 1986.

- [34] C. Jekeli. Optimizing Kernels of Truncated Integrals in Physical Geodesy. In *Proceedings of the General Meeting of the International Association of Geodesy*, pp. 528–574, Tokyo, 1982.
- [35] G. M. Jenkins and D. G. Watts. *Spectral Analysis and its Applications*. Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [36] U. Klohe and K. H. Ilk. A solution to the singularity problem occurring in the terrain correction formula. *Manuscripta Geodaetica*, 18(5), pp. 263–279, 1993.
- [37] P. Knudsen. Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data. *Bulletin Géodésique*, 61, pp. 145–160, 1987.
- [38] T. Krarup. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. Report No. 44, Danish Geodetic Institute, Copenhagen, 1969.
- [39] T. Krarup. On potential theory. In *Lecture Notes of the International Summer School in the Mountains on Mathematical Methods in Physical Geodesy – Ramsau, Austria, 1973*, editors: B. Brosowski and E. Martensen, vol. 12, pp. 79–160. Bibliographisches Institut, Mannheim, Germany, 1975.
- [40] S. L. Lauritzen. The probabilistic background of some statistical methods in physical geodesy. Report No. 48, Danish Geodetic Institute, Copenhagen, 1973.
- [41] D. Lelgemann. On the numerical properties of interpolation with harmonic kernel functions. *Manuscripta Geodaetica*, 6(2), pp. 157–191, 1981.
- [42] F. G. Lemoine, S. C. Kenyon, J. K. Factor, R. G. Trimmer, N. K. Pavlis, D. S. Chinn, C. M. Cox, S. M. Klosko, S. B. Luthcke, M. H. Torrence, Y. M. Wang, R. G. Williamson, E. C. Pavlis, R. H. Rapp and T. R. Olson. *The development of the Joint NASA GSFC and NIMA geopotential model EGM96*, 1998. NASA Technical Paper, 1998-206861.
- [43] J. Li. Detailed marine gravity field determination by combination of heterogeneous data. Msc Thesis, UCGE Report 20102, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, August 1996.
- [44] Q. W. Liu, Y. C. Li and M. G. Sideris. Evaluation of deflections of the vertical on the sphere and the plane: a comparison of FFT techniques. *Journal of Geodesy*, 71(8), pp. 461–468, 1997.
- [45] Y. C. Li. Optimized spectral geoid determination. Msc Thesis, UCGE Rep. 20050, Dept. of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Alberta, Canada, 1993.
- [46] Y. C. Li and M. G. Sideris. Improved gravimetric terrain corrections. *Geophys. J. Int.*, 119, pp. 740–752, 1994.
- [47] Y. C. Li, M. G. Sideris and K. P. Schwarz. A numerical investigation on height anomaly prediction in mountainous areas. *Bulletin Géodésique*, 69, pp. 143–156, 1995.
- [48] A. Mainville, M. Véronneau, R. Forsberg and M. G. Sideris. A Comparison of Geoid and Quasigeoid Modeling Methods in Rough Topography. In *Proceedings of IAG Symposia no 113 "Gravity and Geoid"*, editors: H. Sünel and I. Marson, pp. 491–501, 1995.
- [49] S.L. Marple Jr. *Digital spectral analysis with applications*. Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1987.

- [50] J. H. McClellan. Multidimensional Spectral Estimation. *Proc. IEEE*, 70, pp. 1029–1039, 1982.
- [51] P. Meissl. Elements of functional analysis. In *Lecture Notes of the International Summer School in the Mountains on Mathematical Methods in Physical Geodesy – Ramsau, Austria, 1973*, editors: B. Brosowski and E. Martensen, vol. 12, pp. 19–78. Bibliographisches Institut, Mannheim, Germany, 1975.
- [52] P. Meissl. The use of finite elements in physical geodesy. Report No. 313, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1981.
- [53] M. S. Molodensky, V. F. Eremeev and M. I. Yurkina. Methods for study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth. Report No. 131, Works on the Central Research Institute of Geodesy, Aerial Photography and Cartography, Main Administration of Geodesy and Cartography, Ministry of Geology and Control of Mineral Resources of the USSR, 1962.
- [54] H. Moritz. Statistical foundations of collocation. Report No. 272, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1978.
- [55] H. Moritz. *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, 2nd edition, Karlsruhe, 1989.
- [56] D. Nagy. The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics*, 31, pp. 362–371, 1966.
- [57] I. Newton. *Principia*. London, England, 1687.
- [58] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [59] R. L. Parker. Improved Fourier terrain correction, Part I. *Geophysics*, 60, pp. 1007–1017, 1995.
- [60] R. L. Parker. Improved Fourier terrain correction, Part II. *Geophysics*, 61, pp. 365–372, 1996.
- [61] N. K. Pavlis. Development and Applications of Geopotential Models. In *Lecture Notes from the International School for the Determination and Use of the Geoid*, pp. 231–269. International Geoid Service, Rio de Janeiro, September 10-16, 1997.
- [62] M. Peng, Y. C. Li and M. G. Sideris. First results on the computation of terrain corrections by the 3D FFT method. *Manuscripta Geodaetica*, 20(6), pp. 475–488, 1995.
- [63] R. H. Rapp. The Use of Potential Coefficient Models in Computing Geoid Undulations. In *Lecture Notes from the International School for the Determination and Use of the Geoid*, pp. 71–99. International Geoid Service, Rio de Janeiro, September 10-16, 1997.
- [64] R.V. Sailor. Signal processing techniques. In *Geoid and Its Geophysical Interpretations*, pp. 147–185. P. Vaníček and N.T. Christou, 1994.
- [65] F. Sansò. The minimum mean square estimation error principle in physical geodesy (stochastic and non-stochastic interpretation). *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 2, pp. 111–129, 1980.
- [66] F. Sansò. Statistical methods in physical geodesy. In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, editor: H. Sünel, Lecture Notes in Earth Sciences No 7, pp. 49–155. Springer-Verlag, 1986.

- [67] F. Sansò. A Compendium of Physical Geodesy. In *Lecture Notes from the International School for the Determination and Use of the Geoid*, pp. 1–69. International Geoid Service, Rio de Janeiro, September 10-16, 1997.
- [68] K. P. Schwarz and G. Lachapelle. Local characteristics of the gravity anomaly covariance function. *Bulletin Géodésique*, 54, pp. 21–36, 1980.
- [69] K. P. Schwarz, M. G. Sideris and R. Forsberg. The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophys. J. Int.*, 100, pp. 485–514, 1990.
- [70] B. B. She. A PC-Based Unified Geoid for Canada. Msc Thesis, UCGE Rep. 20051, Dept. of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Alberta, Canada, 1993.
- [71] M. G. Sideris. *Spectral Methods for the Numerical Solution of Molodensky's Problem*. PhD Dissertation, UCSE Report 20024, Division of Surveying Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, October 1987.
- [72] M G Sideris. Rigorous gravimetric terrain modeling using Molodensky's operator. *Manuscr. Geod.*, 15, pp. 97–106, 1990.
- [73] M. G. Sideris. Geoid determination by FFT techniques. In *Lecture Notes from the International School for the Determination and Use of the Geoid*, pp. 165–229. International Geoid Service, Rio de Janeiro, September 10-16, 1997.
- [74] M. G. Sideris and R. Forsberg. Review of geoid prediction methods in mountainous regions. In *Proceedings of IAG Symposia no 106 "Determination of the Geoid – Present and Future"*, pp. 51–62, 1991.
- [75] M G Sideris and Y C Li. Gravity field convolutions without windowing and edge effects. *Bull. Géod.*, 67, pp. 107–118, 1993.
- [76] M. G. Sideris and K. P. Schwarz. Solving Molodensky's series by fast Fourier transform techniques. *Bulletin Géodésique*, 60(1), pp. 51–63, 1986.
- [77] M.G. Sideris. Computation of gravimetric terrain corrections using fast Fourier transform techniques. Msc Thesis, UCSE Report 20007, Division of Surveying Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, March 1984.
- [78] L. E. Sjöberg. Comparison of some methods of modifying Stokes's formula. In *Proceedings of the International Symposium of the Definition of the Geoid*, Florence, Italy, 1986.
- [79] G. G. Stokes. On the variation of gravity at the surface of the Earth. *Mathematical and physical papers*, 2, pp. 71–104, 1886.
- [80] G. Strang van Hees. Stokes' formula using fast Fourier transform techniques. *Manuscripta Geod.*, 15, pp. 235–239, 1990.
- [81] H. Sünkel. Geodetic boundary value problems – classical solution and implementation. In *Lecture Notes in Earth Sciences, "Geodetic Boundary Value Problems in View of One Centimeter Geoid"*, editors: F. Sansò and R. Rummel, vol. 65, pp. 219–237. Springer, 1997.
- [82] W. Torge. *Geodesy*. de Gruyter, Berlin - New York, 1980.
- [83] C C Tscherning, P Knudsen and R Forsberg. Description of the GRAVSOFTE package. In *Proceedings of the 1st Continental Workshop on the Geoid in Europe*, Prague, May 11–14, 1992.

- [84] C. C. Tscherning. A FORTRAN VI program for the determination of the anomalous potential using stepwise least squares collocation. Report No. 212, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974.
- [85] C. C. Tscherning. Covariance expressions for second and lower order derivatives of the anomalous potential. Report No. 225, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1976.
- [86] C. C. Tscherning. Introduction to Functional Analysis with a View to its Application in Approximation Theory. In *Approximation Methods in Geodesy*, editors: H. Moritz and H. Sünel, pp. 157–192. H. Wichmann Verlag, 1978.
- [87] C. C. Tscherning. Local Approximation of the Gravity Potential by Least-squares Collocation. In *Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China*, pp. 277–361, UCSE Report 60003, University of Calgary, Calgary, AB Canada, 1985.
- [88] C. C. Tscherning. Functional methods for gravity field approximation. In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, editor: H. Sünel, Lecture Notes in Earth Sciences No 7, pp. 3–47. Springer-Verlag, 1986.
- [89] C. C. Tscherning. The Use of Optimal Estimation for Gross-error Detection in Databases of Spatially Correlated Data. *BGI, Bulletin d'Information*, 68, pp. 79–89, 1991.
- [90] C. C. Tscherning. Geoid Determination by Least-square Collocation Using GRAVSOFT. In *Lecture Notes from the International School for the Determination and Use of the Geoid*, pp. 135–164. International Geoid Service, Rio de Janeiro, September 10-16, 1997.
- [91] C. C. Tscherning and R. H. Rapp. Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical implied by Anomaly Degree Variance Models. Report No. 208, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974.
- [92] D. V. Tsoulis. A combination method for computing terrain corrections. *Physics and Chemistry of the Earth*, 23(1), pp. 53–58, 1997.
- [93] I. N. Tziavos. Numerical considerations of FFT methods in gravity field modeling. Report No. 188, Wiss. Arb. d. Fachr. Verm.wesen, Univ. Hannover, Hannover, 1993.
- [94] I. N. Tziavos. Comparisons of spectral techniques for geoid computations over large regions. *Journal of Geodesy*, 70, pp. 357–373, 1996.
- [95] I. N. Tziavos and V. D. Andritsanos. Improvements in the Computation of Deflections of the Vertical by FFT. *Physics and Chemistry of the Earth*, 23(1), pp. 71–75, 1998.
- [96] I. N. Tziavos and V. D. Andritsanos. Recent advances in terrain correction computations. In *Proceedings of the Second Continental Workshop on the Geoid in Europe*, Reports of the Finnish Geodetic Institute No 98:4, pp. 169–175, Budapest, Hungary, March 10–14 1998.
- [97] I. N. Tziavos and M. G. Sideris. On the FFT-evaluation of gravity-field convolution integrals with mean and point data. *Bulletin Géodésique*, 62, pp. 521–540, 1988.
- [98] I. N. Tziavos, M. G. Sideris, R. Forsberg and K. P. Schwarz. The Effect of The Terrain on Airborne Gravity and Gradiometry. *Journal of Geophysical Research*, 93(B8), pp. 9173–9186, 1988.

- [99] I. N. Tziavos, M. G. Sideris and K. P. Schwarz. A Study of the Contribution of Various Gravimetric Data Types on the Estimation of Gravity Field Parameters in the Mountains. *Journal of Geophysical Research*, 97(B6), pp. 8843–8852, 1992.
- [100] I. N. Tziavos, M. G. Sideris and H. Sünkel. The effect of surface density variations on terrain modelling - A case study in Austria. *Rep. of the Finish Geodetic Institute*, 96:2, pp. 99–110, 1996.
- [101] I.N. Tziavos, J. Li and M.G. Sideris. A comparison of marine gravity field modeling methods using non-isotropic a-priori information. In *Proceedings of the IAG Symposium "Gravity, Geoid and Marine Geodesy"*, editors: J. Segawa, H. Fujimoto and S. Okubo, pp. 400–407, Tokyo, Japan, September 30 – October 5 1996.
- [102] P. Vaníček and E. Krakiwsky. *Geodesy—The Concepts*. North Holland, 1982.
- [103] P. Vaníček and L. E. Sjöberg. Kernel modification in generalized Stokes's technique for geoid determination. In *Proceedings of the General Meeting of the International Association of Geodesy*, Edinburgh, Scotland, 1989.
- [104] A.A. Vassiliou. *Numerical Techniques for Processing Airborne Gradiometer Data*. PhD Dissertation, UCSE Report 20017, Division of Surveying Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, May 1986.
- [105] C. Wichienharoen. *The indirect effects on the computation of geoid undulations*. OSU Report no 336, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A., 1984.
- [106] Αθ. Δερμάνης. *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης – Τόμος 2*. Εκδόσεις Ζήτη, 1987.
- [107] Κ. Ε. Κατσάμπαλος και Η. Ν. Τζιαβός. *Φυσική Γεωδαισία*. Εκδόσεις Ζήτη, 1991.



## Κεφάλαιο 3

# Η δορυφορική αλτιμετρία

### 3.1 Εισαγωγή

Η έλευση της διαστημικής εποχής έδωσε μεγάλη ώθηση σε πλήθος επιστημών. Η δυνατότητα του ανθρώπου να παρατηρεί τα φυσικά φαινόμενα επεκτάθηκε και γενικεύτηκε με τη χρήση των τεχνητών δορυφόρων. Η «παρατήρηση» δεν περιοριζόταν μόνο στα όρια των οπτικών ικανοτήτων του ανθρώπινου ματιού και η ταχύτητα κάλυψης τεράστιων επιφανειών γινόταν πλέον εφικτή. Μια τέτοια περιοχή, ανεξερεύνητη ουσιαστικά από επιστημονικής πλευράς, αποτελεί και η θαλάσσια επιφάνεια της Γης. Καλύπτοντας το 70% περίπου της γήινης επιφάνειας, οι διακυμάνσεις και οι μεταβολές των ιδιοτήτων της θάλασσας επηρεάζουν το κλίμα και την εξέλιξη στο γήινο οικοσύστημα.

Πρωταρχικός σκοπός της δορυφορικής αλτιμετρίας είναι η παρατήρηση των ιδιοτήτων του θαλασσίου περιβάλλοντος. Με την κατάλληλη χρήση των δορυφορικών δεδομένων παρατηρούνται οι μετακινήσεις των πάγων, η μεταβολή στη στάθμη της θαλάσσιας επιφάνειας, η ταχύτητα των ανέμων, του ύψους των κυμάτων, η θερμοκρασία και έμμεσα, λαμβάνονται πληροφορίες για την κίνηση των θαλασσίων ρευμάτων, το γήινο πεδίο βαρύτητας, τις παλίρροιας και τη γενικότερη ωκεάνια κυκλοφορία.

Ιδιαίτερη σημασία αποκτούν οι αλτιμετρικές παρατηρήσεις στην περίπτωση της γεωδαισίας. Οι παρατηρήσεις των δορυφόρων, μετά από κατάλληλες επεξεργασίες, δίνουν σημαντικές πληροφορίες για το γήινο πεδίο βαρύτητας στις ωκεάνιες εκτάσεις. Αν σκεφτεί κανείς ότι οι μετρήσεις βαρύτητας με τους συμβατικούς τρόπους είναι εξαιρετικά δαπανηρές, δίχως να προσφέρουν υψηλές προδιαγραφές ταχύτητας στην καταγραφή και ακρίβειας, τότε εύκολα γίνεται αντιληπτή η μεγάλη συμβολή της αλτιμετρίας στην κατανόηση και περιγραφή του πεδίου. Επιπλέον, η σημαντικά μεγαλύτερη έκταση των θαλασσίων επιφανειών έναντι των ηπειρωτικών εκτάσεων δείχνει την αναγκαιότητα χρήσης και ερμηνείας των αλτιμετρικών δεδομένων στην προσέγγιση του γήινου πεδίου βαρύτητας.

### 3.2 Οι αλτιμετρικοί δορυφόροι

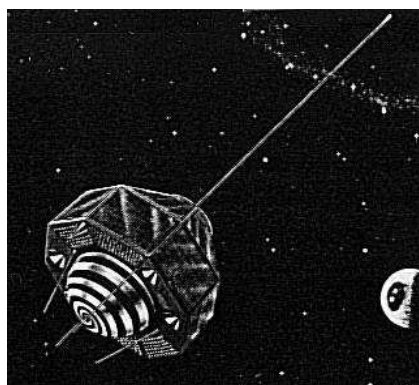
Η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας, με την έννοια που ορίστηκε στην εισαγωγή, εντοπίζεται στο 1975 με την εκτόξευση του πρώτου καθαρά αλτιμετρικού δορυφόρου Geos-3. Είχε προηγηθεί μια σειρά δορυφόρων με την ονομασία Skylab, οι οποίοι πραγματοποίησαν κάποιες αλτιμετρικές μετρήσεις, δίχως όμως η διαδικασία αυτή να αποτελεί τον πρωταρχικό στόχο τους. Οι δορυφόροι Skylab (βλ. εικόνα 3.1) αποτέλεσαν την πρώτη δοκιμή του αλτιμετρικού τύπου μετρήσεων, που χρησιμοποιήθηκε στην πρώτη ολοκληρωμένη αλτιμετρική αποστολή με το δορυφόρο Seasat.

Ο Geos-3 (Geodynamics Experimental Ocean Satellite) (βλ. εικόνα 3.2) είναι ο τρίτος της σειράς των δορυφόρων που ξεκίνησαν την παρακολούθηση της γήινης επιφάνειας των ωκεανών



Σχήμα 3.1: Ο δορυφόρος Skylab (NASA).

με στόχο την εξαγωγή χρήσιμων πληροφοριών για το γήινο πεδίο βαρύτητας και τις γεωφυσικές ιδιότητες των ωκεανών. Ο δορυφόρος τέθηκε σε τροχιά στις 9 Απριλίου 1975 και τροφοδότησε με πρωτογενή δεδομένα την επιστημονική κοινότητα για περισσότερο από 3.5 χρόνια. Οι υπεύθυνες υπηρεσίες για τη διαχείριση και την παρακολούθηση του δορυφόρου ήταν το Κέντρο Διαστημικών Πτήσεων Goddard (Goddard Space Flight Center) και το Κέντρο Διαστημικών Πτήσεων Wallops (Wallops Space Flight Center) της NASA. Το μέσο ύψος πτήσης του ήταν τα 843 χιλιόμετρα και η τροχιά του ήταν σχεδόν κυκλική (εκκεντρότητα 0.001) και κλίσης  $114.98^\circ$ . Στα χρόνια λειτουργίας του ο Geos-3 έδωσε σημαντικές πληροφορίες για τις υψηλές συχνότητες του ωκεάνιου πεδίου βαρύτητας, για την κατάσταση της θάλασσας και το ύψος των κυμάτων, για τις σχεδόν-στάσιμες αποκλίσεις του θαλάσσιου γεωειδούς, την ταχύτητα των ανέμων και την κατάσταση των πάγων. Περισσότερες πληροφορίες για την αποστολή του



Σχήμα 3.2: Ο δορυφόρος Geos-3 (NASA).

Geos-3 δίνονται στο ειδικό τεύχος του Journal of Geophysical Research (επίσημη έκδοση της Αμερικανικής Γεωφυσικής Ένωσης – American Geophysical Union) [40] και ειδικότερα από τον Stanley [74].

Ο Seasat (βλ. εικόνα 3.3) είναι ο πρώτος δορυφόρος που κατασκευάστηκε κατά κύριο λόγο για την παρατήρηση των ωκεανών. Κατασκευάστηκε και εκτοξεύθηκε με ευθύνη του Jet Propulsion Laboratory of National Aeronautics and Space Administration - JPL/NASA (<http://www.jpl.nasa.gov>). Εκτοξεύτηκε στις 28 Ιουνίου 1978 και η λειτουργία του σταμάτησε στις 10 Οκτωβρίου 1978 λόγω προβλημάτων στα ηλεκτρονικά όργανα. Με τροχιά σχεδόν κυκλική σε υψόμετρο 800 χιλιομέτρων και κλίση σχεδόν πολική ( $108^\circ$ ), ο δορυφόρος



Σχήμα 3.3: Ο δορυφόρος Seasat (NASA).

κατόρθωσε να συγκεντρώσει 42 ώρες δεδομένων, περισσότερα από ό,τι τα προηγούμενα 100 χρόνια επίγειων παρατηρήσεων. Τα δεδομένα του Seasat εμπεριέχουν πληροφορίες για την επιφανειακή θαλάσσια θερμοκρασία, τους ανέμους, το ύψος των κυμάτων, τους πάγους και την ωκεάνια τοπογραφία. Περισσότερες πληροφορίες για το δορυφόρο δίνονται στα ειδικά αφιερώματα του Journal of Geophysical Research [41], [42], καθώς επίσης και μέσω του διαδικτύου

<http://www.jpl.nasa.gov/missions/seasat>,

<http://southport.jpl.nasa.gov/scienceapps/seasat.html>.

Ακολούθησε ο γεωδαιτικός δορυφόρος Geosat - Geodetic Satellite (βλ. σχήμα 3.4). Ο



Σχήμα 3.4: Ο δορυφόρος Geosat (NOAA - NODC Laboratory for Satellite Altimetry).

Geosat θεωρείται ο ακρογωνιαίος λίθος της διαστημικής ωκεανογραφίας και της διαστημικής γεωδαισίας. Από το όνομά του φαίνεται ότι ο πρωταρχικός σκοπός του δορυφόρου ήταν η προσέγγιση του ωκεάνιου γεωειδούς. Για πρώτη φορά η γεωδαιτική κοινότητα είχε δεδομένα, τα οποία προέρχονταν από ένα δορυφορικό σύστημα κατασκευασμένο για παροχή

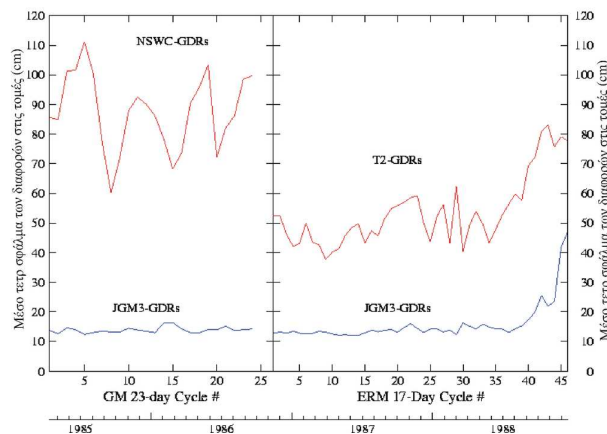
γεωδαιτικών πληροφοριών. Κατασκευασμένος στο Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Φυσικής του Πανεπιστημίου Johns Hopkins, υπό την εποπτεία του Ναυτικού των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής (ΗΠΑ), ο δορυφόρος είχε ένα αλτιμέτρο, με τη βοήθεια του οποίου πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις της στιγμιαίας επιφάνειας της θάλασσας, το ύψος των κυμάτων και της ταχύτητας των ανέμων. Οι φάσεις των μετρήσεων του Geosat είναι:

- Η καθαρά γεωδαιτική φάση (Geodetic Mission - GM): Από τις 30 Μαρτίου 1985 έως τις 30 Σεπτεμβρίου 1986 ο δορυφόρος πραγματοποίησε την αρχική αποστολή του που ήταν η προσέγγιση του ωκεάνιου γεωειδούς μέχρι του πλάτους των  $72^\circ$ . Το ύψος πτήσης ήταν τα 800 χιλιόμετρα και η κλίση του προσέγγιζε τις  $108^\circ$ . Στην περίοδο αυτή των 18 μηνών η τροχιά του δορυφόρου ήταν σχεδόν επαναληπτική με περίοδο 23 ημερών (330 περιστροφές σε 23.05 ημέρες με μέση τροχιακή περίοδο 6039.84 δευτερόλεπτα). Τα ίχνη των τροχιών στην επιφάνεια της Γης (4 χιλιόμετρα μεταξύ τους απόσταση στον ισημερινό) είχαν ως αποτέλεσμα τη λήψη δεδομένων μεγάλης διακριτικής ικανότητας. Λόγω της μεγάλης στρατιωτικής σημασίας αυτών των δεδομένων, οι μετρήσεις της γεωδαιτικής φάσης του Geosat παρέμειναν απόρρητες μέχρι το 1990. Σήμερα τα δεδομένα αυτά είναι διαθέσιμα στην επιστημονική κοινότητα.
- Η ακριβώς επαναλαμβανόμενη φάση Exact-Repeat Mission - ERM: Μετά τη γεωδαιτική φάση μία αλλαγή στην τροχιά του Geosat είχε ως αποτέλεσμα την έναρξη της ERM στις 8 Νοεμβρίου 1986. Σύμφωνα με τη φάση αυτή, δημιουργούνται μηχοτομές κατά μήκος του ίχνους της τροχιάς, οι οποίες επαναλαμβάνονται με απόκλιση 1-2 χιλιομέτρων σε διάστημα 17 ημερών περίπου (1 κύκλος: 244 περιστροφές σε 17.05 ημέρες με μέση τροχιακή περίοδο 6037.55 δευτερόλεπτα). Η ακριβώς επαναλαμβανόμενη φάση του Geosat συμπλήρωσε 62 πλήρεις κύκλους των 17.05 ημερών προτού μία βλάβη στο σύστημα καταγραφής των μετρήσεων, τον Οκτώβριο του 1989, καταστήσει αδύνατη την παγκόσμια καταγραφή δεδομένων. Τον Ιανουάριο του 1990 η συνεχιζόμενη βλάβη σήμανε και το τέλος της αποστολής του Geosat.

Η αρχική περιγραφή του συστήματος μετρήσεων του Geosat περιγράφεται από τους Cheney et al. [17]. Ο αρχικός υπολογισμός των τροχιών του Geosat βασίστηκε στο παγκόσμιο δορυφορικό μοντέλο βαρύτητας GEM-T2 [56]. Ο αρχικός υπολογισμός των τροχιών προσεγγίστηκε με μία ακρίβεια της τάξης των 2-3 μέτρων. Το μέγεθος αυτό του ακτινικού τροχιακού σφάλματος επηρέασε και τα αλτιμετρικά δεδομένα, κάνοντας αναγκαίες κάποιες προεπεξεργασίες για την ελαχιστοποίηση του σημαντικού αυτού σφάλματος. Μετά το 1995, όταν η γεωδαιτική φάση του Geosat προσφέρθηκε στην επιστημονική κοινότητα, έγινε προσπάθεια για τη βελτίωση του υπολογισμού των τροχιών και την ελαχιστοποίηση του ακτινικού τροχιακού σφάλματος. Το 1997 η Εθνική Διοίκηση Ωκεανών και Ατμόσφαιρας των ΗΠΑ (National Oceanic and Atmospheric Administration – NOAA) δημοσίευσε το βελτιωμένο υπολογισμό των τροχιών του Geosat, βασισμένο στο παγκόσμιο μοντέλο βαρύτητας, που υπολογίστηκε για την αποστολή του TOPEX/POSEIDON, Joint Gravity Model 3 – JGM3 [79]. Η βελτίωση στην τροχιά φαίνεται καθαρά στο σχήμα 3.5. Περισσότερες πληροφορίες για τον Geosat δίνονται από τους Cheney et al. [17], τα ειδικά αφιερωμένα τεύχη του Journal of Geophysical Research [44], [43] και στις σελίδες του διαδικτύου

[http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/geosat\\_handbook/index.html](http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/geosat_handbook/index.html)

Ακολούθησε η εκτόξευση του Ευρωπαϊκού δορυφόρου ERS1 – European Remote-sensing Satellite 1 (βλ. σχήμα 3.6). Υπεύθυνη για την εκτόξευση και τον έλεγχο του δορυφόρου είναι η Ευρωπαϊκή Υπηρεσία Διαστήματος (European Space Agency - ESA – <http://www.esa.int>). Η εκτόξευση του ERS1 πραγματοποιήθηκε στις 17 Ιουλίου 1991. Ο πρωταρχικός σκοπός του είναι η πολυετής μελέτη των ωκεανών, η καταγραφή της κίνησης των πάγων, η μέτρηση της ταχύτητας και της διεύθυνσης των ανέμων, η μέτρηση του ύψους των κυμάτων και της θερμοκρασίας. Αν και η σχεδιασμένη διάρκεια ζωής του δορυφόρου ήταν τα δύο χρόνια, μετρήσεις καταγράφηκαν μέχρι το 1996, οπότε και αντικαταστάθηκε από το διάδοχο δορυφόρο ERS2. Σήμερα, ο ERS1 χρησιμοποιείται ως αναπληρωματικός του ERS2. Ο δορυφόρος



Σχήμα 3.5: Η βελτίωση στην τροχιά του Geosat από τη χρησιμοποίηση του παγκόσμιου μοντέλου βαρύτητας JGM-3 (NOAA - NODC Laboratory for Satellite Altimetry).



Σχήμα 3.6: Ο δορυφόρος ERS1 (ESA).

πετά σε ύψος 780 χιλιομέτρων, σε πολική ηλιοσύγχρονη τροχιά κλίσης  $98.50^\circ$ . Οι φάσεις λειτουργίας του ERS1 είναι:

- Φάση A: Έλεγχος του δορυφορικού συστήματος και βαθμονόμηση των οργάνων: 31 Ιουλίου 1991 – 20 Δεκεμβρίου 1991. Επαναλαμβανόμενοι κύκλοι διάρκειας 3 ημερών.
- Φάση B: Πρώτη φάση καταγραφής των πάγων: 28 Δεκεμβρίου 1991 – 30 Μαρτίου 1992. Επαναλαμβανόμενοι κύκλοι διάρκειας 3 ημερών.
- Φάση C: Πρώτη φάση της ακριβώς επαναλαμβανόμενης τροχιάς: 14 Απριλίου 1992 – 20 Δεκεμβρίου 1993. 18 επαναλαμβανόμενοι κύκλοι των 35 ημερών.
- Φάση D: Δεύτερη φάση καταγραφής των πάγων μετά από δύο χρόνια: 23 Δεκεμβρίου 1993 – 3 Οκτωβρίου 1994. Επαναλαμβανόμενοι κύκλοι διάρκειας 3 ημερών.
- Φάση E: Πρώτη γεωδαιτική αποστολή: 10 Απριλίου 1994 – 27 Σεπτεμβρίου 1994. Ένας κύκλος των 168 ημερών με πυκνή κάλυψη για την χαρτογράφηση του ωκεάνιου γεωειδούς.
- Φάση F: Δεύτερη γεωδαιτική αποστολή: 27 Σεπτεμβρίου 1994 – 21 Μαρτίου 1995. Ένας κύκλος των 168 ημερών με τα ίχνη των τροχιών μετατοπισμένα κατά 8 χιλιόμετρα για τη βελτίωση της διακριτικής ικανότητας της κάλυψης.

- Φάση E: Δεύτερη φάση της ακριβώς επαναλαμβανόμενης τροχιάς: 21 Μαρτίου 1995 – 16 Μαΐου 1996. 13 κύκλοι των 35 ημερών. Κοινή φάση με τον ERS2 για λόγους βαθμονόμησης και συμβατότητας των δεδομένων.

Περισσότερες πληροφορίες για τον ERS1 δίνονται στις αναφορές της ESA για το δορυφόρο [28], [29] και [27], καθώς επίσης και στο διαδίκτυο στις διευθύνσεις:

<http://www.ifremer.fr/cersat/ACTIVITE/ERS/MISSION/E.ERS.HTM>

<http://www.esoc.esa.de/external/mso/ers.html>

<http://ersmonrp.esoc.esa.de/start.html>

Η μεγάλη δυνατότητα συνεχούς παρατήρησης της επιφάνειας των ωκεανών με τη βοήθεια δορυφόρων ώθησε τη NASA και το Εθνικό Κέντρο Διαστημικών Μελετών της Γαλλίας (Centrale Nationale d' Etudes Spaciales – CNES) στην από κοινού προσπάθεια για την κατασκευή ενός δορυφόρου υψηλής ακρίβειας στη μέτρηση και μεγάλης διάρκειας ζωής. Ο δορυφόρος TOPEX/POSEIDON (T/P) (βλ. σχήμα 3.7) που κατασκευάστηκε, πήρε το όνομά του από τα δύο βασικά αλτιμετρικά ραντάρ του. Το πρώτο είναι ένα αλτιμετρικό ραντάρ διπλής συχνότητας, το οποίο κατασκευάστηκε από τη NASA και ονομάστηκε TOPEX από τα αρχικά της φράσης TOPOgraphic EXperiment. Το δεύτερο ραντάρ κατασκευάστηκε από το CNES και είναι απλής συχνότητας. Τα δύο αλτιμετρικά ραντάρ μοιράζονται την ίδια κεραία λήψης και επομένως δεν υπάρχει η δυνατότητα ταυτόχρονης λειτουργίας τους. Ο δορυφόρος εκτοξεύτηκε



Σχήμα 3.7: Ο δορυφόρος TOPEX/POSEIDON (AVISO - Altimetrie).

στις 10 Αυγούστου 1992 και από τότε έχει συμπληρώσει γύρω στους 250 πλήρεις κύκλους, προσφέροντας στην επιστημονική κοινότητα το μεγαλύτερο όγκο αλτιμετρικών δεδομένων στη σύντομη αλτιμετρική ιστορία. Τα πέντε χρόνια συνεχόμενων μετρήσεων προσφέρουν ένα μεγάλο αριθμό δεδομένων κατάλληλο για τη μελέτη της συμπεριφοράς των ωκεανών, την παρακολούθηση της κίνησης των θαλασσίων ρευμάτων (Gulf Stream, Kuroshio) και των κλιματολογικών φαινομένων της δεκαετίας μας (El Niño, La Niña). Ο δορυφόρος βρίσκεται σε ύψος 1336 χιλιομέτρων, κινείται σε τροχιά σχεδόν κυκλική (εκκεντρότητα 0.000095) και κλίση 66.039°. Το ίχνος της τροχιάς του επαναλαμβάνεται με ακρίβεια 1 χιλιομέτρου κάθε 9.9156 ημέρες. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε κατά τη σχεδίαση της δορυφορικής αποστολής στη δυνατότητα υψηλής ακρίβειας προσδιορισμού της τροχιάς του δορυφόρου, αφού το κυριότερο σφάλμα πριν την έλευση του T/P ήταν το ακτινικό σφάλμα της τροχιάς. Τοποθετήθηκαν όργανα υψηλής ακρίβειας προσδιορισμού της τροχιάς συμπεριλαμβανομένων δέκτη Global Positioning System (GPS) και δέκτη του συστήματος DORIS (Doppler Orbitography and Radiolocation Integrated by Satellite) – βλ. <http://doris@www-projet.cst.cnes.fr:8060>. Στο γεγονός της ακριβούς προσέγγισης της τροχιάς του T/P σε συνδυασμό με τη χρήση του εξελιγμένου παγκόσμιου δορυφορικού μοντέλου βαρύτητας Joint Gravity Model 3 – JGM3 [79] οφείλεται και η χρήση του T/P ως δορυφόρου αναφοράς στην προσέγγιση και τη διόρθωση των τροχιών των άλλων αλτιμετρικών δορυφόρων, π.χ., του Geosat και των ERS1-2 [53]. Πε-

ρισσότερες πληροφορίες για το δορυφόρο δίνονται στα ειδικά τεύχη του Journal of Geophysical Research [45], [39] και μέσω του διαδικτύου στις διευθύνσεις:

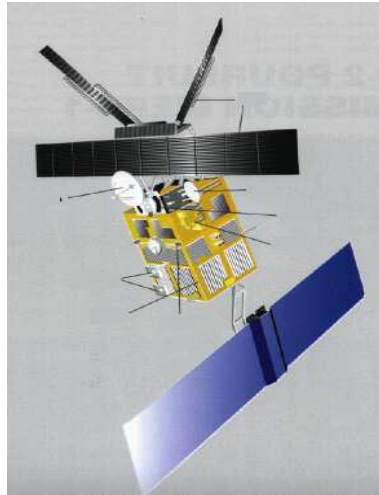
<http://sirius-ci.cst.cnes.fr:8090>

<http://www-ccar.colorado.edu/research/topex/html/topex.html>

<http://topex-www.jpl.nasa.gov>

<http://podaac.jpl.nasa.gov>.

Ο δεύτερος Ευρωπαϊκός δορυφόρος ERS2 (βλ. σχήμα 3.8) είναι ο διάδοχος του ERS1. Τα



Σχήμα 3.8: Ο δορυφόρος ERS2 (ESA).

τεχνικά χαρακτηριστικά του δορυφόρου είναι όμοια με αυτά του προκατόχου του, με κάποιες βελτιώσεις στην τεχνολογία και στην ποικιλία των επιστημονικών οργάνων. Εκτοξεύτηκε στις 21 Απριλίου 1995 και κινείται στην ίδια τροχιά με τον ERS1. Προγραμματίστηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε το ίχνος της τροχιάς του να ακολουθεί το ίχνος της τροχιάς του προκατόχου του για τη βαθμονόμηση και την ταυτόχρονη λειτουργία και των δύο. Ο ERS2, αφού λειτούργησε για ένα χρόνο μαζί με τον ERS1 στη φάση της βαθμονόμησης του, τον αντικατέστησε πλήρως από τον Ιούλιο του 1996. Αυτή τη στιγμή βρίσκεται στη φάση της επαναλαμβανόμενης καταγραφής της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας σε κύκλους διάρκειας 35 ημερών.

Μετά την επιτυχή αποστολή του Geosat και το πλήθος των πληροφοριών που έδωσε στην στρατιωτική και επιστημονική κοινότητα, το Ναυτικό των ΗΠΑ αποφάσισε την υποστήριξη του διαδόχου δορυφόρου Geosat Follow-On – GFO. Ο δορυφόρος εκτοξεύτηκε στις 10 Φεβρουαρίου 1998 και αυτή τη στιγμή (1999) βρίσκεται στη φάση της βαθμονόμησης και της συλλογής δοκιμαστικών δεδομένων. Ο δορυφόρος (βλ. σχήμα 3.9) βρίσκεται σε τροχιά σε ύψος 800 χιλιομέτρων, σε σχεδόν κυκλική τροχιά (εκκεντρότητα 0.0008035) και κλίση 108.0448°. Τα πρώτα δεδομένα του GFO έχουν δοθεί στη NASA και στη NOAA, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τη αξιολόγηση τους και την προώθησή τους σε πολιτικούς χρήστες. Χρήσιμες πληροφορίες για τον GFO και νέα για την πρόοδο των αξιολογήσεων και τη διάθεση των δεδομένων δίνονται στις διευθύνσεις του διαδικτύου:

<http://gfo.wff.nasa.gov>

<http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/gfo.html>

<http://gfo.bmpcoe.org/Gfo>.

Τέλος, προς τα τέλη του 2000 είναι προγραμματισμένη η εκτόξευση του αντικαταστάτη του T/P. Ο δορυφόρος ονομάζεται Jason-1 (βλ. σχήμα 3.10). Η αποστολή πραγματοποιείται για μια ακόμα φορά με τη συνεργασία της NASA μέσω του εργαστηρίου JPL και του CNES μέσω της AVISO – Archiving, Validation and Interpretation of Satellite Oceanographic data και της CLS – Collect, Localization, Satellites. Ο Jason-1 είναι ο πρώτος από μια σειρά δο-



Σχήμα 3.9: Ο δορυφόρος Geosat-Follow-On (U.S. Navy).



Σχήμα 3.10: Ο δορυφόρος Jason-1 (AVISO - Altimetrie).

ρυφόρων, οι οποίοι έχει προγραμματισθεί να εκτοξευθούν τα επόμενα 20 χρόνια. Ο δορυφόρος θα παρέχει σχεδόν πραγματικού χρόνου δεδομένα (τρεις ώρες μετά τη μέτρησή τους) και θα αποτελέσει την έναρξη της λειτουργικής φάσης της επιστήμης της ωκεανογραφίας (operational oceanography). Ο δορυφόρος έχει σχεδιαστεί ελαφρύτερος από τον T/P, και προβλέπονται αισθητές βελτιώσεις στο θόρυβο των οργάνων, στον προσδιορισμό της τροχιάς και στην ποιότητα των διορθωμένων δεδομένων. Ο δορυφόρος θα περιστρέφεται σε υψόμετρο 1336 χιλιομέτρων με κλίση τροχιάς  $66^\circ$  και περίοδο περιστροφής τις 9.9 ημέρες. Η επαναλαμβανόμενη τροχιά του (με αποκλίσεις μικρότερες του ενός χιλιομέτρου στον ισημερινό) θα δίνει τη δυνατότητα διαχρονικών μεταβολών στη στάθμη της θάλασσας. Περισσότερες πληροφορίες για την αποστολή δίνονται από τις σελίδες του διαδικτύου:

<http://sirius-ci.cst.cnes.fr:8090>

<http://tethys.jpl.nasa.gov/jason1>

<http://www-ocean.tamu.edu/topex-poseidon/jason.html>.

Τα χαρακτηριστικά των αλτιμετρικών δορυφόρων παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον πίνακα 3.1.

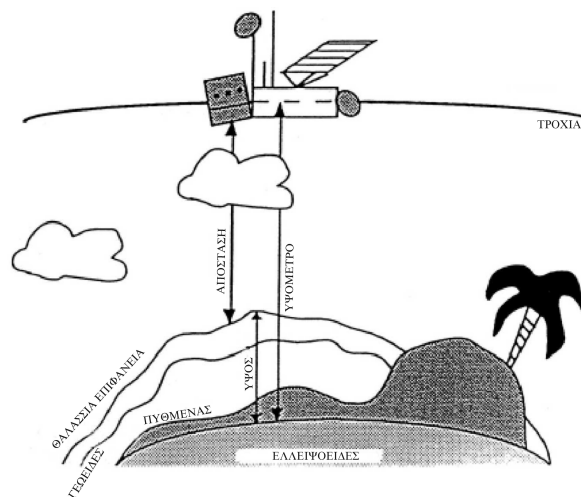
### 3.3 Η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας

Η ανάλυση που ακολουθεί περιγράφει την αρχή λειτουργίας των αλτιμετρικών μετρήσεων. Καταρχήν, θεωρείται απαραίτητη η παράθεση των όρων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια

Πίνακας 3.1: Τα χαρακτηριστικά των αλτιμετρικών δορυφόρων.

δορυφόρος	ημερομηνία εκτόξευσης	μάζα (kg)	περίγειο – απόγειο	κλίση (°)	περίοδος (min)	υπεύθ. υπηρεσία
Geos-3	9/4/75	341	816–850	114.98	101.6	NASA
Seasat	28/7/78	2300	761–765	108.0	100.1	NASA/JPL
Geosat	13/3/85	635	775–779	108.1	100.7	US Navy
ERS1	17/7/91	2384	774–775	98.5	100.3	ESA
T/P	10/8/92	2402	1330–1342	66.0	112.4	NASA/CNES
ERS2	21/4/95	2516	783–784	98.6	100.5	ESA
GFO	10/2/98	;	785–788	108.1	100.6	US Navy
Jason-1	12/00	;	≈1336	≈66	≈112	CNES/NASA

του κεφαλαίου. Οι όροι αυτοί παρουσιάζονται στο σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Οι χρησιμοποιούμενοι όροι για την περιγραφή του αλτιμετρικού συστήματος (AVISO - Altimetrie).

- Ως απόσταση (range) ορίζεται η απόσταση από το κέντρο μάζας του δορυφόρου μέχρι τη γήινη επιφάνεια, όπως αυτή μετράται από τα αλτίμετρα. Η αλτιμετρική μέτρηση, λοιπόν, θα αναφέρεται ως απόσταση και όχι ύψος.
- Ως υψόμετρο (altitude) ορίζεται η απόσταση του κέντρου μάζας του δορυφόρου από ένα σημείο αναφοράς. Το σημείο αναφοράς είναι συνήθως ή το ελλειψοειδές αναφοράς ή το κέντρο μάζας της Γης. Το υψόμετρο του δορυφόρου υπολογίζεται από τα δεδομένα των δορυφορικών εφημερίδων.
- Ως ύψος της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας (Sea Surface Height – SSH) ορίζεται η απόσταση της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας από το ελλειψοειδές αναφοράς και υπολογίζεται από την απόσταση που μετράει ο αλτιμετρικός δορυφόρος και το υψόμετρο του δορυφόρου από το ελλειψοειδές αναφοράς.
- Ως περιστροφή (revolution) ορίζεται μια περιστροφή του δορυφόρου γύρω από τη Γη.
- Διάβαση του δορυφόρου (satellite pass) είναι το μισό μιας πλήρους περιστροφής. Οι διαβάσεις του δορυφόρου χωρίζονται σε **αναβιβάζουσες** (ascending), όταν η τροχιά

του δορυφόρου πηγαίνει από μικρά σε μεγάλα γεωγραφικά πλάτη και καταβιβάζουσες (descending), όταν η τροχιά πηγαίνει από μεγάλα σε μικρά γεωγραφικά πλάτη.

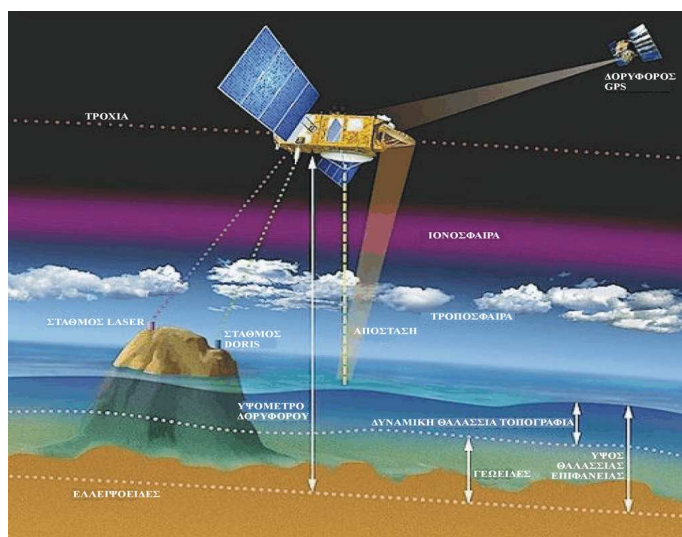
- Επαναλαμβανόμενος κύκλος (repeat cycle) είναι η χρονική περίοδος μέχρις ότου ο δορυφόρος περάσει εκ νέου από το ίδιο ίχνος. Ο όρος συναντάται, όπως γίνεται κατανοητό, μόνο στις επαναλαμβανόμενες αλτιμετρικές αποστολές (ERM).

Η αρχή μέτρησης των αλτιμετρικών δορυφόρων ακολουθεί τη γενικότερη αρχή των δορυφορικών μετρήσεων: Ένα σήμα που εκπέμπεται από το δορυφόρο ανακλάται επάνω στη γήινη επιφάνεια και επιστρέφοντας λαμβάνεται από το δορυφόρο. Το χρονόμετρο ακριβείας του δορυφόρου μετρά το χρόνο της διαδρομής του σήματος και το μετατρέπει σε απόσταση.

Η αρχή δεν είναι βέβαια και τόσο απλή, γιατί ο δορυφόρος καταρχήν δεν είναι ένα σταθερό σύστημα, αλλά κινείται σε μια τροχιά που επηρεάζεται από το γήινο πεδίο βαρύτητας. Η τροχιά του δορυφόρου δεν προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τις αλτιμετρικές μετρήσεις, αλλά προσεγγίζεται από ανεξάρτητες μετρήσεις άλλων συστημάτων. Τέτοια επίγεια συστήματα παρακολούθησης των δορυφόρων είναι το DORIS και το Satellite Laser Ranging – SLR. Ακόμα, η τροχιά του δορυφόρου ελέγχεται και από δορυφορικά συστήματα, όπως το GPS. Πάνω στο δορυφόρο, εκτός από τα όργανα για την αλτιμετρική διαδικασία, υπάρχουν δέχτες και κάτοπτρα για τον προσδιορισμό της τροχιάς. Λόγω της περιορισμένης γνώσης μας για το πεδίο της γήινης βαρύτητας, μέχρι πριν από λίγα χρόνια το τροχιακό σφάλμα έφτανε την τιμή των μερικών μέτρων. Με την ανάπτυξη των νέων δορυφορικών μοντέλων και τη βελτιστοποίηση των μετρήσεων, το σφάλμα αυτό σήμερα βρίσκεται στα όρια του θορύβου των μετρήσεων (2–3 εκατοστά).

Εκτός από το δορυφορικό σύστημα, ο παλμός που εκπέμπεται από το δορυφόρο διανύει ένα πολύπλοκο, από την άποψη της συμπεριφοράς των κυμάτων, μέσο, τη γήινη ατμόσφαιρα. Οι μετρήσεις επηρεάζονται από την επίδραση της ατμόσφαιρας και είναι απαραίτητο να διορθωθούν. Περισσότερα για το σύνολο των σφαλμάτων των αλτιμετρικών δεδομένων θα δοθούν στην ενότητα 3.4.

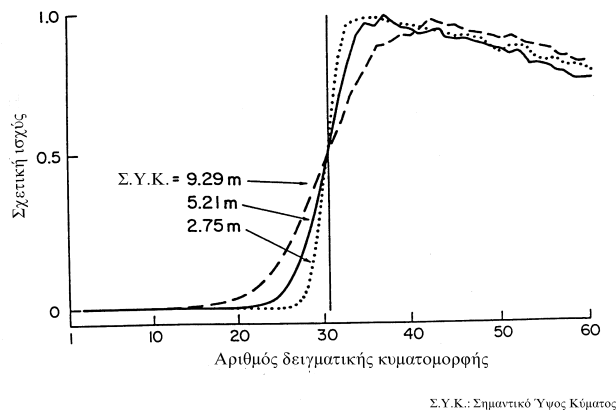
Η αρχή μέτρησης της δορυφορικής αλτιμετρίας φαίνεται στο σχήμα 3.12. Χρησιμοποιώντας



Σχήμα 3.12: Η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας (AVISO - Altimetrie).

όλα τα δεδομένα παρακολούθησης του δορυφόρου, εκτός από τις αλτιμετρικές μετρήσεις, προσδιορίζεται η καλύτερη δυνατή τροχιά. Υπολογίζεται δηλαδή η απόσταση του δορυφόρου από την αρχή του συστήματος αναφοράς. Το σύστημα αναφοράς είναι γεωκεντρικό και ακριβώς προσδιορισμένο από δορυφορικές, επίγειες και εξωγαλαξιακές παρατηρήσεις. Η διαδικασία

μέτρησης ακολουθεί τις αρχές των ηλεκτρομαγνητικών μετρήσεων και περιγράφεται με λεπτομέρειες στις αναφορές [63], [75] και [14]. Ένα αλτιμετρικό ραντάρ λειτουργεί συνήθως σε 13.5 GHz συχνότητα παλμού. Για να επιτευχθεί ακρίβεια ενός εκατοστού στη μέτρηση του ύψους της στιγμιαίας επιφάνειας της θάλασσας χρειάζεται μια διακριτική ικανότητα στη μέτρηση του χρόνου της τάξης των 30 ps. Αυτή η διακριτική ικανότητα απαιτεί την εκπομπή σημάτων ιδιαίτερα υψηλής συχνότητας (30 GHz). Στην πραγματικότητα χρησιμοποιείται συχνότητα των 300 MHz (3 ns) κεντρωμένη στα 13.5 GHz [63], [14]. Έτσι, αντί για ένα παλμό μικρού εύρους, η μορφή ενός μεγαλύτερου παλμού αναλύεται με την προσαρμογή μιας καμπύλης [14] (βλ. και σχήμα 3.13). Για τη λήψη του κατάλληλου λόγου σήματος-προς-θόρυβο



Σχήμα 3.13: Προσαρμοσμένη καμπύλη στους ανακλώμενους αλτιμετρικούς παλμούς για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις θαλάσσιας κατάστασης (σχήμα από [67]).

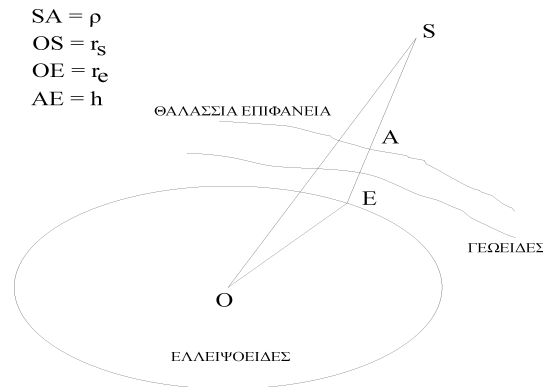
υπολογίζεται ο μέσος όρος των επιστρεφόμενων παλμών σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Η μορφή μιας εξομαλυνσμένης καμπύλης προσαρμόζεται στους υπολογισμένους μέσους όρους. Δύο διαδοχικές μέσες καμπύλες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό μιας μέτρησης ύψους της στιγμιαίας επιφάνειας της θάλασσας κάθε ένα δέκατο του δευτερολέπτου. Η μορφή της καμπύλης προσαρμογής εξαρτάται από τη μορφή της επιφάνειας, επάνω στην οποία ανακλάται ο παλμός. Σε ήρεμη θάλασσα η κλίση της καμπύλης είναι απότομη, ενώ σε κυματώδη θάλασσα η κλίση είναι πιο ομαλή. Το ύψος των κυμάτων εκφράζεται με τον όρο «**ύψος σημαντικού κύματος**» (significant wave height – SWH) και ισούται με το τετραπλάσιο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος του υψομέτρου της στιγμιαίας στάθμης (βλ. σχήμα 3.13).

Μετρώντας με αυτόν τον τρόπο την απόσταση μεταξύ του δορυφόρου και της στιγμιαίας επιφάνειας της θάλασσας, χρησιμοποιώντας ένα προεπιλεγμένο ελλειψοειδές αναφοράς (π.χ., το GRS80) και γνωρίζοντας τη γεωκεντρική απόσταση του δορυφόρου από τις δορυφορικές εφημερίδες της τροχιάς, η εξίσωση παρατήρησης της δορυφορικής αλτιμετρίας δίνεται από τη σχέση:

$$h = r_s - \rho_a - r_e, \quad (3.1)$$

όπου  $h$  το ύψος της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας,  $r_s$  η γεωκεντρική απόσταση του δορυφόρου που λαμβάνεται από τις δορυφορικές εφημερίδες,  $\rho_a$  η απόσταση δορυφόρου-στιγμιαίας επιφάνειας της θάλασσας και  $r_e$  η ακτινική απόσταση του ίχνους του δορυφόρου στο ελλειψοειδές αναφοράς, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.14. Λόγω της γήινης εκκεντρότητας οι αποστάσεις  $r_s$ ,  $\rho_a$  και  $(r_e + h)$  σχηματίζουν ένα τρίγωνο και ένας διορθωτικός όρος  $C = r_e/8(1 - r_e/r_s)e^4 \sin^2(2\phi)$  πρέπει να εισαχθεί, όπου  $e$  η εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και  $\phi$  το γεωγραφικό πλάτος, ώστε:

$$h = r_s - \rho_a - r_e - C. \quad (3.2)$$



Σχήμα 3.14: Η επίδραση του ελλειψοειδούς σχήματος της Γης στις αλτιμετρικές μετρήσεις.

Η παραπάνω εξίσωση τροποποιείται σημαντικά με την εισαγωγή των διορθώσεων στην αλτιμετρική μέτρηση, όπως παρουσιάζονται στην επόμενη ενότητα.

### 3.4 Πηγές σφαλμάτων

Ποικίλες είναι οι πηγές σφαλμάτων που χαρακτηρίζουν τις αλτιμετρικές μετρήσεις. Τα σφάλματα σχετίζονται με τη ηλεκτρομαγνητική φύση των μετρήσεων, τη δορυφορική τροχιά και τις ατμοσφαιρικές επιδράσεις. Λόγω της μεγάλης ποικιλίας των σφαλμάτων που επηρεάζουν τις μετρήσεις ο διαχωρισμός τους σε κατηγορίες κρίνεται απαραίτητος.

#### 3.4.1 Σφάλματα του αλτιμέτρου

Τα σφάλματα του οργάνου που μεταδίδει και λαμβάνει τα σήματα σχετίζονται με την ηλεκτρονική φύση των μετρήσεων. Τα κυριότερα σφάλματα που αφορούν στο αλτιμέτρο είναι η γωνία που σχηματίζει ο ηλεκτρονικός άξονας του αλτιμέτρου με την κάθετη στην επιφάνεια ανάκλασης. Τα σφάλματα απόκλισης της κεραιάς του αλτιμέτρου (antenna mispointing), όπως και η απόκλιση του ηλεκτρονικού κέντρου του αλτιμέτρου από το κέντρο μάζας του δορυφόρου – ηλεκτρονική διαφορά στάθμης του αλτιμέτρου (electronic altimeter bias) υπολογίζονται ξεχωριστά για κάθε αλτιμετρική αποστολή στην αρχική διαδικασία βαθμονόμησης, όπως το πείραμα βαθμονόμησης στα νησιά Βερμούδες για τον Seasat, το πείραμα στον Πύργο της Βενετίας για τη βαθμονόμηση των οργάνων του ERS1 και τα πειράματα βαθμονόμησης του T/P στη Μεσόγειο (Lampedusa) και στην Καλιφόρνια (Harvest platform near Point Conception). Ο υπολογισμός των σφαλμάτων αυτών πραγματοποιείται σήμερα με μια ακρίβεια 2-3 εκατοστών για τον T/P. Περισσότερα για τα εσωτερικά σφάλματα του αλτιμέτρου δίνονται από τον [14] και τα βιβλία χρήσης των δεδομένων του Geosat [35] του ERS1 [27] και του T/P [5].

#### 3.4.2 Ατμοσφαιρικές επιδράσεις

Το αλτιμετρικό σήμα διασχίζει τη γήινη ατμόσφαιρα δύο φορές, μία κατά την εκπομπή και μία μέχρι τη διαδικασία της λήψης. Η επιδράσεις της ιονόσφαιρας και της τροπόσφαιρας είναι σημαντικές, αν και η διάδοση του σήματος γίνεται πάντοτε κατά μήκος μιας κάθετης διαδρομής.

##### Τροπόσφαιρα

Στις πρώτες αλτιμετρικές αποστολές οι τροποσφαιρικές επιδράσεις υπολογίζονταν με τη βοήθεια εμπειρικών μοντέλων με χρήση μετρήσεων επιφανειακής πίεσης και θερμοκρασίας [67], [63].

Τα μοντέλα αυτά όμως δεν ήταν ικανά να αναπαραστήσουν την επίδραση της τροπόσφαιρας για μήκη κύματος μικρότερα των 2000 χιλιομέτρων. Η επίδραση της τροπόσφαιρας μπορεί να διαχωριστεί στην επίδραση του ξηρού μέρους, η οποία είναι της τάξης των 2.3 μέτρων, αλλά μοντελοποιείται σχετικά εύκολα [67] και στην επίδραση του υγρού μέρους, η οποία είναι της τάξης των 6-30 εκατοστών, αλλά ο υπολογισμός της είναι δύσκολος.

Με την υπόθεση της υδροστατικής ισορροπίας, η τροποσφαιρική καθυστέρηση εξαρτάται μόνο από την επιφανειακή πίεση. Επειδή δεν υπάρχει άμεσος τρόπος μέτρησης της επιφανειακής πίεσης από το δορυφόρο, οι τιμές λαμβάνονται σήμερα από μοντέλα που εκδίδει κάθε 6 ώρες το Ευρωπαϊκό Κέντρο Πρόγνωσης Καιρού Μεσαίων Αποστάσεων (European Center of Medium range Weather Forecasting - ECMWF) Η αβεβαιότητα στον υπολογισμό της επίδρασης της ξηρής ατμόσφαιρας είναι της τάξης των 0.7 εκατοστών στα 1000-3000 χιλιόμετρα.

Όσον αφορά στον υγρό παράγοντα, αυτός μετράται από ένα ειδικό όργανο του δορυφόρου που ονομάζεται **ραδιόμετρο μικροκυμάτων** (microwave radiometer). Ειδικότερα, ο T/P μετρά τον υγρό παράγοντα με τη βοήθεια του Topex Microwave Radiometer - TMR. Οι μετρήσεις πραγματοποιούνται σε τρεις συχνότητες: στα 18 GHz που μετράται η **θερμοκρασία φωτεινότητας** (brightness temperature) και εκτιμά την επίδραση της ταχύτητας των ανέμων, στα 21 GHz που μετρείται η **περιεκτικότητα του νερού σε αέρια μορφή** (water vapour content) κατά την κάθετη διαδρομή διάδοσης και στα 37 GHz που μετράται η **περιεκτικότητα του υγρού νερού** (liquid water content), δηλαδή η επίδραση των νεφών και των βροχών. Η διόρθωση του υγρού παράγοντα υπολογίζεται σήμερα με μια αβεβαιότητα της τάξης των 1.2 εκατοστών στα 100-2000 χιλιόμετρα.

### Ιονόσφαιρα

Οι ιονοσφαιρικές επιδράσεις οφείλονται, όπως είναι γνωστό, στη επίδραση των ελευθέρων ηλεκτρονίων και εξαρτώνται από την ώρα (τη νύχτα η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων είναι μικρή), την εποχή (το καλοκαίρι οι μέγιστες τιμές της συγκέντρωσης) και την περίοδο της ηλιακής ακτινοβολίας.

Για τους πρώτους αλτιμετρικούς δορυφόρους οι επιδράσεις της ιονόσφαιρας υπολογίζονται με τη βοήθεια παγκόσμιων μοντέλων ιονόσφαιρας, όπως το IRI95 [10] για τα νέα δεδομένα του Geosat και το BENT για τον ERS1. Στον T/P και στους μελλοντικούς δορυφόρους οι επιδράσεις της ιονόσφαιρας υπολογίζονται με τη βοήθεια των δύο συχνοτήτων λειτουργίας του αλτιμέτρου. Η εκτίμηση των επιδράσεων γίνεται με μια ακρίβεια της τάξης των 0.5 εκατοστών στα 150-2000 χιλιόμετρα.

### Επίδραση του ανέμου

Η επίδραση της ταχύτητας του ανέμου μετράται με τον προσδιορισμό του **συντελεστή διασποράς** (backscatter coefficient), ο οποίος λαμβάνεται από το ηλεκτρονικό μέρος του **αυτόματου ελέγχου κέρδους** (Automatic Gain Control - AGC) του αλτιμέτρου εφαρμόζοντας κατάλληλες διορθώσεις [5].

### 3.4.3 Ωκεάνιες επιδράσεις

Ο ωκεανός αποτελεί την επιφάνεια ανάκλασης των αλτιμετρικών σημάτων και, όπως είναι λογικό, η επίδραση της κατάστασής του στις μετρήσεις είναι σημαντική. Η θαλάσσια επιφάνεια δεν είναι μια στάσιμη και ομαλή επιφάνεια και επιδρά ανάλογα με τη μορφή της στις μετρήσεις.

#### Διαφορά στάθμης της θαλάσσιας κατάστασης (Sea State Bias)

Εξαιτίας του μεγάλου μετώπου διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος τα στοιχεία της θαλάσσιας επιφάνειας συμπεριφέρονται διαφορετικά στην ανάκλαση της ακτινοβολίας: στα κοίλα τμήματα των κυμάτων αντανακλάται καλύτερα το ηλεκτρομαγνητικό κύμα παρά στις

κορυφές. Για το λόγο αυτόν, το κεντρικό σημείο της μέσης ανακλώμενης επιφάνειας μετατοπίζεται προς τα κοίλα τμήματα των κυμάτων, με αποτέλεσμα την λανθασμένη εκτίμηση του ύψους της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας. Αυτή η διαφορά της πραγματικά ανακλώμενης επιφάνειας από τη μέση ανακλώμενη ονομάζεται **διαφορά στάθμης της θαλάσσιας κατάστασης** (Sea State Bias - SSB). Η επίδραση της διαφοράς στάθμης της θαλάσσιας κατάστασης χωρίζεται σε δύο συνιστώσες: την **ηλεκτρομαγνητική διαφορά στάθμης** (electromagnetic bias), η οποία είναι ένα φυσικό φαινόμενο και συνδέεται με τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες της επιφάνειας της θάλασσας και τη **διαφορά στάθμης λόγω του οργάνου** (instrumental bias), η οποία εξαρτάται άμεσα από τον ηλεκτρονικό σχεδιασμό του ραντάρ και τον χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο εκπομπής και λήψης. Η διόρθωση λόγω του φαινομένου αυτού γίνεται μέσω εμπειρικών μοντέλων [15], [34], [33].

#### Αντίστροφη βαρομετρική διόρθωση (inverse barometer correction)

Οι αυξομειώσεις της ατμοσφαιρικής πίεσης επιδρούν και στη μεταβολή της στάθμης των ωκεανών. Έχει παρατηρηθεί ότι μια αύξηση της ατμοσφαιρικής πίεσης κατά 1 mbar προκαλεί μείωση της θαλάσσιας στάθμης κατά 1 cm. Η διόρθωση υπολογίζεται σύμφωνα με [32]:

$$I = -9.948 \cdot (P - 1013.3) \quad (3.3)$$

όπου  $I$  η διόρθωση σε χιλιοστά και  $P$  η ατμοσφαιρική πίεση σε mbar, η οποία υπολογίζεται γνωρίζοντας την τιμή του ξηρού παράγοντα της τροποσφαιρικής διόρθωσης [63]. Η αναγκαιότητα της διόρθωσης αυτής είναι σήμερα ένα από τα κυρίαρχα ζητήματα στην αλτιμετρία. Η αντίδραση των ωκεανών στην αλλαγή της ατμοσφαιρικής πίεσης βρίσκεται ακόμη στο στάδιο της έρευνας και η χρησιμοποίηση των παραπάνω πρέπει να γίνεται με προσοχή, σε συνάρτηση με το πεδίο και τη διάρκεια των εφαρμογών.

#### 3.4.4 Επίδραση παλίρροιών

Τόσο οι παλίρροιες των ωκεανών, όσο και οι παλίρροιες του στερεού φλοιού της Γης επηρεάζουν τις αλτιμετρικές διαδικασίες από τη στιγμή που επιδρούν στην επιφάνεια ανάκλασης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ορισμένες συχνότητες των παλίρροιών εύκολα παραποιούνται μέσα στη συχνότητα της τροχιάς και επομένως μία εκ των προτέρων διόρθωση είναι απαραίτητη [67], [48]. Με τη βοήθεια των αλτιμετρικών δεδομένων είναι δυνατό να υπολογιστούν κάποιες συνιστώσες των παλίρροιών. Στην περίπτωση αυτή οι παλίρροιες αποτελούν το σήμα στις μετρήσεις, ενώ στην περίπτωση που μελετάται η μεταβολές της ωκεάνιας στάθμης οι παλίρροιες αποτελούν μέρος του θορύβου των μετρήσεων και πρέπει να απομακρύνονται εκ των προτέρων. Διαφορετικά, οδηγούν σε φαινόμενα εκτιμήσεων ψευδο-μεταβολών της ωκεάνιας στάθμης [61].

#### Παλίρροιες των ωκεανών

Για τη διόρθωση των αλτιμετρικών μετρήσεων χρησιμοποιούνται μοντέλα που βασίζονται σε δεδομένα παλίρροιογράφων και των ίδιων των αλτιμετρικών δεδομένων. Αναφέρουμε εδώ μερικά από τα μοντέλα αυτά, αλλά περισσότερα για την επίδραση των παλίρροιών δίνονται στις αναφορές [11], [84].

Το αρχικό μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για τη διόρθωση των πρώτων αλτιμετρικών δεδομένων είναι το μοντέλο των Catwright and Tayler [13]. Ακολούθησαν το παγκόσμιο μοντέλο του Schwiderski [72]. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται σήμερα προσδιορίζονται και από την ανάλυση των αλτιμετρικών δεδομένων. Αξίζει να αναφερθούν το εμπειρικό μοντέλο CSR3.0 του Κέντρου Διαστημικών Ερευνών του Πανεπιστημίου του Texas (Center for Space Research of the University of Texas at Austin) [22] και το υδροδυναμικό μοντέλο αφομοίωσης (assimilation model) του πανεπιστημίου της Grenoble FES95.2 [52]. Συγκρίσεις μεταξύ των δύο μοντέλων παρουσιάζονται από τους Shum et al. [73].

Στην περίπτωση κλειστών θαλασσών τα παγκόσμια μοντέλα παρουσιάζουν σημαντικές ασυμφωνίες. Η χρησιμοποίηση τοπικών δεδομένων και η ανάλυση σε τοπική κλίμακα οδηγεί στην αντιμετώπιση του προβλήματος. Μοντέλα παλιρροιών για κλειστές θάλασσες έχουν παρουσιαστεί από τους Vieira and de Toro [81] για τη Μεσόγειο και από τον Livieratos [55] και Σπαταλά [91] για το Αιγαίο πέλαγος.

### Παλίρροιες του στερεού φλοιού της Γης

Ο στερεός φλοιός της Γης επηρεάζεται από την έλξη του Ηλίου, της Σελήνης και των άλλων ουρανίων σωμάτων με τρόπο όμοιο με αυτόν που επηρεάζονται οι ωκεανοί. Το παλιρροϊκό ύψος είναι ανάλογο με το δυναμικό της βαρύτητας και ο λόγος αυτός ονομάζεται **αριθμός του Love** [57]. Οι παλίρροιες του στερεού φλοιού της Γης περιγράφονται σε όλες τις αλτιμετρικές αποστολές από το γνωστά μοντέλα των Cartwright and Tayler [13] και των Cartwright and Edden [12].

Ειδικότερα στα δεδομένα του T/P εφαρμόζεται και μια επιπλέον διόρθωση, που αφορά στην επίδραση των παλιρροιών στην κίνηση του πόλου. Γνωρίζοντας τις συντεταγμένες του πόλου η διόρθωση αυτή υπολογίζεται εύκολα σύμφωνα με [83]

$$p = a \sin 2\phi(x_p - x_{pav}) \cos \lambda - (y_p - y_{pav}) \sin \lambda, \quad (3.4)$$

όπου το πλάτος  $a$  υπολογίζεται από τον αριθμό του Love δεύτερης τάξης (0.302) και ισούται με -69.435,  $x_p$ ,  $y_p$  είναι οι συντεταγμένες του πόλου, όπως λαμβάνονται από τις εφημερίδες της τροχιάς του δορυφόρου και  $x_{pav}$ ,  $y_{pav}$  είναι οι μέσες συντεταγμένες του πόλου στην εποχή των μετρήσεων.

### 3.4.5 Τροχιακά σφάλματα

Τα τροχιακά σφάλματα είναι τα πιο σημαντικά στην επεξεργασία και τη διόρθωση των αλτιμετρικών δεδομένων. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται κυρίως στην περιορισμένη γνώση του πεδίου βαρύτητας και επομένως της τροχιάς των δορυφόρων. Στις πρώτες αλτιμετρικές αποστολές χρησιμοποιήθηκαν δορυφορικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας για την περιγραφή της τροχιάς των αλτιμετρικών δορυφόρων. Τα δεδομένα των μοντέλων αυτών προέρχονταν από παρατηρήσεις ακτίνων laser σε ειδικούς δορυφόρους εφοδιασμένους με κάτοπτρα, όπως, π.χ., ο δορυφόρος Lageos. Η περιορισμένη γνώση του πεδίου βαρύτητας οδηγούσε σε σφάλματα προσδιορισμού της τροχιάς της τάξης των 2-3 μέτρων.

Η κίνηση ενός δορυφόρου γύρω από τη Γη μπορεί να περιγραφεί με τις κλασικές εξισώσεις της κίνησης που αποτελούν τη λύση του προβλήματος της έλξης δύο σωμάτων. Η κίνηση του δορυφόρου ακολουθεί τους γνωστούς τρεις νόμους του Kepler:

1. Η δορυφορική τροχιά είναι πάντοτε ελλειπτική, με τη Γη στη μία από τις εστίες της.
2. Η ακτίνα της τροχιάς  $r$  διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσες επιφάνειες:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = na^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (3.5)$$

3. Ο κύβος του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς  $a$  είναι ανάλογος προς το τετράγωνο της περιόδου περιστροφής  $T$  του δορυφόρου γύρω από τη Γη ( $n = 2\pi/T$  είναι η μέση κίνηση του δορυφόρου,  $G$  η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και  $M$  η μάζα της Γης):

$$n^2 a^3 = GM = \mu. \quad (3.6)$$

Η θέση του δορυφόρου ως προς το κέντρο της Γης προσδιορίζεται από τη γνώση των 6 στοιχείων **Κέπλερ της τροχιάς** (Keplerian elements). Τα στοιχεία αυτά είναι:

- Ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς  $a$ .



τη θεωρητική τροχιά, η οποία υπολογίζεται από τις εξισώσεις της κίνησης. Επιπλέον, στη δύναμη έλξης της Γης προστίθενται και οι έλξεις της Σελήνης και του Ηλίου, καθώς και των πλησιέστερων πλανητών, όπως επίσης και οι παλιρροϊκές δυνάμεις του στερεού φλοιού λόγω της ελαστικότητας της Γης και των ωκεάνιων μαζών. Επιδράσεις στις τροχιές των δορυφόρων προέρχονται και από την ατμόσφαιρα, της οποίας η συμπεριφορά είναι πολύπλοκη εξαιτίας των μεταβολών της ατμοσφαιρικής πυκνότητας κάτω από την ηλιακή επίδραση. Ακόμη, η επίδραση της πίεσης της ηλιακής ακτινοβολίας στο δορυφόρο, τόσο η απευθείας, όσο και μέσω της ανακλώμενης ακτινοβολίας (albedo) επιφέρουν αποκλίσεις από τη θεωρητική δορυφορική τροχιά. Τέλος, πρέπει να εφαρμόζονται κατάλληλες διορθώσεις από την επίδραση των σχετικιστικών φαινομένων και της κίνησης του συστήματος αναφοράς.

Για τη μοντελοποίηση του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς ενός δορυφόρου απαραίτητη είναι η ανάλυση της κίνησής του βάσει των θεωριών προσδιορισμού της τροχιάς. Η αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης, η οποία ακολουθείται από τη βελτιστοποίηση στον προσδιορισμό του αρχικού διανύσματος θέσης είναι η σύγχρονη μέθοδος για τον ακριβή προσδιορισμό της τροχιάς. Παρόλα αυτά, η συγκεκριμένη μέθοδος δεν παρέχει άμεση πληροφορία για το ακτινικό σφάλμα της τροχιάς [76], το οποίο αποτελεί και το σημαντικότερο σφάλμα στις μετρήσεις των αλτιμετρικών δορυφόρων. Για τον λόγο αυτόν εισάγονται θεωρήσεις που βασίζονται σε αναλυτικές σχέσεις, όπως η **Θεωρία Γραμμικών Διαταράξεων – ΘΓΔ** (Linear Perturbation Theory), η οποία παρουσιάστηκε από τον Kaula [47] και οι **Εξισώσεις Hill – ΕΗ** που δίνονται από τους Kaplan [46] και Colombo [19]. Αποδεικνύεται ότι και οι δύο αυτές αναλυτικές θεωρίες οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα, όσον αφορά στον υπολογισμό του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς.

Οι παραπάνω αναλυτικές θεωρήσεις ισχύουν με μία παραδοχή: Η διαταρακτική κίνηση του δορυφόρου οφείλεται αποκλειστικά στην επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας. Ήδη από τη μελέτη των δεδομένων των πρώτων αλτιμετρικών δορυφόρων παρατηρήθηκαν τα γεωγραφικά συσχετισμένα σφάλματα στην τροχιά [1]. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στην έλλειψη της γνώσης του πεδίου βαρύτητας και εκφράζονται σε σχέση με τους συντελεστές των παγκόσμιων γεωδυναμικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της τροχιάς. Το σημαντικότερο μέρος του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς οφείλεται στην ύπαρξη των μη μοντελοποιημένων γεωγραφικά συσχετισμένων σφαλμάτων, λόγω της ελλιπούς γνώσης του πεδίου βαρύτητας [78], [64]. Όσο βελτιώνεται η γνώση για τη δομή του πεδίου βαρύτητας, τόσο ακριβέστερη γίνεται και η προσέγγιση της τροχιάς των δορυφόρων και, αντίστοιχα, όσο ακριβέστεροι γίνονται οι μέθοδοι παρακολούθησης των δορυφορικών τροχιών, τόσο καλύτερος γίνεται ο προσδιορισμός του πεδίου. Η κατανόηση αυτής της αλληλεξάρτησης έχει οδηγήσει στον περιορισμό του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς στα όρια του σφάλματος των μετρήσεων [54], [6].

Για την απαλοιφή του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς είναι απαραίτητη η ανάπτυξη της έκφρασης του πεδίου βαρύτητας ως συνάρτησης των στοιχείων της τροχιάς. Στη ΘΓΔ οι τροχιακές διαταράξεις περιγράφονται από τις **Πλανητικές Εξισώσεις του Lagrange** (Lagrange Planetary Equations). Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τη συμπεριφορά των στοιχείων Κέπλερ κάτω από την επίδραση ενός συμβατικού πεδίου δυνάμεων  $R$ , το οποίο κατέχει όλα τα χαρακτηριστικά του γήινου πεδίου βαρύτητας. Οι Πλανητικές Εξισώσεις του Lagrange παρουσιάζουν τη μεταβολή των στοιχείων της τροχιάς με το χρόνο υπό την επίδραση του πεδίου δυνάμεων  $R$ . Η απόδειξη των σχέσεων δίνεται σε όλα τα βιβλία ουράνιας μηχανικής (βλ., π.χ., [76], [47]):

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial R}{\partial I} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin I} \frac{\partial R}{\partial I} \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \\
n &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Οι μεταβλητές των (3.7) έχουν δοθεί προηγουμένως.

Είναι γνωστό, ότι το δυναμικό έλξης της Γης είναι αρμονικό εκτός των γήινων μαζών και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace (βλ. και κεφάλαιο 2) [37]. Επομένως, το δυναμικό έλξης μπορεί να γραφεί στη μορφή αναπτύγματος σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{a_e} \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^{l+1} [\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda] \bar{P}_{lm}(\sin \phi), \tag{3.8}$$

όπου  $r, \phi, \lambda$  είναι οι γεωκεντρικές σφαιρικές συντεταγμένες,  $a_e$  είναι η μέση γήινη ακτίνα,  $\bar{C}_{lm}$  και  $\bar{S}_{lm}$  είναι οι κανονικοποιημένοι συντελεστές του δυναμικού έλξης και  $\bar{P}_{lm}$  οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες συναρτήσεις του Legendre βαθμού  $l$  και τάξης  $m$  [38]. Το πεδίο έλξης της Γης περιγράφεται σε όρους στοιχείων Κέπλερ. Σύμφωνα με τον Kaula [47]:

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l V_{lm}, \\
V_{lm} &= \frac{\mu a_e^l}{a^{l+1}} \sum_{p=0}^l \bar{F}_{lmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) S(\psi_{lmpq}), \\
S(\psi_{lmpq}) &= A_{lm} \cos \psi_{lmpq} + B_{lm} \sin \psi_{lmpq}, \\
(A_{lm}, B_{lm}) &= \left\{ \begin{array}{ll} (\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}), & l-m : \text{άρτιος} \\ (-\bar{S}_{lm}, \bar{C}_{lm}), & l-m : \text{περιττός} \end{array} \right\} \\
\psi_{lmpq} &= (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου  $\theta$  είναι η παράμετρος περιστροφής της Γης (αστρικός χρόνος Greenwich) [47], [88]. (Περισσότερες πληροφορίες στα συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται δίνονται στις αναφορές [47] και [7]). Ο όρος  $\bar{F}_{lmp}(I)$  αντιστοιχεί στις κανονικοποιημένες συναρτήσεις κλίσης και εμφανίζεται στη σχέση όταν το δυναμικό έλξης μετασχηματίζεται στο επικλινές τροχιακό επίπεδο [70], [36]. Οι κανονικοποιημένες συναρτήσεις κλίσης εκφράζουν την περιστροφή  $I$  του δυναμικού από το βόρειο πόλο στον πόλο του επιπέδου της τροχιάς [82]. Ο όρος  $G_{lpq}(e)$  αντιπροσωπεύει τις συναρτήσεις εκκεντρότητας. Οι συναρτήσεις αυτές χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή του δυναμικού από ένα κύκλο σε μια έλλειψη [47] και εμπεριέχουν το μετασχηματισμό της αληθούς ανωμαλίας σε μέση ανωμαλία κατά μήκος μιας ελλειπτικής τροχιάς [82]. Η (3.9) συνδέει τα στοιχεία της τροχιάς ενός δορυφόρου με το δυναμικό έλξης του πεδίου, στο οποίο κινείται.

Ο συνδυασμός των (3.7) και (3.9) οδηγεί σε έξι διαφορικές εξισώσεις, η λύση των οποίων δίνει τις διαταραχές στα στοιχεία Κέπλερ λόγω της γήινης έλξης. Ωστόσο, αναλυτική έκφραση της λύσης αυτής είναι δύσκολο να δοθεί, λόγω της πολυπλοκότητας των (3.7). Για το λόγο αυτόν, πραγματοποιείται η γραμμικοποίηση των σχέσεων σε σχέση με μια ονομαστική τροχιά αναφοράς. Το δυναμικό της έλξης δεν υπολογίζεται κατά μήκος της πραγματικής τροχιάς, αλλά κατά μήκος μιας ιδεατής έλλειψης, της **ονομαστικής τροχιάς** (nominal orbit), όπως λέγεται. Το γεγονός αυτό δε σημαίνει ότι η γραμμική θεώρηση μπορεί να περιγράψει τις διαταραχές μόνο στην ονομαστική τροχιά [71]. Έχει αποδειχθεί ότι η ΓΘΔ μπορεί να προβλέψει διαταραχές και στη γειτονιά της τροχιάς αναφοράς (βλ., π.χ., την ανάπτυξη από τον Wagner [82]). Η ονομαστική τροχιά μπορεί να επιλεχθεί σύμφωνα με τις παρακάτω διαδικασίες.

Καταρχήν, το δυναμικό έλξης μπορεί να γραφεί ως ανεξάρτητο της μεταβλητής  $\psi$ . Αυτό επιτυγχάνεται για τις αρμονικές ζώνης του πεδίου [70]:

$$V_{l,0} = \frac{\mu a_e^l}{a^{l+1}} \bar{F}_{l,0,l/2}(I) G_{l,l/2,0}(e) \bar{C}_{l0} \quad (3.10)$$

όταν το  $l$  λαμβάνει άρτιες τιμές,  $m = 0$ ,  $p = l/2$ ,  $q = 0$ . Αν αντικατασταθούν οι παράγωγοι του δυναμικού στις σχέσεις (3.7) (όπου  $R$  εισάγεται το  $V$ ), τότε προκύπτει [70]:

$$\begin{aligned} (\dot{a}, \dot{e}, \dot{I}) &= 0 \\ (\dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M}) &= f(a, e, I) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Για τον προσδιορισμό της τροχιάς αναφοράς χρησιμοποιείται ο μεγαλύτερος άρτιος συντελεστής ζώνης του δυναμικού έλξης  $\bar{C}_{20}$ , ο οποίος είναι περίπου 1000 φορές μεγαλύτερος από τους άλλους συντελεστές. Με αντικατάσταση στις αντίστοιχες σχέσεις της (3.7) ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2a^2} \cos I, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^2a^2} [1 - 5 \cos^2 I], \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2}a^2} [3 \cos^2 I - 1] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται η επίδραση του όρου  $C_{20}$  του δυναμικού έλξης στα στοιχεία  $\Omega$ ,  $\omega$  και  $M$  της τροχιάς. Υπάρχει ένας συγκεκριμένος συνδυασμός εκκεντρότητας της τροχιάς και ορίσματος του περιγείου ( $e \approx 10^{-3}$  και  $\omega = 90^\circ$ ), ο οποίος έχει ως αποτέλεσμα  $\dot{e} = 0$  και  $\dot{\omega} = 0$ . Το είδος της συγκεκριμένης τροχιάς, που στην αγγλική ορολογία αποδίδεται ως "frozen", έχει ως αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση των μεταβολών του ύψους του δορυφόρου σε σχέση με τη μέση θαλάσσια επιφάνεια. Οι σύγχρονοι αλτιμετρικοί δορυφόροι χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των τροχιών αυτών για την ελαχιστοποίηση των τροχιακών σφαλμάτων. Η αξιοποίηση των παραπάνω τροχιών στηρίζεται στην εφαρμογή των θεωριών του Cook [20]. Περισσότερα για το είδος των τροχιών αυτών και τη χρήση τους στην αλτιμετρία δίνονται από τις αναφορές [70], [71], [7].

Οι διαταραχές που προκαλούνται από την επίδραση του πεδίου έλξης στα στοιχεία Κέπλερ μπορούν να προσδιοριστούν από την ολοκλήρωση των σχέσεων (3.7). Η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο μπορεί να αποφευχθεί με την αντικατάσταση από την ολοκλήρωση ως προς  $\psi$ , σύμφωνα με την ιδιότητα [70]:

$$\Delta E = \int f(t) dt \Rightarrow \Delta E \approx \frac{1}{\dot{\psi}} \int f(\psi) d\psi, \quad (3.13)$$

όπου ως  $E$  μπορεί να συμβολιστεί ένα οποιοδήποτε στοιχείο Κέπλερ. Σύμφωνα με τον Kaula ισχύει [47]:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{\mu a_e^l}{na^{l+2}\dot{\psi}} 2\bar{F}_{lmp} G_{lpq} (l - 2p + q) S_{lmpq} \\ \Delta e &= \frac{\mu a_e^l}{na^{l+3}e\dot{\psi}} \bar{F}_{lmp} G_{lpq} \sqrt{1-e^2} [\sqrt{1-e^2} (l - 2p + q) - (l - 2p)] S_{lmpq} \\ \Delta \omega &= \frac{\mu a_e^l}{na^{l+3}\dot{\psi}} [\sqrt{1-e^2} e^{-1} \bar{F}'_{lmp} G'_{lpq} - \cot(I) (1-e^2)^{-1/2} \bar{F}'_{lmp} G_{lpq}] \bar{S}_{lmpq} \\ \Delta I &= \frac{\mu a_e^l}{na^{l+3}\sqrt{1-e^2} \sin(I) \dot{\psi}} \bar{F}_{lmp} G_{lpq} [(l - 2p) \cos(I) - m] S_{lmpq} \\ \Delta \Omega &= \frac{\mu a_e^l}{na^{l+3}\sqrt{1-e^2} \sin(I) \dot{\psi}} \bar{F}'_{lmp} G_{lpq} \bar{S}_{lmpq} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Delta M = \frac{\mu a_e^l}{n a^{l+3} \dot{\psi}} [-(1-e^2)e^{-1}G'_{lpq} + 2(l+1)G_{lpq}] \bar{F}_{lmp} \bar{S}_{lmpq},$$

όπου

$$\bar{S}_{lmpq} = \int \bar{S}_{lmpq}(\psi) d\psi \quad (3.15)$$

και

$$G'_{lpq} = \partial G_{lpq} / \partial e \quad (3.16)$$

$$\bar{F}'_{lmp} = \partial \bar{F}_{lmp} / \partial I. \quad (3.17)$$

Οι εξισώσεις (3.14) παρουσιάζουν τις μέγιστες τιμές τους σε χαρακτηριστικές τιμές της μεταβλητής  $\dot{\psi}$ . Ανάλογα με τις τιμές της μεταβλητής διακρίνονται τρεις βασικές συχνότητες:

- Μία χαρακτηριστική συχνότητα ενός κύκλου ανά περιστροφή (once per revolution) ( $\dot{\omega} + \dot{M}$ ) =  $\dot{\omega}_o$ .
- Μια ημερήσια συχνότητα ( $\dot{\Omega} - \dot{\theta}$ ) =  $\dot{\omega}_e$ .
- Μια συχνότητα  $\dot{\omega}$ .

Συμπερασματικά, οι σχέσεις (3.14) παρουσιάζουν τις μεταβολές των στοιχείων Κέπλερ σε σχέση με το βαθμό και την τάξη ανάπτυξης του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου που χρησιμοποιείται και τη μεταβλητή  $\psi$  που δίνει την πληροφορία χρόνου της τροχιάς. Τα παραπάνω παρουσιάστηκαν διεξοδικά, γιατί τα τροχιακά σφάλματα που ενδιαφέρουν την αλτιμετρία οφείλονται ουσιαστικά στις διαταράξεις των στοιχείων της τροχιάς του δορυφόρου.

Το ακτινικό σφάλμα σε τροχιές δορυφόρων σχεδόν κυκλικές δίνεται ως εξής:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (3.18)$$

Ακολουθώντας την ανάλυση του Wagner [82] ισχύει:

$$r = a[1 - e \cos M - (e^2/2)(\cos 2M - 1) + O(e^3)], \quad (3.19)$$

όπου ο όρος  $O(e^3)$  συμβολίζει όρους της τάξης  $e^3$ . Για μικρές τιμές της εκκεντρότητας  $e$  (αυτό ισχύει στις περισσότερες αλτιμετρικές αποστολές, βλ. ενότητα 3.2) το ακτινικό σφάλμα της τροχιάς γράφεται σε σχέση με τη μέση ανωμαλία  $M$ :

$$r = a[1 - e \cos M] \quad (3.20)$$

Γραμμικοποιώντας την παραπάνω σχέση κατά Taylor και διατηρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης προκύπτει:

$$\Delta r \approx \Delta a - (a \Delta e + e \Delta a) \cos M + a e \Delta M \sin M. \quad (3.21)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.14) στην προηγούμενη σχέση του ακτινικού τροχιακού σφάλματος ισχύει [82], [70]:

$$\Delta r(t) = \sum_{m=0}^{l_{max}} \sum_{k=-l_{max}}^{k=l_{max}} [A_{km} \cos \dot{\psi} t + B_{km} \sin \dot{\psi} t] \quad (3.22)$$

$$(A_{km}, B_{km}) = \sum_{l=m}^{l_{max}} H_{lmk} \left( \begin{bmatrix} \bar{C}_{lm} & \bar{S}_{lm} \\ -\bar{S}_{lm} & \bar{C}_{lm} \end{bmatrix}_o^e \cos \psi_0 + \begin{bmatrix} \bar{S}_{lm} & -\bar{C}_{lm} \\ \bar{C}_{lm} & \bar{S}_{lm} \end{bmatrix}_o^e \sin \psi_0 \right)$$

$$H_{lmk} = \frac{\mu(a_e/a_0)^l}{n_0^2 a_0^2} \bar{F}_{lm(l-k)/2}(I_0) \left[ \frac{\beta(l+1) - 2k}{\beta(\beta^2 - 1)} \right]$$

$$\beta = \dot{\psi} / n_0$$

$$\psi_0 = k(\omega_0 + M_0) + m(\Omega_0 - \theta_0)$$

$$\dot{\psi} = k(\dot{\omega} + \dot{M}) + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})$$

όπου  $e$  (even) η λύση για άρτιο  $l - m$  και  $o$  (odd) για περιττό  $l - m$ .

Η (3.22) αποτελεί την τελική εξίσωση της διαδικασίας. Η εξίσωση αυτή συνδέει το ακτινικό σφάλμα της τροχιάς με τους συντελεστές του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου. Η διαδικασία εύρεσης της σχέσης ξεκίνησε από τη ΘΓΔ, όπως περιγράφεται από τις Πλανητικές Εξισώσεις του Lagrange. Τα συστήματα αναφοράς που χρησιμοποιήθηκαν είναι γεωκεντρικά και η όλη θεώρηση στηρίζεται στην εξέταση της επίδρασης του πεδίου έλξης στα στοιχεία Κέπλερ της τροχιάς. Στην συνέχεια, η σύνδεση των διαταράξεων των στοιχείων Κέπλερ με το ακτινικό σφάλμα πραγματοποιείται μέσω της (3.18).

Αποδεικνύεται, ότι ακριβώς στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγει και η απευθείας προσέγγιση των εξισώσεων της κίνησης του δορυφόρου, με τη βοήθεια των ΕΗ [46], [18], [71], [7]. Οι ΕΗ περιγράφουν την κίνηση του δορυφόρου ως προς ένα σύστημα αναφοράς κινούμενο επί της ονομαστικής τροχιάς του. Η ανάπτυξη της θεωρίας των ΕΗ και οι τελικές σχέσεις σύνδεσης του ακτινικού τροχιακού σφάλματος με τους γεωδυναμικούς συντελεστές παρουσιάζεται ολοκληρωμένα από τον Schrama [70]. Μια βασική διαφορά διαχωρίζει τις δύο προσεγγίσεις. Σύμφωνα με τον Schrama: «Οι Πλανητικές Εξισώσεις του Lagrange είναι διαφορικές εξισώσεις και έχουν ως αποτέλεσμα την προσέγγιση των εξισώσεων διατάραξης μετά από κατάλληλη γραμμικοποίηση σε σχέση με την τροχιά αναφοράς. Οι ΕΗ παριστάνουν την τροχιά αναφοράς σε σφαιρική προσέγγιση και παρουσιάζουν ακριβείς λύσεις των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν.»

Μια πιο γενική έκφραση του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς παρουσιάζεται στις αναφορές [78], [64], [7]. Η έκφραση αυτή στηρίζεται στη γενικότερη ανάπτυξη των διαταράξεων των τροχιακών στοιχείων Κέπλερ, όπως δίνεται από τον Kaula [47]:

$$\Delta\alpha = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta\alpha_{lmpq}, \quad (3.23)$$

όπου το  $\alpha$  μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε από τα έξι τροχιακά στοιχεία. Μετά από αρκετές αντικαταστάσεις και πράξεις, η τελική γενική σχέση του ακτινικού τροχιακού σφάλματος δίνεται ως εξής [82], [7]:

$$\Delta r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{lmpq}^r S_{lmpq}, \quad (3.24)$$

όπου  $C_{lmpq}^r$  και  $S_{lmpq}$  είναι συναρτήσεις των συντελεστών του πεδίου βαρύτητας  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$ , αντίστοιχα, των στοιχείων Κέπλερ της τροχιάς και των συναρτήσεων κλίσης και εκκεντρότητας. Η μορφή των συναρτήσεων αυτών περιγράφεται αναλυτικά από τους Tapley and Rosborough [78] και Balmino [7]. Η γενικότερη ανάλυση βοηθά στη μελέτη του τροχιακού σφάλματος σε σχέση με το βαθμό και την τάξη ανάπτυξης του γεωδυναμικού μοντέλου. Παραδείγματα τέτοιου είδους ανάλυσης δίνονται στις αναφορές [78] και [7].

Το σφάλμα στον προσδιορισμό της τροχιάς του δορυφόρου αποτελεί το σημαντικότερο περιορισμό στη μελέτη των φαινομένων μεγάλου μήκους κύματος, όπως είναι η γενικότερη μελέτη της ωκεάνιας κυκλοφορίας. Πολλές τεχνικές αναπτύχθηκαν για την αντιμετώπιση του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς, οι οποίες θα αναφερθούν αναλυτικότερα στην ενότητα της συνόρθωσης των αλτιμετρικών παρατηρήσεων. Οι τεχνικές αυτές βασίζονται στη μελέτη των σημείων τομής της δορυφορικής τροχιάς και είναι γνωστές ως τεχνικές **συνόρθωσης τομών** (crossover adjustments). Σύμφωνα με τις τεχνικές αυτές, τα αλτιμετρικά δεδομένα στις τομές των ιχνών των τροχιών αφαιρούνται, με τρόπο ώστε το κοινό σφάλμα στον υπολογισμό του γεωειδούς, όπως και διάφορα άλλα σφάλματα να ελαχιστοποιούνται. Ένα βασικό πρόβλημα αυτής της διαδικασίας είναι το γεγονός ότι οι διαφορές στις τομές μπορεί να απομακρύνουν ένα μέρος μόνο του συνολικού τροχιακού σφάλματος, το μεταβλητό μέρος μεταξύ των δύο τροχιών. Έτσι, στην περίπτωση που ένα μέρος του ακτινικού τροχιακού σφάλματος είναι κοινό, τόσο στην αναβιβάζουσα τροχιά, όσο και στην καταβιβάζουσα τότε το κοινό μέρος απαλείφεται με την αφαίρεση. Το αποτέλεσμα της ελαχιστοποίησης των διαφορών στα σημεία

τομής είναι διορθωμένες παρατηρήσεις, οι οποίες δείχνουν μεγαλύτερη συνοχή και οι οποίες, όμως, θα περιέχουν το τοπικά συσχετισμένο μέρος του τροχιακού σφάλματος [78]. Συμπερασματικά, τα σφάλματα στο γεωδυναμικό μοντέλο δημιουργούν γεωγραφικά συσχετισμένα τροχιακά σφάλματα, τα οποία δεν ανιχνεύονται από τις συνήθεις τεχνικές ελαχιστοποίησης των διαφορών στις τομές των αναβιβαζόντων και καταβιβαζόντων ιχνών των τροχιών. Τη γεωγραφική συσχέτιση των ακτινικών τροχιακών σφαλμάτων έδειξαν με μια μελέτη προσομοίωσης οι Anderle and Hoskin [1]. Μια περισσότερο λεπτομερής μελέτη της συσχέτισης του μέσου ακτινικού τροχιακού σφάλματος με το σφάλμα στο μοντέλο του γεωειδούς παρουσιάζεται από τους Tapley and Rosborough [78]. Τα γεωγραφικά συσχετισμένα σφάλματα εξαρτώνται άμεσα από τα σφάλματα στον προσδιορισμό των συντελεστών του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου και είναι δυνατό να ελαχιστοποιηθούν μόνο με την εγκατάσταση ικανού αριθμού κατάλληλα διατεταγμένων σταθμών παρακολούθησης δορυφόρων για τη βελτιστοποίηση στον προσδιορισμό των συντελεστών του πεδίου βαρύτητας. Η βελτίωση των γεωδυναμικών μοντέλων συμβάλλει στον περιορισμό των γεωγραφικά συσχετισμένων τροχιακών σφαλμάτων. Ήδη με τη δημοσίευση των συντελεστών του μοντέλου Joint Gravity Model 3 – JGM-3 [79], οι υπεύθυνες υπηρεσίες επεξεργασίας των αλτιμετρικών δεδομένων διόρθωσαν τις εφημερίδες των τροχιών των δορυφόρων λαμβάνοντας τα βελτιωμένα αποτελέσματα του νέου μοντέλου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η επανέκδοση των δεδομένων του Geosat με διορθωμένες εφημερίδες από το JGM-3 [35]. Η βελτίωση στη μέση τετραγωνική τιμή των τροχιακών σφαλμάτων είναι σημαντική. Αξίζει να σημειωθεί πως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της τροχιάς του T/P είναι της τάξης των 3-5 εκατοστών [54], [5], [6], ενώ για τον Jason-1 υπάρχει η πρόβλεψη του 1 εκατοστού!

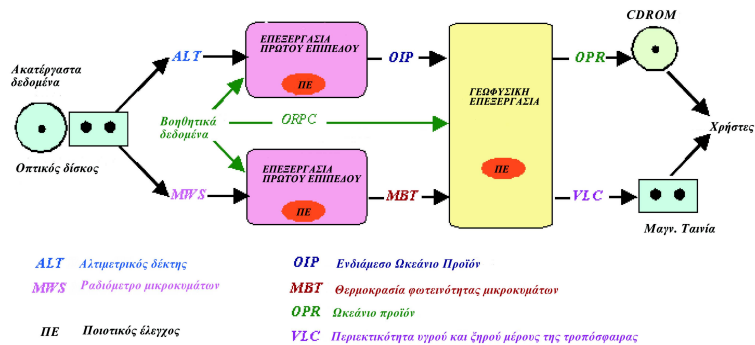
### 3.5 Προεπεξεργασία αλτιμετρικών δεδομένων

#### 3.5.1 Συλλογή και διαθεσιμότητα

Τα δεδομένα της αλτιμετρίας συλλέγονται στους δορυφόρους και μεταδίδονται στους επίγειους σταθμούς παρακολούθησης. Οι επεξεργασίες που ακολουθούνται για την τελική παραγωγή των προϊόντων σε ψηφιακή μορφή κατηγοριοποιούνται σε τρεις φάσεις:

1. Το πρώτο βήμα σχετίζεται με τη διαδικασία μετατροπής των ακατέργαστων δεδομένων που συλλέγονται στο δορυφόρο σε μορφή αναγνώσιμη, με χαρακτηριστική επισήμανση της χρονικής περιόδου των μετρήσεων και τη διόρθωση λόγω των σφαλμάτων του οργάνου. Η διαδικασία αυτή έχει διάρκεια περίπου δύο εβδομάδων μετά τη λήψη των δεδομένων από τα κέντρα παρακολούθησης.
2. Στο δεύτερο στάδιο τα αλτιμετρικά δεδομένα αποθηκεύονται σε ψηφιακή μορφή, έχοντας όμως μια προσεγγιστική πληροφορία για τις εφημερίδες της τροχιάς και μεταφέρονται σε ειδικές υπηρεσίες για τον προσδιορισμό της ακριβούς εφημερίδας της τροχιάς.
3. Στο τρίτο στάδιο, με τον προσδιορισμό της ακριβούς τροχιάς, τα δεδομένα υπόκεινται σε μια επιπλέον επεξεργασία και διοχετεύονται στην επιστημονική κοινότητα σε ψηφιακή μορφή. Τα τελικά προϊόντα ονομάζονται **Εγγραφές Γεωφυσικών Δεδομένων** (Geophysical Data Records – GDRs).

Τα τρία στάδια της παραπάνω διαδικασίας φαίνονται στο σχήμα 3.16. Ανάλογα με την υπηρεσία επεξεργασίας των δεδομένων η διάρκεια των ενδιαμέσων σταδίων ποικίλλει. Επίσης, τα διαθέσιμα προϊόντα στους χρήστες έχουν διαφορετικές μορφές. Η ανάγκη για δεδομένα αλτιμετρίας σε σχεδόν-πραγματικό χρόνο ώθησε τις υπηρεσίες σε βέλτιστες, από χρονική άποψη, διαδικασίες επεξεργασίας. Έτσι, για τον T/P, εκτός από τις τελικές Εγγραφές Γεωφυσικών Δεδομένων, διατίθενται και οι **Προσωρινές Εγγραφές Γεωφυσικών Δεδομένων** (Interim GDRs – IGDRs), οι οποίες είναι διαθέσιμες δύο μέρες μετά τη διαδικασία μέτρησης. Αυτά τα προσωρινά δεδομένα δεν περιέχουν την ακριβή εφημερίδα της δορυφορικής τροχιάς, η οποία



Σχήμα 3.16: Τα στάδια της προεπεξεργασίας των αλτιμετρικών παρατηρήσεων (CERSAT).

υπολογίζεται και παρουσιάζεται δύο μήνες περίπου μετά από τη χρονική στιγμή της μέτρησης. Τέλος, μία φορά το χρόνο διατίθενται τα διορθωμένα δεδομένα σύμφωνα με όλες τις ατμοσφαιρικές, ωκεάνιες και τροχιακές επιδράσεις δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά προκύπτουν μετά τη διόρθωση (editing) και την αξιολόγηση (validation) των αρχικών δεδομένων με τη χρήση κατάλληλων κριτηρίων και τη συνόρθωση για τον περιορισμό των τροχιακών σφαλμάτων. Περισσότερες πληροφορίες για την αξιολόγηση των αλτιμετρικών δεδομένων και τη διαδικασία και τις τεχνικές συνόρθωσης δίνονται στις επόμενες ενότητες.

### 3.5.2 Διόρθωση-αξιολόγηση των αλτιμετρικών δεδομένων

Η πολυπλοκότητα του φυσικού περιβάλλοντος των αλτιμετρικών μετρήσεων καθιστά απαραίτητη την προεπεξεργασία των παρατηρήσεων και την απομάκρυνση των δεδομένων εκείνων που θεωρούνται ύποπτα για την εισαγωγή χονδροειδών και συστηματικών σφαλμάτων. Για την απομάκρυνση των προβληματικών μετρήσεων εξετάζονται διάφοροι παράγοντες, τόσο του φυσικού περιβάλλοντος, όσο και του μηχανικού-ηλεκτρονικού συστήματος του οργάνου. Οι διαδικασίες και τα όρια των διορθώσεων ποικίλλουν ανάλογα με τις εφαρμογές των αλτιμετρικών παρατηρήσεων, αλλά και την υπηρεσία που αναλαμβάνει την αξιολόγηση των δεδομένων. Οι διορθώσεις και τα όριά τους ποικίλλουν ανάλογα και με τη δορυφορική αποστολή. Οι πρώτες δορυφορικές αποστολές, λόγω της περιορισμένης γνώσης για τον τύπο των διορθώσεων παρουσίαζαν αρκετά συστηματικά και χονδροειδή σφάλματα. Στο γεγονός αυτό και στο ολοένα αυξανόμενο επίπεδο των γνώσεων για τη διαδικασία των μετρήσεων οφείλονται και οι συνεχείς αναθεωρήσεις των αρχικών δορυφορικών δεδομένων. Οι συνήθεις παράγοντες και τα αντίστοιχα όρια που εξετάζονται αναφέρονται στη συνέχεια:

- Καταρχήν, απομακρύνονται όλες οι μετρήσεις που αναφέρονται σε ηπειρωτικές περιοχές. Η απομάκρυνση των μετρήσεων αυτών στηρίζεται στο χαρακτηρισμό τους στις Εγγραφές Γεωφυσικών Δεδομένων ως μη ωκεάνιων εκτάσεων. Ο εντοπισμός γίνεται με τη βοήθεια μιας παγκόσμιας κάλυψης ακτογραμμών (μάσκας) [16]. Απομακρύνονται ακόμα και οι μετρήσεις σε βάθη μικρότερα ενός ορίου (π.χ., βλ. χαρακτηρισμούς στη σελίδα του διαδικτύου που αναφέρεται στην επεξεργασία των αλτιμετρικών μετρήσεων στο Κέντρο Διαστημικών Πτήσεων Goddard της NASA:

<http://neptune.gsfc.nasa.gov/ocean.html>.

Η ύπαρξη ξηράς ή πάγων μπορεί να διαγνωστεί από μεγάλες αιχμές στις τιμές των υψομέτρων της θαλάσσιας επιφάνειας, δηλαδή από ξαφνικές υψηλές τιμές, οι οποίες οφείλονται σε συμπτωματικές ανακλάσεις της μετρητικής δέσμης σε ηπειρωτικές εκτάσεις ή πάγους [70].

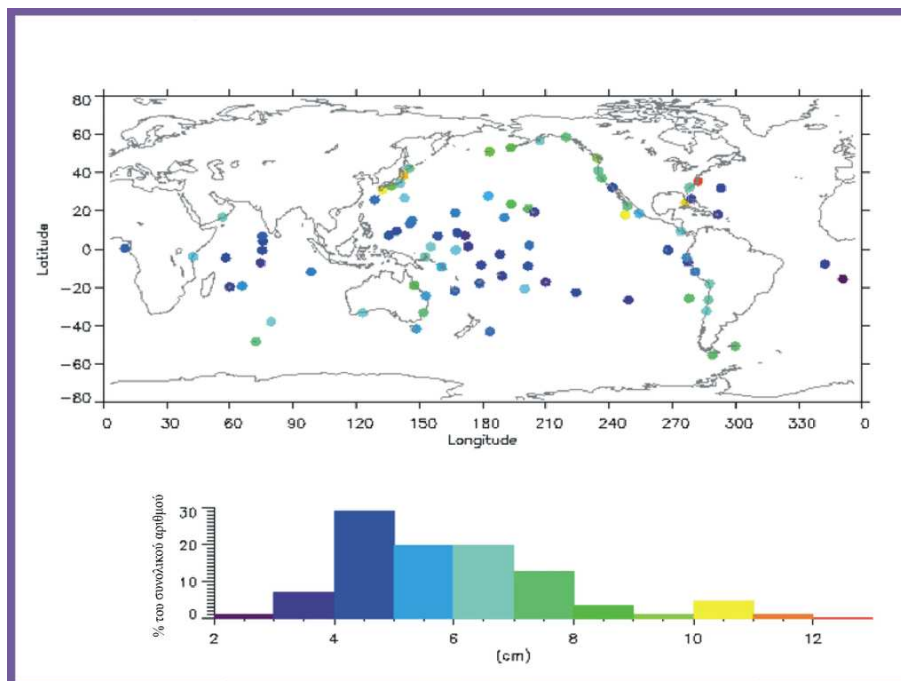
- Στη συνέχεια, απομακρύνονται οι εγγραφές, οι οποίες δεν περιέχουν τιμές του ύψους της στάθμης της θάλασσας ή τιμές διορθώσεων λόγω των παλιρροιών. Επίσης, τιμές μη ρεαλιστικές (πολύ μεγάλου ή πολύ μικρού μεγέθους) απομακρύνονται από τα δεδομένα.
- Οι τιμές των μετρήσεων του ύψους της στάθμης της θάλασσας παρουσιάζονται στις Εγγραφές Γεωφυσικών Δεδομένων ανά ένα δευτερόλεπτο. Ο ρυθμός των πρωτογενών μετρήσεων είναι 10 (TOPEX) ή και 20 (POSEIDON) φορές μεγαλύτερος. Η τελική μέτρηση είναι ο μέσος όρος των πρωτογενών μετρήσεων. Όταν ο αριθμός των πρωτογενών παρατηρήσεων δεν είναι ικανός ώστε να προκύψει ένας αντιπροσωπευτικός μέσος όρος (π.χ., περισσότερες από 5 μετρήσεις για το TOPEX και περισσότερες από 10 με 15 μετρήσεις για το POSEIDON [54]), τότε η συγκεκριμένη χρονική στιγμή του δευτερολέπτου παρακάμπτεται. Ακόμη, εξετάζεται η τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των μέσων όρων και, αν ξεπερνά κάποιο όριο (π.χ., τα δέκα εκατοστά στην περίπτωση του Geosat [21]) ή παρουσιάζει μηδενική τιμή, η μέτρηση απορρίπτεται.
- Ακολούθως εξετάζονται τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρονικού σήματος που επιστρέφει μέσω του συντελεστή του Αυτόματου Ελέγχου Κέρδους (Automatic Gain Control – AGC) και της τυπικής απόκλισης των συχνοτήτων εκπομπής (συντελεστής διασποράς – Sigma naught). Υψηλές τιμές των συντελεστών αυτών (π.χ., μεγαλύτερες των 30–36 dB) χαρακτηρίζουν μη ωκεάνιες μετρήσεις και οφείλονται συνήθως σε παγωμένες εκτάσεις (αλλοίωση των φασματικών ιδιοτήτων του σήματος επιστροφής [5]). Εξετάζονται επίσης οι τυπικές αποκλίσεις των συντελεστών και απομακρύνονται μετρήσεις με μεγάλη διασπορά (π.χ., μεγαλύτερη των 0.25 dB [21]).
- Εξετάζονται οι τιμές του σημαντικού ύψους κύματος. Μετρήσεις με τιμές υψών κύματος και τιμές της απόκλισης πολύ μεγάλες απομακρύνονται ως ύποπτες για χονδροειδή σφάλματα. Μηδενικές τιμές του σημαντικού ύψους κύματος οφείλονται σε ανακλάσεις σε παγωμένες επιφάνειες, ειδικότερα όταν πρόκειται για γεωγραφικά πλάτη μεγαλύτερα των  $65^\circ$  και μικρότερα των  $-55^\circ$  [70].
- Τέλος, στα διάφορα εγχειρίδια χρήσης των αλτιμετρικών δεδομένων παρουσιάζονται επιπλέον τιμές των ορίων απόρριψης των παρατηρήσεων για τις διάφορες ατμοσφαιρικές, γεωφυσικές και ωκεανογραφικές διορθώσεις που εφαρμόζονται στις πρωτογενείς μετρήσεις.

Περισσότερες λεπτομέρειες για τις διορθώσεις και τα όρια απόρριψης των πρωτογενών παρατηρήσεων δίνονται στα εγχειρίδια χρήσης των Εγγραφών Γεωφυσικών Δεδομένων [35], [27], [5], καθώς επίσης και στις επιμέρους διαδικασίες και συνδιορθώσεις, όπως παρουσιάζονται στις αναφορές [26], [65], [23], [24], [25], [70], [21].

Από την ανάλυση των παραπάνω διορθώσεων προκύπτει το ζήτημα του αριθμού των τελικών χρησιμοποιημένων παρατηρήσεων. Η επιλογή της απομάκρυνσης αρκετών παρατηρήσεων προέρχεται από το μεγάλο πλήθος των αλτιμετρικών δεδομένων. Αρχεί να αναφερθεί ότι οι τρεις μήνες λειτουργίας του Geos3 παρείχαν στην επιστημονική κοινότητα ένα τεράστιο όγκο δεδομένων, τα οποία δεν είχαν συλλέξει οι επίγειες ωκεανογραφικές αποστολές τα προηγούμενα εκατό χρόνια. Βέβαια, η απομάκρυνση των μετρήσεων δεν ξεπερνά συνήθως το 10 – 12% του συνολικού αριθμού των πρωτογενών μετρήσεων [70], [21].

Η αξιολόγηση των αλτιμετρικών δεδομένων σχετίζεται με τη σύγκριση των διορθωμένων μετρήσεων με πληροφορίες από άλλες πηγές. Τέτοιες πληροφορίες λαμβάνονται, π.χ., από συγκρίσεις με παλιρροιογράφους εγκατεστημένους σε ωκεάνια νησιά. Είναι γενικότερα αποδεκτό ότι τα ωκεάνια νησιά, και ειδικότερα τα μικρού μεγέθους, είναι αντιπροσωπευτικότερα των συνθηκών που επικρατούν στους ανοικτούς ωκεανούς εξαιτίας της έλλειψης των ηπειρωτικών εκτάσεων και των αντίστοιχων συνοριακών φαινομένων που προκαλούν [59]. Τα αλτιμετρικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται έχουν διορθωθεί από όλες τις ατμοσφαιρικές, ωκεάνιες και ηλεκτρονικές επιδράσεις, όπως επίσης και από την επίδραση του ακτινικού σφάλματος τροχιάς, όπως θα παρουσιαστεί στην ενότητα της αλτιμετρικής συνόρθωσης. Η αξιολόγηση των

αλιμετρικών δεδομένων έλαβε νέα ώθηση με την έναρξη του Πειράματος για την Παγκόσμια Ωκεάνια Κυκλοφορία (World Ocean Circulation Experiment – WOCE) [85], το οποίο πραγματοποιείται στα πλαίσια του Προγράμματος για την Έρευνα του Παγκόσμιου Κλίματος (World Climate Research Programme – WCRP) [86] υπό την αιγίδα της UNESCO. Σύμφωνα με τις αρχές του προγράμματος συλλέγονται παγκοσμίως ωκεανογραφικά δεδομένα και συντονίζεται η συνεχής επεξεργασία τους και ταχεία διαθεσιμότητά τους στην επιστημονική κοινότητα [58]. Με αυτόν τον τρόπο, μετρήσεις παλιρροιογράφων διατίθενται σχεδόν ταυτόχρονα με τα αλιμετρικά δεδομένα για την άμεση σύγκριση και αξιολόγηση. Μια αναδρομή των συγκρίσεων περιγράφεται από τους Mitchum and Kilonsky [60], ενώ η αξιολόγηση των πρώτων κύκλων του T/P παρουσιάζεται από τον Mitchum [59]. Μια γενικότερη αναφορά στις παγκόσμιες συγκρίσεις αλιμετρικών υψών της θάλασσας με παλιρροιογραφικά δεδομένα δίνεται από τον Tokmakian [80]. Συγκρίσεις τέτοιου τύπου παρουσιάζονται στα σχήματα που ακολουθούν.

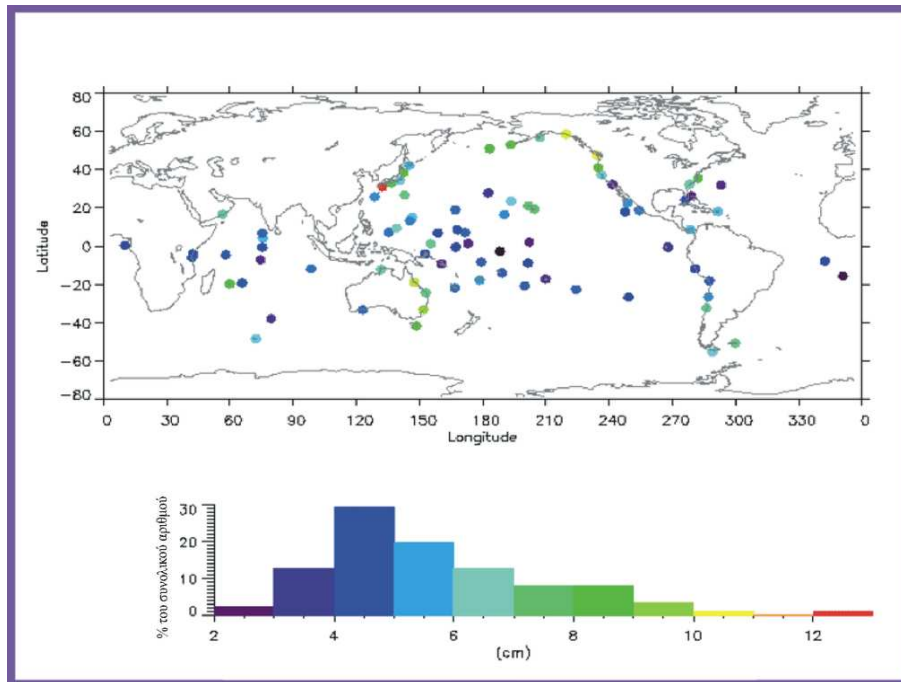


Σχήμα 3.17: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των διαφορών της θαλάσσιας στάθμης, όπως υπολογίζεται από τα δεδομένα του T/P και μετρήσεις παλιρροιογράφων (NASA/GSFC Ocean Pathfinder Project).

Παρόμοιες συγκρίσεις για την περιοχή της Μεσογείου δίνονται από τους Fenoglio and Groten [30], όπου και παρουσιάζεται μια μέθοδος συνδυασμού των ετερογενών δεδομένων για τον προσδιορισμό της μέσης θαλάσσιας στάθμης. Επίσης, η σύγκριση των γεωδαιτικών δεδομένων του Geosat με τους παλιρροϊκούς σταθμούς του Αιγαίου πελάγους παρουσιάζεται από τους Andritsanos et al [2].

### 3.6 Η συνόρθωση των αλιμετρικών δεδομένων

Τα αλιμετρικά δεδομένα, αφού διορθωθούν από όλες τις γεωφυσικές παραμέτρους που προαναφέρθηκαν και αφού περάσουν τα κριτήρια του ελέγχου για την ύπαρξη χονδροειδών σφαλμάτων, εισάγονται στη διαδικασία της συνόρθωσης. Η συνόρθωση έχει ως πρωταρχικό σκοπό την ελαχιστοποίηση του σημαντικότερου σφάλματος που επηρεάζει τις μετρήσεις, του ακτινικού τροχιακού σφάλματος. Στην περίπτωση που δεν ενδιαφέρει η επίδραση της ωκεάνιας μεταβολής



Σχήμα 3.18: Μέσο τετραγωνικό σφάλμα των διαφορών της θαλάσσιας στάθμης, όπως υπολογίζεται από τα δεδομένα του ERS2 και μετρήσεις παλιρροιογράφων (NASA/GSFC Ocean Pathfinder Project).

της στάθμης και χρησιμοποιούνται δεδομένα από επαναλαμβανόμενες τροχιές (ERM), τότε η συγγραμμική επεξεργασία (collinear analysis) προηγείται της συνόρθωσης.

### 3.6.1 Συγγραμμική επεξεργασία των παρατηρήσεων

Η συγγραμμική επεξεργασία εφαρμόζεται στην περίπτωση των ακριβώς επαναλαμβανόμενων αλτιμετρικών μετρήσεων (ERM). Σκοπός της επεξεργασίας είναι η ανάπτυξη μιας σειράς δεδομένων, η οποία εξάγεται μέσα από μια διαδικασία μέσω τιμών. Ο υπολογισμός των μέσων υψών της στάθμης της θάλασσας για μια ορισμένη χρονική περίοδο αποδίδεται στη διεθνή βιβλιογραφία με τον όρο **ενοποίηση** (stacking) και πραγματοποιείται μέσω της συγγραμμικής ανάλυσης για κάθε επαναλαμβανόμενα ίχνη τροχιών ως εξής [48]:

- α) Υπολογίζεται μια χρονική στιγμή αναφοράς για κάθε ένα από τα συγγραμμικά ίχνη, έτσι ώστε παρατηρήσεις με τους ίδιους σχετικούς χρόνους να θεωρούνται γεωγραφικά ισότοπες.
- β) Υπολογίζονται με παρεμβολή οι γεωγραφικές συντεταγμένες που αναφέρονται στις αντίστοιχες χρονικές περιόδους.
- γ) Τα συγγραμμικά ίχνη των τροχιών ενοποιούνται σε μια διαδικασία συνόρθωσης, η οποία ελαχιστοποιεί τις διαφορές στα ύψη των διαφορετικών τροχιών υπολογίζοντας συντελεστές για ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς όρους για κάθε ίχνη. Η ενοποίηση αυτή πραγματοποιείται για την απομάκρυνση των μεγάλων διαφορών μεταξύ των ίχνων. Το βήμα αυτό είναι σημαντικό, γιατί απομακρύνονται οι μεγάλες διαφορές μεταξύ των ανεξάρτητων τροχιών, οι οποίες επηρεάζουν τον υπολογισμό των μέσων υψών της θαλάσσιας επιφάνειας.

δ) Υπολογίζονται οι μέσες τιμές των υψών στα συγκεκριμένα σημεία.

Η διαδικασία της ενοποίησης των επαναλαμβανόμενων δεδομένων οδηγεί στη δημιουργία μέσων τιμών του ύψους της θαλάσσιας επιφάνειας στη χρονική περίοδο που γίνεται η μελέτη. Οι μεταβολές της επιφάνειας δεν λαμβάνονται υπόψη και για το λόγο αυτόν τα ενοποιημένα δεδομένα δε χρησιμοποιούνται για μελέτες παρακολούθησης των μεταβολών της θαλάσσιας επιφάνειας, αλλά βοηθούν στον προσδιορισμό των στάσιμων επιφανειών του γεωειδούς και της μέσης θαλάσσιας τοπογραφίας. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση των καθαρά γεωδαιτικών αποστολών, λόγω της έλλειψης επαναληπτικότητας στην τροχιά, το στάδιο της συγγραμμικής επεξεργασίας των μετρήσεων παρακάμπτεται.

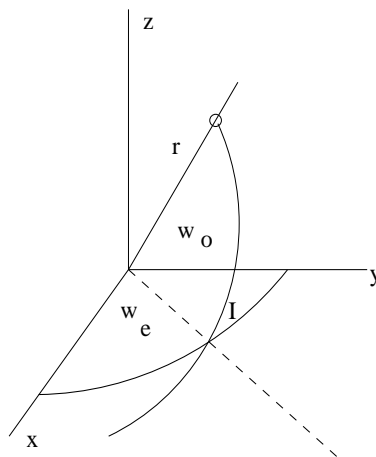
### 3.6.2 Συνόρθωση στις τομές των τροχιακών ιχνών

Το κυρίαρχο μέρος του ακτινικού τροχιακού σφάλματος δεν έχει απομακρυνθεί από τις μετρήσεις ακόμη και μετά την εφαρμογή της συγγραμμικής ανάλυσης. Για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος αυτού εφαρμόζεται η τεχνική της **συνόρθωσης στις τομές των τροχιακών ιχνών** (crossover adjustment or crossing arc adjustment). Η διαδικασία αφορά στην ελαχιστοποίηση των διαφορών των μετρήσεων στις τομές των αναβιβαζόντων και καταβιβαζόντων ιχνών των τροχιών. Τα είδη της συνόρθωσης που ακολουθούνται ποικίλλουν αναλόγως με τα μήκη των τόξων που εξετάζονται, την υπολογιστική δυνατότητα που διατίθεται και τις εφαρμογές, για τις οποίες χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα δεδομένα.

#### Επιλογή των διαφορών στις τροχιακές τομές

Ο λόγος της επιλογής των διαφορών στις τομές των τροχιακών ιχνών σε σχέση με τις αρχικές μετρήσεις σχετίζεται με τη διαδικασία ελαχιστοποίησης του τροχιακού σφάλματος. Οι διαφορές στις τροχιακές τομές δεν περιέχουν το στάσιμο σήμα των αποχών του γεωειδούς, ούτε και το σήμα της περίπου στάσιμης θαλάσσιας τοπογραφίας. Επομένως, οι διαφορές που προκύπτουν οφείλονται κατά πρώτο λόγο στην ύπαρξη του ακτινικού τροχιακού σφάλματος και κατά δεύτερο λόγο σε τυχόντα μη μοντελοποιημένα παλιρροϊκά φαινόμενα και στη ωκεάνια μεταβολή της θαλάσσιας στάθμης.

Για τον υπολογισμό των γεωγραφικών συντεταγμένων των τομών ακολουθείται καταρχήν μια διαδικασία πρόγνωσης με δεδομένες τις χρονικές στιγμές πραγματοποίησης των μετρήσεων [70]. Η πρόγνωση στηρίζεται στην καταρχήν αποδοχή της κυκλικής ονομαστικής τροχιάς του δορυφόρου. Η ονομαστική τροχιά του δορυφόρου και τα χαρακτηριστικά της στοιχεία φαίνονται στο σχήμα 3.19. Όπως αποδεικνύεται στην ενότητα 3.4.5, η κλίση της τροχιάς  $I$



Σχήμα 3.19: Τα χαρακτηριστικά στοιχεία της ονομαστικής τροχιάς ενός δορυφόρου.

είναι σταθερή, ενώ η μεταβλητή  $\omega_o = \omega + M$  και η  $\omega_e = \Omega + \theta$  είναι γραμμικές συναρτήσεις του χρόνου. Από το σχήμα 3.19, οι συντεταγμένες του δορυφόρου σε ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς δίνονται από την:

$$\bar{x}_e = R_3(-\omega_e)R_1(-I) \begin{bmatrix} r \cos \omega_o \\ r \sin \omega_o \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

όπου το  $\bar{x}_e$  είναι το διάνυσμα θέσης στο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς και  $R_1, R_3$  είναι οι πίνακες στροφής Euler γύρω από τον  $x$  και  $z$  άξονα αντίστοιχα. Στη περίπτωση αυτή υποτίθεται η ταύτιση του άξονα  $z$  του αδρανειακού συστήματος αναφοράς με τον άξονα  $z$  του γεωκεντρικού συστήματος. Αναλύοντας την (3.25) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \omega_e \cos \omega_o - \sin \omega_e \cos I \sin \omega_o \\ \sin \omega_e \cos \omega_o + \cos \omega_e \cos I \sin \omega_o \\ \sin I \sin \omega_o \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Η (3.26) παρέχει ακριβή αποτελέσματα της τάξης των  $\pm 10$  χιλιομέτρων σε σχέση με την ακριβή τροχιά. Υπενθυμίζεται ότι το ίχνος του δορυφορικού παλμού είναι της τάξης των 2.5 με 12 χιλιομέτρων και η τιμή του ύψους της στιγμιαίας θαλάσσιας στάθμης υπολογίζεται από το μέσο όρο του ανακλώμενου σήματος στην περιοχή. Ακόμα η δειγματική ταχύτητα μετρήσεων ισούται με ένα δευτερόλεπτο, χρονική διάρκεια που αντιστοιχεί σε διακριτική ικανότητα 7 χιλιομέτρων κατά μήκος του τροχιακού ίχνους. Επομένως η ακρίβεια των 10 χιλιομέτρων της (3.26) μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανεκτή για τον αρχικό υπολογισμό των σημείων τομών. Επιπλέον, μελέτες προσομοίωσης αποδεικνύουν ότι όταν ληφθούν υπόψη η εκκεντρότητα και τα φαινόμενα λόγω του παράγοντα επιπλάτυνσης  $J_2$  του κανονικού δυναμικού βαρύτητας, η ακρίβεια προσεγγίζει την τιμή των  $\pm 100$  μέτρων [64]. Για τον προσδιορισμό της γεωγραφικής θέσης των τροχιακών τομών ακολουθείται καταρχήν η παρακάτω διαδικασία [70]:

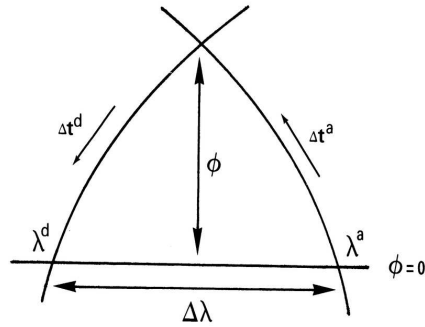
- Αναγνωρίζονται οι διαβάσεις (passes) της δορυφορικής τροχιάς. Μία διάβαση ξεκινά από το χαμηλότερο πλάτος και τελειώνει στο υψηλότερο πλάτος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση πρόκειται για **αναβιβάζουσα διάβαση** (ascending pass-arc). Στην ακριβώς αντίθετη περίπτωση πρόκειται για **καταβιβάζουσα διάβαση** (descending pass-arc).
- Από τη μέση περίοδο περιστροφής του δορυφόρου  $T$  και την απόσταση δύο διαδοχικών τροχιακών ιχνών κατά μήκος του ισημερινού  $\Delta\lambda$  (στοιχεία χαρακτηριστικά για κάθε δορυφόρο) υπολογίζονται οι όροι  $\dot{\omega}_e$  και  $\dot{\omega}_o$  σύμφωνα με:

$$\dot{\omega}_o = \dot{\omega} + \dot{M} = \frac{2\pi}{T} \quad (3.27)$$

$$\dot{\omega}_e = \dot{\Omega} + \dot{\theta} = \frac{\Delta\lambda}{180} \frac{\pi}{T}. \quad (3.28)$$

- Για το σύνολο των αναβιβαζουσών και καταβιβαζουσών διαβάσεων εφαρμόζεται η (3.26) και υπολογίζονται ένα σημείο τομής και δύο χρονικές περίοδοι, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.20. Συνολικά,  $N_a \times N_d$  σημεία τομής υπολογίζονται, όταν  $N_a$  είναι ο αριθμός των αναβιβαζουσών διαβάσεων και  $N_d$  ο αριθμός των καταβιβαζουσών διαβάσεων (βλ. και ανάλυση από τον Rummel [67]).

Αποδεικνύονται για τα σημεία των τροχιακών τομών που υπολογίζονται οι ιδιότητες της αντισυμμετρικότητας των σχετικών χρονικών στιγμών από τη διάβαση του ισημερινού ( $\Delta t^a = -\Delta t^d$ , βλ. σχήμα 3.20), της εξάρτησης των σχετικών διαφορών χρόνου από το γεωγραφικό πλάτος και του υπολογισμού των χρονικών διαφορών μέσω της  $\Delta\lambda = \lambda_{\phi=0}^a - \lambda_{\phi=0}^d$ , η οποία αναφέρεται στη διαφορά των γεωγραφικών μηκών των περασμάτων στον ισημερινό. Στις παραπάνω σχέσεις, αλλά και στη συνέχεια, ο εκθέτης  $a$  αναφέρεται στις αναβιβάζουσες διαβάσεις και ο εκθέτης  $d$  στις καταβιβάζουσες. Για τον υπολογισμό των χρονικών διαφορών



Σχήμα 3.20: Υπολογισμός των χρονικών μεταβλητών στα σημεία τομής των τροχιακών ιχνών (σχήμα από [70]).

από την ισημερινή διάβαση  $\Delta t^a = -\Delta t^d$ , καθώς επίσης και του γεωγραφικού πλάτους του προβλεπόμενου σημείου τομής ισχύουν (για την απόδειξη των σχέσεων βλ. [70]):

$$\begin{aligned}\Delta t &= f(\lambda_{\phi=0}^a - \lambda_{\phi=0}^d) \\ \phi &= g(\lambda_{\phi=0}^a - \lambda_{\phi=0}^d)\end{aligned}\quad (3.29)$$

Οι (3.29) έχουν αρκετά πολύπλοκη μορφή, αφού εξάγονται με τη βοήθεια της (3.26) και περιλαμβάνουν πίνακες στροφής που περιέχουν γενικότερες εκφράσεις των στοιχείων της τροχιάς. Συναρτήσεις τέτοιου τύπου υπολογίζονται στην αρχή της διαδικασίας για μια φορά και οι χρόνοι πινακοποιούνται για τη χρήση του στη διαδικασία πρόγνωσης των σημείων τομής. Η συνήθης διαδικασία προσδιορισμού των σημείων τομής παρουσιάζεται από τον Schrama [70]:

1. Καταρχήν, με τη βοήθεια της (3.25), υπολογίζονται τα διανύσματα θέσης του αναβιβάζοντος σημείου διάβασης του ισημερινού και του αντίστοιχου καταβιβάζοντος σημείου.
2. Τα δύο τροχιακά επίπεδα που ορίζονται από τα δύο διανύσματα θέσης τέμνονται οδηγώντας στο προσεγγιστικό διάνυσμα θέσης του σημείου τομής και υπολογίζονται οι σχετικοί χρόνοι διάβασης  $\Delta t^a$  και  $\Delta t^d$ .
3. Υπολογίζονται ξανά τα διανύσματα θέσης μέσω της (3.25) χρησιμοποιώντας τώρα τους χρόνους που υπολογίστηκαν στο προηγούμενο βήμα.
4. Αν η διαφορά των διανυσμάτων θέσης της αναβιβάζουσας διάβασης και της καταβιβάζουσας διάβασης διαφέρουν περισσότερο από κάποιο όριο, τότε επαναλαμβάνεται η διαδικασία από το δεύτερο βήμα.
5. Οι παραπάνω διαδικασίες χρησιμοποιούν την ονομαστική τροχιά του δορυφόρου και η πρόγνωση των σημείων τομής αφορά σε μια αρχική προσεγγιστική λύση. Απαραίτητες είναι κάποιες διορθώσεις, οι οποίες προκύπτουν από την εφαρμογή της (3.29) για τον προσδιορισμό των απόλυτων χρονικών διαφορών, δηλαδή των χρονικών διαφορών που ορίζονται στο σύστημα, το οποίο χρησιμοποιήθηκε κατά τον υπολογισμό της τροχιάς. Ακολουθεί η βελτίωση στον προσδιορισμό των σημείων τομής μελετώντας τις εφαπτόμενες στα ίχνη των τροχιών στα σημεία τομής, όπως δίνονται από τα αλτιμετρικά δεδομένα [65]. Η διαδικασία είναι επαναληπτική και αφορά σε συνεχή βελτίωση του υπολογισμού των χρονικών στιγμών τομής.

Η διαδικασία προσδιορισμού των σημείων τομής απλοποιείται με την απομάκρυνση στην αρχή των σημείων τομής σε ηπειρωτικές εκτάσεις. Το γεγονός αυτό μειώνει τον αριθμό των

σημείων τομής που αποθηκεύονται και αυξάνει την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου.

### Εφαρμογή περιφερειακού μοντέλου συνόρθωσης

Η περίπτωση του περιφερειακού μοντέλου συνόρθωσης είναι η απλούστερη των μοντέλων συνόρθωσης στις τομές των τροχιακών ιχνών. Αναφέρεται στην ελαχιστοποίηση του ακτινικού τροχιακού σφάλματος σε μια περιορισμένης έκτασης θαλάσσια περιοχή, προσδιορίζοντας όρους διαφοράς στάθμης και κλίσης στα σημεία τομής.

Το μοντέλο της συνόρθωσης δίνεται ως εξής:

$$h_a - h_d = \Delta r_a - \Delta r_d + \zeta_a - \zeta_d + v \quad (3.30)$$

όπου  $h_a$ ,  $h_d$  τα διορθωμένα από όλες τις γεωφυσικές επιδράσεις ύψη της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας στις διαβάσεις ανόδου και καθόδου, αντίστοιχα,  $\Delta r_a$ ,  $\Delta r_d$  τα ακτινικά τροχιακά σφάλματα των διαβάσεων ανόδου και καθόδου, αντίστοιχα,  $\zeta_a$ ,  $\zeta_d$  η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία στις δύο χρονικές στιγμές και  $v$  το σφάλμα της αλτιμετρικής παρατήρησης. Η τελική εξίσωση παρατήρησης έχει τη μορφή:

$$\Delta h_{ad} = \Delta r_a - \Delta r_d + \Delta \zeta + v, \quad (3.31)$$

όπου  $\Delta \zeta$  είναι η μεταβολή της θαλάσσιας στάθμης μεταξύ των χρονικών στιγμών της ανόδου και καθόδου. Εάν το τόξο ανόδου και το τόξο καθόδου είναι πολύ κοντά στην κλίμακα του χρόνου, τότε η διαφορά στις μετρήσεις της στάθμης της θάλασσας μπορεί να αποδοθεί κυρίως στο ακτινικό τροχιακό σφάλμα. Στα πλαίσια της συνόρθωσης για τον περιορισμό του ακτινικού σφάλματος της τροχιάς οι στοχαστικές μεταβλητές της μεταβολής της θαλάσσιας στάθμης και του σφάλματος της μέτρησης αποτελούν μία νέα τυχαία μεταβλητή. Η παραδοχή αυτή έχει ως αποτέλεσμα την απομάχρυνση των μεγάλου μήκους κύματος ωκεάνιων σημάτων κατά μήκος του ίχνους της τροχιάς [54]. Το μοντέλο του ακτινικού τροχιακού σφάλματος δεν έχει στοχαστικό χαρακτήρα, αφού περιγράφεται, όπως αποδείχτηκε και στην ενότητα 3.4.5, από τους νόμους του Kepler [19], [82]:

$$\Delta r \approx \Delta a - (a\Delta e + e\Delta a) \cos M + ae\Delta M \sin M. \quad (3.32)$$

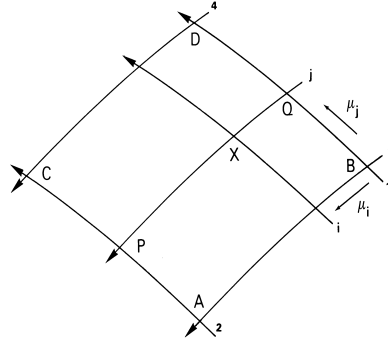
Η μέση ανωμαλία μεταβάλλεται σύμφωνα με [82]:

$$M = M_0 + \dot{M}t \quad (3.33)$$

$$\dot{M} \approx \bar{n} = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.34)$$

όπου  $\bar{n}$  η μέση γωνιακή ταχύτητα και  $T$  η περίοδος της τροχιάς του δορυφόρου. Το ακτινικό τροχιακό σφάλμα δίνεται ως συνάρτηση της τροχιακής περιόδου.

Η περιοχή που επιλέγεται για την εφαρμογή της περιφερειακής συνόρθωσης είναι καλό να σχηματίζει ένα είδος ρόμβου. Η μορφή αυτή προτιμάται επειδή όλα τα τόξα που εισάγονται στη διαδικασία της συνόρθωσης έχουν περίπου το ίδιο μήκος και αποφεύγονται με τον τρόπο αυτόν προβλήματα στο σχηματισμό των κανονικών εξισώσεων. Ο σχηματισμός αυτός ενδείκνυται για τη μετατροπή των απολύτων χρονικών στιγμών των μετρήσεων σε νέες αδιάστατες ποσότητες. Από το σχήμα 3.21 η χρονική μεταβλητή της τομής στο σημείο  $Q$  μετασχηματίζεται σε μια αδιάστατη ποσότητα  $\mu_{1j} = (t_{1j} - t_{13}) / (t_{14} - t_{13})$ . Αντιστοίχως, μια αδιάστατη παράμετρος  $\mu_{2j}$  ορίζεται στην τομή του τόξου 2 με το  $j$  ως  $\mu_{2j} = (t_{2j} - t_{23}) / (t_{24} - t_{23})$ . Οι αδιάστατες ποσότητες αυτές χαρακτηρίζουν τα σημεία των τομών των τροχιακών ιχνών και εισάγονται στη διαδικασία της συνόρθωσης. Αναλύοντας με παρόμοιο τρόπο όλα τα τόξα της περιοχής αναγνωρίζεται μια διαφορά της τάξης του 1-2%. Στη συνέχεια, η μέση τιμή των  $\mu_{1j}$  και  $\mu_{2j}$  θα θεωρείται η αντιπροσωπευτική  $\mu_j$  για το μέρος του τόξου  $j$ . Η κανονικοποίηση στις χρονικές μεταβλητές σχετίζεται με την αντιμετώπιση των ιδιομορφιών του πίνακα των κανονικών



Σχήμα 3.21: Υπολογισμός των αδιάστατων χρονικών μεταβλητών (σχήμα από [70]).

εξισώσεων και την αποτελεσματική αντιστροφή του για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του ακτινικού τροχιακού σφάλματος [70]. Αντικαθιστώντας στην (3.32) σχηματίζονται το μοντέλο της συνόρθωσης [67]:

$$\Delta r = a + b \sin \mu + c \cos \mu, \quad (3.35)$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη γενικότερη μορφή του παγκόσμιου μοντέλου που θα εξεταστεί στη συνέχεια και το οποίο απλοποιείται για σχετικά μικρά μήκη τόξων ( $< 2000$  χιλιόμετρα) ( $\sin \mu \approx \mu$  και  $\cos \mu \approx 1$ ) ως εξής:

$$\Delta r = a + b\mu. \quad (3.36)$$

Η (3.36) είναι το μοντέλο της περιφερειακής συνόρθωσης που μοντελοποιεί το τροχιακό σφάλμα σύμφωνα με τις παραμέτρους μιας διαφοράς στάθμης (bias) και μιας κλίσης (tilt), ενώ για πολύ μικρά τόξα αρκεί μόνο η παράμετρος της διαφοράς στάθμης:

$$\Delta r = a \quad (3.37)$$

Η εξίσωση παρατήρησης στην περίπτωση των περιφερειακών συνορθώσεων διαφοράς στάθμης και κλίσης είναι [3], [48]:

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= \Delta r_i(\mu_i) - \Delta r_j(\mu_j) + v \Rightarrow \\ \Delta h_{ij} &= (a_i + b_i\mu_i) - (a_j + b_j\mu_j) + v, \end{aligned} \quad (3.38)$$

όπου  $a_i$  και  $b_i$  οι παράμετροι της διαφοράς στάθμης και της κλίσης για το τόξο  $i$  και  $a_j$  και  $b_j$  οι αντίστοιχες παράμετροι για το τόξο  $j$ . Στην περίπτωση της εφαρμογής του μοντέλου της συνόρθωσης μόνο με παραμέτρους διαφοράς στάθμης ισχύει:

$$\Delta h_{ij} = a_i - a_j + v. \quad (3.39)$$

Τα μοντέλα της περιφερειακής συνόρθωσης ακολουθούν το γενικό μοντέλο της συνόρθωσης των εξισώσεων παρατηρήσεων [87]. Το μοντέλο στη γραμμική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}. \quad (3.40)$$

όπου  $\mathbf{b}$  είναι το διάνυσμα των παρατηρούμενων διαφορών στις τομές των τροχιακών ιχνών,  $\mathbf{A}$  είναι ο πίνακας σχεδιασμού του συστήματος,  $\mathbf{x}$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων, το οποίο ανάλογα με το μοντέλο που χρησιμοποιείται, περιέχει τους συντελεστές της διαφοράς στάθμης και κλίσης και  $\mathbf{v}$  είναι το διάνυσμα των σφαλμάτων. Η λύση, σύμφωνα με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$ , δίνεται από:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{u}, \quad (3.41)$$

όπου  $\mathbf{P}$  είναι ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων και  $\mathbf{N}$  είναι ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων.

Στην περίπτωση των μοντέλων ο πίνακας σχεδιασμού  $\mathbf{A}$  παρουσιάζεται με στοιχεία μονάδες και τις τιμές των  $\mu_i$  [67]. Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων έχει τη δομή Toeplitz υποπίνακων, γεγονός που ευνοεί το διαχωρισμό της λύσης κατά βήματα. Η μορφή αυτή διαφέρει όταν αφαιρεθούν από τις κανονικές εξισώσεις τα σημεία τομής που αναφέρονται σε ηπειρωτικά τμήματα [66].

Από τη μελέτη του πίνακα  $\mathbf{A}$  προκύπτει ότι ο βαθμός του πίνακα είναι μικρότερος από τον συνολικό αριθμό των αγνώστων παραμέτρων. Ο πίνακας σχεδιασμού περιέχει γραμμικά εξαρτημένες στήλες. Η αδυναμία βαθμού που παρουσιάζεται σχετίζεται με την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Οι άγνωστες παράμετροι των διαφορών στάθμης και των κλίσεων λειτουργούν με τρόπο αντίστοιχο των συντεταγμένων στα οριζόντια δίκτυα, ενώ το μοντέλο των διαφορών στάθμης συμπίπτει με το μοντέλο συνόρθωσης των κατακόρυφων δικτύων [87], [90]. Σύμφωνα με τον Schrama [70], σε μοντέλο περιφερειακής συνόρθωσης με  $p$  άγνωστες παραμέτρους ανά τόξο η αδυναμία βαθμού είναι  $p^2$ . Η αδυναμία βαθμού του συστήματος αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή δεσμεύσεων, κρατώντας σταθερές τις παραμέτρους από  $p$  τροχιακά τόξα. Αυτό πραγματοποιείται πρακτικά με την αφαίρεση των  $p$  παραμέτρων και των αντίστοιχων στηλών του πίνακα των κανονικών εξισώσεων, οι οποίες αναφέρονται στα συγκεκριμένα τόξα. Τα κριτήρια για την επιλογή των τόξων στηρίζονται στην εκ των προτέρων γνώση της ακρίβειας και της πληρότητας των μετρήσεων. Όπως θα παρουσιαστεί και στα παγκόσμια μοντέλα συνόρθωσης, δεσμεύσεις μπορούν να εισαχθούν στις εξισώσεις παρατήρησης ως πληροφορίες από διαφορετικές πηγές μετρήσεων, όπως, π.χ., μετρήσεις laser προς το δορυφόρο από καλά κατανομημένους σταθμούς στην περιοχή μελέτης. Στην περίπτωση του μοντέλου των δύο παραμέτρων (διαφορά στάθμης και κλίση) απαραίτητη είναι η δέσμευση δύο τόξων. Τα τόξα πρέπει να είναι μη επικαλυπτόμενα και να μην τέμνονται (παράλληλη διάταξη τόξων). Τα τόξα που επιλέγονται πρέπει να είναι αντιπροσωπευτικά της περιοχής, με την έννοια του να είναι επιμήκη και κεντρικά στην περιοχή μελέτης και να θεωρούνται υψηλής ακρίβειας, όταν υπάρχει εκ των προτέρων πληροφορία για τα σφάλματα προσδιορισμού των τόξων.

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι ένα μέρος του ακτινικού τροχιακού σφάλματος δεν είναι δυνατό να ανιχνευτεί στη βάση των διαφορών στα σημεία των τροχιακών τομών [67]. Το γεγονός αυτό παρατηρείται μετά από την εξέταση των φασματικών χαρακτηριστικών των διαφορών [70]. Το μέρος αυτό του τροχιακού σφάλματος σχετίζεται με την επιλογή του συστήματος αναφοράς του αλτιμετρικού σχηματισμού και μπορεί να περιγραφεί από μια αμετάβλητη επιφάνεια, η οποία χαρακτηρίζει το μηδενικό χώρο του πίνακα των κανονικών εξισώσεων (null space). Ακολουθώντας την ανάλυση του Lanczos [51], ο πίνακας σχεδιασμού μπορεί να θεωρηθεί ως ένας γραμμικός τελεστής που συνδέει το χώρο των αγνώστων παραμέτρων με το χώρο των παρατηρούμενων ποσοτήτων. Σύμφωνα με τις ιδιότητες τέτοιων συστημάτων υπάρχει πίνακας  $\mathbf{E}$ , τέτοιος ώστε  $\mathbf{AE} = \mathbf{0}$ . Στο μηδενικό χώρο που δημιουργείται ανήκει το διάνυσμα  $\mathbf{z}$ , για το οποίο:

$$\mathbf{Az} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Nz} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

με  $\mathbf{z} = \mathbf{Es}$ . Η μορφή του πίνακα  $\mathbf{E}$  εξαρτάται από το μοντέλο συνόρθωσης που ακολουθείται. Αναλύοντας το σύστημα των κανονικών εξισώσεων και εξετάζοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα  $\mathbf{N}$  ο Schrama [70] κατέληξε στα εξής:

- Ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων είναι συμμετρικός και έχει πραγματικές ιδιοτιμές όλες μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός (θετικά ορισμένος).
- Υπάρχει ένα διάνυσμα  $\mathbf{z}$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{Nz} = \mathbf{0}$  και είναι γνωστό ότι μπορεί να γραφτεί στη μορφή  $\mathbf{z} = \mathbf{Es}$ , όπου οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του  $\mathbf{E}$  περιγράφουν το μηδενικό χώρο του  $\mathbf{N}$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  ονομάζεται διάνυσμα μετάθεσης και αντιπροσωπεύει την αβεβαιότητα στον καθορισμό του συστήματος αναφοράς.

- Η γενική λύση των γραμμικών συστημάτων αυτής της μορφής λαμβάνονται από την άθροιση της ειδικής λύσης (particular solution) με την ομογενή λύση (homogeneous solution). Η ειδική λύση εξαρτάται από τα κριτήρια επιλογής των τόξων αναφοράς που δεσμεύονται. Στα αποτελέσματα περιλαμβάνονται οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων στο σύστημα που ορίζει η συγκεκριμένη επιλογή των δεσμεύσεων. Η ειδική λύση που προκύπτει εξαρτάται, όπως είναι φανερό, από την επιλογή των δεσμεύσεων. Σε περίπτωση που τα τόξα που επιλέγονται παρουσιάζουν σφάλματα στον προσδιορισμό τους, αυτά δεν ανιχνεύονται, αλλά διοχετεύονται στα αποτελέσματα της συνόρθωσης. Μια αντιπροσωπευτική λύση της αλτιμετρικής επιφάνειας προσδιορίζεται, όταν είναι γνώστη η συνεισφορά του σφάλματος στα τόξα αναφοράς [62].

Η γενική λύση προκύπτει σύμφωνα με:

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_p + \mathbf{z} = \mathbf{x}_p + \mathbf{E}\mathbf{s}, \quad (3.43)$$

όπου η ομογενής λύση περιγράφει το τροχιακό σφάλμα που δεν ανιχνεύεται από τη διαδικασία της συνόρθωσης. Η γενική λύση  $\mathbf{x}_g = [a_i b_i a_j b_j]^T$  δίνεται από το άθροισμα της ειδικής λύσης  $\mathbf{x}_p = [a_i^* b_i^* a_j^* b_j^*]^T$  και της ομογενούς λύσης  $\mathbf{E}\mathbf{s}$ . Ισχύει:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ a_j \\ b_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i^* \\ b_i^* \\ a_j^* \\ b_j^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu_i \\ 1 & 0 & \mu_j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Αντικαθιστώντας την (3.44) στις εκφράσεις του ακτινικού τροχιακού σφάλματος δύο παραμέτρων έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta r_i(\mu_j) &= (a_i^* + s_1 + s_2\mu_i) + (b_i^* + s_3 + s_4\mu_i)\mu_j \\ &= \Delta r_i^*(\mu_j) + D(\mu_i, \mu_j) \end{aligned} \quad (3.45)$$

για το τόξο ανόδου και

$$\begin{aligned} \Delta r_j(\mu_i) &= (a_j^* + s_1 + s_3\mu_j) + (b_j^* + s_2 + s_4\mu_j)\mu_i \\ &= \Delta r_j^*(\mu_i) + D(\mu_i, \mu_j) \end{aligned} \quad (3.46)$$

για το τόξο καθόδου. Η αμετάβλητη επιφάνεια και στις δύο περιπτώσεις, η οποία περιγράφει το υπολοιπόμενο μέρος του τροχιακού σφάλματος έχει τη μορφή (βλ. και [9]):

$$D(\mu_i, \mu_j) = s_1 + s_2\mu_i + s_3\mu_j + s_4\mu_i\mu_j. \quad (3.47)$$

Οι παρατηρήσεις στα σημεία των τομών  $\Delta h_{ij}$  δεν επηρεάζονται από τη συνάρτηση  $D(\mu_i, \mu_j)$  γιατί απαλείφεται με την δημιουργία των εξισώσεων παρατηρήσεων. Η συνάρτηση  $D(\mu_i, \mu_j)$  μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει μια πολυωνυμική επιφάνεια παραμόρφωσης, αφού οι αδιάστατες μεταβλητές  $\mu_i$  και  $\mu_j$  συμπεριφέρονται ανάλογα με τις συντεταγμένες του σημείου τομής. Στο συγκεκριμένο μοντέλο της διαφοράς στάθμης και κλίσης η επιφάνεια παραμόρφωσης περιλαμβάνει έναν όρο διαφοράς στάθμης ( $s_1$ ), έναν όρο κλίσης κατά την άνοδο ( $s_3$ ), έναν όρο κλίσης κατά την κάθοδο ( $s_2$ ) και έναν όρο στρέψης ( $s_4$ ). Αποδεικνύεται ότι για οποιονδήποτε βαθμό ανάπτυξης της επιφάνειας παραμόρφωσης, η επίδρασή της δεν ανιχνεύεται από τις παρατηρήσεις των διαφορών στα σημεία των τροχιακών τομών [70].

Γίνεται φανερή η εξάρτηση της τελικής λύσης από την επιλογή των δεσμεύσεων. Επιλέγοντας ένα διαφορετικό ζεύγος τροχιακών τόξων οδηγούμαστε σε τελείως διαφορετική λύση. Η διαφορετική λύση μπορεί να προκύψει από τον αρχικό σχεδιασμό των εξισώσεων παρατήρησης, αλλά μπορεί και να προσδιοριστεί από την παλιά λύση με τη χρήση αναλυτικής μετάθεσης του συστήματος αναφοράς. Η μετάθεση αυτή εκφράζεται μέσα από την κατάλληλη ομογενή λύση του συστήματος [70].

Η αβεβαιότητα στο σύστημα αναφοράς, η οποία περιγράφεται από την επιφάνεια παραμόρφωσης, που αναφέρθηκε προηγουμένως, απομακρύνεται με την επιλογή των ελαχίστων δεσμεύσεων. Το ερώτημα που τίθεται αφορά στην επιλογή των δεσμεύσεων, όταν χαμιά πληροφορία για την ποιότητα των τροχιακών τόξων δεν είναι διαθέσιμη. Η λύση δίνεται από την εφαρμογή των εσωτερικών δεσμεύσεων. Ο τύπος των δεσμεύσεων είναι ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς και οδηγεί σε πίνακα συμμεταβλητοτήτων ανεξάρτητο από την επιλογή του συστήματος. Η λύση ελάχιστης νόρμας ικανοποιεί το κριτήριο:

$$\sum_p a_p^2 + b_p^2 = \min \quad (3.48)$$

Το κριτήριο που αναφέρθηκε δεν έχει κάποια φυσική σημασία, αφού απλώς, από τις άπειρες ειδικές λύσεις, ξεχωρίζει εκείνη που είναι πλησιέστερη στο μηδέν. Για την ορθή απόδοση της φυσικής πραγματικότητας οι Arabelos and Tziavos [3] υπολόγισαν κάποιες αρχικές τιμές των συντελεστών  $a$  και  $b$  από τη βέλτιστη προσαρμογή των υψών της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας κατά μήκος καθενός τροχιακού ίχνους σε ένα μοντέλο γεωειδούς. Το γεγονός της βέλτιστης προσαρμογής απαλείφει την επίδραση της επιφάνειας παραμόρφωσης (ορισμός του συστήματος αναφοράς), αλλά επιπλέον απομακρύνει και τις επιδράσεις της θαλάσσιας τοπογραφίας. Για κάθε τροχιακό ίχνος υπολογίζονται οι αρχικές τιμές των συντελεστών διαφοράς στάθμης και κλίσης. Σε ένα δεύτερο βήμα, οι διορθώσεις στις παραμέτρους σύνδεσης με το γεωειδές υπολογίζονται με την εφαρμογή του κριτηρίου ελάχιστης νόρμας:

$$\sum_p \delta a_p^2 + \delta b_p^2 = \min. \quad (3.49)$$

Το μοντέλο των εξισώσεων παρατήρησης έχει τη μορφή:

$$h_k - N_k = a_i^o + b_i^o \mu_k + V_{ik}, \quad (3.50)$$

όπου  $k$  το συγκεκριμένο σημείο μέτρησης του τόξου  $i$ . Στην παραπάνω περίπτωση η συνόρθωση πραγματοποιείται σε δύο βήματα: Καταρχήν, προσαρμόζεται κάθε ξεχωριστό τόξο στο μοντέλο του γεωειδούς και προσδιορίζονται οι προσεγγιστικές-αρχικές τιμές των παραμέτρων για κάθε τόξο και στη συνέχεια, εφαρμόζεται η συνόρθωση με τη εισαγωγή των εσωτερικών δεσμεύσεων (ελεύθερο δίκτυο) για τον προσδιορισμό των διορθώσεων στις τιμές των παραμέτρων. Το σύστημα αναφοράς έχει προσδιοριστεί από την εξάρτηση των αρχικών παραμέτρων από το μοντέλο του γεωειδούς.

Για την αντιμετώπιση του διπλού βήματος της συνόρθωσης της προηγούμενης διαδικασίας προτείνεται μια ενιαία συνόρθωση με ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων της συνόρθωσης στις τομές των τροχιακών ίχνων και τα σφάλματα από την προσαρμογή στο μοντέλο του γεωειδούς [8], [48]. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αντιμετωπίζεται η αδυναμία βαθμού του συστήματος και το συνακόλουθο πρόβλημα προσδιορισμού της ελεύθερης επιφάνειας παραμόρφωσης, απαιτείται όμως η εισαγωγή σχετικών βαρών στο κριτήριο ελαχιστοποίησης:

$$\sum v_{ij}^2 + w \sum V_{ij}^2 = \min, \quad (3.51)$$

όπου  $v_{ij}$  είναι τα σφάλματα της συνόρθωσης στις τομές των τροχιακών ίχνων και  $V_{ij}^2$  είναι τα σφάλματα από την προσαρμογή των μετρήσεων στο μοντέλο του γεωειδούς. Εάν ο συντελεστής του σχετικού βάρους είναι μικρός, τότε οι διαφορές στις τομές ελαχιστοποιούνται καταρχήν, ενώ εάν το βάρος έχει μεγάλη τιμή πραγματοποιείται πρώτα η προσαρμογή κάθε ξεχωριστού τόξου στο γεωειδές μοντέλο. Ο προσδιορισμός της τιμής του συντελεστή βάρους στηρίζεται είτε σε εμπειρικές δοκιμές [31], είτε στη μελέτη των εκ των υστέρων μεταβλητοτήτων των σφαλμάτων [8], [48]. Σύμφωνα με τη δεύτερη διαδικασία, πραγματοποιείται καταρχήν μια επίλυση του συνολικού δικτύου, που αντιμετωπίζεται ως ελεύθερο, και προσδιορίζεται η μεταβλητότητα  $\sigma_{of}^2$  και στη συνέχεια πραγματοποιείται η ανάλυση κατά μήκος των

ιχνών, υπολογίζοντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των μεταβλητοτήτων των παραμέτρων των τόξων ως:

$$\sigma_{oa}^2 = \frac{1}{N} \sum_p \sigma_{op}^2, \quad (3.52)$$

όπου  $\sigma_{oa}^2$  η μέση τετραγωνική τιμή των μεταβλητοτήτων  $\sigma_{op}^2$  των παραμέτρων  $p$  των  $N$  τόξων. Στη συνέχεια επιλέγεται ο συντελεστής βάρους ως  $\omega = \sigma_{of}^2 / \sigma_{oa}^2$ .

Το μοντέλο της περιφερειακής συνόρθωσης που περιγράφηκε απομακρύνει ένα ποσοστό του ακτινικού τροχιακού σφάλματος. Το υπολοιπόμενο μέρος αναφέρεται στην αμετάβλητη επιφάνεια παραμόρφωσης που περιγράφει το μηδενικό χώρο του πίνακα των κανονικών εξισώσεων. Αν και η απαίτηση σε υπολογιστική ισχύ δεν είναι μεγάλη, το μοντέλο αυτό δε λαμβάνει υπόψη του ολόκληρη την τροχιά, αφού περιορίζεται στα όρια της ρομβοειδούς περιοχής μελέτης. Κάθε τμήμα της τροχιάς αντιμετωπίζεται ξεχωριστά, ενώ είναι γνωστό ότι το τροχιακό σφάλμα μεταβάλλεται με ένα περιοδικό τρόπο σε όλο το μήκος της υπολογισμένης τροχιάς [67]. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε λανθασμένες τιμές των υπολογισμένων διαφορών στάθμης και κλίσεων.

### Χρονολογική συνόρθωση παγκόσμιας κλίμακας των τροχιακών τομέων

Η εφαρμογή του μοντέλου της χρονολογικής συνόρθωσης παγκόσμιας κλίμακας (global chronological adjustment) αναφέρεται στην περιγραφή του τροχιακού σφάλματος από κατάλληλες συναρτήσεις, οι οποίες ισχύουν σε ένα μέρος του τροχιακού τόξου. Η συνόρθωση ονομάζεται χρονολογική γιατί οι συναρτήσεις περιγραφής του τροχιακού σφάλματος κατατάσσονται κατά χρονολογική σειρά.

Το μοντέλο που περιγράφει το ακτινικό τροχιακό σφάλμα έχει πιο πολύπλοκη μορφή από τα μοντέλα διαφοράς στάθμης και κλίσης που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση της περιφερειακής συνόρθωσης. Μελέτες προσομοίωσης [70] δείχνουν ότι το ακτινικό σφάλμα της τροχιάς μπορεί να ανακατασκευαστεί με τη χρησιμοποίηση πολυωνυμικών μοντέλων. Όσο αυξάνει ο βαθμός του μοντέλου, τόσο καλύτερα ανακατασκευάζεται το τροχιακό σφάλμα. Ακόμη πιο ακριβή αποτελέσματα λαμβάνονται με τη χρήση του αυθεντικού μοντέλου γραμμικοποίησης των στοιχείων Κέπλερ που έχει τη μορφή:

$$\Delta r(\mu) = a_0 \cos \mu + b_0 \sin \mu + c_0, \quad (3.53)$$

όπου  $a_0, b_0, c_0$  οι παράμετροι που προσδιορίζονται και  $\mu$  οι τροποποιημένες χρονικές παράμετροι. Η εξίσωση παρατήρησης δίνεται από

$$\Delta h_{ij} = \Delta r_i(\mu_{ij}) - \Delta r_j(\mu_{ji}) \quad (3.54)$$

και με αντικατάσταση της (3.53) στην (3.54) ισχύει:

$$\Delta h_{ij} = [a_i \cos(\mu_{ij}) + b_i \sin(\mu_{ij}) + c_i] - [a_j \cos(\mu_{ji}) + b_j \sin(\mu_{ji}) + c_j]. \quad (3.55)$$

Είναι γνωστό από το μοντέλο της περιφερειακής συνόρθωσης ότι για την ονομαστική τροχιά των δορυφόρων ισχύει η ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας μεταξύ των τροποποιημένων χρονικών μεταβλητών των τόξων ανόδου και καθόδου, δηλαδή:

$$\mu_{ij} = -\mu_{ji} \quad (3.56)$$

Η τελική μορφή των εξισώσεων παρατήρησης είναι:

$$\Delta h_{ij} = [a_i - a_j] \cos(\mu_{ij}) + [b_i + b_j] \sin(\mu_{ij}) + [c_i - c_j] \quad (3.57)$$

Η μορφή που λαμβάνει ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων σε σχέση με το είδος της τροχιάς δίνεται σχηματικά από τον Rummel [67]. Και σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας σχεδιασμού  $\mathbf{A}$  έχει γραμμικά εξαρτημένες στήλες και επομένως ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων

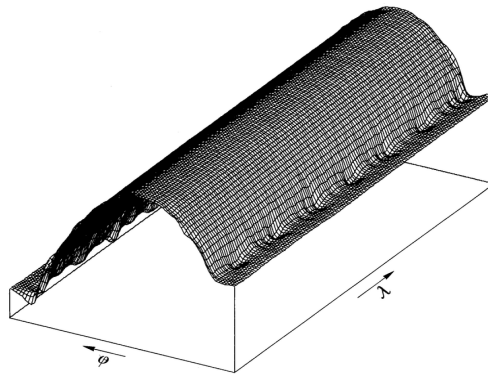
έχει αδυναμία βαθμού. Η αδυναμία βαθμού οφείλεται και σε αυτήν την περίπτωση στην αβεβαιότητα του συστήματος αναφοράς. Σε μια χρονολογική συνόρθωση παγκόσμιας κλίμακας στις τομές των τροχιακών ίχνων εισάγονται τρεις δεσμεύσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε τρεις παραμέτρους ( $p = 3$ ) ενός κεντρικού τόξου [65].

Η διαφορά στην αδυναμία βαθμού μεταξύ του παγκόσμιου και του περιφερειακού μοντέλου οφείλεται στη διαφορετική θεωρητική αντιμετώπιση. Στο περιφερειακό μοντέλο, λόγω της επίπεδης προσέγγισης που ακολουθείται, οι τροποποιημένες χρονικές μεταβλητές  $\mu_i$  θεωρούνται ίσου μεγέθους στα τόξα ανόδου και καθόδου. Στην περίπτωση της παγκόσμιας συνόρθωσης, λόγω της επίδρασης της γήινης σφαιρικότητας, το μέγεθος των χρονικών μεταβλητών μικραίνει συνεχώς με την απομάκρυνση του ίχνους της τροχιάς από τον ισημερινό. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της αδυναμίας βαθμού από  $p^2$  σε  $p$ . Η νέα μορφή της αδυναμίας βαθμού δεν ισχύει, όταν χρησιμοποιείται το παγκόσμιο μοντέλο για να συνορθωθούν μετρήσεις σε περιφερειακό επίπεδο. Στην περίπτωση αυτή η πραγματική (αριθμητική) αδυναμία βαθμού του συστήματος είναι  $p^2$  και για να αντιμετωπιστεί εισάγονται δεσμεύσεις για περισσότερα του ενός τόξα υπό τη μορφή πλεονάζουσών δεσμεύσεων. Οι πλεονάζουσες δεσμεύσεις, αν και αντιμετωπίζουν την αδυναμία βαθμού του συστήματος, εισάγουν τις αναπόφευκτες παραμορφώσεις στις συνορθωμένες ποσότητες.

Όπως και στην περίπτωση του περιφερειακού μοντέλου, μέρος του ακτινικού τροχιακού σφάλματος δεν γίνεται αντιληπτό κατά τη διαδικασία της συνόρθωσης στις τομές των ίχνων. Τα υπολοιπόμενα τροχιακά σφάλματα λαμβάνουν τη μορφή μιας αμετάβλητης ελεύθερης επιφάνειας και περιγράφουν το μηδενικό χώρο των κανονικών εξισώσεων. Η επιφάνεια παραμόρφωσης είναι το αποτέλεσμα της ομογενούς λύσης του συστήματος και προσδιορίζεται με ανάλογες διαδικασίες με την περίπτωση του περιφερειακού μοντέλου. Η επιφάνεια στην περίπτωση του παγκόσμιου τομεακού μοντέλου έχει τη μορφή:

$$D(\mu_{ij}) = s_1 \cos(\mu_{ij}) + s_2 \sin(\mu_{ij}) + s_3 \quad (3.58)$$

όπου  $s_1$ ,  $s_2$  και  $s_3$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος μετάθεσης της ομογενούς λύσης. Η μορφή της επιφάνειας είναι η ίδια για τα τόξα ανόδου και καθόδου και με την κατάστρωση των εξισώσεων παρατήρησης απαλείφεται από τις σχέσεις. Μετά από μελέτη προσομοίωσης του τροχιακού σφάλματος [70] η επιφάνεια παραμόρφωσης έχει τη μορφή του σχήματος 3.22.



Σχήμα 3.22: Η επιφάνεια παραμόρφωσης στην περίπτωση της χρονολογικής συνόρθωσης παγκόσμιας κλίμακας (σχήμα από [70]).

Η ομογενής λύση του συστήματος που περιγράφει την αμετάβλητη επιφάνεια μπορεί να ερμηνευτεί από τη θεωρητική παρουσίαση του συστήματος των τροχιών. Η αρχική αδυναμία βαθμού των εξισώσεων παρατήρησης οφείλεται, όπως αναφέρθηκε, στην αβεβαιότητα για το σύστημα αναφοράς των παραμέτρων περιγραφής του τροχιακού σφάλματος. Η ελεύθερη

επιφάνεια περιγράφει το χώρο μέσα στον οποίο μπορεί να κινείται το σύνολο του συστήματος των τομών, δίχως να επηρεάζονται τα αποτελέσματα της συνόρθωσης. Η μορφή της επιφάνειας μπορεί να προσδιοριστεί μόνον όταν είναι γνωστή η συνάρτηση του ακτινικού τροχιακού σφάλματος, γεγονός που συμβαίνει μόνο τις μελέτες προσομοίωσης. Η αβεβαιότητα στη θέση του γενικότερου σχηματισμού μπορεί να εξαλειφθεί με την εισαγωγή δεσμεύσεων που θα περιγραφούν στο γενικευμένο παγκόσμιο μοντέλο.

Από τις μελέτες προσομοίωσης παρατηρείται ότι η παγκόσμια συνόρθωση τόξων δεν είναι δυνατό να ανακατασκευάσει πλήρως το τροχιακό σφάλμα, αφού παρατηρούνται υπολοιπόμιστα σφάλματα στις συχνότητες  $2\omega_e$ ,  $\omega_o - \omega_e$ ,  $\omega_o + \omega_e$  και  $2(\omega_o - \omega_e)$ , όπου  $\omega_e = \Omega - \theta$  η φαινόμενη συχνότητα περιστροφής της Γης, δηλαδή ο ρυθμός περιστροφής της Γης σε σχέση με το επίπεδο της δορυφορικής τροχιάς και  $\omega_o = \omega + M$  η συχνότητα περιφοράς του δορυφόρου. Τα σφάλματα αυτά έχουν συστηματικό χαρακτήρα και δεν μπορούν να αναγνωριστούν. Ακόμα και σε μελέτες προσομοίωσης, στις οποίες η γνώση του τροχιακού σφάλματος οδηγεί στον προσδιορισμό της ελεύθερης επιφάνειας, το τροχιακό σφάλμα δεν ανακατασκευάζεται εντελώς με τη χρονολογική συνόρθωση παγκόσμιας κλίμακας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ίδια τη μέθοδο μοντελοποίησης: Εφόσον τα τόξα δεν λαμβάνονται ως συνεχή τμήματα, αλλά περιορίζονται σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, παρατηρείται ασυνέχεια στα όρια των επιλεγμένων τομών. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, μόνο στην πραγματικά παγκόσμια θεώρηση η αδυναμία βαθμού του συστήματος αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή ελάχιστων δεσμεύσεων. Σε διαφορετική περίπτωση η συνόρθωση οδηγείται αναπόφευκτα στην εισαγωγή πλεοναζουσών δεσμεύσεων και στην παραμόρφωση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης.

Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα, το μοντέλο της παγκόσμιας συνόρθωσης κατά τομείς, αν και εξετάζει λεπτομερέστερα το πρόβλημα του ακτινικού τροχιακού σφάλματος, δεν παρουσιάζει τα αναμενόμενα αποτελέσματα, λόγω του περιορισμού στα μήκη των τόξων, την απαίτηση περίπου ίσων μηκών και την εξάρτηση από την επιλογή της συνάρτησης που περιγράφει το μοντέλο του σφάλματος.

### Γενικευμένο παγκόσμιο μοντέλο συνόρθωσης

Οι περιορισμοί που εισάγει το μοντέλο της παγκόσμιας συνόρθωσης κατά τομείς οδήγησε στη βελτίωσή του με την μελέτη του γενικευμένου μοντέλου, το οποίο εξετάζει μεγάλο μέρος της δορυφορικής τροχιάς. Οι τροχιές επιλύονται με μια διαδικασία ολοκλήρωσης σε τόξο διάρκειας τριών έως έξι ημερών. Το γενικευμένο μοντέλο εξετάζει το σύνολο της τροχιάς και η εξίσωση περιγραφής του ακτινικού σφάλματος έχει τη μορφή [68], [77]:

$$\Delta r(t) = \sum_{k=0}^N a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t \quad (3.59)$$

Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε για την αντιμετώπιση των προβλημάτων από την επίπεδη συνόρθωση (αδυναμία ανάλυσης μεγάλων τροχιακών τόξων, απλοποιήσεις στη διαδικασία συνόρθωσης, απομάκρυνση των συνιστωσών των ωκεάνιων σημάτων) και την παγκόσμια συνόρθωση τομέων (ιδιομορφίες στα άκρα των τομέων, απαίτηση ίσου μήκους τόξων, αδυναμία ανακατασκευής συγκεκριμένων συχνοτήτων του σφάλματος).

Για την αντιμετώπιση των ιδιομορφιών του συστήματος, το ακτινικό τροχιακό σφάλμα περιγράφεται σε συνάρτηση με τους συντελεστές του πεδίου βαρύτητας, όπως προτείνεται από τον Wagner [82]. Οι Sandwell et al. [68] παρουσίασαν τη μορφή της αμετάβλητης ελεύθερης επιφάνειας που περιγράφει το μηδενικό χώρο των κανονικών εξισώσεων ως συνάρτηση των συντελεστών του γήινου πεδίου έλξης  $C_{lm}$  και  $S_{lm}$ , των συναρτήσεων κλίσης  $F_{lmp}$ , οι οποίες αποτελούν το μετασχηματισμό των σφαιρικών αρμονικών στο επίπεδο της τροχιάς και των θεμελιωδών συχνοτήτων φαινόμενης περιστροφής της Γης  $\omega_e$  και της τροχιάς του δορυφόρου  $\omega_o$ . Στην περίπτωση αυτή, το γεωγραφικά συσχετισμένο σφάλμα, το οποίο οπτικοποιείται με τη δημιουργία της ελεύθερης επιφάνειας, εξαρτάται άμεσα από τα σφάλματα στον προσδιορισμό των συντελεστών του γήινου πεδίου έλξης και η προσέγγισή της βελτιώνεται με τη βελτίωση

της γνώσης για το πεδίο. Η επιφάνεια του γεωγραφικά συσχετισμένου σφάλματος δίνεται από [68]:

$$D(\phi, \lambda) = \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) [A_{lm} \cos \psi_{lmp} + B_{lm} \sin \psi_{lmp}], \quad (3.60)$$

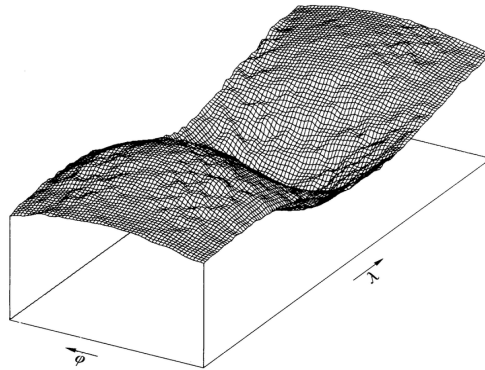
όπου

$$A_{lm} = \left\{ \begin{array}{ll} C_{lm} & l-m : \text{περιττός} \\ -S_{lm} & l-m : \text{άρτιος} \end{array} \right\} \quad \text{και} \quad B_{lm} = \left\{ \begin{array}{ll} S_{lm} & l-m : \text{περιττός} \\ C_{lm} & l-m : \text{άρτιος} \end{array} \right\} \quad (3.61)$$

και

$$\psi_{lmp} = (l-2p)\omega_o + m\omega_e \quad (3.62)$$

Ο βαθμός ανάπτυξης της σειράς  $l_{max}$  λαμβάνει συνήθως την τιμή 2, αφού το μεγαλύτερο μέρος του γεωγραφικά συσχετισμένου ακτινικού τροχιακού σφάλματος συγκεντρώνεται γύρω από τις συχνότητες των 0, 1 και 2 κύκλων ανά δορυφορική περιστροφή [70], [67]. Η μορφή της επιφάνειας παραμόρφωσης φαίνεται στο σχήμα 3.23. Η σχέση της επιφάνειας παραμόρφωσης



Σχήμα 3.23: Η επιφάνεια παραμόρφωσης στην περίπτωση του γενικευμένου μοντέλου συνόρθωσης (σχήμα από [70]).

που δίνεται από τους Sandwell et al [68] με το γεωγραφικά συσχετισμένο τροχιακό σφάλμα που περιγράφηκε από τους Tapley and Rosborough [78], τον Rosborough [64] και τον Engelis [25] αναλύεται από τον Rummel [67] και τον Balmino [7]. Η επιφάνεια παραμόρφωσης αναπαριστά και στην περίπτωση αυτή το γεωγραφικά συσχετισμένο ακτινικό τροχιακό σφάλμα, το οποίο δεν είναι δυνατό να ανιχνευτεί κατά τη συνόρθωση στις τομές των τόξων.

Ανάλυση των ιδιοτιμών του πίνακα σχεδιασμού [70], [67] έδειξε ότι η αδυναμία βαθμού στην περίπτωση αυτή έχει την τιμή  $p = 9$ . Για την αντιμετώπιση της αδυναμίας βαθμού του συστήματος χρησιμοποιούνται η ελαχιστοποίηση της υβριδικής νόρμας [87], η χρήση ελάχιστων δεσμεύσεων και η εισαγωγή των εσωτερικών δεσμεύσεων.

Μια πρώτη αντιμετώπιση για τη λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων είναι η ελαχιστοποίηση της υβριδικής νόρμας. Με την εισαγωγή αυτού του κριτηρίου ελαχιστοποίησης αναζητείται η βέλτιστη λύση, η οποία ελαχιστοποιεί τα σφάλματα των παρατηρήσεων και, επιπλέον, η ομαλότερη λύση, η οποία ελαχιστοποιεί τις τιμές των αγνώστων παραμέτρων. Η ελαχιστοποίηση της υβριδικής νόρμας έχει τη μορφή [87]:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{xx} \mathbf{x} = \min, \quad (3.63)$$

όπου  $\mathbf{v}$  τα σφάλματα των παρατηρήσεων,  $\mathbf{P}$  ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων,  $\mathbf{x}$  οι άγνωστες παράμετροι και  $\mathbf{P}_{xx}$  ο εκ των προτέρων πίνακας βάρους. Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει τη μορφή:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_{xx}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b}. \quad (3.64)$$

Η εισαγωγή του πίνακα  $\mathbf{P}_{xx}$  απομακρύνει το πρόβλημα της αδυναμίας βαθμού της συνόρθωσης στις τομές των τροχιακών ίχνων. Το σύνθητες πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στις περιπτώσεις ελαχιστοποίησης της υβριδικής νόρμας είναι η επιλογή των πινάκων βάρους. Ο πίνακας  $\mathbf{P}$  λαμβάνεται συνήθως ως ένας διαγώνιος πίνακας, ο οποίος περιγράφει τη στατιστική συμπεριφορά των παρατηρούμενων διαφορών στις τομές. Ικανοποιητικά αποτελέσματα λαμβάνονται και με τη χρησιμοποίηση του μοναδιαίου πίνακα στην περίπτωση ελλειπούς πληροφορίας για τη δομή του  $\mathbf{P}$ . Η επιλογή των τιμών του πίνακα  $\mathbf{P}_{xx}$  αποτελεί το σημαντικότερο πρόβλημα στην περίπτωση αυτή. Ο πίνακας βάρους περιγράφει τη στατιστική συμπεριφορά των αγνώστων παραμέτρων, επομένως κάποια εκ των προτέρων πληροφορία είναι απαραίτητη για το φάσμα του τροχιακού σφάλματος. Συμπεράσματα από μελέτες προσομοίωσης έδειξαν ότι το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος του φάσματος συγκεντρώνεται γύρω από τη συχνότητα του ενός κύκλου ανά περιστροφή. Η πληροφορία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια ρεαλιστική κατασκευή του πίνακα βάρους των αγνώστων. Ο Schrama στηρίχθηκε στη ανάλυση των ιδιοτιμών του συστήματος για την εξαγωγή του πίνακα  $\mathbf{P}_{xx}$  [70]. Η λύση που έδωσε παρουσίαζε διαφορές από το σφάλμα προσομοίωσης, διαφορές τις οποίες απέδωσε στη μη ρεαλιστική επιλογή του πίνακα  $\mathbf{P}_{xx}$ . Ο Tai αναζήτησε την επιλογή της μεταβλητότητας  $\sigma$ , αφού θεώρησε ότι  $\mathbf{P}_{xx} = \sigma \mathbf{I}$  [77]. Οι LeTraon et al. [54] θεώρησαν μη διαγώνια μορφή του πίνακα  $\mathbf{P}_{xx}$ . Ένας συντελεστής συσχέτισης 0.7 αποδόθηκε στις διαδοχικές άγνωστες παραμέτρους για τη βέλτιστη προσέγγιση του τροχιακού σφάλματος. Στον τομέα της επιλογής του πίνακα βάρους των αγνώστων απαιτείται περαιτέρω έρευνα.

Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος της αδυναμίας βαθμού είναι η εισαγωγή κατάλληλων δεσμεύσεων. Οι δεσμεύσεις αυτές δεν πρέπει να ξεπερνούν τον αριθμό της αδυναμίας βαθμού, γιατί οι πλεονάζουσες δεσμεύσεις που εισάγονται στην περίπτωση αυτή οδηγούν στην παραμόρφωση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης. Μια πρώτη πρόταση για την εισαγωγή δεσμεύσεων στο πρόβλημα παρουσιάστηκε από τους Sandwell et al. [68]. Οι δεσμεύσεις μπορούν να λάβουν τη μορφή απευθείας μετρήσεων των αποστάσεων του δορυφόρου από χαρακτηριστικές, φυσικές ή τεχνητές, ανακλώμενες επιφάνειες, όπως είναι λίμνες ή ειδικά διαμορφωμένοι ανακλαστήρες στη στεριά. Η θέση των ανακλώμενων επιφανειών πρέπει να είναι γνωστή σε ένα γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς, κάτι το οποίο είναι εφικτό με μεγάλη ακρίβεια χρησιμοποιώντας τις σύγχρονες τεχνικές προσδιορισμού θέσης. Το μεγάλο πλεονέκτημα των δεσμεύσεων αυτού του τύπου είναι η άμεση σύνδεση με τη φυσική πραγματικότητα του συστήματος. Το ύψος  $h$  της ανακλώμενης επιφάνειας από το ελλειψοειδές αναφοράς υπολογίζεται γνωρίζοντας τις γεωκεντρικές συντεταγμένες της επιφάνειας. Το πραγματικό ύψος  $h^*$  του δορυφόρου επάνω από το ελλειψοειδές αναφοράς επηρεάζεται από το ακτινικό τροχιακό σφάλμα  $\Delta r$ . Η απόσταση του δορυφόρου από την ανακλώμενη επιφάνεια είναι η μέτρηση  $\rho$ . Απευθείας μετρήσεις της απόστασης αυτής δίνουν την δυνατότητα προσδιορισμού του ακτινικού τροχιακού σφάλματος τη στιγμή που ο δορυφόρος διέρχεται επάνω από τη θέση της επιφάνειας ανάκλασης και επομένως μια δυνατότητα εκτίμησης της γεωγραφικά συσχετισμένης συνιστώσας, που δεν είναι δυνατό να ανιχνευτεί από τις παρατηρήσεις της συνόρθωσης στις τομές των τροχιακών ίχνων. Η σχέση σύνδεσης των ποσοτήτων που αναφέρονται δίνεται ως:

$$\Delta r = h + \rho - h^*. \quad (3.65)$$

Σύμφωνα με τους Sandwell et al. [68], εννέα παγκοσμίως κατανεμημένες επιφάνειες ανάκλασης αρκούν για τη σταθεροποίηση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων. Η βέλτιστη θέση των ανακλώμενων επιφανειών είναι αντικείμενο της σύγχρονης έρευνας.

Τέλος, η λύση που οδηγεί σε πίνακα σφαλμάτων ελάχιστου ίχνους, ανεξάρτητο από την επιλογή του συστήματος αναφοράς, λαμβάνεται με την εισαγωγή των εσωτερικών δεσμεύσεων. Αντίθετα, όμως, με τις δεσμεύσεις που εισάγονται με τις απευθείας μετρήσεις σε ανακλώμενες επιφάνειες, καμιά σύνδεση με τη φυσική πραγματικότητα του συστήματος δεν προκύπτει με τη χρήση των εσωτερικών δεσμεύσεων. Η χρήση των εσωτερικών δεσμεύσεων βοηθά στην αντιμετώπιση του προβλήματος της αδυναμίας βαθμού του συστήματος και οδηγεί σε λύση με ελάχιστο πίνακα συμμεταβλητοτήτων των σφαλμάτων. Όμως καμιά πληροφορία για το σύστημα αναφοράς δεν παρέχεται και καμιά σύνδεση με τη φυσική πραγματικότητα δεν

παρουσιάζεται. Απαιτείται στην περίπτωση αυτή ένα δεύτερο βήμα εξάρτησης του όλου συστήματος των τροχιακών τομών στο σύστημα αναφοράς.

### 3.7 Προσδιορισμός αλτιμετρικού γεωειδούς

Τα αλτιμετρικά δεδομένα που διορθώνονται με τις προαναφερθείσες τεχνικές αποτελούν άμεσες παρατηρήσεις της θαλάσσιας επιφάνειας. Όπως είναι γνωστό, η θαλάσσια επιφάνεια συνδέεται άμεσα με τη θεμελιώδη ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας, το γεωειδές.

Στην περίπτωση που τα αλτιμετρικά γίνουν ανεξάρτητα του χρόνου, δηλαδή χρησιμοποιηθεί μια μέση τιμή στα σημεία παρατήρησης, τότε είναι δυνατό να προσεγγιστεί η επιφάνεια του γεωειδούς, αφού οι εποχιακές διαχρονικές μεταβολές της θαλάσσιας στάθμης έχουν απομακρυνθεί. Ακόμα και στην περίπτωση αυτή όμως, η επιφάνεια που προσεγγίζεται με τη χρησιμοποίηση των αλτιμετρικών δεδομένων και μόνο διαφέρει από την ισοδυναμική επιφάνεια του γεωειδούς κατά ένα σχεδόν στάσιμο σήμα, το οποίο ονομάζεται στάσιμο τμήμα της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας (quasi-stationary dynamic ocean topography). Οι τιμές της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας εξαρτώνται άμεσα από τις φυσικές και χημικές ιδιότητες του νερού στην περιοχή μελέτης και ειδικότερα από την αλατότητα και τη θερμοκρασία. Παγκόσμια μοντέλα χρησιμοποιούνται συνήθως για τον υπολογισμό της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας. Περισσότερα για τις ιδιότητες και τα μοντέλα υπολογισμού της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας δίνονται στο κεφάλαιο 5.

Μετά και την απομάκρυνση του σήματος της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας τα αλτιμετρικά δεδομένα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της επιφάνειας του γεωειδούς, το οποίο στην περίπτωση χρήσης αποκλειστικά αλτιμετρικών δεδομένων ονομάζεται αλτιμετρικό γεωειδές (altimetric geoid). Με την αξιοποίηση των αλτιμετρικών δεδομένων βελτιώθηκε η γνώση για το εξωτερικό πεδίο βαρύτητας και το θαλάσσιο γεωειδές, ιδιαίτερα σε ωκεάνιες περιοχές, στις οποίες οι κλασικοί τρόποι προσέγγισης (θαλάσσια βαρυτημετρία) δεν ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθούν, κυρίως λόγω υψηλού κόστους. Η βελτίωση της γνώσης μας για το πεδίο βαρύτητας πηγάζει από τη δυνατότητα χρησιμοποίησης των δεδομένων της αλτιμετρίας για την πύκνωση των βάσεων με δεδομένα βαρύτητας. Η εφαρμογή της αντίστροφης σχέσης του Stokes, όπως επίσης και η χρήση στατιστικών τεχνικών αποτέλεσαν τα ενδιάμεσα συστήματα μεταξύ των αλτιμετρικών δεδομένων εισόδου και των ανωμαλιών βαρύτητας εξόδου (βλ. κεφ. 6). Παγκόσμιες βάσεις θαλάσσιας βαρύτητας προερχόμενης από αντιστροφή αλτιμετρικών υψομέτρων του γεωειδούς παρουσιάζονται από τους Sandwell and Smith [69] και από τους Knudsen and Andersen [49]. Μια μελέτη προσδιορισμού του γεωειδούς και γενικότερα προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας στην περιοχή της Μεσογείου με συνδυασμό αλτιμετρικών δεδομένων του ERS-1 και του T/P χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής και την τεχνική των μετασχηματισμών Fourier παρουσιάζεται από τους Arabelos and Tziavos [4].

### 3.8 Ανακεφαλαίωση

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στη δορυφορική αλτιμετρία. Παρουσιάστηκε μία ιστορική αναδρομή των μεθόδων παρατήρησης των ωκεανών από το διάστημα και περιγράφηκαν τα χαρακτηριστικά των παλαιότερων, σύγχρονων και μελλοντικών αλτιμετρικών αποστολών. Η δορυφορική αλτιμετρία, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, αποτελεί έναν από τους παράγοντες σύνδεσης των επιστημών της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας και τα αποτελέσματά της συνδέουν την επιφάνεια του γεωειδούς με την επιφάνεια της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας. Αναλύθηκε η αρχή της δορυφορικής αλτιμετρίας και παρουσιάστηκαν οι πηγές των σφαλμάτων που επηρεάζουν τις αλτιμετρικές παρατηρήσεις, καθώς επίσης και οι τρόποι αντιμετώπισής τους. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην περιγραφή της ακτινικής τροχιακής επίδρασης που αποτελεί την κυριότερη αιτία σφάλματος στις παρατηρήσεις. Αναφέρθηκαν οι τρόποι προεπεξεργασίας των παρατηρήσεων, από τη συλλογή τους μέχρι και τη διαθεσιμότητά τους στους

χρήστες. Αναλύθηκαν τρόποι διόρθωσης και αξιολόγησης, καθώς επίσης και τα κυριότερα μοντέλα συνόρθωσης των αλτιμετρικών δεδομένων. Τέλος, παρουσιάστηκαν μέθοδοι προσδιορισμού θαλάσσιου αλτιμετρικού γεωειδούς.

Το κεφάλαιο αυτό, σε συνδυασμό με το επόμενο, που αναφέρεται στις μεθόδους μέτρησης της βαρύτητας στη θάλασσα, περιγράφουν τις κύριες μετρητικές διεργασίες, τα αποτελέσματα των οποίων εισάγονται στους αλγορίθμους της θεωρίας των συστημάτων.



# Βιβλιογραφία

- [1] R. J. Anderle and R. L. Hoskin. Correlated Errors in Satellite Altimetry Geoids. *Geophys. Res. Lett.*, 4(10), pp. 421–423, 1977.
- [2] V. D. Andritsanos, D. Arabelos, S. D. Spatalas and I. N. Tziavos. Mean sea level studies in the Aegean Sea. *Physics and Chemistry of the Earth*, 25/1, pp. 53–56, 2000.
- [3] D. Arabelos and I. N. Tziavos. Sea surface heights in the Mediterranean Sea from Geosat altimeter data. *J. Geophys. Res.*, 95(10), pp. 17947–17956, 1990.
- [4] D. Arabelos and I. N. Tziavos. Combination of ERS-1 and TOPEX altimetry for precise geoid and gravity recovery. *Geophys. J. Int.*, 125, pp. 285–302, 1996.
- [5] *AVISO User Handbook - Merged TOPEX/POSEIDON Products*. AVI-NT-02-101-CN, Third Edition, 1996.
- [6] *AVISO / CALVAL Synthesis Report: TOPEX/POSEIDON Cycles 1 to 181*. AVI-NT-011-315-CN, 1998.
- [7] G. Balmino. Orbit Choice and the Theory of Radial Orbit Error for Altimetry. In *Satellite Altimetry for Geodesy and Oceanography*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 50, pp. 243–315. Springer, 1993.
- [8] R. Barzaghi, M. Brovelli and P. Knudsen. Different cross-over analysis methods applied to altimetric data in the Mediterranean Sea. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, XXXIII(130-131), pp. 121–128, 1991.
- [9] R. Barzaghi, M. Brovelli and F. Sansò. Altimetry Rank Deficiency in Crossover Adjustment. In *Determination of the Geoid*, editors: R. H. Rapp and F. Sansò, IAG Symposia 106, pp. 108–118. Springer, New York, 1991.
- [10] D. Bilitza. International reference ionosphere - status 1995/96. *Advances in Space Research*, 20(9), pp. 1751–1754, 1997.
- [11] D. E. Cartwright. Theory of Ocean Tides with Application to Altimetry. In *Satellite Altimetry for Geodesy and Oceanography*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 50, pp. 99–141. Springer, 1993.
- [12] D. E. Cartwright and A. C. Edden. Corrected tables of tidal harmonics. *Geophysical Journal of the Royal Astron. Society*, 33, pp. 253–264, 1973.
- [13] D. E. Cartwright and R. J. Tayler. New computations of the tide-generating potential. *Geophysical Journal of the Royal Astron. Society*, 23, pp. 45–74, 1971.
- [14] D. B. Chelton. WOCE/NASA Altimeter Algorithm Workshop. Report No. 2, U.S. WOCE Technical Report, Planning Office for WOCE, College Station, Texas, 1988.

- [15] D. B. Chelton. The sea-state bias in altimeter estimates of sea level from collinear analysis of TOPEX data. *Journal of Geophysical Research*, 99, pp. 24995–25008, 1994.
- [16] R. E. Cheney, B. C. Douglas, R. W. Agreen, L. Miller, D. L. Porter and N. S. Doyle. Geosat altimeter geophysical data record user handbook. Report No. NOS NGS 46, NOAA Tech. Memo., Rockville, MD, 1986.
- [17] R. E. Cheney, N. S. Doyle, B. C. Douglas, R. W. Agreen, L. Miller, E. L. Timmerman and D. C. McAdoo. *The Complete Geosat Altimeter GDR Handbook*. NOAA Manual NOS NGS 7, Rockville, MD, 1991.
- [18] O. L. Colombo. Altimetry, Orbits and Tides. Report No. 86180, EG&G Washington Analytical Services Inc., NASA Technical Memorandum, 1984.
- [19] O. L. Colombo. The Global Mapping of Gravity with two Satellites. Report No. 3, Vol. 7, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Delft, Holland, 1984.
- [20] G. E. Cook. Perturbations of Near Circular Orbits by the Earth's Gravitational Potential. *Planetary and Space Sciences*, 14, pp. 433–444, 1966.
- [21] H. Denker. Radial Orbit Error Reduction and Sea Surface Topography Determination Using One Year of GEOSAT Altimeter Data. Report No. 325, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1990.
- [22] R. Eanes and S. Bettadpur. The CSR 3.0 global ocean tide model. Report No. CSR-TM-95-06, Center for Space Research, The University of Texas at Austin, 1995.
- [23] T. Engelis. Analysis of Sea Surface Topography using SEASAT Altimeter Data. Report No. 343, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1983.
- [24] T. Engelis. Global Circulation for SEASAT Altimeter Data. *Marine Geodesy*, 9(1), pp. 45–69, 1985.
- [25] T. Engelis. Radial Orbit Error Reduction and Sea Surface Topography Determination Using Satellite Altimetry. Report No. 377, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1987.
- [26] K. Eren. *Spectral Analysis of GEOS-3 Altimeter Data and Frequency Domain Collocation*. PhD Dissertation, OSU Report no 297, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A., February 1980.
- [27] *ERS1 Altimeter Products User Manual*. C1-EX-MUT-A21-01-CN, 1994.
- [28] *European Space Agency - Report SP-359, Cannes Symposium*, 1992.
- [29] *European Space Agency - Report SP-361, Hamburg Symposium*, 1993.
- [30] L. Fenoglio and E. Groten. Mean Sea Level determination in small ocean basins from altimetry and tide gauge data. *Manuscripta Geodaetica*, 20, pp. 394–407, 1995.
- [31] Y. Fukuda. Precise Determination of Local Gravity Field Using Both the Satellite Altimeter Data and the Surface Gravity Data. Report No. 28, Bulletin of the Ocean Reserach Institute, University of Tokyo, 1990.
- [32] L. L. Fu and G. Pihos. Determining the response of sea level to atmospheric pressure forcing using TOPEX/POSEIDON data. *Journal of Geophysical Research*, 99(C12), pp. 24633–24642, 1994.

- [33] P. Gaspar, F. Ogor and M. Hamdaoui. Analysis and estimation of the Geosat sea state bias. Report No. 96-3056-K1196, Hughes/STX Report, Greenbelt, Maryland, 1996.
- [34] P. Gaspar, F. Ogor, P. Y. LeTraon and O. Z. Zanife. Estimating the sea state bias of the TOPEX and POSEIDON altimeters from crossover differences. *J. Geophys. Res.*, 99(C12), pp. 24981–24994, 1994.
- [35] *The Geosat Altimeter JGM-3 GDRs Handbook*. Internet Resources: <http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/geosat-handbook>, 1997.
- [36] C. C. Goad. An Efficient Algorithm for the Evaluation of Inclination and Eccentricity Functions. *Manuscripta Geodaetica*, 12, pp. 11–15, 1987.
- [37] W. Heiskanen and H. Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co, 1967.
- [38] E. W. Hobson. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Chelsea publishing company, 1965.
- [39] Journal of Geophysical Research, Vol. 100(C12). *Dedicated volume to TOPEX/POSEIDON*, 1995.
- [40] Journal of Geophysical Research, Vol. 84(B8). *Dedicated volume to Geos-3*, 1979.
- [41] Journal of Geophysical Research, Vol. 87(C5). *Dedicated volume to Seasat*, 1982.
- [42] Journal of Geophysical Research, Vol. 88(C3). *Dedicated volume to Seasat*, 1983.
- [43] Journal of Geophysical Research, Vol. 95(C13). *Dedicated volume to Geosat*, 1990.
- [44] Journal of Geophysical Research, Vol. 95(C3). *Dedicated volume to Geosat*, 1990.
- [45] Journal of Geophysical Research, Vol. 99(C12). *Dedicated volume to TOPEX/POSEIDON*, 1994.
- [46] M. H. Kaplan. *Modern Spacecraft Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, 1976.
- [47] W. M. Kaula. *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Co., 1966.
- [48] P. Knudsen. Altimetry for Geodesy and Oceanography. In *Geodesy and Geophysics*, editor: J. Kakkuri, pp. 87–129. Finnish Geodetic Institute, 1992.
- [49] P. Knudsen and O. E. Andersen. Global marine gravity and mean sea surface from multi mission satellite altimetry. In *Proceedings of the IAG Scientific Assembly “Geodesy on the Move, Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica”*, editors: R. Forsberg, M. Feissel and R. Dietrich, pp. 132–137, Rio de Janeiro, Brasil, September 3–9 1997.
- [50] J. Kovalevsky. Lectures in Celestial Mechanics. In *Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 25, pp. 68–114. Springer, 1989.
- [51] C. Lanczos. *Linear Differential Operators*. Dover, 1997.
- [52] C. LeProvost, F. Lyard, J. M. Molines and F. Rabilloud. A hydrodynamic ocean tide model improved by assimilating a satellite altimeter-derived data set. *Journal of Geophysical Research*, 103(C3), pp. 5513–5529, 1998.
- [53] P. Y. LeTraon and F. Ogor. ERS1/2 orbit improvement using TOPEX/POSEIDON: The 2 cm challenge. *J. Geophys. Res.*, 103(C4), pp. 8045–8057, 1998.

- [54] P. Y. LeTraon, J. Stum, J. Dorandeu, P. Gaspar and P. Vincent. Global Statistical Analysis of TOPEX and POSEIDON data. *J. Geophys. Res.*, 99(C12), pp. 24619–24631, 1994.
- [55] E. Livieratos. *Tidal Studies for the Aegean Sea*. PhD Dissertation, no 15, Medd. Geod. Inst., University of Uppsala, 1977.
- [56] J. Marsh, F. Lerch, B. Putney, T. Felsentreger, B. Sanchez, S. Klosko, G. Patel, J. Robbins, R. Williamson, T. Engelis, W. Eddy, N. Chandler, D. Chinn, S. Kapoor, K. Rachlin, L. Braatz and E. Pavlis. The GEM-T2 gravitational model. *Journal of Geophysical Research*, 95(B13), pp. 22043–22071, 1990.
- [57] P. Melchior. *The Tides of Planet Earth*. Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [58] G. T. Mitchum. U.S. WOCE supports global sea level data collection. *WOCE Notes*, 2(6), pp. 10–12, 1990.
- [59] G. T. Mitchum. Comparisons of TOPEX sea surface heights and tide gauge sea levels. *J. Geophys. Res.*, 99(C12), pp. 24541–24553, 1994.
- [60] G. T. Mitchum and B. Kilonsky. Observations of tropical sea level variability from altimeters. In *Oceanographic Application of Remote Sensing*, editors: M. Ideda and F. Dobson. CRC Press, 1994.
- [61] D. Oskam. Sea surface variability in the North Sea as derived from Seasat altimetry. *Geophys. J. Int.*, 100, pp. 1–7, 1990.
- [62] R. H. Rapp. The determination of geoid undulations and gravity anomalies from Seasat altimeter data. *J. Geophys. Res.*, 88, pp. 1552–1562, 1983.
- [63] I. S. Robinson. *Satellite oceanography: An introduction for oceanographers and remote-sensing scientists*. Ellis Horwood, New York, 1985.
- [64] G. W. Rosborough. Satellite Orbit Perturbations Due to the Geopotential. Report No. CSR-86-1, Center for Space Research, The University of Texas at Austin, 1986.
- [65] D. Rowlands. The Adjustment of SEASAT Altimeter Data on a Global Basis for Geoid and Sea Surface Height Determinations. Report No. 325, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1981.
- [66] R. Rummel. Satellite altimetry as part of a geodetic model. In *Proceedings of the I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*, International Association of Geodesy, pp. 757–786, Milano, Italy, June 3–6 1986.
- [67] R. Rummel. Principle of Satellite Altimetry and Elimination of Radial Orbit Errors. In *Satellite Altimetry for Geodesy and Oceanography*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 50, pp. 189–241. Springer, 1993.
- [68] D. T. Sandwell, D. G. Milbert and B. C. Douglas. Global Nondynamic Orbit Improvement for Altimetric Satellites. *J. Geophys. Res.*, 91(B9), pp. 9447–9451, 1986.
- [69] D. T. Sandwell and W. H. F. Smith. Marine gravity anomaly from Geosat and ERS-1 satellite altimetry. *J. Geophys. Res.*, 102(B5), pp. 10039–10045, 1997.
- [70] E. J. O. Schrama. The role of orbit errors in processing of satellite altimeter data. Report No. 33, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Delft, The Netherlands, 1989.

- [71] E. J. O. Schrama. Frozen orbits and their application in satellite altimetry. In *Satellite Altimetry for Geodesy and Oceanography*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 50, pp. 443–452. Springer, 1993.
- [72] E. N. Schwiderski. On charting global ocean tides. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 18, pp. 243–268, 1980.
- [73] C. K. Shum, P. L. Woodworth, O. B. Andersen, G. Egbert, O. Francis, C. King, S. Klosko, C. LeProvost, X. Li, J. M. Molines, M. Parke, R. Ray, M. Schlax, D. Stammer, C. Thierney, P. Vincent and C. Wunsch. Accuracy assessment of recent ocean tide models. *Journal of Geophysical Research*, 102(C11), pp. 25173–25194, 1998.
- [74] H. R. Stanley. The Geos 3 Project. *J. Geophys. Res.*, 84(B8), pp. 3779–3783, 1979.
- [75] R. H. Stewart. *Methods of Satellite Oceanography*. Univ. of California Press, Berkeley, 1985.
- [76] L. G. Taff. *Celestial Mechanics, a Computational Guide for the Practitioner*. John Wiley and Sons, 1985.
- [77] C. K. Tai. Geosat Crossover Analysis in the Tropical Pacific 1. Constrained Sinusoidal Crossover Adjustment. *J. Geophys. Res.*, 93(C9), pp. 10621–10629, 1988.
- [78] B. D. Tapley and G. W. Rosborough. Geographically Correlated Orbit Errors and Its Effect on Satellite Altimetry Missions. *J. Geophys. Res.*, 90(C6), pp. 11817–11831, 1985.
- [79] B. D. Tapley, M. M. Watkins, J. C. Ries, G. W. Davis, R. J. Eanes, S. R. Poole, H. J. Rim, B. E. Schutz, C. K. Shum, R. S. Nerem, F. J. Lerch, J. A. Marshall, S. M. Klosko, N. K. Pavlis and R. G. Williamson. The Joint Gravity Model 3. *J. Geophys. Res.*, 101(B12), pp. 28029–28049, 1996.
- [80] R. Tokmakian. A Note on a Global Comparison of Tide Gauge Sea Levels with a Model's Sea Surface Heights. Internet address: [http://vislab-www.nps.navy.mil/~rtt/paper/sea\\_level.html](http://vislab-www.nps.navy.mil/~rtt/paper/sea_level.html), 1996.
- [81] R. Vieira and C. de Toro. Ocean tide charts in the Mediterranean Sea. *Mare Nostrum, GEOMED Report*, 2, pp. 55–74, 1993.
- [82] C. A. Wagner. Radial Variations of a Satellite Orbit Due to Gravitational Errors: Implications for Satellite Altimetry. *J. Geophys. Res.*, 90(B4), pp. 3027–3036, 1985.
- [83] J. W. Wahr. Deformation of the Earth induced by polar motion. *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 90, pp. 9363–9368, 1985.
- [84] H. Wilhelm, W. Zürn and H. G. Wenzel (eds.). *Tidal Phenomena*. Lecture Notes in Earth Sciences No 66. Springer, 1997.
- [85] *World Ocean Circulation Experiment - WOCE*. Internet resources: <http://www.soc.soton.ac.uk/OTHERS/woceipo/ipo.html>, U.S. Home Page: [www-ocean.tamu.edu/WOCE/uswoce.html](http://www-ocean.tamu.edu/WOCE/uswoce.html), 1990–2002.
- [86] *World Climate Research Project - WCRP*. Internet resources: <http://www.wmo.ch/web/wcrp/wcrp-home.html>, 1990–2002.
- [87] Αθ. Δερμάνης. *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης – Τόμος 1*. Εκδόσεις Ζήτη, 1986.
- [88] Αθ. Δερμάνης. *Διαστημική Γεωδαισία και Γεωδυναμική – GPS*. Εκδόσεις Ζήτη, 1999.

- [89] Α. Ν. Μαυρίδης. *Αστρονομικοί Προσδιορισμοί Θέσεως Ι*. Εκδόσεις Ζήτη, 1986.
- [90] Δ. Ρωσικόπουλος. *Τοπογραφικά δίκτυα και υπολογισμοί*. Εκδόσεις Ζήτη, 1999.
- [91] Σ. Δ. Σπαταλάς. *Συστηματικές επιδράσεις των οργάνων και των θαλάσσιών παλιθροιών στις αστρογεωδαιτικές παρατηρήσεις*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του ΑΠΘ, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, 1995.

## Κεφάλαιο 4

# Η θαλάσσια βαρυτημετρία

### 4.1 Εισαγωγή

Όπως είναι γνωστό, το 71% περίπου της γήινης επιφάνειας καλύπτεται από τους ωκεανούς. Για την ολοκληρωμένη και αξιόπιστη απεικόνιση του γήινου πεδίου βαρύτητας είναι απαραίτητη η πληροφορία σε θαλάσσιες περιοχές. Το θαλάσσιο περιβάλλον, λόγω της φύσης του, παρουσιάζει κάποιες ιδιαιτερότητες, όταν αντιμετωπίζεται ως ένα περιβάλλον μετρήσεων. Η δυναμική του ωκεάνιου περιβάλλοντος σε συνδυασμό με το μέγεθος της μετρητικής επιφάνειας καθιστούν απαραίτητες ταχείες διαδικασίες παρατήρησης, κυρίως λόγω οικονομικών κριτηρίων. Λόγω του ιδιάζοντος περιβάλλοντος των μετρήσεων στις θαλάσσιες εκτάσεις, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κάποιες επιπλέον διορθώσεις. Η όλη μετρητική διαδικασία αντιμετωπίζεται σήμερα με τη βελτίωση των οργάνων και τη βελτιστοποίηση της αξιολόγησης των δεδομένων.

### 4.2 Η μετρητική διαδικασία

Οι μετρήσεις στη θάλασσα πραγματοποιούνται με τη βοήθεια σχετικών βαρυτημέτρων [26], [32]. Η διαδικασία των μετρήσεων στην ξηρά και οι διορθώσεις που εφαρμόζονται στις αρχικές παρατηρήσεις περιγράφονται λεπτομερώς στις αναφορές [26] και [32]. Ειδικότερα, οι μετρήσεις σε ωκεάνιες εκτάσεις μπορεί να πραγματοποιηθούν, είτε στον πυθμένα της θάλασσας, είτε σε ειδικά διαμορφωμένες σχεδίες στην επιφάνεια. Στην πρώτη περίπτωση, οι μετρήσεις είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν όταν [26]:

- Το βαρυτήμετρο βυθίζεται μαζί με τον παρατηρητή στο εσωτερικό ενός υποβρυχίου, ή
- τροποποιείται κατάλληλα, με τρόπο ώστε να είναι δυνατό να βυθιστεί, αντέχοντας την υδροστατική πίεση και παρέχοντας τη δυνατότητα της από απόσταση ανάγνωσης των μετρήσεων και ελέγχου.

Τα τροποποιημένα βαρυτήμετρα (βαρυτήμετρα πυθμένα) αποτελούνται από την κύρια μονάδα μέτρησης της βαρύτητας, η οποία βυθίζεται μέχρι τον πυθμένα, τη μονάδα του κυρίως ελέγχου και την οθόνη προβολής των αποτελεσμάτων, οι οποίες βρίσκονται πάνω στο πλοίο και τα ηλεκτρικά καλώδια σύνδεσης. Η διαδικασία των μετρήσεων είναι ανάλογη με τη διαδικασία μετρήσεων στις ηπειρωτικές εκτάσεις και ελέγχεται από τον παρατηρητή πάνω στο πλοίο. Ανάλογα με την κατάσταση της θαλάσσιας επιφάνειας (sea-state) και τη μορφή του θαλάσσιου πυθμένα, ακρίβειες της τάξης των  $\pm 0.02 \dots 0.2$  mGals είναι δυνατό να επιτευχθούν με την προϋπόθεση ότι έχει εφαρμοστεί έλεγχος της ολίσθησης του οργάνου (drift control) σε κατάλληλους σταθμούς σύνδεσης με το ηπειρωτικό δίκτυο. Οι διορθώσεις και η προεπεξεργασία των παρατηρήσεων στην περίπτωση πόντισης των ειδικά διαμορφωμένων βαρυτημέτρων είναι όμοια με την περίπτωση μετρήσεων σε ηπειρωτικές εκτάσεις και περιγράφονται λεπτομερώς στις αναφορές [26], [32]. Όπως γίνεται αντιληπτό, η μετρητική διαδικασία στην περίπτωση

αυτή δεν είναι ταχεία: 10 με 20 σημεία είναι δυνατό να μετρηθούν στη διάρκεια μιας μέρας [26].

Για την επιτάχυνση των μετρήσεων σε ωκεάνιες εκτάσεις χρησιμοποιούνται βαρυτήμετρα κατάλληλα εξαρτημένα σε κινούμενες σχεδίες. Οι μετρήσεις αυτού του είδους παρέχουν συνεχείς τιμές κατά μήκος της πορείας του πλοίου. Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατή η ταχεία καταγραφή του μεγέθους του διανύσματος της βαρύτητας, με την παράλληλα αναπόφευκτη μέτρηση κάποιων παρεμβολών λόγω της κίνησης του πλοίου και της αστάθειας του μετρητικού μηχανισμού. Η αρχή των μετρήσεων με βαρυτήμετρα που στηρίζονται στην αρχή του ελατηρίου και στην αρχή του εκκρεμούς περιγράφονται στις αναφορές [32], [26], [16] και αναφέρονται, τόσο σε μετρήσεις ηπειρωτικών εκτάσεων, όσο και σε μετρήσεις στη θάλασσα. Μερικά παραδείγματα βαρυτημέτρων, κατάλληλα τροποποιημένων για θαλάσσιες εφαρμογές είναι τα πρώτα GSS2 της Askania [7] και της Lacoste-Romberg [15], το MIT VSA Surface Ship Gravimeter του Τεχνολογικού Ινστιτούτου της Μασσαχουσέτης [31], το BGM-3 της Bell Aerospace [4] και τα GSS30, KSS5, KSS30, KSS31 της Askania [16].

Η διαδικασία των μετρήσεων στη θάλασσα και η επεξεργασία των βάσεων δεδομένων εξελίσσεται σε έξι στάδια [16]:

1. Εξάρτηση του βαρυτημέτρου θαλάσσης σε έναν ηπειρωτικό σταθμό.
2. Διαδικασία μετρήσεων στο θαλάσσιο περιβάλλον.
3. Εκτίμηση της απόκλισης του βαρυτημέτρου λόγω της κόπωσης των μηχανικών μερών.
4. Εφαρμογή των κατάλληλων διορθώσεων.
5. Υπολογισμός του μεγέθους του διανύσματος της βαρύτητας.
6. Προσδιορισμός της ανωμαλίας ελευθέρου αέρα.

Σε καθένα από τα παραπάνω στάδια είναι δυνατό να εμφανιστούν σφάλματα, ανάλογα με την αρχή μέτρησης του βαρυτημέτρου, τις στρατηγικές που ακολουθούνται για την ολοκλήρωση των μετρήσεων, τα σημεία αναφοράς που χρησιμοποιούνται ή την ποιότητα υπολογισμού των απαραίτητων διορθώσεων.

Η βαθμονόμηση του βαρυτημέτρου θαλάσσης χρησιμεύει στον προσδιορισμό και στον έλεγχο των μηχανικών και ηλεκτρονικών σταθερών του και της σταθεροποίησής του στη σχεδία πλεύσης. Είναι απαραίτητη η γνώση της συνάρτησης βαθμονόμησης ενός βαρυτημέτρου για την κατάλληλη μετατροπή των μετρήσεων στις μονάδες του πεδίου βαρύτητας [32], [26]. Η παραπάνω συνάρτηση μοντελοποιείται με τη βοήθεια ενός αθροίσματος πολυωνυμικών όρων χαμηλής τάξης και περιοδικών χρονικών παραμέτρων. Οι παράμετροι του μοντέλου υπολογίζονται συγκρίνοντας τις μεταβολές του πεδίου βαρύτητας σε γνωστά σημεία [16].

Η απόκλιση του βαρυτημέτρου οφείλεται στην κόπωση των μηχανικών μερών του οργάνου και στην επίδραση εξωτερικών παραγόντων, όπως μεταβολές της πίεσης και της θερμοκρασίας, αλλά ακόμη και σε επιδράσεις από τη μεταφορά και τη χρήση του οργάνου στο πεδίο. Η τιμή της απόκλισης υπολογίζεται συνήθως μετά από σύγκριση των μετρήσεων σε σταθμούς αναφοράς, όπου η τιμή της βαρύτητας είναι γνωστή.

Ιδιαίτερη σημασία αποκτά, κατά τη διαδικασία των θαλάσσιων μετρήσεων, η σταθερότητα του βαρυτημέτρου, ειδικότερα όταν εφαρμόζεται η μέθοδος της εξάρτησης από μια σχεδία πλεύσης. Η σχεδία πλεύσης πρέπει να είναι σταθερή, έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται οι επιδράσεις από την κίνηση του σκάφους. Για το λόγο αυτόν, η μετρητική συσκευή τοποθετείται σε μέρος του πλοίου που παρουσιάζει τις μικρότερες αναταράξεις. Η σταθεροποίηση πραγματοποιείται με τη βοήθεια γυροσκοπικών μηχανισμών.

Η διαδικασία των μετρήσεων στο θαλάσσιο περιβάλλον αποτελείται από δύο στάδια [16]:

- Συνδυασμός επίγειων και θαλάσσιων μετρήσεων για τη σωστή σύνδεση των δικτύων.
- Την κύρια διαδικασία μετρήσεων στη θάλασσα.

Οι μετρήσεις σύνδεσης στην προκυμαία, πριν την αναχώρηση του σκάφους, περιλαμβάνουν δύο σειρές μετρήσεων επίγειων και θαλάσσιων. Το γεγονός αυτό επιτρέπει, από τη μια την εξάρτηση των μετρήσεων του βαρυτημέτρου θαλάσσης από σταθμούς αναφοράς, όπου η τιμή της βαρύτητας είναι γνωστή, και από την άλλη, την αναγωγή των μετρήσεων στην μέση στάθμη της θάλασσας. Οι επίγειες μετρήσεις βοηθούν στην εξάρτηση από το βαρυτημετρικό δίκτυο αναφοράς και επιπλέον επιτρέπουν τον υπολογισμό της χρονικής απόκλισης των μετρήσεων λόγω της κόπωσης των ηλεκτρονικών μερών του οργάνου. Για την εξάρτηση των θαλάσσιων μετρήσεων χρησιμοποιούνται οι κλασικές σχέσεις, οι οποίες λαμβάνουν υπόψη το υψόμετρο της προκυμαίας σε σχέση με τις μεταβολές της στάθμης της θάλασσας [6]. Οι θαλάσσιες μετρήσεις συνοδεύονται πάντοτε με μετρήσεις ηχοβολιστικών συσκευών, ώστε να καθίσταται δυνατή η αναγωγή των μετρήσεων στη μέση στάθμη της θάλασσας.

Μετά τη σύνδεση με το ηπειρωτικό δίκτυο ακολουθεί η διαδικασία μετρήσεων στο θαλάσσιο περιβάλλον. Κάθε δευτερόλεπτο, δεδομένα πλοήγησης αποστέλλονται στο τμήμα ελέγχου του βαρυτημέτρου. Τα στοιχεία αυτά σχετίζονται με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος τη στιγμή της μέτρησης και τη διεύθυνση και ταχύτητα του σκάφους. Τα στοιχεία αυτά είναι απαραίτητα για την εφαρμογή των κατάλληλων διορθώσεων στις μετρήσεις του βαρυτημέτρου. Σε διάστημα μερικών δευτερολέπτων, το σύστημα ελέγχου του βαρυτημέτρου στέλνει το μετρητικό σήμα, το οποίο αποτελείται από την ημερομηνία, την ώρα, τις διορθώσεις και τις τελικά υπολογισμένες τιμές των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα και Bouguer. Το στίγμα του πλοίου τη στιγμή της μέτρησης, όπως επίσης και τα δεδομένα ανωμαλιών ελευθέρου αέρα και Bouguer αποτελούν τα τελικά στοιχεία της βάσης των βαρυτημετρικών δεδομένων.

## 4.3 Οι διορθώσεις των μετρήσεων στη θάλασσα

### 4.3.1 Μετρήσεις σε κινούμενες σχεδίες

Οι μετρήσεις σε κινούμενες σχεδίες στη διάρκεια πλεύσης του σκάφους παρέχουν συνεχείς τιμές κατά μήκος της γραμμής πλεύσης του πλοίου. Για σταθερή ταχύτητα της σχεδίας  $v$ , η τιμή του μετρούμενου μεγέθους της βαρύτητας, όντας συνάρτηση της διαδρομής του σκάφους, μπορεί να μετασχηματιστεί σε συνάρτηση του χρόνου  $t$  [26]:

$$g = g(v \cdot t). \quad (4.1)$$

Η τιμή της μέτρησης που καταγράφεται από το θαλάσσιο βαρυτήμετρο επηρεάζεται από διαταρακτικές επιταχύνσεις (disturbing accelerations) μεγάλης ποικιλίας μεγεθών και συχνοτήτων. Οι διαταράξεις αυτές είναι συναρτήσεις συνθηκών ανεξάρτητων από τη μετρητική συσκευή (κατάσταση της επιφάνειας της θάλασσας, άνεμος, στροβιλισμοί), του τύπου κατασκευής της σχεδίας (επιφανειακή, υποβρύχια), του ελέγχου πλοήγησης της σχεδίας και της εφαρμογής του οργάνου στη σχεδία.

Η κατακόρυφη συνιστώσα των διαταρακτικών επιταχύνσεων επιδρά άμεσα στη μέτρηση του μεγέθους του διανύσματος της βαρύτητας (διαταρακτική επίδραση πρώτης τάξης), ενώ η οριζόντια συνιστώσα προκαλεί ποικίλες επιδράσεις, μειώνοντας συνήθως την πραγματική τιμή της βαρύτητας. Η οριζόντια επίδραση εξαρτάται από τον τοπικό προσανατολισμό του μετρητικού συστήματος σε σχέση με τη διεύθυνση της κατακόρυφου και τη διεύθυνση της επιτάχυνσης (διαταρακτική επίδραση δεύτερης τάξης).

Μια άλλη κατηγορία επιδράσεων είναι η επίδραση των αδρανειακών επιταχύνσεων (inertial accelerations), οι οποίες οφείλονται στη σχετική κίνηση της σχεδίας ως προς τη Γη.

### 4.3.2 Διαταρακτικές επιταχύνσεις κατά την κατακόρυφο

Το μέγεθος του διανύσματος της βαρύτητας είναι δυνατό να διαχωριστεί επιτυχώς από τις διαταρακτικές επιταχύνσεις που επιδρούν στη διεύθυνση της κατακόρυφου μόνο στην περίπτωση που το εύρος των συχνοτήτων των τελευταίων είναι διαφορετικό από την επιθυμητή δομή του

πεδίου βαρύτητας (τεχνικές φιλτραρίσματα) ή στην περίπτωση που είναι διαθέσιμη εξωτερική πληροφορία (κατάσταση πλεύσης).

Οι επιδράσεις των διαταράξεων είναι δυνατό να περιοριστούν με την εφαρμογή μη περιοδικού φιλτραρίσματος (damping). Το φίλτρο πρέπει να έχει μία γραμμική επίδραση, η οποία μπορεί να επαληθευτεί μετά από εργαστηριακές μετρήσεις προσομοίωσης. Οι διαταράξεις μικρής περιόδου είναι δυνατό να μειωθούν με εφαρμογή κατάλληλου χαμηλοπερατού φίλτρου. Η διαδικασία φιλτραρίσματος σχετίζεται με την εύρεση της συνάρτησης απόκρισης παλμού ακολουθώντας κατάλληλα κριτήρια ελαχιστοποίησης. Τα κριτήρια και η εύρεση της συνάρτησης σύνδεσης των σημάτων εισόδου και εξόδου αναφέρονται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 6. Τόσο αναλογικά, όσο και ψηφιακά φίλτρα είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για την ελαχιστοποίηση των κατακόρυφων επιδράσεων.

### 4.3.3 Οριζόντιες διαταραχτικές επιταχύνσεις

Το σύστημα των θαλάσσιων μετρήσεων είναι δυνατό να έχει τη δυνατότητα ελεύθερων ταλαντώσεων (gimbal-suspended) ή να εξαρτάται από μία σχεδία με γυροσκοπικό μηχανισμό, ο οποίος εξαναγκάζει το σύστημα σε οριζόντια ευθυγράμμιση. Εάν με  $a_x$  και  $a_y$  συμβολίζονται οι συνιστώσες κατά τη διεύθυνση  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, η οριζόντια διαταραχτική επιτάχυνση δίνεται από [26]:

$$h(t) = (a_x^2 + a_y^2)^{1/2}. \quad (4.2)$$

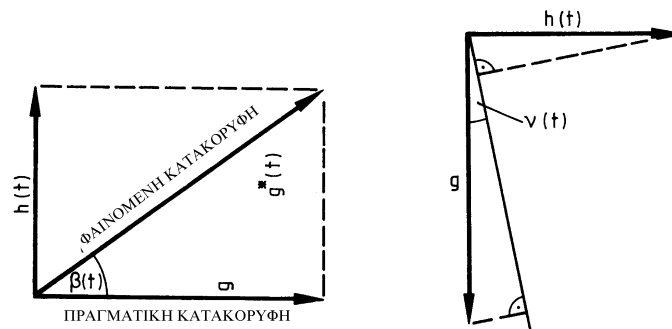
Στην πρώτη περίπτωση, το σύστημα ευθυγραμμίζεται με την επίδραση της βαρύτητας, της κατακόρυφης επίδρασης των διαταράξεων και της οριζόντιας επίδρασης των διαταράξεων. Η παρατηρούμενη ποσότητα φαίνεται στο σχήμα 4.1 και ισούται, αν αγνοήσουμε την επίδραση των κατακόρυφων επιταχύνσεων, με:

$$g^*(t) = (g^2 + h(t)^2)^{1/2} \quad (4.3)$$

Η φαινόμενη γωνία της κατακόρυφου δίνεται από:

$$\beta(t) = \frac{h(t)}{g}. \quad (4.4)$$

Η επίδραση των οριζόντιων διαταραχτικών επιταχύνσεων συμβάλλει στη μεγιστοποίηση της



Σχήμα 4.1: Επιδράσεις των οριζόντιων διαταραχτικών επιταχύνσεων (σχήμα από [26]).

τιμής της βαρύτητας. Για την αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού χρησιμοποιείται η διόρθωση Brownie, η οποία δίνεται από την εξίσωση [26]:

$$\delta g_{Br} = g - g^* = -\frac{h(t)^2}{2g} = -\frac{g}{2}\beta(t)^2. \quad (4.5)$$

Οι αριθμητικές δυσκολίες στον προσδιορισμό της διόρθωσης Browne στην περίπτωση μεγάλων οριζόντιων διαταραχτικών επιταχύνσεων ( $> 0.5 \text{ m/sec}^2$ ) και η ανάπτυξη γυροσκοπικών μηχανισμών υψηλής σταθερότητας, είχαν ως αποτέλεσμα τη μη χρησιμοποίηση της μεθόδου αυτής από τα μέσα του 1960. Η εγκατάσταση του μετρητικού συστήματος σε γυροσκοπικούς μηχανισμούς υψηλής σταθερότητας παρέχει σήμερα οριζοντιώσεις υψηλής ακριβείας ( $\pm 1'$  και καλύτερες).

Τα υπολοιπούμενα σφάλματα ελέγχου οριζοντίωσης προκαλούν επιπλέον αποκλίσεις και επηρεάζουν την τιμή της μέτρησης ονομάζονται **σφάλματα μη-επιπεδότητας** (off-leveling errors). Όπως διακρίνεται και από το σχήμα 4.1, η γωνία κλίσης  $\nu(t)$ , η οποία προκαλείται από την οριζόντια επιτάγχυνση  $h(t)$  οδηγεί σε μια μετρούμενη τιμή που δίνεται από:

$$g^* = g \cos \nu(t) + h(t) \sin \nu(t), \quad (4.6)$$

και για μικρή τιμή της γωνίας

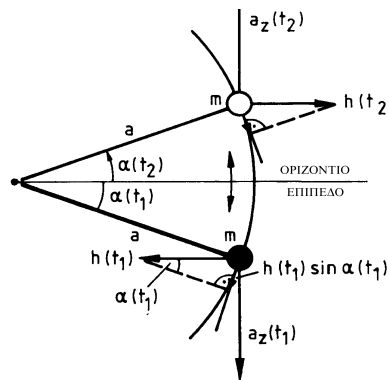
$$g^* = g \left( 1 - \frac{\nu(t)^2}{2} \right) + h(t)\nu(t). \quad (4.7)$$

Από την παραπάνω σχέση, η διόρθωση λόγω του φαινομένου της μη-επιπεδότητας δίνεται ως εξής:

$$\delta g_{off} = g - g^* = g \frac{\nu(t)^2}{2} - h(t)\nu(t). \quad (4.8)$$

Όπως φαίνεται, η διόρθωση μη-επιπεδότητας χωρίζεται σε ένα στατικό μέρος που σχετίζεται με στατική συνιστώσα της κλίσης και ένα δυναμικό παράγοντα που αφορά στη δυναμική κίνηση του σκάφους. Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία τα σφάλματα μη-επιπεδότητας είναι γενικά μικρά, της τάξης των 0 έως 3 mGal [22].

Φαινόμενα **δια-σύνδεσης** (cross-coupling) είναι δυνατό να συμβούν στα βαρυτήμετρα οριζόντιου ελατηρίου στρέψης τύπου Lacoste and Romberg και Graff-Askania [32]. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει όταν το στέλεχος που συνδέει το ελατήριο με τη μάζα δεν είναι οριζοντιωμένο. Στην περίπτωση αυτή, οι οριζόντιες επιταχύνσεις του πλοίου θα έχουν μια συνιστώσα κάθετη στο στέλεχος και για το λόγο αυτόν μη διακριτή από τις κατακόρυφες διαταράξεις [30]. Η διόρθωση της δια-σύνδεσης, σε αντίθεση με τη διόρθωση της μη-επιπεδότητας, εξαρτάται έντονα από την πορεία του σκάφους στη θάλασσα [25], [22]. Το φαινόμενο της δια-σύνδεσης φαίνεται στο σχήμα 4.2. Η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάγχυνσης  $a_z(t)$  προκαλεί την



Σχήμα 4.2: Το φαινόμενο της δια-σύνδεσης στα βαρυτήμετρα οριζόντιου ελατηρίου στρέψης (σχήμα από [26]).

απόκλιση  $\alpha(t)$  του στελέχους και η οριζόντια επιτάγχυνση  $h(t)$ , ενεργώντας μετά από μια συγκεκριμένη διαφορά φάσης, προκαλεί μια επιπλέον στρέψη. Η ανάγνωση του βαρυτημέτρου λαμβάνεται ως

$$g^* = g - h(t)\alpha(t). \quad (4.9)$$

Στην περίπτωση περιοδικής κίνησης με ίσες περιόδους στα  $a_z, h, \alpha$

$$h = h_0 \sin \omega t, \quad \alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \chi), \quad (4.10)$$

και ολοκληρώνοντας σε όλη την περίοδο  $T$ , η διόρθωση της δια-σύνδεσης δίνεται από [26]:

$$\delta \bar{g}_{CC} = \bar{g} - \bar{g}^* = \frac{1}{2} h_0 \alpha_0 \cos \chi. \quad (4.11)$$

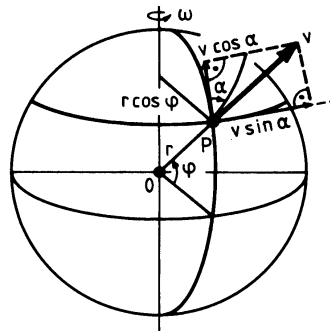
Το φαινόμενο της δια-σύνδεσης παρουσιάζεται μέγιστο στην περίπτωση που η γωνία  $\chi$  λαμβάνει την τιμή  $0^\circ$  ή  $180^\circ$ . Υπολογίζεται από συνεχείς μετρήσεις του  $\alpha(t)$  και του  $h(t)$  [25]. Οι επιδράσεις του φαινομένου είναι δυνατό να ελαχιστοποιηθούν με συνεχή επαναπροσδιορισμό του βραχίονα ως προς τον ορίζοντα, με μετρήσεις μετάβασης-επιστροφής κάτω από όμοιες συνθήκες ή με συνδυασμό μετρήσεων δύο βαρυτημέτρων που σχηματίζουν γωνία  $180^\circ$  μεταξύ τους.

#### 4.3.4 Αδρανειακές επιταχύνσεις λόγω της γήινης περιστροφής

Ανάλογα με την πορεία, την ταχύτητα και το γεωγραφικό πλάτος της θέσης του πλοίου, η ανάγνωση του βαρυτημέτρου επηρεάζεται από ένα επιπλέον σφάλμα. Στην περίπτωση που η πορεία του σκάφους είναι προς τα ανατολικά, η ταχύτητα του σκάφους προστίθεται στην ταχύτητα περιστροφής της Γης προκαλώντας μια αύξηση της φυγόκεντρου δύναμης και επομένως μια ελάττωση στην ανάγνωση της βαρυτημετρικής τιμής [16]. Υποθέτοντας ένα σφαιρικό γήινο μοντέλο και ένα στοχαστικό, στάσιμο μετρητικό σύστημα, το οποίο περιστρέφεται μαζί με τη Γη, η τιμή της βαρύτητας δίνεται από [26]:

$$g = \frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \cos^2 \phi, \quad (4.12)$$

όπου  $GM$  είναι το γινόμενο της μάζας της Γης με τη σταθερά παγκόσμιας έλξης,  $\omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης,  $r$  η ακτινική απόσταση από το γεώκεντρο και  $\phi$  το γεωγραφικό πλάτος. Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης Colioris, η ταχύτητα της πλατφόρμας αναλύεται σε δύο συνιστώσες: μία κατά τη διεύθυνση Ανατολής-Δύσης και μία κατά τη διεύθυνση Βορρά-Νότου (βλ. και σχήμα 4.3). Η πρώτη συνιστώσα προστίθεται στην (αφαιρείται από



Σχήμα 4.3: Οι επιταχύνσεις λόγω της γήινης περιστροφής (σχήμα από [26]).

την)  $\omega$  ως γωνιακή ταχύτητα  $v \cdot \sin \alpha / (r \cdot \cos \phi)$  στην περίπτωση πλοίου που κινείται προς τα ανατολικά (δυτικά), όπου  $\alpha$ , το αζιμούθιο πλευσης. Ο δεύτερος όρος προκαλεί μια φυγόκεντρη επιτάχυνση κατά το μεσημβρινό. Σε ένα κινούμενο μετρητικό σύστημα παρατηρείται τελικά η τιμή [26]:

$$g^* = \frac{GM}{r^2} - \left( \omega + \frac{v \sin \alpha}{r \cos \phi} \right)^2 r \cos^2 \phi - \left( \frac{v \cos \alpha}{r} \right)^2 r. \quad (4.13)$$

Η διόρθωση Eötvös (Eötvös correction) εφαρμόζεται στις παρατηρούμενες βαρυτημετρικές τιμές στη θάλασσα για την απαλοιφή των αδρανειακών επιταχύνσεων. Η διόρθωση αυτή σε σφαιρική προσέγγιση δίνεται από την εξίσωση [26]:

$$\delta g_E = g - g^* = 2\omega v \cos \phi \sin \alpha + \frac{v^2}{r}. \quad (4.14)$$

Στην περίπτωση μετρήσεων στη θάλασσα η διόρθωση μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής ( $r = R = 6371 \text{ km}$ ) [26]:

$$\delta g_E = 400v \cos \phi \sin \alpha + 0.12v^2 \quad mGal \quad (4.15)$$

Για τον ακριβή υπολογισμό της διόρθωσης Eötvös είναι απαραίτητη συνεχής πληροφορία σχετικά με την κατάσταση πλεύσης. Εφαρμόζοντας το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων και θεωρώντας τις μετρήσεις ασυσχέτιστες, υπολογίζεται η επίδραση στον προσδιορισμό της διόρθωσης από τα σφάλματα στη μέτρηση των  $v$ ,  $\alpha$  και  $\phi$ , όταν οι μετρούμενες πληροφορίες πλεύσης θεωρούνται ασυσχέτιστες μεταξύ τους:

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta g_E}^2 &= (400 \cos \phi \sin \alpha + 0.24v)^2 \sigma_v^2 \\ &+ (-400v \sin \phi \sin \alpha)^2 \sigma_\phi^2 \\ &+ (400v \cos \phi \cos \alpha)^2 \sigma_\alpha^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Σε μετρήσεις κατά μήκος ενός γεωδαιτικού παραλλήλου (μεσημβρινού), απαιτούνται υψηλές ακρίβειες στον προσδιορισμό των ταχυτήτων (αζιμουθίων). Η ταχύτητα του πλοίου πρέπει να υπολογίζεται με μια ακρίβεια της τάξης των  $\pm 0.1 \dots 0.2 \text{ km/h}$  και το αζιμούθιο με ακρίβεια  $\pm 0.5^\circ$ . Σε παγκόσμια κλίμακα, οι παραπάνω ακρίβειες επιτυγχάνονται με τη βοήθεια των δορυφορικών συστημάτων προσδιορισμού θέσης, όπως είναι το G.P.S.

## 4.4 Οι πηγές των σφαλμάτων

Οι μετρήσεις βαρύτητας στη θάλασσα είναι δυνατό να ταξινομηθούν σε δύο διαφορετικές κατηγορίες: Μετρήσεις που αναφέρονται σε συγκεκριμένη περίοδο από ένα φορέα και μετρήσεις που πραγματοποιούνται σε διαφορετικές περιόδους ή από διαφορετικούς φορείς. Διαφαίνεται, λοιπόν, τόσο η ανάγκη αξιολόγησης των μετρήσεων εσωτερικά, στα πλαίσια μιας συγκεκριμένης αποστολής, όσο και η ανάγκη βέλτιστου συνδυασμού των μετρήσεων από διαφορετικούς φορείς. Απαραίτητη για τις δύο παραπάνω διεργασίες είναι η ανάλυση των πηγών των σφαλμάτων των μετρήσεων.

### 4.4.1 Πηγές σφαλμάτων στην περίπτωση ομογενών βάσεων

Οι μετρήσεις βαρύτητας στη θάλασσα θεωρούνται ομογενείς από τη στιγμή που ανήκουν σε κοινή μετρητική αποστολή. Τα σφάλματα στις μετρήσεις βαρύτητας στη θάλασσα είναι δυνατό να διακριθούν σε πέντε κυρίαρχους τύπους [16]:

1. Τα σφάλματα στο σταθμό αναφοράς, τα οποία σχετίζονται με τα σφάλματα σύνδεσης που οφείλονται, είτε στο βαρυτήμετρο στη στεριά, είτε στην κακή ποιότητα του βαρυτημετρικού σταθμού.
2. Τα σφάλματα που οφείλονται στο βαρυτήμετρο θάλασσας.
3. Τα σφάλματα εξαιτίας του γεγονότος ότι το μετρητικό σύστημα βρίσκεται επάνω σε ένα κινούμενο πλοίο (παρασιτικές επιταχύνσεις, μη οριζόντιωση βάσης).
4. Τα σφάλματα εξαιτίας της αβεβαιότητας στις εκτιμήσεις των διορθώσεων (διόρθωση Eötvös).

5. Τα σφάλματα που οφείλονται στην αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του πλοίου.

Για την απόκτηση μετρήσεων ομοιογενούς ακρίβειας διαφορετικοί τύποι φίλτρων και διορθώσεων εφαρμόζονται στις παρατηρήσεις για την ελαχιστοποίηση των περισσοτέρων σφαλμάτων καταγραφής (μηχανισμού των μετρήσεων) [24], [25] και των σφαλμάτων που οφείλονται σε κακές συνθήκες μετρήσεων ή απλώς σε άλλες επιδράσεις, όπως η επίδραση του φαινομένου Eötvös.

#### Παράγοντες σφαλμάτων στην επίγεια βαρυτημετρία

Το βαρυτήμετρο είναι μια συσκευή μέτρησης πολύ ευαίσθητη. Κάθε περίπτωση διαταραχής του εδάφους καταγράφεται από τα μηχανικά μέρη του οργάνου. Οι διαταραχές αυτές μπορεί να οφείλονται, είτε σε αίτια μικροσεισμικά, είτε λόγω της κατάστασης της θάλασσας και του αέρα κοντά στο σημείο σύνδεσης στην προβλήτα, είτε, τέλος, λόγω των διαταράξεων που είναι δυνατό να προκληθούν από το πέρασμα ενός μεγάλου οχήματος, το οποίο κινείται κοντά στο σημείο μέτρησης. Σε αυτές τις περιπτώσεις αρκεί η διακοπή των μετρήσεων έως ότου παύσουν οι διαταράξεις. Η παρουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων επηρεάζει τις μετρήσεις. Απαιτείται η αποφυγή πραγματοποίησης μετρήσεων σε ένα περιβάλλον με ισχυρές ηλεκτρομαγνητικές επιδράσεις. Το γεγονός αυτό γίνεται αντιληπτό από τη δυσκολία στη σταθεροποίηση της ανάγνωσης του οργάνου. Για τη διόρθωση των παραπάνω σφαλμάτων προτείνεται η διαδικασία των μετρήσεων να πραγματοποιείται κατ' ελάχιστο δύο φορές (μετάβαση και επιστροφή) [16].

#### Επίδραση παρασιτικών επιταχύνσεων

Η επίδραση των αδρανειακών επιταχύνσεων είναι σημαντική. Όπως έχει αναφερθεί για την ακριβή προσέγγιση της επίδρασης αυτής απαραίτητη είναι η όσο το δυνατό ακριβέστερη γνώση της θέσης και της πορείας του πλοίου. Πριν το 1967, με τις παραδοσιακές τεχνικές προσδιορισμού της θέσης του πλοίου, ο λανθασμένος προσδιορισμός των αδρανειακών επιδράσεων οδηγούσε σε πολύ χαμηλές ακρίβειες μέτρησης του πεδίου βαρύτητας στη θάλασσα. Με την έλευση των σύγχρονων συστημάτων προσδιορισμού θέσης (π.χ., G.P.S.) οι ακρίβειες αυτές βελτιώθηκαν σημαντικά. Όσον αφορά στις οριζόντιες και κατακόρυφες διαταραχτικές επιταχύνσεις, αυτές επηρεάζονται σημαντικά από τον τύπο του οργάνου και την κατάσταση της θάλασσας [16]. Συμπερασματικά, ο έλεγχος του συνόλου των διαταραχτικών επιταχύνσεων εξαρτάται κυρίως από τρεις παράγοντες:

- Τις μετεωρολογικές συνθήκες τη στιγμή των μετρήσεων.
- Τη διεύθυνση πλεύσης.
- Τον προσδιορισμό της θέσης του σκάφους.

#### Επίδραση του εντοπισμού θέσης

Σφάλματα στον εντοπισμό της θέσης του πλοίου έχουν ως αποτέλεσμα σφάλμα στον υπολογισμό της διόρθωσης Eötvös και στις γεωγραφικές συντεταγμένες της βάσης των δεδομένων. Μια λανθασμένα υπολογισμένη πορεία πλεύσης είναι δυνατό να υποβαθμίσει μια βαρυτημετρική όδευση, ειδικά στις περιπτώσεις ζωνών με ισχυρές μεταβολές της τιμής της βαρύτητας (π.χ., ζώνες υποθαλάσσιων οροσειρών). Το σφάλμα στη βάση δεδομένων θα είναι μεγαλύτερο όσο μεγάλες είναι και οι μεταβολές του πεδίου βαρύτητας στην περιοχή των μετρήσεων. Στη σημερινή εποχή με την εξέλιξη των συστημάτων προσδιορισμού θέσης ακρίβειας (π.χ., G.P.S.), τα παραπάνω φαινόμενα είναι αμελητέα.

#### 4.4.2 Η προεπεξεργασία των θαλάσσιων βαρυτημετρικών δεδομένων

Οι μετρήσεις στη θάλασσα είναι δυνατό να περιέχουν διάφορα χονδροειδή σφάλματα. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας των πολλαπλών διορθώσεων που απαιτείται να εφαρμόζονται στις πρω-

τογενείς μετρήσεις. Η ύπαρξη αυτών των διορθώσεων πολλαπλασιάζει την πιθανότητα χονδροειδών σφαλμάτων στις μετρήσεις.

Το πρώτο βήμα για την αξιολόγηση των μετρήσεων πραγματοποιείται με τον εντοπισμό των χονδροειδών σφαλμάτων. Αφού οι μετρήσεις είναι συσχετισμένες στο χώρο, είναι δυνατή η σύγκριση μιας παρατήρησης με την τιμή πρόγνωσης στο ίδιο σημείο, η οποία προέρχεται από τις γειτονικές τιμές. Η πρόγνωση βασίζεται στο μοντέλο της σημειακής πρόγνωσης [21] και η διαδικασία δε διαφέρει καθόλου από την αναγνώριση των χονδροειδών σφαλμάτων στις επίγειες μετρήσεις βαρύτητας [28]. Για την αποφυγή αλληλοσυσχετίσεων μεταξύ των χονδροειδών σφαλμάτων και των συστηματικών σφαλμάτων ολίσθησης, επιλέγονται για την πρόγνωση γειτονικά με το σημείο ελέγχου σημεία, τα οποία ανήκουν στις μετρήσεις του ίδιου πλοίου και της ίδιας γραμμής πλεύσης. Καταρχήν, από τις μετρήσεις βαρύτητας αφαιρείται η συνεισφορά ενός παγκόσμιου μοντέλου βαρύτητας. Η συνάρτηση συμμεταβλητότητας υπολογίζεται εμπειρικά από τις παρατηρήσεις και προσαρμόζεται σε κάποιο μοντέλο (π.χ., επίπεδο ή εκθετικό μοντέλο). Η τιμή της πρόγνωσης στο ζητούμενο σημείο  $P$  δίνεται από τη γνωστή σχέση [21]:

$$\Delta g_P = \sum_{i=1}^n C_{iP}^T (C_{ij} + D_{ij})^{-1}, \quad (4.17)$$

όπου  $C_{iP}$ , η συνάρτηση συμμεταβλητότητας μεταξύ της παρατήρησης  $i$  και της τιμής πρόγνωσης στο  $P$ ,  $C_{ij}$ , η συνάρτηση συμμεταβλητότητας των παρατηρήσεων και  $D_{ij}$ , η συνάρτηση συμμεταβλητότητας των σφαλμάτων των παρατηρήσεων. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του  $\Delta g_P$  δίνεται από [28], [1]:

$$\sigma_P^2 (\Delta g_{P(obs)} - \Delta g_{P(pred)}) = C_0 - C_{iP}^T (C_{ij} + D_{ij})^{-1} C_{jP}. \quad (4.18)$$

Μια μέτρηση θα θεωρηθεί ύποπτη για την ύπαρξη χονδροειδούς σφάλματος στην περίπτωση που η διαφορά ανάμεσα στην παρατηρούμενη τιμή και στην τιμή που υπολογίζεται από την εφαρμογή του μοντέλου της βέλτιστης σημειακής πρόγνωσης ξεπερνά κάποιο όριο, δηλαδή

$$|\Delta g_{P(obs)} - \Delta g_{P(pred)}| > k \cdot \sigma_P (\Delta g_{P(obs)} - \Delta g_{P(pred)}), \quad (4.19)$$

όπου η παράμετρος  $k$  λαμβάνει συνήθως την τιμή 2 ή 3 (διαστήματα εμπιστοσύνης πιθανότητας 95.44% και 99.74%, αντίστοιχα). Εξαιτίας της αβεβαιότητας στην τιμή των γειτονικών σημείων, ο έλεγχος πραγματοποιείται και μετά την απομάκρυνση των υπόπτων μετρήσεων. Με τον τρόπο αυτόν, τυχούσες επιδράσεις γειτονικών σημείων με χονδροειδή σφάλματα απομακρύνονται. Τα σημεία με τα χονδροειδή σφάλματα ταξινομούνται κατά σειρά μεγέθους και απομακρύνονται σταδιακά πριν από κάθε επανάληψη. Η επιτυχία αυτής της μεθόδου εξαρτάται από τη στατιστική ομοιογένεια των δεδομένων.

Ένας άλλος έλεγχος που προτείνεται [2] σχετίζεται με την συσχέτιση των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα με τη βαθυμετρία. Η μέθοδος στηρίζεται στον έλεγχο της συσχέτισης μεταξύ των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα, της διόρθωσης Εϋτνός και της βαθυμετρίας κατά μήκος της γραμμής πλεύσης κάθε πλοίου. Για παράδειγμα, βαθυμετρικά δεδομένα θεωρούνται επηρεασμένα από χονδροειδή σφάλματα, όταν παρατηρείται μια απρόσμενη κλίση στην τιμή διαδοχικών ανωμαλιών ελευθέρου αέρα, ή όταν διαφαίνεται καθαρά η συσχέτιση μεταξύ της ανωμαλίας και της διόρθωσης Εϋτνός.

Τέλος, με την ανάπτυξη των αλτιμετρικών μεθόδων προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας είναι δυνατή η απευθείας σύγκριση των θαλάσσιων δεδομένων με ανωμαλίες βαρύτητας που προέρχονται από την εφαρμογή του αντιστρόφου τελεστή του Stokes στα ύψη της θαλάσσιας επιφάνειας [23], [14].

#### 4.4.3 Η συνόρθωση των θαλάσσιων βαρύτημετρικών δεδομένων

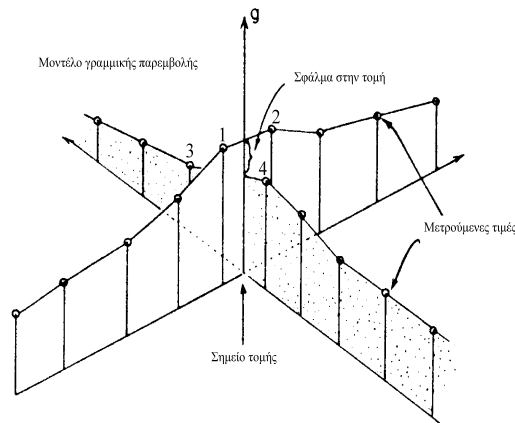
Η διαδικασία της συνόρθωσης των δεδομένων βασίζεται στην ελαχιστοποίηση των συστηματικών σφαλμάτων από τις μετρήσεις. Οι έλεγχοι πραγματοποιούνται συνήθως στις τομές

των διαδρομών των βαρυτημετρικών σκαφών. Η διαδικασία είναι ανάλογη με την ελαχιστοποίηση στις τομές των τροχιακών ιχνών που εφαρμόζεται στη δορυφορική αλτιμετρία, όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις είναι το ότι η φύση του συστήματος μετρήσεων στη θάλασσα είναι απρόβλεπτη και δεν υπακούει σε κάποιους θεμελιώδεις κανόνες, όπως οι εξισώσεις της ουράνιας μηχανικής στην αλτιμετρία, αλλά εξαρτάται έντονα από την κατάσταση της θάλασσας. Για το λόγο αυτόν, η μοντελοποίηση του συστήματος των μετρήσεων στη θάλασσα αποτελεί μια διαδικασία περίπλοκη. Τα σημαντικότερα σφάλματα στις μετρήσεις στη θάλασσα, όπως παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, σχετίζονται με την ποιότητα της πλοήγησης του σκάφους, όπως επίσης και με την ακρίβεια μέτρησης των βαρύτημέτρων θαλάσσης. Τα τελευταία χρόνια με την εξέλιξη της τεχνολογίας και την εισαγωγή των μοντέρνων μεθόδων προσδιορισμού θέσης (G.P.S.) το μέγεθος των σφαλμάτων στις θαλάσσιες μετρήσεις βαρύτητας έχει μειωθεί στα 2-3 mGal.

Παρόλ' αυτά, είναι γενικά αποδεκτό ότι οι αβεβαιότητες μοντελοποίησης της θαλάσσιας κατάστασης, όπως και η γενικότερη αστάθεια στην πλοήγηση επιδρούν αρνητικά στην περαιτέρω βελτίωση της ακρίβειας. Επιπρόσθετα, η ανάγκη αξιοποίησης παλαιότερων μετρήσεων, χαμηλότερης γενικά ακρίβειας, σε συνδυασμό με τις νέες, οδήγησαν στην προσπάθεια βελτίωσης της ποιότητας των δεδομένων με την εισαγωγή μοντέλων συνόρθωσης και κατάλληλων στατιστικών ελέγχων για την ελαχιστοποίηση των συστηματικών σφαλμάτων.

Η επίδραση του προσδιορισμού θέσης στα θαλάσσια βαρυτημετρικά δεδομένα εμφανίζεται με δύο μορφές: μία άμεση, η οποία προκαλείται από τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής θέσης μέτρησης και της παρατηρηθείσας και μία έμμεση, η οποία προκαλείται από τα σφάλματα στον υπολογισμό της ταχύτητας και του προσανατολισμού του σκάφους και τελικά της διόρθωσης Eötvös. Ο έλεγχος στα σημεία τομής των γραμμών πλεύσης των πλοίων επηρεάζεται από τα σφάλματα στον προσδιορισμό της θέσης. Η συνδυασμένη επίδραση των σφαλμάτων εντοπισμού θέσης και των σφαλμάτων της μέτρησης οδηγούν στη διαφορετική τιμή των μετρήσεων στα σημεία τομής.

Η γεωμετρία των σημείων στην περιοχή της τομής των ιχνών φαίνεται στο σχήμα 4.4. Στην τομή, η τιμή της βαρύτητας υπολογίζεται συνήθως με τη βοήθεια μοντέλων γραμμικής



Σχήμα 4.4: Η γεωμετρία στο σημείο της τομής (σχήμα από [30]).

παρεμβολής σύμφωνα με [1]:

$$g_0 = g_1 + (g_2 - g_1) \cdot \frac{d_{10}}{d_{12}} \quad (4.20)$$

$$g'_0 = g_3 + (g_4 - g_3) \cdot \frac{d_{30}}{d_{34}} \quad (4.21)$$

όπου  $d_{ij}$  είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων  $i$  και  $j$ . Η ποσότητα  $dg = g'_0 - g_0$  αντιπροσωπεύει την παρατήρηση στη διαδικασία συνόρθωσης στις τομές των γραμμών πλεύσης.

Η βελτίωση της παραπάνω διαδικασίας προέρχεται από τη θεώρηση της ενιαίας φύσης της γραμμής πλεύσης του σκάφους. Η θαλάσσια βαρυτημετρία σχετίζεται με τη συνεχόμενη μετρητική διαδικασία κατά μήκος γραμμών. Ο αριθμός των σημείων που παρατηρούνται είναι πολύ μεγάλος. Τα δεδομένα του πεδίου των παρατηρήσεων αποτελούνται συνήθως από τις συντεταγμένες και την τιμή της βαρύτητας στο σημείο μέτρησης. Η δημιουργία ενός μοντέλου της γραμμής πλεύσης των σημείων είναι δυνατό να κατασκευαστεί προτού την εισαγωγή των μετρήσεων στη διαδικασία της συνόρθωσης. Για το λόγο αυτόν, κάθε γραμμή πλεύσης μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός κάποιων συναρτήσεων βάσης  $F_i$ , χρησιμοποιώντας ως όρισμα τη χρονική παράμετρο  $t$  [13]:

$$x(t) = a_0 F_0(t) + a_1 F_1(t) + \dots + a_{n-1} F_{n-1}(t) \quad (4.22)$$

$$y(t) = b_0 F_0(t) + b_1 F_1(t) + \dots + b_{n-1} F_{n-1}(t) \quad (4.23)$$

όπου  $X - Y$  ένα τοπικό επίπεδο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο ο  $X$  άξονας κατευθύνεται προς την ανατολή και ο  $Y$  άξονας προς το βορρά. Οι συντελεστές  $a_i$  και  $b_i$  προσδιορίζονται με την εφαρμογή του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων και το μοντέλο συνόρθωσης δίνεται από:

$$\mathbf{v} = \mathbf{FA} - \mathbf{L}, \quad (4.24)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T \\ \mathbf{A} &= [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]^T \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} F_0(t_1) & F_1(t_1) & \dots & F_{n-1}(t_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_0(t_m) & F_1(t_m) & \dots & F_{n-1}(t_m) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & F_0(t_1) & F_1(t_1) & \dots & F_{n-1}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & F_0(t_m) & F_1(t_m) & \dots & F_{n-1}(t_m) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Στους παραπάνω πίνακες  $m$  είναι ο αριθμός των παρατηρούμενων σημείων κατά μήκος της γραμμής πλεύσης και  $2n$  ο συνολικός αριθμός των αγνώστων παραμέτρων. Εφαρμόζοντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων  $\phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$  λαμβάνουμε την τελική λύση:

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (4.25)$$

όπου  $\mathbf{P}$  ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων. Οποιασδήποτε μορφής γενικού ή τριγωνομετρικού πολυωνύμου μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διαδικασία της προσαρμογής. Η ανάλυση της γραμμής πλεύσης με αυτόν τον τρόπο οδηγεί σε υπολογισμό των βέλτιστων συντεταγμένων της γραμμής πλεύσης και στον υπολογισμό των βέλτιστων διανυσμάτων της ταχύτητας του σκάφους και του προσανατολισμού [13]:

$$\begin{aligned} \hat{v}_x(p) &= \hat{a}_0 F'_0(t_p) + \hat{a}_1 F'_1(t_p) + \dots + \hat{a}_{n-1} F'_{n-1}(t_p) \\ \hat{v}_y(p) &= \hat{b}_0 F'_0(t_p) + \hat{b}_1 F'_1(t_p) + \dots + \hat{b}_{n-1} F'_{n-1}(t_p) \\ \hat{v}(p) &= \sqrt{\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\hat{\alpha}(p) = \arctan \frac{\hat{v}_x(p)}{\hat{v}_y(p)} \quad (4.27)$$

Στις παραπάνω σχέσεις με  $F'_i(t)$  συμβολίζονται οι παράγωγοι των συναρτήσεων βάσης ως προς τη χρονική παράμετρο. Η εφαρμογή πολυωνυμικών μοντέλων για την περιγραφή της γραμμής

πλεύσης του σκάφους είναι δυνατό να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση μίας συνεχόμενης γραμμής πλεύσης.

Ο συνδυασμός δεδομένων από περισσότερες της μίας βαρυτημετρικές αποστολές πραγματοποιείται στα σημεία τομής των γραμμών πλεύσης με την εισαγωγή της έννοιας των εσωτερικών και εξωτερικών τομών. Μια εσωτερική τομή πραγματοποιείται στην περίπτωση που η γραμμή πλεύσης ενός πλοίου τέμνει τον εαυτό της στη διάρκεια μιας αποστολής. Μια εξωτερική τομή πραγματοποιείται, όταν γραμμές πλεύσης από διαφορετικά πλοία τέμνονται μεταξύ τους. Οι διαφορές στις εσωτερικές τομές είναι συνήθως μικρότερες από τις αντίστοιχες εξωτερικές, εξαιτίας του ότι οι πρώτες έχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά, όπως το ίδιο πλοίο, το ίδιο βαρυτήμετρο και την ίδια θαλάσσια κατάσταση κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Ο έλεγχος στις εσωτερικές τομές πραγματοποιείται κυρίως για τον έλεγχο της ολίσθησης του βαρυτημέτρου.

Τα βήματα για τη συνόρθωση στις τομές των γραμμών πλεύσης έχουν ως εξής:

1. Προσδιορισμός της ολίσθησης για κάθε αποστολή εξετάζοντας τις διαφορές των εσωτερικών τομών.
2. Προσδιορισμός της διαφοράς στάθμης μεταξύ διαφορετικών αποστολών. Τα συστηματικά αυτά σφάλματα οφείλονται συνήθως στην κακή σύνδεση των θαλάσσιων μετρήσεων με τους σταθμούς της στεριάς και ελαχιστοποιούνται με την εξέταση των διαφορών στις εξωτερικές τομές.
3. Τα σφάλματα εξαιτίας της διόρθωσης Eötvös και της δια-σύνδεσης παραμένουν σταθερά, όσο ο προσανατολισμός του πλοίου και η θαλάσσια κατάσταση παραμένουν αμετάβλητα [24]. Το γεγονός αυτό υπαγορεύει την εφαρμογή ξεχωριστών διορθώσεων σε τμήματα μιας γραμμής πλεύσης (legs). Τα τμήματα διακρίνονται ακολουθώντας διάφορα κριτήρια για το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων, την απόσταση και το αζιμούθιο της γραμμής πλεύσης [29], [1].
4. Προσδιορισμός της διαφοράς στάθμης κάθε τμήματος της γραμμής πλεύσης.
5. Τελική συνόρθωση.

Η εξίσωση παρατήρησης για τον υπολογισμό της ολίσθησης κάθε ξεχωριστής γραμμής πλεύσης δίνεται από [1]:

$$g_{i,k}^a = g_{i,k}^b + D_i \cdot t_{i,k}, \quad (4.28)$$

όπου  $k$  ο αριθμός της μέτρησης,  $i$  ο αριθμός της γραμμής πλεύσης,  $g^a$  η πραγματική τιμή της βαρύτητας,  $g^b$  η παρατηρούμενη τιμή,  $D$  η άγνωστη ολίσθηση του βαρυτημέτρου και  $t$  η χρονική παράμετρος. Σε κάθε εσωτερική τομή της γραμμής πλεύσης ισχύει:

$$D_i \Delta t_{i,kk'} = \Delta g_{i,kk'}^b + v_{i,kk'} \quad (4.29)$$

Η τελική λύση δίνεται σε μορφή πινάκων:

$$\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b}, \quad (4.30)$$

όπου  $\mathbf{A}$  ο πίνακας σχεδιασμού των εξισώσεων παρατήρησης, ο οποίος περιέχει τις χρονικές μεταβλητές,  $\mathbf{P}$  ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων και  $\mathbf{b}$  ο πίνακας των παρατηρήσεων (διαφορές στα σημεία τομής).

Τα στοιχεία του πίνακα βάρους των παρατηρήσεων  $\mathbf{P}$  υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη τα σφάλματα των μετρήσεων και τα σφάλματα στον εντοπισμό της θέσης, μετασχηματίζοντας το σφάλμα στην πλοήγηση σε βαρυτημετρικό σφάλμα χρησιμοποιώντας την τιμή της αντίστοιχης ανωμαλίας Bouguer. Ακολουθώντας την ανάλυση των Adjaout and Sarraillh [2], τίθεται  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_{p'}$  η ακρίβεια του προσδιορισμού θέσης για τα σημεία των τεμνουσών γραμμών πλεύσης,  $\epsilon_g$  και  $\epsilon_{g'}$  η ακρίβεια των αντίστοιχων μετρήσεων βαρύτητας στην τομή, οπότε η κλίση στην πορεία είναι:

$$\begin{aligned} \nabla h &= (h_2 - h_1)/d_{12} \\ \nabla h' &= (h_4 - h_3)/d_{34}, \end{aligned}$$

όπου  $h_k$  το βάθος στο σημείο  $k$ , και, τέλος, το σφάλμα προσδιορισμού θέσης κατά την κατακόρυφο:

$$\begin{aligned}\delta h &= \epsilon_p \cdot \nabla h \\ \delta h' &= \epsilon_{p'} \cdot \nabla h'.\end{aligned}$$

Το αντίστοιχο σφάλμα στην ανωμαλία της βαρύτητας δίνεται από:

$$\delta g = 0.0419 \cdot 1.67 \cdot \max(|\delta h|, |\delta h'|) \quad (4.31)$$

και λαμβάνουμε την a-priori τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ως:

$$\sigma = \max(\delta g, \epsilon_g, \epsilon_{g'}) \quad (4.32)$$

Τυπικές τιμές για το  $\sigma$  είναι της τάξης των 5–20 mGal και το βάρος  $p = 1/\sigma^2$  εφαρμόζεται σε κάθε εξίσωση παρατήρησης.

Ο έλεγχος στα σημεία των εξωτερικών τομών πραγματοποιείται για τον έλεγχο των διαφορών στάθμης μεταξύ διαφορετικών αποστολών. Στο σημείο  $k$  της αποστολής  $j$  η πραγματική τιμή της βαρύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$g_{k,j}^a = g_{k,j}^b + b_j, \quad (4.33)$$

όπου  $g_{k,j}^b$  η διορθωμένη από την ολίσθηση παρατηρούμενη τιμή. Η εξίσωση παρατήρησης στην τομή των γραμμών πλεύσης  $i$  και  $j$  είναι:

$$b_i - b_j = \Delta g_{i,j}^b + v_{i,j}. \quad (4.34)$$

Σε αντιστοιχία με τα κατακόρυφα δίκτυα και τα αλτιμετρικά δεδομένα, ο πίνακας σχεδιασμού των κανονικών εξισώσεων παρουσιάζει αδυναμία βαθμού 1 και στην προκειμένη περίπτωση. Η αδυναμία βαθμού αντιμετωπίζεται συνήθως με τη δέσμευση μιας τιμής της διαφοράς στάθμης, στην περίπτωση που οι συνδέσεις με το ηπειρωτικό δίκτυο έχουν πραγματοποιηθεί με μεγάλη ακρίβεια. Σε μια διαφορετική προσέγγιση, επιλύεται το δίκτυο ως ελεύθερο χρησιμοποιώντας τη λύση των εσωτερικών δεσμεύσεων, η οποία είναι ανεξάρτητη της επιλογής του συστήματος αναφοράς και οδηγεί σε πίνακα συμμεταβλητοτήτων των αγνώστων με ελάχιστο ίχνος. Οι εσωτερικές δεσμεύσεις δίνονται από:

$$\sum_i b_i = 0 \quad (4.35)$$

Αντίστοιχη διαδικασία πραγματοποιείται στην περίπτωση προσδιορισμού της διαφοράς στάθμης για κάθε τμήμα της γραμμής πλεύσης.

Η κατασκευή ενός γενικευμένου μοντέλου σφάλματος με την ανάλυση των διαφορών στις τομές των γραμμών πλεύσης παρουσιάζεται από τους Huang et al. [12]. Η ελαχιστοποίηση των συστηματικών σφαλμάτων αναφέρεται ως μία ειδική διαδικασία φιλτραρίσματος και πρόγνωσης, η οποία επιδιώκει το διαχωρισμό των σημάτων (συστηματικά σφάλματα) από τις παρατηρήσεις (διαφορές στις τομές των γραμμών πλεύσης) με την απομάκρυνση του θορύβου (τυχαία σφάλματα). Τα συστηματικά σφάλματα έχουν χαρακτήρα γραμμικό και περιοδικό [22]. Σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά των μετρήσεων βαρύτητας στη θάλασσα, το μοντέλο των συστηματικών σφαλμάτων μπορεί να πάρει τη μορφή του γενικού πολυωνύμου συναρτήσεως της χρονικής παραμέτρου  $t$  [12]:

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \sum_{i=1}^n (b_i \cos i\omega t + c_i \sin i\omega t), \quad (4.36)$$

όπου  $n$  είναι ένας θετικός ακέραιος,  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα, η οποία αντιπροσωπεύει στην περίοδο διάρκειας των μετρήσεων σε ολόκληρη την γραμμή πλεύσης και  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_i$  και  $c_i$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές του μοντέλου. Το γενικευμένο μοντέλο σφάλματος της (4.36)

αποτελείται από δύο μέρη: Το πρώτο χαρακτηρίζει τη γραμμική τάση του συστηματικού σφάλματος, ενώ το δεύτερο μέρος αντιπροσωπεύει την περιοδική τάση. Η εξίσωση παρατήρησης στην περίπτωση του γενικεύμενου μοντέλου είναι:

$$\Delta g_{ij}^b = F_i(t) - F_j(t) - v_{ij} \quad (4.37)$$

Οι εξισώσεις παρατήρησης σε μορφή πινάκων έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \Delta\mathbf{g}^b, \quad (4.38)$$

όπου  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα των αγνώστων συντελεστών του μοντέλου,  $\mathbf{A}$  ο πίνακας σχεδιασμού και  $\Delta\mathbf{g}^b$  το διάνυσμα διαφορών στις τομές των γραμμών πλεύσης. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι παρόμοιο με το μοντέλο για την περιγραφή του τροχιακού σφάλματος της τροχιάς των αλτιμετρικών δορυφόρων, όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Όπως και στις τομές των τροχιακών ιχνών, έτσι και στις τομές της πορείας των σκαφών στη θάλασσα, ο όλος σχηματισμός είναι αμετάβλητος ως προς κάποιους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Αυτή η αδυναμία καθορισμού του συστήματος αναφοράς περιγράφεται μαθηματικά με την αδυναμία αντιστροφής του πίνακα των κανονικών εξισώσεων. Για την αντιμετώπιση της ιδιομορφίας του συστήματος επιλέγεται, είτε η λύση με εσωτερικές δεσμεύσεις, η οποία όμως δε δίνει λύση στον αυστηρό καθορισμό του συστήματος αναφοράς, είτε η λύση με ελάχιστες δεσμεύσεις, διατηρώντας σταθερό έναν αριθμό χαρακτηριστικών γραμμών πλεύσης. Στην τελευταία περίπτωση αντιμετωπίζεται το πρόβλημα επιλογής της γραμμής πλεύσης αναφοράς και απαιτούνται επιπλέον κριτήρια για τη διαλογή. Η τρίτη πιθανότητα για την αντιμετώπιση της ιδιομορφίας του προβλήματος είναι η εισαγωγή του συστήματος αναφοράς με τη μορφή ψευδο-παρατηρήσεων. Η λύση του συνδυασμένου συστήματος προέρχεται μετά από την κατάλληλη εισαγωγή βάρων ανάμεσα στις πραγματικές και τις ψευδο-παρατηρήσεις [12]:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_a)^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\Delta\mathbf{g}^b + \mathbf{P}_a\mathbf{L}_a), \quad (4.39)$$

όπου  $\mathbf{P}$  είναι ο πίνακας βάρους των παρατηρήσεων,  $\mathbf{L}_a$  είναι το διάνυσμα των ψευδο-παρατηρήσεων και  $\mathbf{P}_a$  ο a-priori πίνακας βάρους. Ο πίνακας  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$  είναι ο πίνακας των συντελεστών των (συμ)μεταβλητοτήτων των συνορθωμένων συντελεστών του μοντέλου σφαλμάτων και δίνεται από:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_a)^{-1}. \quad (4.40)$$

Η διαδικασία συνόρθωσης αυτού του τύπου είναι στην πραγματικότητα μια ειδική μέθοδος φιλτραρίσματος. Σημαντικός παράγοντας στη σύγκλιση της διαδικασίας είναι η επιλογή του πίνακα βάρους των παρατηρήσεων  $\mathbf{P}_a$ . Μια εμπειρική μέθοδο για την επιλογή των στοιχείων του πίνακα  $\mathbf{P}_a$  δίνεται από τους Huang et al. [12]. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο λόγο του σήματος ως προς τον θόρυβο, δηλαδή το λόγο των συστηματικών ως προς τα τυχαία σφάλματα.

Ενδιαφέρον στην περίπτωση χρήσης αναλυτικού μοντέλου για την περιγραφή των συστηματικών σφαλμάτων παρουσιάζει ο έλεγχος της σημαντικότητας του μοντέλου. Ο έλεγχος της σημαντικότητας του μοντέλου πραγματοποιείται μετά τη διαδικασία της συνόρθωσης. Εκτός αυτού, απαιτείται και ο έλεγχος της σημαντικότητας καθενός χωριστά συντελεστή του μοντέλου. Καταρχήν, ο έλεγχος σημαντικότητας στη χρήση του μοντέλου πραγματοποιείται με την ανάλυση των μεταβλητοτήτων. Έστω  $\delta g_i$  είναι οι διαφορές στα σημεία τομής των γραμμών πλεύσης. Εάν  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων,

$$\bar{\delta g} = \sum_{i=1}^n \delta g_i / n \quad (4.41)$$

είναι η μέση τιμή των διαφορών και  $\delta \hat{g}_i$  οι συνορθωμένες διαφορές. Ισχύει [12]:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\delta \hat{g}_i - \bar{\delta g})^2 + \sum_{i=1}^n (\delta g_i - \delta \hat{g}_i)^2 = Q_1 + Q_2, \quad (4.42)$$

όπου  $Q_1$  είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή μετά τη συνόρθωση και  $Q_2$  είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων πριν και μετά τη συνόρθωση. Έστω ότι για την περιγραφή των συστηματικών σφαλμάτων έχει επιλεγεί το αναλυτικό μοντέλο γενικής μορφής:

$$F(t) = a_0 F_0(t) + a_1 F_1(t) + \dots + a_m F_m(t). \quad (4.43)$$

Για τον έλεγχο της σημαντικότητας της χρήσης του μοντέλου χρησιμοποιείται η κατανομή  $F$  και ελέγχεται η μηδενική υπόθεση  $H_0 : a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0$  σε σύγκριση με την εναλλακτική  $H_a : a_i \neq 0$ . Η στατιστική ποσότητα που ελέγχεται είναι [12]:

$$F = \frac{(n - m - 1) \sum_{i=1}^n (\hat{\delta}g_i - \bar{\delta}g)^2}{m \sum_{i=1}^n (\delta g_i - \hat{\delta}g_i)^2}, \quad (4.44)$$

όπου  $m$  είναι ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων του μοντέλου. Για να ισχύει η μηδενική υπόθεση πρέπει:

$$F \leq F_{m,n-m-1}^\alpha. \quad (4.45)$$

Στην περίπτωση που απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, η αποτελεσματικότητα του μοντέλου περιορισμού των συστηματικών σφαλμάτων είναι δεδομένη.

Μετά την εξέταση της αναγκαιότητας στη χρήση του αναλυτικού μοντέλου περιγραφής των συστηματικών σφαλμάτων ακολουθεί ο έλεγχος της σημαντικότητας των συντελεστών του μοντέλου. Η στατιστική ποσότητα που ελέγχεται είναι:

$$t = \frac{|\hat{a}_i|}{\hat{C}_{\hat{x}}(ii)} = \frac{|\hat{a}_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{x}}(ii)}}, \quad (4.46)$$

όπου  $\hat{a}_i$  η εκτίμηση του συντελεστή  $a_i$  του μοντέλου,  $\hat{C}_{\hat{x}}(ii)$  το διαγώνιο στοιχείο του πίνακα (συμ)μεταβλητοτήτων των αγνώστων που αντιστοιχεί στο συντελεστή  $\hat{a}_i$ ,  $Q_{\hat{x}}(ii)$  το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα συντελεστών των (συμ)μεταβλητοτήτων και  $\hat{\sigma}_0$  η εκτίμηση της μεταβλητότητας αναφοράς, η οποία προκύπτει από:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n - m}. \quad (4.47)$$

Στη περίπτωση αυτή ελέγχεται η μηδενική υπόθεση  $H_0 : a_i = 0$  σε σύγκριση με την εναλλακτική  $H_a : a_i \neq 0$ . Η μηδενική υπόθεση γίνεται αποδεκτή, όταν

$$t \leq t_{n-m-1}^\alpha, \quad (4.48)$$

και ο εν λόγω συντελεστής  $a_i$  δεν είναι σημαντικός στην κατασκευή του μοντέλου και πρέπει να απομακρυνθεί. Στη συνέχεια η συνόρθωση επαναλαμβάνεται με το νέο αναλυτικό μοντέλο περιγραφής των συστηματικών σφαλμάτων και ακολουθεί νέος έλεγχος.

## 4.5 Προσδιορισμός θαλάσσιου βαρυτημετρικού γεωειδούς

Μετά την προεπεξεργασία και τη συνόρθωση, οι θαλάσσιες μετρήσεις βαρύτητας κατανέμονται σε βάσεις δεδομένων. Βάσεις δεδομένων αυτής της μορφής είναι, π.χ., η παγκόσμια βάση του Γεωλογικού Παρατηρητηρίου Lamont-Doherty του Πανεπιστημίου Columbia της Νέας Υόρκης, η οποία περιέχει πάνω από 5 εκατομμύρια μετρήσεις [30]. Όπως γίνεται αμέσως αντιληπτό, ο μεγάλος αριθμός των μετρήσεων απαιτεί αυστηρή κωδικοποίηση για την αποφυγή χονδροειδών σφαλμάτων κατά την ταξινόμηση. Μια αρχική μορφή τυποποίησης της κωδικοποίησης των δεδομένων βαρύτητας παρουσιάζεται στο ειδικό τεύχος του Bulletin d'Information που εκδίδεται από το Διεθνές Γραφείο Βαρυτημετρίας (Bureau Gravimétrique International) [5] και ακολουθείται στην παγκόσμια βάση δεδομένων βαρύτητας [27].

Από τη στιγμή που οι μετρήσεις βαρύτητας έχουν προεπεξεργαστεί και συνορθωθεί, οι μέθοδοι προσδιορισμού του θαλάσσιου γεωειδούς δε διαφέρουν από τις αντίστοιχες μεθόδους προσδιορισμού στις ηπειρωτικές εκτάσεις. Χρησιμοποιείται ευρέως η τεχνική της απομάκρυνσης και επαναφοράς των συνιστωσών του πεδίου. Προσδιορισμοί βαρυτημετρικού θαλάσσιου γεωειδούς δίνονται από τους Wessel and Watts [30] για τον Βόρειο Ατλαντικό και από τους Adjaout and Sarrailh [2] για τη θαλάσσια περιοχή γύρω από την Ιαπωνία, όπου πραγματοποιούνται κάποιες συγκρίσεις με το αλτιμετρικό γεωειδές που προέρχεται από το συνδυασμό δεδομένων του T/P, ERS1 και GEOSAT. Στην περιοχή της Μεσογείου παρουσιάστηκε θαλάσσιο βαρυτημετρικό γεωειδές σε κάρναβο  $6' \times 10'$ , που υπολογίστηκε μέσω μετασχηματισμών Fourier από μέσες τιμές ανωμαλιών της βαρύτητας και τους συντελεστές του γεωδυναμικού μοντέλου OSU81. Οι εκτιμήσεις των αποχών του γεωειδούς συγκρίθηκαν με τα δεδομένα του GEOSAT για την περιοχή της Μεσογείου [3]. Τέλος, από το 1991 έως το 1995 επτά επιστημονικές ομάδες εργασίας από έξι κράτη (Ισπανία, Ιταλία, Αυστρία, Ελλάδα, Δανία και Φινλανδία) εργάστηκαν μαζί για τον προσδιορισμό του γεωειδούς στη Μεσόγειο (πρόγραμμα GEOid in the MEditerranean – GEOMED) [8], [9], [10], [11]. Τα βαρυτημετρικά δεδομένα του GEOMED βασίστηκαν σε ψηφιοποιήσεις των χαρτών του Morelli [17], [20], [18], [19].

#### 4.6 Ανακεφαλαίωση

Η μετρητική διεργασία και οι διαδικασίες επεξεργασίας και συνόρθωσης των βαρυτημετρικών παρατηρήσεων στη θάλασσα αποτέλεσαν το κύριο θέμα του κεφαλαίου. Αναλύθηκε ο μεγάλος αριθμός των επιδράσεων στις θαλάσσιες βαρυτημετρικές παρατηρήσεις, λόγω του ιδιόμορφου περιβάλλοντος των μετρήσεων και αναφέρθηκαν οι κυριότερες μέθοδοι αντιμετώπισής τους. Κατηγοριοποιήθηκαν οι πηγές των σφαλμάτων στην περίπτωση βάσεων δεδομένων και περιγράφηκε η προεπεξεργασία και συνόρθωση των παρατηρήσεων. Παρουσιάστηκαν επίσης κατάλληλοι στατιστικοί έλεγχοι για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης και αναλύθηκαν οι μέθοδοι προσδιορισμού του θαλάσσιου βαρυτημετρικού γεωειδούς.

Από όσα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό, διακρίνεται η απαίτηση ιδιαίτερη φροντίδας, τόσο από την πλευρά του παρατηρητή, όσο και από την πλευρά του αναλυτή των δεδομένων της θαλάσσιας βαρυτημετρίας. Η απαίτηση αυτή πηγάζει από το ιδιόμορφο και πολλές φορές δυσλειτουργικό θαλάσσιο περιβάλλον των μετρήσεων. Παρουσιάζονται με αυτόν τον τρόπο, οι βασικές διαφορές μεταξύ των διαδικασιών παρατήρησης στη θάλασσα από απόσταση, όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και των μεθόδων μέτρησης στην επιφάνειά της. Η διαδικασία των παρατηρήσεων πάνω στη θαλάσσια επιφάνεια δίνει το έναυσμα για την ανάλυση των βασικών σχέσεων της ωκεανογραφίας που περιγράφονται στο επόμενο κεφάλαιο.

# Βιβλιογραφία

- [1] A. Adjaout and M. Sarrailh. Validation Methods at BGI and Application to a Test Case. *Bulletin d'Information*, 71, pp. 85–105, 1992.
- [2] A. Adjaout and M. Sarrailh. A new gravity map, a new marine geoid around Japan and the detection of the Kuroshio current. *Journal of Geodesy*, 71, pp. 725–735, 1997.
- [3] D. Arabelos and I. N. Tziavos. Sea surface heights in the Mediterranean Sea from Geosat altimeter data. *J. Geophys. Res.*, 95(10), pp. 17947–17956, 1990.
- [4] R. E. Bell and A. B. Watts. Evaluation of the BGM-3 sea gravity meter system onboard R/V Conrad. *Geophysics*, 51(7), pp. 1480–1493, 1986.
- [5] Bureau Gravimétrique International. *Bulletin d'Information No 70*, 1992.
- [6] Bureau Gravimétrique International. *Bulletin d'Information No 71*, 1992.
- [7] A. Graff and R. Schulze. Improvements on the sea gravimeter GSS-2. *J. Geophys. Res.*, 66, pp. 1813–1821, 1961.
- [8] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 1, Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento, Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1992. Editor: F. Sansò.
- [9] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 2, Instituto de Astronomia y Geodesia, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid, Spain, 1992. Editor: M. J. Sevilla.
- [10] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 3, Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento, Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1993. Editor: F. Sansò.
- [11] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 4, Department of Geodesy and Surveying, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, Greece, 1993. Editors: D. Arabelos and I. N. Tziavos.
- [12] M. Huang, Z. Guan, G. Zhai and Y. Ouyang. On the Compensation of Systematic Errors in Marine Gravity Measurements. To appear in *Marine Geodesy*, 1999.
- [13] M. Huang. Marine gravity surveying line system adjustment. *Journal of Geodesy*, 70, pp. 158–165, 1995.
- [14] P. Knudsen and O. E. Andersen. Global marine gravity and mean sea surface from multi mission satellite altimetry. In *Proceedings of the IAG Scientific Assembly "Geodesy on the Move, Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica"*, editors: R. Forsberg, M. Feissel and R. Dietrich, pp. 132–137, Rio de Janeiro, Brasil, September 3–9 1997.

- [15] L. J. B. LaCoste. Surface ship gravity measurements on the Texas A&M College ship Hidalso. *Geophysics*, 24, pp. 309–322, 1959.
- [16] M.F. Lalancette. Les sources d' erreur en gravimétrie marine. EPSHOM Centre d' Hydrographie, Section Géodésie - Géophysique, BGI Tutorial No 7, 1997.
- [17] C. Morelli. Physiography, Gravity and Magnetism of the Tyrrhenian Sea. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XIII, pp. 275–309, 1970.
- [18] C. Morelli, C. Gantar and M. Pisani. Bathymetry, Gravimetry and Magnetism in the Strait of Sicily and the Jonian Sea. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XVII, pp. 39–58, 1975.
- [19] C. Morelli, C. Gantar and M. Pisani. Geophysical Studies in the Aegean Sea and in the Eastern Mediterranean. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XVII, pp. 128–168, 1975.
- [20] C. Morelli, M. Pisani and C. Gantar. Geophysical Anomalies and Tectonics in the Western Mediterranean. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XVII, pp. 67–, 1975.
- [21] H. Moritz. *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, 2nd edition, Karlsruhe, 1989.
- [22] R. A. Prince and D. W. Forsyth. A simple objective method for minimizing crossover errors in marine gravity data. *Geophysics*, 49(7), pp. 1070–1083, 1984.
- [23] D. T. Sandwell and W. H. F. Smith. Marine gravity anomaly from Geosat and ERS-1 satellite altimetry. *J. Geophys. Res.*, 102(B5), pp. 10039–10045, 1997.
- [24] M. Talwani. Some recent developments in gravity measurements aboard surface ships. In *Gravity Anomalies: Unsurveyed Areas, Geophysical Monograph no 9*. American Geophysical Union, Washington, D.C., U.S.A., 1966.
- [25] M. Talwani, W. P. Early and D. E. Hayes. Continuous Analog Computation and Recording of Cross-Coupling and Off-Leveling Errors. *Journal of Geophysical Research*, 71(8), pp. 2079–2090, 1966.
- [26] W. Torge. *Gravimetry*. de Gruyter, Berlin - New York, 1989.
- [27] D. Toustou. The Gravity Data Base of BGI. *Bulletin d' Information*, 71, pp. 32–42, 1992.
- [28] C. C. Tscherning. The Use of Optimal Estimation for Gross-error Detection in Databases of Spatially Correlated Data. *BGI, Bulletin d' Information*, 68, pp. 79–89, 1991.
- [29] H. G. Wenzel. Sea Gravity Data Adjustment with Program SEAGRA. *Bulletin d' Information*, 71, pp. 59–70, 1992.
- [30] P. Wessel and A. B. Watts. On the Accuracy of Marine Gravity Measurements. *Journal of Geophysical Research*, 93(B1), pp. 393–413, 1988.
- [31] C. G. Wing. MIT Vibrating String Surface-Ship Gravimeter. *J. Geophys. Res.*, 74(25), pp. 5882–5894, 1969.
- [32] Δ. Αραμπέλος. *Στοιχεία Βαρυτημετρίας*. Εκδόσεις Ζήτη, 1985.

## Κεφάλαιο 5

# Η ωκεάνια κυκλοφορία

### 5.1 Εισαγωγή

Από την εποχή των πρώτων θαλασσοπόρων ήταν γνωστές οι κινήσεις του θαλασσίου νερού και οι επιπτώσεις τους στην επιβράδυνση και στην απόκλιση της πορείας ενός πλοίου. Την εποχή αυτή, γνώση της επίδρασης των ωκεάνιων ρευμάτων σήμαινε οικονομικό προβάδισμα έναντι των ανταγωνιστικών χωρών. Προς τα τέλη του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ου παρατηρήθηκαν οι αλληλεξαρτήσεις των κινήσεων των ωκεανών με το γενικότερο κλίμα του πλανήτη. Η κατανόηση των ωκεάνιων ρευμάτων σήμανε την αρχή για την εξήγηση διάφορων μετεωρολογικών φαινομένων. Στο γεγονός αυτό συνέβαλε η ανάπτυξη των δορυφορικών μεθόδων παρατήρησης των θαλασσών της τελευταίας εικοσιπενταετίας και η βελτιστοποίηση στη συλλογή και επεξεργασία των υπερθαλάσσιων και υποθαλάσσιων μετρήσεων. Την τελευταία δεκαετία αναπτύχθηκαν ερευνητικά προγράμματα διεθνών συνεργασιών για τη μελέτη της κίνησης των ωκεανών και την επίδρασή της στην παγκόσμια αλλαγή κλίματος. Τα δύο κυριότερα ερευνητικά προγράμματα είναι το World Ocean Circulation Experiment – WOCE [34], το οποίο αποσκοπεί στην κατανόηση της γενικότερης ωκεάνιας κυκλοφορίας και τη μοντελοποίηση και πρόγνωση των τιμών της σε σχέση με τις ατμοσφαιρικές μεταβολές και το πρόγραμμα Tropical Ocean Global Atmosphere – TOGA [33], το οποίο αποσκοπεί στη λεπτομερέστερη μελέτη των φαινομένων στις τροπικές περιοχές (El Niño, La Niña). Και τα δύο προγράμματα είναι τμήματα του Παγκόσμιου Προγράμματος για την Έρευνα του Κλίματος (World Climate Research Program – WCRP) και πραγματοποιούνται υπό την αιγίδα του Παγκόσμιου Μετεωρολογικού Οργανισμού (World Meteorological Organization – WMO), του Διεθνούς Επιστημονικού Συμβουλίου (International Council of Science – ICS) και της Διακυβερνητικής Ωκεανογραφικής Επιτροπής (Intergovernmental Oceanographic Commission) της UNESCO.

### 5.2 Οι σχέσεις γεωδαισίας – ωκεανογραφίας: Δυναμική θαλάσσια τοπογραφία

Οι σχέσεις της γεωδαισίας με τη φυσική ωκεανογραφία αναφέρονται στην επιφάνεια της θάλασσας. Για τους γεωδαίτες η μέση θαλάσσια επιφάνεια αποτελεί το σημείο αναφοράς των υψομέτρων που χρησιμοποιούνται στις γεωδαιτικές και τοπογραφικές εφαρμογές και για τους ωκεανογράφους η θαλάσσια επιφάνεια αποτελεί το πεδίο παρατηρήσεων. Η σχέση των δύο επιστημών αποδεικνύεται και από το ότι ο γεωδαίτης έχει ανάγκη τις παρατηρήσεις του ωκεανογράφου στη θαλάσσια επιφάνεια για τον ακριβή προσδιορισμό του γεωειδούς στις θαλάσσιες περιοχές και ο ωκεανογράφος έχει ανάγκη τις παρατηρήσεις του γεωειδούς για τον υπολογισμό των απολύτων τιμών των ταχυτήτων των θαλασσίων ρευμάτων σε συγκεκριμένα βάθη [14].

Το άμεσο σημείο αναφοράς μεταξύ των δύο επιστημών είναι η απόκλιση της επιφάνειας του

γεωειδούς από τη μέση θαλάσσια στάθμη. Η απόκλιση αυτή ονομάζεται *δυναμική ωκεάνια τοπογραφία* (dynamic ocean topography) ή *τοπογραφία της θαλάσσιας επιφάνειας* (sea surface topography). Οι προσεγγίσεις του γεωειδούς στις θαλάσσιες περιοχές συναρτώνται κατά κανόνα με την υπόθεση ότι το γεωειδές είναι η ισοδυναμική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας, η οποία συμπίπτει με τη μέση θαλάσσια επιφάνεια μετά από παρατηρήσεις μεγάλης χρονικής διάρκειας. Είναι όμως γνωστό ότι η παραπάνω παραδοχή δεν ισχύει για ακρίβειες προσδιορισμού μικρότερες του μισού μέτρου, αφού η μέση θαλάσσια επιφάνεια αποκλίνει από την επιφάνεια του γεωειδούς, λόγω, κυρίως, των ωκεάνιων ρευμάτων. Τα ωκεάνια ρεύματα, όπως θα παρουσιαστεί και στη συνέχεια, προκαλούνται από την επίδραση των ανέμων, την μεταβολή στην αλατότητα και στη θερμοκρασία των υδάτινων μαζών και σε μεταβολές της πίεσης που σχετίζονται άμεσα με τη γήινη ατμόσφαιρα. Η απόκλιση αυτή μελετάται συνήθως κάτω από παραδοχές γεωστροφικής ροής και υδροστατικής ισορροπίας. Η δυναμική ωκεάνια τοπογραφία διαχωρίζεται συνήθως σε ένα στάσιμο μέρος και σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος, το οποίο οφείλεται στις μεταβολές μικρής χρονικής κλίμακας και σε εποχιακές επιδράσεις. Με την ανάπτυξη των σύγχρονων δορυφορικών μεθόδων παρατήρησης της επιφάνειας των ωκεανών, η προσέγγιση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας είναι δυνατό να υπολογιστεί με καθαρά γεωδαιτικές τεχνικές. Η εξίσωση που συνδέει τη δυναμική ωκεάνια κυκλοφορία *SST* με την αποχή του γεωειδούς *N* και το ύψος της θαλάσσιας στάθμης *SSH*, όπως αυτό προκύπτει από τα αλτιμετρικά δεδομένα, είναι:

$$SSH = SST + N, \quad (5.1)$$

όπου

$$SST = SST_s + SST_d, \quad (5.2)$$

*SST<sub>s</sub>* είναι το σχεδόν στάσιμο μέρος της τοπογραφίας της θαλάσσιας επιφάνειας και *SST<sub>d</sub>* το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος. Η παραπάνω σχέση παραπέμπει στην εξίσωση σύνδεσης ελλειψοειδούς και ορθομετρικού υψομέτρου, ισχύει όμως μετά από διάφορες διορθώσεις που υφίστανται οι μετρήσεις των υψών της θαλάσσιας στάθμης, οι οποίες περιγράφονται αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 3. Ο όρος *SST* αντιπροσωπεύει τον όρο του ορθομετρικού υψομέτρου στη σχέση που ισχύει στις ηπειρωτικές περιοχές και στο λόγο αυτόν οφείλεται η ονομασία θαλάσσια τοπογραφία [26]. Βέβαια η ηπειρωτική με τη θαλάσσια τοπογραφία έχουν ελάχιστα κοινά χαρακτηριστικά και το γεγονός αυτό οδηγεί στη διαφορετική αντιμετώπιση της καθεμιάς. Η θαλάσσια τοπογραφία έχει ένα δυναμικό χαρακτήρα, εφόσον, εκτός από το στάσιμο μέρος της, αποτελείται και από ένα τμήμα, το οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο, σε αντίθεση με την ηπειρωτική τοπογραφία που λαμβάνεται σταθερή. Ακόμη, οι τιμές της θαλάσσιας τοπογραφίας δεν ξεπερνούν τα 2 μέτρα σε αντίθεση με τις μεγάλες τιμές της ηπειρωτικής τοπογραφίας. Οι γεωδαιτικές μέθοδοι εύρεσης της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας αντιμετωπίζουν με επιτυχία το πρόβλημα του ορισμού του *επιπέδου ακινησίας* (level of no motion), καθώς και άλλα προβλήματα που υπάρχουν στις ωκεανογραφικές μεθόδους που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια. Οι αμιγώς ωκεανογραφικές μέθοδοι προσδιορισμού της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας και των συνιστωσών της ωκεάνιας κυκλοφορίας στηρίζονται σε πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις και σε παραδοχές για την κίνηση των υδάτων, όπως επίσης και σε μετρήσεις των ιδιοτήτων των θαλασσών, όπως της αλατότητας και της θερμοκρασίας.

### 5.3 Ιδιότητες θαλασσίου νερού – Μετρήσεις

Από τα μέσα του 19ου αιώνα το πλοίο είναι το βασικό μέσον για τις απευθείας παρατηρήσεις των ιδιοτήτων των ωκεανών. Στις αρχικές περιόδους παρατήρησης αναπτύχθηκαν διάφορες μέθοδοι μέτρησης της θερμοκρασίας και της αλατότητας του θαλασσίου νερού σε συγκεκριμένα βάθη. Στη σημερινή εποχή, αν και η διαδικασία των μετρήσεων έχει βελτιωθεί αισθητά, οι μετρήσεις αυτού του είδους παραμένουν από τις σημαντικότερες πληροφορίες μας για το θαλάσσιο νερό. Στην περίπτωση συνδυασμού μετρήσεων από διαφορετικά πλοία και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και αδιαφορώντας για τις μεταβολές κατά τη διάρκεια των

περιόδων αυτών είναι δυνατή η δημιουργία χαρτών θερμοκρασίας και αλατότητας. Οι μεγάλες κλίσεις στις τιμές της αλατότητας και της θερμοκρασίας οδηγούν στο συμπέρασμα ύπαρξης θαλασσιών ρευμάτων, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

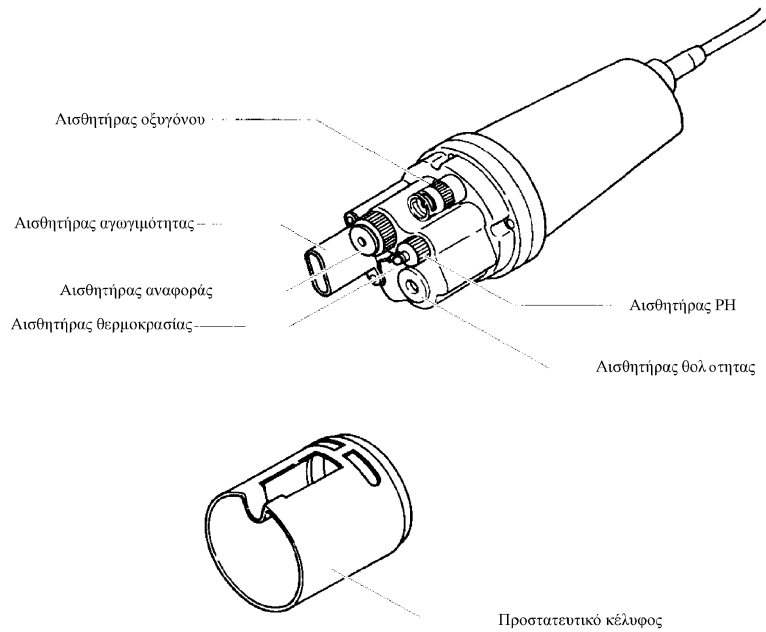
Με την έλευση της ηλεκτρονικής εποχής (μετά το 1960), νέες μορφές ηλεκτρονικών οργάνων μέτρησης των ιδιοτήτων του νερού εμφανίστηκαν. Παρόλα αυτά, ο παραδοσιακός τρόπος παρατήρησης στο θαλάσσιο περιβάλλον δεν μεταβλήθηκε σημαντικά. Το πλοίο παρέμεινε το μέσο μεταφοράς των οργάνων, τα οποία, βυθιζόμενα σε συγκεκριμένους σταθμούς, παρείχαν την τιμή της παρατήρησης. Το βασικό μειονέκτημα του θαλασσιού περιβάλλοντος μετρήσεων σε σύγκριση με το αντίστοιχο ατμοσφαιρικό περιβάλλον έγκειται στην αδυναμία διάδοσης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα από το πρώτο. Έτσι, οι δορυφορικές μετρήσεις περιορίζονται στη θαλάσσια επιφάνεια, ενώ οι μετρήσεις στο εσωτερικό του θαλασσιού μέσου είναι αδύνατο να μεταδοθούν στον παρατηρητή, παρά μόνον μέσω άμεσης φυσικής σύνδεσης. Με την έλευση των σύγχρονων ηλεκτρονικών διατάξεων έγινε δυνατή η τοποθέτηση μόνιμων σταθμών μέτρησης των ιδιοτήτων του θαλασσιού νερού και η παραγωγή χρονικών σειρών των μετρήσεων. Η διαδικασία όμως παρέμεινε η ίδια αφού οι μετρήσεις είναι αδύνατο να εκπεμφθούν από τις συσκευές των μετρήσεων. Επιπλέον, είναι αδύνατος ο έλεγχος της ακριβούς καταγραφής των δεδομένων. Η διάδοση των ηχητικών κυμάτων στο θαλάσσιο νερό χρησιμοποιείται μόλις τα τελευταία χρόνια για τη διάδοση πληροφοριών που συλλέγονται εντός της θάλασσας. Οι ηχητικοί παλμοί συνήθως χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό μετρητικών συσκευών. Η εφαρμογή της ηχητικής διάδοσης στο νερό δεν έχει εξελιχθεί όσο θα μπορούσε στην επιστήμη της ωκεανογραφίας, λόγω της εκμετάλλευσης των εφαρμογών της από την πολεμική βιομηχανία.

Εκτός από την αδυναμία διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων η υψηλή πίεση στα βαθύτερα θαλάσσια στρώματα αποτελεί έναν ανασταλτικό παράγοντα στην επιτυχία των μετρήσεων. Τα όργανα μετρήσεων πρέπει να είναι κατάλληλα διαμορφωμένα, ώστε να αντέχουν τις υψηλές πιέσεις του θαλασσιού νερού και τις συνθήκες μέτρησης σε ένα μέσο, του οποίου η περιεκτικότητα σε αλάτι φτάνει τα 3.5% του βάρους του. Τέλος, το κόστος των ωκεανογραφικών αποστολών, τόσο σε χρόνο, όσο και σε χρήμα είναι ένα ακόμα βασικό εμπόδιο στην αποτελεσματική περιγραφή των υδάτινων ιδιοτήτων.

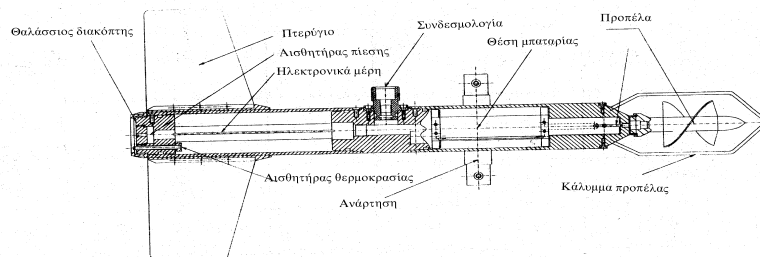
Με τη μέτρηση των φυσικών ιδιοτήτων του θαλασσιού νερού παρέχεται και μια έμμεση πληροφορία για την κίνηση, αφού η τελευταία εξαρτάται και από τις υδάτινες ιδιότητες. Έμμεσες μέθοδοι για τον προσδιορισμό θαλασσιών ρευμάτων περιλαμβάνουν μετρήσεις θερμοκρασίας, αλατότητας και περιεκτικότητας του θαλασσιού νερού σε οξυγόνο. Ένα όργανο μέτρησης αυτού του τύπου είναι ο πολυαισθητήρας Horiba U-10 του Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του Τμήματος Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών. Οι αισθητήρες του οργάνου μετρούν την περιεκτικότητα του νερού σε οξυγόνο, την αγωγιμότητα του νερού, τη θερμοκρασία, τη θολότητα και το pH του θαλασσιού νερού. Το τμήμα των αισθητήρων του οργάνου φαίνεται στο σχήμα 5.1.

Όπως γίνεται αντιληπτό, υπάρχουν και οι άμεσες μέθοδοι μέτρησης, από πολύ απλές κατασκευές έως και εξελιγμένα πολύπλοκα συστήματα. Η μέτρηση της απόκλισης από τη σχεδιασμένη πορεία ενός πλοίου είναι δυνατό να οδηγήσει σε κάποια αρχικά συμπεράσματα για την τάξη μεγέθους των επιφανειακών ρευμάτων στην περιοχή. Για τη μέτρηση ρευμάτων σε μεγάλα βάθη χρησιμοποιούνται ειδικές μετρητικές διατάξεις (π.χ., drogues, Shallow float), οι οποίες εντοπίζονται και εκτιμάται η ταχύτητα κίνησής τους, λόγω των ρευμάτων, με τη χρήση ηχητικών παλμών. Σύγχρονα όργανα μέτρησης των ρευμάτων θεωρούνται οι ρευματογράφοι (current meters), όπως επίσης συσκευές ελεύθερης πτώσης (free-fall devices) και παρατηρούμενες σηματοδότες (telemetry buoys). Οι συσκευές αυτές παρέχουν ακριβείς μετρήσεις των ρευμάτων στο βάθος πόντισης και συνεχή καταγραφή στην εσωτερική μνήμη τους. Τα μηχανικά και ηλεκτρονικά μέρη του ρευματογράφου Valeport-Model 105 του Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του Τμήματος Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών φαίνονται παραστατικά στο σχήμα 5.2.

Σημειώνεται ότι η διαδικασία μετρήσεων των ρευμάτων με τις παραπάνω τεχνικές αν και εμφανίζεται ως η μόνη άμεση μέθοδος μέτρησης, αποτελεί τροχοπέδη στη μελέτη μεγάλων



Σχήμα 5.1: Ο πολυαισθητήρας Horiba U-10.



Σχήμα 5.2: Ο ρευματογράφος Valeport-Model 105.

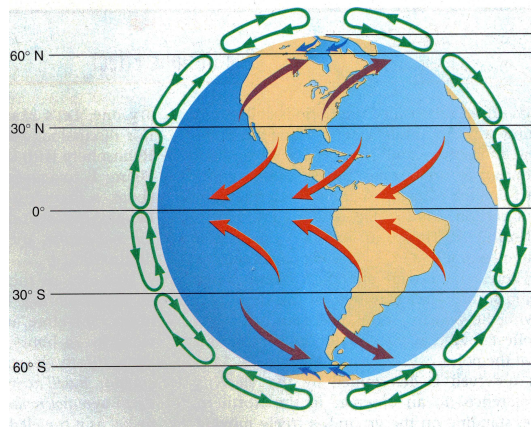
ωκεάνιων εκτάσεων, λόγω του υψηλού κόστους της σε χρόνο και χρήμα. Η εμφάνιση των σύγχρονων αλιμετρικών δορυφόρων και οι συνεχείς μετρήσεις που παρέχουν για τη μορφή της θαλάσσιας επιφάνειας αποτέλεσαν τη μεγάλη επανάσταση στην παρακολούθηση της κίνησης των θαλασσών και στην κατανόηση της αλληλεξάρτησης με τα γήινα κλιματολογικά φαινόμενα.

## 5.4 Αρχές ωκεάνιας κυκλοφορίας

### 5.4.1 Φυσικοί νόμοι και δυνάμεις επίδρασης

Η άμεση σχέση της ατμόσφαιρας με τους ωκεανούς περιγράφεται μέσω της ανταλλαγής ηλιακής ενέργειας. Η ανταλλαγή αυτή είναι η βασική αιτία για τις εναλλαγές του γήινου κλίματος, τη δημιουργία των ανέμων (ατμοσφαιρική κυκλοφορία) και τη δημιουργία των θαλασσιών ρευμάτων (ωκεάνια κυκλοφορία). Για να γίνει κατανοητός ο μηχανισμός ανταλλαγής της ηλιακής ενέργειας πρέπει να εξεταστεί εκ των προτέρων ο τρόπος εισροής της ηλιακής ενέργειας στο γήινο περιβάλλον. Αν αγνοήσουμε προς στιγμή την πραγματική θέση και κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, οι ηλιακές ακτίνες τέμνουν σχεδόν κάθετα τις ισημερινές περιοχές συγκεντρώνοντας την ηλιακή ενέργεια σε μία μικρή έκταση, ενώ στις πολικές περιοχές η ίδια ενέργεια εξαπλώνεται σε μια πολύ μεγαλύτερη έκταση. Η εισερχόμενη ηλιακή ενέργεια επηρεάζεται επίσης από την ύπαρξη της γήινης ατμόσφαιρας: στις πολικές περιοχές οι ηλιακές ακτίνες διαπερνούν μεγαλύτερο ατμοσφαιρικό στρώμα με αποτέλεσμα την ελάττωση της ισχύος τους.

Αυτή η διαφορετική θερμική ενέργεια στις περιοχές του πλανήτη έχει ως αποτέλεσμα καταρχήν την κίνηση των αερίων μαζών της ατμόσφαιρας. Η θέρμανση του αέρα στις ισημερινές περιοχές έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της πυκνότητάς του και την ανύψωσή του, η οποία με τη σειρά της προκαλεί μια περιοχή χαμηλής πίεσης κοντά στη γήινη επιφάνεια. Οι ψυχρότερες αέριες μάζες των γύρω περιοχών καλύπτουν την περιοχή χαμηλής πίεσης, θερμαίνονται και με τη σειρά τους ανυψώνονται. Στους πόλους οι αέριες μάζες είναι ψυχρές, συμπιέζονται και βυθίζονται προς τη γήινη επιφάνεια, δημιουργώντας περιοχές υψηλής πίεσης. Οι πυκνές, ψυχρές αέριες μάζες των πόλων κινούνται προς τον Ισημερινό (από περιοχές υψηλής πίεσης προς περιοχές χαμηλής πίεσης). Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη συνεχή αέρια κυκλοφορία από τον Ισημερινό στους Πόλους και αντίστροφα. Βέβαια, το απλό μοντέλο που μόλις περιγράφηκε γίνεται πολυπλοκότερο λόγω της περιστροφής της Γης και της επίδρασης της δύναμης **Coriolis**. Η δύναμη αυτή δρα σε κάθε κινούμενο σώμα, το οποίο περιστρέφεται μαζί με τη Γη. Αυτή η δύναμη έχει ως αποτέλεσμα την απόκλιση των κινούμενων αερίων μαζών προς τα δεξιά στο Βόρειο ημισφαίριο και προς τα αριστερά στο Νότιο. Για το λόγο αυτόν, η αέρια και η ωκεάνια κυκλοφορία στην ατμόσφαιρα παριστάνεται από το μοντέλο του σχήματος 5.3.



Σχήμα 5.3: Το μοντέλο της αέριας και ωκεάνιας κυκλοφορίας (σχήμα από [25]).

Η επίδραση της ηλιακής ακτινοβολίας στην επιφάνεια της θάλασσας σε συνδυασμό με τις κινήσεις των αερίων μαζών της ατμόσφαιρας που περιγράφηκαν αποτελούν τις κύριες αιτίες κίνησης των ωκεάνιων μαζών. Οι αέριες μάζες που κινούνται στην επιφάνεια των ωκεανών δη-

μιουργούν τα επιφανειακά ρεύματα. Η κίνηση των επιφανειακών ρευμάτων ονομάζεται **κατευθυνόμενη από άνεμο κυκλοφορία** (wind-driven circulation) και αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα κίνησης των θαλασσίων νερών. Στα βαθύτερα στρώματα, όπου η επίδραση των επιφανειακών ανέμων είναι αμελητέα, δημιουργούνται ρεύματα από τις διαφορές αλατότητας και θερμοκρασίας και αποτελούν την **αβυσσαλέα ωκεάνια κυκλοφορία** (abyssal ocean circulation) ή **κατευθυνόμενη από μεταβολές θερμοκρασίας και αλατότητας** (thermohaline circulation).

Μια βασική περιγραφή των επιφανειακών ρευμάτων δίνεται στη συνέχεια [25]:

- Οι άνεμοι που προκαλούνται στις ισημερινές περιοχές (από 0° έως ±30°) έχουν ως αποτέλεσμα την ύπαρξη των **ισημερινών ρευμάτων** (equatorial currents), στη μορφή των οποίων επιδρούν οι ηπειρωτικές εκτάσεις, αποκλίνοντας την πορεία τους προς τα βόρεια και νότια.
- Τα ρεύματα που αποκλίνουν μεταφέρονται κατά μήκος των δυτικών ορίων των ωκεανών και ονομάζονται **δυτικά οριακά ρεύματα** (western boundary currents), τα οποία αποτελούν και τα σημαντικότερα και ισχυρότερα ρεύματα στον Πλανήτη. Στον Ατλαντικό ωκεανό το αντίστοιχο ρεύμα είναι το **Ρεύμα του Κόλπου** (Gulf Stream), ενώ στον Ειρηνικό είναι το **Ρεύμα του Kuroshio**.
- Οι άνεμοι στην περιοχή μεταξύ των 30° και 60° ενισχύουν τα ρεύματα και δημιουργούν τα **ανατολικά οριακά ρεύματα** (eastern boundary currents), τα οποία και επιστρέφουν στις ισημερινές περιοχές σχηματίζοντας μεγάλους κύκλους (**gyres**).
- Μεγάλα κυκλικά ρεύματα δεν δημιουργούνται στις νότιες πολικές περιοχές, ίσως εξαιτίας της απουσίας ηπειρωτικών μαζών. Για το λόγο αυτόν, το **Παραπόλειο Ρεύμα της Ανταρκτικής** (Antarctic Circumpolar Current) ρέει εξ' ολοκλήρου γύρω από τον πλανήτη.
- Μια ειδική μορφή ρευμάτων, η οποία οφείλεται σε εξάμηνη αλλαγή της ατμοσφαιρικής κυκλοφορίας είναι οι **μουσώνες** (monsoons), οι οποίοι εμφανίζονται στις περιοχές του βόρειου Ινδικού ωκεανού.

Οι βασικές δυνάμεις που προκαλούν την κίνηση του θαλασσίου νερού διαχωρίζονται συνήθως σε δύο κατηγορίες: στις πρωτεύουσες δυνάμεις, οι οποίες προκαλούν άμεσα την κίνηση και στις δευτερεύουσες δυνάμεις, οι οποίες προκαλούνται από την κίνηση. Οι πρωτεύουσες δυνάμεις είναι [23]:

- Η **έλξη του πεδίου βαρύτητας** (gravitation), τόσο της ίδιας της Γης, όσο και των υπολοίπων πλανητών. Η δύναμη από τη Γη δρα σε όλη τη θαλάσσια μάζα και έχει ως αποτέλεσμα το φαινόμενο της υδροστατικής πίεσης στο νερό. Οι υπόλοιπες δυνάμεις δρουν περιοδικά λόγω της γήινης περιστροφής και προκαλούν περιοδικές κινήσεις, οι οποίες ονομάζονται **παλίρροιες** (tides). Περισσότερες λεπτομέρειες για τις παλιρροϊκές δυνάμεις και τα αποτελέσματά τους δίνονται από τον Melchior [17].
- Η **δύναμη των ανέμων** (wind stress), η οποία δρα, τόσο εφαπτομενικά της επιφάνειας, όσο και κάθετα σε αυτήν. Η δύναμη των ανέμων μεταφέρει ενέργεια στα ανώτερα υδάτινα στρώματα δημιουργώντας από κύματα μικρής διάρκειας έως σταθερή ωκεάνια ροή.
- Η **ατμοσφαιρική πίεση** (atmospheric pressure), διαφορές της οποίας είναι δυνατό να προκαλέσουν μεταβολές στις υδάτινες επιφάνειες (αντίστροφο βαρομετρικό φαινόμενο, βλ. κεφ. 3) και δημιουργία ρευμάτων.
- Η **υποθαλάσσια σεισμική δραστηριότητα** (underwater seismic activity), είναι δυνατό να προκαλέσουν κινήσεις της θαλάσσιας επιφάνειας υπεράνω του επικέντρου. Σε περιπτώσεις ισχυρών σεισμών δημιουργούνται θαλάσσια κύματα οφειλόμενα σε σεισμικές δυνάμεις. Τα κύματα αυτά, με την αύξηση του πλάτους τους, είναι δυνατό να προκαλέσουν μεγάλες καταστροφές σε παράκτιες περιοχές. Τα θαλάσσια αυτά κύματα ονομάζονται **Tsunamis**.

Ενώ η έλξη του πεδίου βαρύτητας δρα σε όλο το θαλάσσιο σώμα, οι υπόλοιπες πρωτεύουσες δυνάμεις δρουν καταρχήν στη θαλάσσια επιφάνεια και στη συνέχεια εισχωρούν στο κυρίως υδάτινο σώμα.

Οι δευτερεύουσες δυνάμεις που προκαλούνται από την κίνηση του νερού είναι [23]:

- Η δύναμη **Coriolis**, η οποία είναι μια φαινόμενη δύναμη και δρα σε ένα κινούμενο σώμα, όταν αυτό παρατηρείται σε σχέση με την κινούμενη Γη. Η δύναμη αυτή δρα κάθετα στο διάνυσμα της ταχύτητας.
- Η δύναμη της **τριβής**, η οποία δρα στη θαλάσσια επιφάνεια, αντιστέκεται στην κίνησή της και μετατρέπει την κινητική ενέργεια σε θερμική. Η δύναμη αυτή δε διαφέρει σε τίποτε στη φύση της από τις πρωτεύουσες δυνάμεις, αλλά αναφέρεται ως δευτερεύουσα λόγω της εμφάνισής της αμέσως μετά την έναρξη της θαλάσσιας κίνησης.

Όπως και προηγουμένως, η δύναμη Coriolis δρα στο σύνολο της θαλάσσιας μάζας, ενώ η δύναμη της τριβής δρα στη θαλάσσια επιφάνεια.

#### 5.4.2 Η γενική εξίσωση κίνησης των ωκεάνιων υδάτων

Η εξίσωση της κίνησης προκύπτει με την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στο θαλάσσιο περιβάλλον. Η εξίσωση σε διανυσματική μορφή είναι [23], [9]:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (5.3)$$

όπου  $\mathbf{V}$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας,  $\rho$  η πυκνότητα,  $p$  η πίεση,  $\boldsymbol{\Omega}$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης,  $\mathbf{g}$  η δύναμη της βαρύτητας και  $\mathbf{F}$  οι υπόλοιπες δυνάμεις που δρουν στη μονάδα μάζας του νερού. Η παραπάνω εξίσωση είναι δυνατό να γραφεί σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αναλυόμενη στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \sin\phi v - 2\Omega \cos\phi w + F_x \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \sin\phi u + F_y \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega \cos\phi u - g + F_z \end{aligned} \quad (5.4)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις οι συνιστώσες της ταχύτητας  $u$ ,  $v$  και  $w$  μαζί με την πίεση  $p$  αποτελούν τις άγνωστες ποσότητες της κίνησης.

Μια από τις βασικές παραδοχές για την επίλυση των εξισώσεων της κίνησης είναι και η ιδέα της **σταθερής ωκεάνιας κυκλοφορίας** (steady ocean circulation). Σύμφωνα με την παραδοχή, σε μεγάλες κλίμακες η κίνηση των νερών του ωκεανού είναι δυνατό να μελετηθεί με την υπόθεση της σταθερής ροής. Με αυτόν τον τρόπο, μετρήσεις σε διαφορετικές χρονικές περιόδους επεξεργάζονται από κοινού. Η παραδοχή αυτή κρίθηκε απαραίτητη, λόγω της αραιής κάλυψης μετρήσεων των ρευμάτων και του κόστους των μετρητικών αποστολών.

Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων απαιτεί την εισαγωγή συνοριακών συνθηκών και την εισαγωγή της συνθήκης της διατήρησης της μάζας, όπως διαμορφώνεται στην ωκεανογραφία:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5.5)$$

Επίσης, απαιτείται μια εξίσωση για την κατάσταση του θαλασσίου νερού, η οποία συνδέει την πυκνότητα του νερού με τη θερμοκρασία, την αλατότητα και την πίεση μέσα από εμπειρικές σχέσεις της μορφής:

$$\rho(\rho, \phi, \lambda, t) = \rho(\theta(\rho, \phi, \lambda, t), S(\rho, \phi, \lambda, t), p), \quad (5.6)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του θαλασσίου νερού,  $\theta$  η θερμοκρασία,  $S$  η αλατότητα και  $p$  η πίεση. Μια σχέση αυτής της μορφής δίνεται στις αναφορές [19] και [18].

Η δυσκολία στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης έγκειται στο γεγονός της ύπαρξης μη-γραμμικών όρων, οι οποίοι συνδέουν τις μερικές παραγώγους των αγνώστων μεταξύ τους. Ακόμη, η πολυπλοκότητα στον υπολογισμό των όρων της τριβής κάνουν απαραίτητη την απλοποίηση των διαφορικών σχέσεων. Ο υπολογισμός των όρων τριβής είναι εφικτός, όταν αγνοηθούν οι μη-γραμμικοί όροι της μορφής  $(\partial v/\partial x)(\partial u/\partial x)$ . Οι εξισώσεις που προκύπτουν ονομάζονται **εξισώσεις Navier-Stokes**.

Η εφαρμογή των εξισώσεων κίνησης στην ωκεανογραφία και τη γεωδαισία αφορά στον υπολογισμό των απολύτων ταχυτήτων κίνησης του νερού σε κάθε βάθος. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται εισάγοντας νέες παραδοχές για την πυκνότητα και την πίεση καταλήγοντας στις σχέσεις υδροστατικής ισορροπίας.

### 5.4.3 Γεωστροφική ροή

Οι γενικευμένες εξισώσεις κίνησης απλοποιούνται με την παραδοχή της σταθερής ροής και με τη θεώρηση μηδενικών τιμών για τις δυνάμεις τριβής. Η παραδοχή της σταθερής ροής μεταφράζεται στην υπόθεση ανυπαρξίας επιταχύνσεων στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ( $\partial u/\partial t = \partial v/\partial t = \partial w/\partial t = 0$ ). Οι εξισώσεις κίνησης έχουν τη μορφή [23], [9], [22]:

$$\begin{aligned} 2\Omega \sin \phi v &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 2\Omega \cos \phi u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ -g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Οι δύο πρώτες των εξισώσεων (5.7) αποτελούν τις οριζόντιες συνιστώσες της γεωστροφικής ροής και η τρίτη αποτελεί την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας. Γεωστροφικά ρεύματα δημιουργούνται όταν η δύναμη Coriolis από την περιστροφή της Γης εξισορροπείται από την οριζόντια κλίση της πίεσης. Η δημιουργία των γεωστροφικών ρευμάτων εξηγείται με την εισαγωγή των **επιφανειών ίσης πίεσης** (isobaric surface), οι οποίες υποδηλώνουν επιφάνειες με κοινή τιμή της πίεσης. Οι επιφάνειες ίσης πίεσης στην περίπτωση ακινησίας των υδάτων είναι παράλληλες με τις ισοδυναμικές επιφάνειες του πεδίου βαρύτητας. Από τη στιγμή που οι επιφάνειες ίσης πίεσης αποκλίνουν από τις ισοδυναμικές, και για να ισχύει το κριτήριο της υδροστατικής ισορροπίας, ξεκινά η γεωστροφική ροή [35], [23], [9]. Η γενικότερη μορφή της γεωστροφικής εξίσωσης δίνεται από τη σχέση:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \sin i = 2\Omega V \sin \phi = g \tan i \quad (5.8)$$

Καταρχήν, η γενικευμένη γεωστροφική εξίσωση θα έπρεπε να επιτρέπει τον προσδιορισμό της ταχύτητας του γεωστροφικού ρεύματος με τη μέτρηση της κλίσης των επιφανειών ίσης πίεσης. Στην πράξη αυτό είναι αδύνατο, αφού οι μετρήσεις της πίεσης δεν γίνονται με την επιθυμητή ακρίβεια και, επιπλέον, η πίεση πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με την υδροστατική ισορροπία. Ακόμα όμως και με αυτόν τον τρόπο ο υπολογισμός της γωνίας  $i$  δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια [23]. Η κλίση της επιφάνειας ίσης πίεσης είναι δυνατό να υπολογιστεί με τη βοήθεια αλτιμετρικών μετρήσεων, αφού οι μετρήσεις αυτές αναφέρονται στην θαλάσσια επιφάνεια. Επιστρέφοντας στην αναλυτική μορφή των εξισώσεων της γεωστροφικής ροής, ο όρος της πίεσης είναι δυνατό να απαλειφθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας και διαφορίζοντας ως προς  $z$ . Ως αποτέλεσμα λαμβάνονται οι **εξισώσεις θερμικού ανέμου** (thermal wind equations), στις οποίες αντί της πίεσης εμφανίζεται η πυκνότητα [23]:

$$\frac{\partial(\rho f v)}{\partial z} = -g \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial(\rho f u)}{\partial z} = g \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (5.10)$$

όπου  $f = 2\Omega \sin \phi$  είναι ο παράγοντας της δύναμης Coriolis. Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις θερμικού ανέμου λαμβάνονται οι συνιστώσες της ταχύτητας της γεωστροφικής ροής (προσέγγιση Boussinesq):

$$v(x, y, z, t) = \frac{g}{\rho f} \int_{z_0}^z \frac{\partial \rho}{\partial x} dz + c(x, y, z_0, t) \quad (5.11)$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{g}{\rho f} \int_{z_0}^z \frac{\partial \rho}{\partial y} dz + b(x, y, z_0, t). \quad (5.12)$$

Το βάθος  $z_0$  που εμφανίζεται στις σχέσεις ολοκλήρωσης ονομάζεται **βάθος αναφοράς** (reference depth) και από την επιλογή του εξαρτώνται και οι τιμές των σταθερών ολοκλήρωσης  $b$  και  $c$ . Όπως φαίνεται και από τις σχέσεις υπολογισμού, η επιλογή του βάθους αναφοράς είναι κρίσιμη για τον προσδιορισμό των απολύτων τιμών των ταχυτήτων ροής.

Το γεωδαιτικό ενδιαφέρον των εξισώσεων της γεωστροφικής ροής των θαλάσσιων υδάτων εστιάζεται στη σύνδεση των υπολογισμένων ταχυτήτων με την απόσταση της επιφάνειας της θάλασσας από το επίπεδο  $z = 0$ . Η απόσταση αυτή αναφέρεται σε μια ισοδυναμική επιφάνεια πολύ κοντά στη θαλάσσια επιφάνεια, για την οποία η τιμή του βάθους είναι μηδενική. Όπως και στις ηπειρωτικές εφαρμογές, η ισοδυναμική επιφάνεια μηδενικής τιμής υψομέτρου είναι το γεωειδές, το ίδιο ισχύει και στις ωκεανογραφικές εφαρμογές για την επιφάνεια μηδενικού βάθους. Οι εξισώσεις σύνδεσης των ταχυτήτων γεωστροφικής ροής και της απόστασης θαλάσσιας επιφάνειας και γεωειδούς (δυναμική ωκεάνια τοπογραφία) υπολογίζονται με την ολοκλήρωση της εξίσωσης της υδροστατικής πίεσης από τη θαλάσσια επιφάνεια μέχρι ένα βάθος  $z$ . Θέτοντας την επιφανειακή πυκνότητα ως  $\rho_s$  και την ατμοσφαιρική πίεση μηδενική έχουμε [9]:

$$P(x, y, z, t) = \int_z^{H(x, y, z, t)} g \rho(x, y, z, t) dz = \rho_s g H(x, y, z, t) + \int_z^0 g \rho(x, y, z, t) dz, \quad (5.13)$$

όπου  $H$  είναι η δυναμική ωκεάνια τοπογραφία. Η πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας, η οποία όπως αναφέρθηκε δεν απέχει πολύ από τη χωροσταθμική επιφάνεια  $z = 0$ , είναι  $P_s(x, y, 0, t) = \rho_s g H(x, y, 0, t)$ . Από τις εξισώσεις της γεωστροφικής ροής (5.7) υπολογίζονται οι συνιστώσες των ταχυτήτων της γεωστροφικής ροής στην επιφάνεια [35], [14], [9]:

$$u_s = -\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (5.14)$$

$$v_s = \frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.15)$$

και οι ίδιες σχέσεις σε σφαιρική προσέγγιση δίνονται ως εξής [14]:

$$u_s = -\frac{g}{fR} \frac{\partial H}{\partial \phi} \quad (5.16)$$

$$v_s = \frac{g}{fR \cos \phi} \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (5.17)$$

όπου  $R$  είναι η μέση γήινη ακτίνα. Ο υπολογισμός της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας πραγματοποιείται από την (5.14) με χρήση των (5.11) για τον προσδιορισμό των  $u_s$  και  $v_s$ . Προκύπτει [9]:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_s} \int_{z_0}^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} dz + b \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\rho_s} \int_{z_0}^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} dz + c \quad (5.19)$$

Η ταχύτητα του γεωστροφικού ρεύματος στην επιφάνεια αναφοράς, δηλαδή οι σταθερές ολοκλήρωσης  $b$  και  $c$  είναι άγνωστες. Για την απλοποίηση των υπολογισμών οι ωκεανογράφοι θεωρούν τις ταχύτητες αυτές ως μηδενικές. Το επίπεδο αναφοράς ονομάζεται για το λόγο αυτόν και **επίπεδο ακινησίας** (level of no motion).

Για την εξαγωγή των σχέσεων της γεωστροφικής ροής θεωρήθηκε καταρχήν ότι τα βάθη μετρώνται σε σχέση με μια ισοδυναμική επιφάνεια αναφοράς γνωστή στις γεωεπιστήμες ως γεωειδές. Η επιφάνεια του γεωειδούς βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας. Διαφέρει από αυτήν κατά τον όρο της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας, η οποία εκφράζει τα ωκεάνια ρεύματα και τις μεταβολές στην πυκνότητα του νερού. Η επιφάνεια του ωκεανού θεωρείται επιφάνεια ίσης πίεσης και στο επίπεδο ακινησίας η ισοδυναμική και η επιφάνεια ίσης πίεσης συμπίπτουν. Στη περίπτωση που είναι γνωστή η ταχύτητα του ρεύματος σε μία επιφάνεια αναφοράς  $z = z_0$ , είναι δυνατό να υπολογιστεί η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία, δηλαδή η απόσταση της θαλάσσιας επιφάνειας από την επιφάνεια αναφοράς. Αντίστροφα, γνωρίζοντας την δυναμική θαλάσσια τοπογραφία, υπολογίζονται οι ταχύτητες των ρευμάτων σε κάθε βάθος. Από τα παραπάνω διαπιστώνονται οι σχέσεις της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας. Ακριβής γνώση του γεωειδούς οδηγεί στον ακριβή ορισμό της επιφάνειας αναφοράς, στον υπολογισμό απόλυτων τιμών της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας και στον προσδιορισμό των ταχυτήτων των ρευμάτων σε κάθε βάθος. Ακριβής γνώση των ταχυτήτων μέσω ωκεανογραφικών παρατηρήσεων οδηγεί στον ωκεανογραφικό προσδιορισμό των απόλυτων τιμών της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας και στη διόρθωση της επίδρασης των φυσικών ιδιοτήτων του θαλάσσιου νερού κατά τον υπολογισμό του γεωειδούς.

Η αναλυτική μέθοδος για τον προσδιορισμό των ταχυτήτων των ρευμάτων από δεδομένα πυκνότητας ονομάζεται **γεωστροφική μέθοδος υπολογισμού** [23]. Παρόλα τα αναμφισβήτητα πλεονεκτήματά της, όσον αφορά στον ταχύ υπολογισμό των ταχυτήτων ροής και του πλήθους των πληροφοριών που έχει δώσει στην κατανόηση της κίνησης των ωκεανών, η μέθοδος παρουσιάζει και αρκετά μειονεκτήματα [23]:

1. Οδηγεί σε υπολογισμούς σχετικών ταχυτήτων των ρευμάτων και ο υπολογισμός της δυναμικής ωκεάνιας κυκλοφορίας πραγματοποιείται μόνον ύστερα από επιλογή του επιπέδου ακινησίας, ο προσδιορισμός του οποίου αποτελεί ένα επιπλέον πρόβλημα.
2. Η γεωστροφική μέθοδος αποκλίνει σε παράκτιες περιοχές, γιατί το επίπεδο ακινησίας συμπίπτει με τον πυθμένα της θάλασσας.
3. Η ακρίβεια της μεθόδου εξαρτάται άμεσα από τις ακρίβειες στη μέτρηση διαφόρων φυσικών ιδιοτήτων του νερού. Συγκεκριμένα, η ακρίβεια στη μέτρηση της θερμοκρασίας, της πίεσης και της αλατότητας, καθώς επίσης και η ακρίβεια στον προσδιορισμό θέσης των σταθμών επηρεάζει τα αποτελέσματα της μεθόδου. Αν και τα τελευταία χρόνια οι ακρίβειες στον προσδιορισμό έχουν βελτιωθεί αισθητά με τη χρήση δορυφόρων, η διαδικασία μετρήσεων των φυσικών ιδιοτήτων του νερού απαιτεί βελτίωση.
4. Οι δυνάμεις τριβής που αγνοήθηκαν έχουν σημαντικές επιδράσεις στα θαλάσσια στρώματα πλησίον του πυθμένα.
5. Η εξίσωση αποκλίνει σε κοντινές του ισημερινού περιοχές, όπου η επίδραση της δύναμης Coriolis γίνεται αμελητέα και οι δυνάμεις τριβής υπολογίσιμες.
6. Η υπολογισμένη γεωστροφική ροή δεν περιλαμβάνει χρονικά μεταβαλλόμενες συνιστώσες των ρευμάτων, αλλά παρουσιάζει την κίνηση μιας σταθερής ωκεάνιας κυκλοφορίας. Για τη μελέτη των χρονικά μεταβαλλόμενων φαινομένων απαιτείται η διαχρονική παρακολούθηση και καταγραφή των ιδιοτήτων στους σταθμούς μέτρησης.

Με την ανάπτυξη των αλιμετρικών δορυφορικών μεθόδων, η παρατήρηση της στάθμης της θάλασσας συνδέεται με το γεωειδές για τον προσδιορισμό της απόλυτης δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας. Στη σύγχρονη μέθοδο υπολογισμού δεν απαιτείται ο ορισμός του επιπέδου ακινησίας. Η ασυμφωνία που παρατηρείται συνήθως, όταν συγκρίνονται αλιμετρικά υπολογισμένες τιμές της δυναμικής ωκεάνιας κυκλοφορίας με τιμές υπολογισμένες χρησιμοποιώντας τη γεωστροφική μέθοδο, σχετίζονται με την επιλογή της επιφάνειας ακινησίας [7], [1].

Ανάλογα με τη μορφή των επιφανειών ίσης πυκνότητας σε σχέση με τις επιφάνειες ίσης πίεσης η γεωστροφική ροή είναι δυνατό να διακριθεί σε δύο επιμέρους ροές:

- Η **βαροτροπική ροή** (barotropic flow) εμφανίζεται όταν ισχύουν οι βαροτροπικές συνθήκες, δηλαδή όταν τα νερά των ωκεανών θεωρούνται ομογενή. Στην περίπτωση αυτή, οι επιφάνειες ίσης πυκνότητας είναι παράλληλες με τις επιφάνειες ίσης πίεσης, η κλίση των επιφανειών ίσης πυκνότητας είναι μικρή και δύσκολα ανιχνεύεται, η πυκνότητα των υδάτων είναι συνάρτηση μόνον της πίεσης και η ταχύτητα της γεωστροφικής ροής είναι ανεξάρτητη του βάθους. Η βαροτροπική ροή οφείλεται κυρίως στην κλίση της θαλάσσιας επιφάνειας που προκαλείται από την επίδραση του ανέμου.
- Η **βαροκλινηής ροή** (baroclinic flow) εμφανίζεται όταν παρουσιάζονται μεταβολές στην πυκνότητα των ωκεανών. Η πυκνότητα είναι συνάρτηση της πίεσης, της αλατότητας και της θερμοκρασίας, οι επιφάνειες ίσης πυκνότητας δεν είναι παράλληλες με τις επιφάνειες ίσης πίεσης και η κλίση τους είναι μεγάλη και παρατηρείται εύκολα, ενώ η ταχύτητα του γεωστροφικού ρεύματος είναι σε άμεση εξάρτηση με το βάθος.

Η γεωστροφική θεωρία που αναλύθηκε προηγουμένως περιγράφει σε μια αρχική μορφή την κίνηση των ωκεάνιων ρευμάτων. Η παραδοχή της ανυπαρξίας μη γραμμικών όρων και της απουσίας των δυνάμεων τριβής εισάγει τα κυριότερα σφάλματα της θεωρίας. Οι Pond and Pickard [23] έδειξαν ότι η γεωστροφική προσέγγιση είναι ικανή να δώσει τα χαρακτηριστικά της κατά μήκος κίνησης ενός ισχυρού ρεύματος, όπως είναι το Ρεύμα του Κόλπου (Gulf Stream), όμως παρουσιάζουν ασυμβατότητες στην μελέτη της εγχάρσιας συνιστώσας της ταχύτητας. Η έμφαση που δόθηκε στη γεωστροφική προσέγγιση οφείλεται στην άμεση σύνδεση των αποτελεσμάτων της με τα αποτελέσματα σύγχρονων αλιμετρικών-γεωδαιτικών επεξεργασιών, παραδείγματα των οποίων θα παρουσιαστούν στην συνέχεια. Η εισαγωγή των μη-γραμμικών όρων και των δυνάμεων τριβής οδηγεί στην περισσότερο πολύπλοκη θεώρηση της κυκλοφορίας που οφείλεται σε άνεμο (wind-driven circulation) και της κυκλοφορίας που οφείλεται σε μεταβολές θερμοκρασίας και αλατότητας (thermohaline circulation), οι οποίες αναλύονται σε κλασικές αναφορές φυσικής ωκεανογραφίας, όπως, π.χ., [23], [21], [22].

## 5.5 Μοντέλα ωκεάνιας κυκλοφορίας

Οι εξισώσεις κίνησης στην πλήρη μορφή τους έχουν πολύπλοκο χαρακτήρα, περιέχοντας μη γραμμικούς όρους και δυνάμεις, οι οποίες είναι δύσκολο να εκφραστούν αναλυτικά. Για το λόγο αυτόν, απλοποιούνται συνήθως οι σχέσεις και γίνεται προσπάθεια για αναλυτική λύση κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Στην περίπτωση αυτή λαμβάνονται λύσεις, οι οποίες περιορίζονται σε ειδικές καταστάσεις του ωκεάνιου περιβάλλοντος. Η επιθυμία της εισαγωγής των μη-γραμμικών όρων οδήγησε στα πρώτα μοντέλα της ωκεάνιας κυκλοφορίας.

Δύο κύριες κατηγορίες μοντέλων της ωκεάνιας κυκλοφορίας είναι δυνατό να οριστούν. Τα **μηχανιστικά μοντέλα** (mechanistic models) και τα **μοντέλα προσομοίωσης** (simulation models). Η γεωμετρία των μηχανιστικών μοντέλων σχεδιάζεται όσο το δυνατόν απλούστερη και δεν εισάγεται κανένας επιπλέον παράγοντας που να μη σχετίζεται με το ζητούμενο που περιγράφεται. Τέτοια μοντέλα εισάγονται, π.χ., σε περιπτώσεις μελέτης της επίδρασης του ωκεάνιου πυθμένα στην κίνηση των ρευμάτων και κανένα στοιχείο που δε σχετίζεται με τον πυθμένα δεν εισάγεται στο μοντέλο περιγραφής. Με τη χρήση των μοντέλων προσομοίωσης

αναπαρίσταται η πραγματική ωκεάνια κυκλοφορία, η οποία και συγκρίνεται με τις ωκεανογραφικές παρατηρήσεις. Η γεωμετρία αυτών των μοντέλων είναι πολύπλοκη, αφού πρέπει να περιγράφει όλες τις επιδράσεις που οδηγούν σε θαλάσσια κίνηση, όπως και κάθε όρο στις εξισώσεις της κίνησης.

Και οι δύο τύποι των μοντέλων βελτιώνουν τη γνώση μας για την κίνηση των ωκεάνιων υδάτων. Τα μηχανιστικά μοντέλα είναι εύκολα στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων τους και βοηθούν στην κατανόηση της επίδρασης συγκεκριμένων φυσικών φαινομένων στη δυναμική της ωκεάνιας κυκλοφορίας. Τα μοντέλα προσομοίωσης επιτρέπουν άμεση σύγκριση με τη φύση και αποδεικνύουν ότι τα μοντέλα της ωκεάνιας κυκλοφορίας αντικατοπτρίζουν τη φυσική πραγματικότητα.

Τα μοντέλα ωκεάνιας κυκλοφορίας περιγράφουν την πραγματικότητα αρκετά πιστά, ιδιαίτερα τις τελευταίες δεκαετίες, με την ανάπτυξη βελτιωμένων μεθόδων, την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και των παγκόσμιων βάσεων δεδομένων. Τα σύγχρονα μοντέλα περιγράφουν φαινόμενα τοπικής, περιφερειακής, αλλά και παγκόσμιας κλίμακας, και παρέχουν διακριτότητες, ικανές να περιγράφουν τη μετάδοση της θερμότητας, της αλατότητας και των άλλων θαλασσίων ιδιοτήτων σε μεγάλες αποστάσεις [32]. Αναλυτικά ωκεάνια μοντέλα δεν περιγράφουν μόνο την κίνηση των ρευμάτων, αλλά αναλύουν τις συνέπειες της κίνησης στην αλλαγή του κλίματος στη βιολογία και στη βιοχημεία των ωκεανών [5], [6].

Η έναρξη της μοντελοποίησης των ωκεάνιων παρατηρήσεων τοποθετείται στη δεκαετία του 1960. Για την κατασκευή των πρώτων μοντέλων χρησιμοποιήθηκε η τεχνική των διακριτών διαφορών [23] και τα ωκεανογραφικά αποτελέσματα συνδυάστηκαν με ατμοσφαιρικές παρατηρήσεις για τη μελέτη του γήινου κλίματος. Οι αρχικές μελέτες περιορίστηκαν σε κλίμακες τοπικές και εξετάζονταν παράλληλα και οι τοπικές ιδιότητες χαρακτηριστικών περιοχών του πλανήτη μας. Τα πρώτα μοντέλα παγκόσμιας κλίμακας εμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1970. Η διακριτική ικανότητα των μοντέλων δεν ξεπερνούσε τις 2° οριζοντίως, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα τους διαχωριζόταν σε μόλις 12 κατακόρυφα επίπεδα για κάθε σημείο. Τα μοντέλα αυτής της μορφής χρειάζονταν εκατοντάδες ώρες για τον υπολογισμό τους και παρουσίαζαν την προσομοίωση μόλις μερικών ετών. Από τα μέσα της δεκαετίας του 1970 έγινε αντιληπτό ότι τα περισσότερα ωκεάνια ρεύματα παρουσιάζουν έντονα χαρακτηριστικά σε καννάβους μικρότερους της μιας μοίρας. Τα έντονα αυτά χαρακτηριστικά, που παρατηρούνται σε μικρές κλίμακες και ονομάζονται **ρεύματα μέσης κλίμακας** (mesoscale eddies) ήταν αδύνατο να παρατηρηθούν και να ερμηνευτούν από τα έως τότε υπάρχοντα μοντέλα. Το είδος αυτό των ρευμάτων είναι το αντίστοιχο των ατμοσφαιρικών καταιγίδων στην περίπτωση των ωκεανών. Για την εισαγωγή των φαινομένων μικρού μήκους κύματος στα αριθμητικά μοντέλα έπρεπε να επιλεγούν κανάβοι που να μην ξεπερνούν τα 20 χιλιόμετρα στα μέσα πλάτη [32]. Για την επίτευξη των παραπάνω, σύμφωνα με τα υπολογιστικά μέσα της εποχής, έπρεπε να περιοριστεί η περιοχή της μελέτης, να ελαττωθούν τα κατακόρυφα επίπεδα παρατήρησης και να εφαρμοστούν κατάλληλα φίλτρα στις εξισώσεις παρατήρησης, ώστε να επιτραπεί ο υπολογισμός μόνο κυρίαρχων ρευμάτων. Γύρω στα μέσα του 1980 πραγματοποιήθηκε μεγάλη πρόοδος στην προσομοίωση περισσότερων στοιχείων της ωκεάνιας κυκλοφορίας, η οποία αποδίδεται στις αυξημένες υπολογιστικές δυνατότητες της εποχής. Γεωστροφικά μοντέλα έκαναν την εμφάνισή τους σε εκτεταμένες περιοχές μελέτης και η εισαγωγή περισσότερων παραμέτρων του ωκεάνιου περιβάλλοντος έγινε δυνατή. Την περίοδο αυτή εμφανίστηκαν τα πρώτα μοντέλα για τον Ινδικό Ωκεανό και ανιχνεύτηκε η επίδραση των μωσώνων. Στα τέλη του 1980 αναπτύχθηκαν μοντέλα προσομοίωσης σε μεγάλες κλίμακες εισάγοντας παρατηρήσεις των ανέμων και των ατμοσφαιρικών επιδράσεων στην πυκνότητα. Τα μοντέλα αυτού του τύπου είχαν μέγεθος καννάβου ίσο με  $1/4^\circ$ ,  $1/3^\circ$  ή  $1/2^\circ$ . Με την εμφάνιση αυτών των μοντέλων δημιουργήθηκαν οι συνθήκες για την πρόβλεψη των ακραίων μετεωρολογικών φαινομένων, όπως του El Niño. Στη δεκαετία του 1990, η μεγάλη ανάπτυξη που γνώρισαν οι δορυφορικές μέθοδοι παρατήρησης, καθώς επίσης και η σημασία που δόθηκε από τη διεθνή κοινότητα στη μελέτη των ατμοσφαιρικών φαινομένων και η άμεση σύνδεσή τους με τα ωκεανογραφικά φαινόμενα οδήγησαν στην ανάπτυξη μεθόδων επεξεργασίας και μοντελοποίησης. Τα υψηλά χρηματοδοτούμενα προγράμματα για την παρατήρηση των ωκεανών (WOCE – TOGA) επιτάχυναν τη δημιουργία αξιόπιστων μοντέλων

ωκεάνιας κυκλοφορίας.

Η ολοκληρωμένη κατανόηση της ωκεάνιας κυκλοφορίας και οι συνέπειές της στο τωρινό γήινο κλίμα και στις μελλοντικές αλλαγές του πραγματοποιείται στη σύγχρονη έρευνα μέσω του συνδυασμού δυναμικών μοντέλων κυκλοφορίας και νέων παρατηρήσεων. Ο συνδυασμός αυτός πραγματοποιείται μέσα από τις θεωρίες της βέλτιστης εκτίμησης και πιο συγκεκριμένα μέσα από τις σύγχρονες θεωρήσεις της βέλτιστης **αφομοίωσης** (assimilation) των νέων παρατηρήσεων στα υπάρχοντα μοντέλα. Η διαδικασία της αφομοίωσης σχετίζεται με την βέλτιστη εισαγωγή νέων παρατηρήσεων σε ήδη υπάρχοντα υπολογισμένα μοντέλα. Ο χαρακτήρας των μοντέλων αυτών είναι δυναμικός και πρέπει να περιγράφει την κατάσταση των ωκεανών σε μια μεγάλη χρονική περίοδο. Οι νέες παρατηρήσεις που εισάγονται ανανεώνουν την ισχύ του μοντέλου. Το βασικότερο μοντέλο προσομοίωσης-αφομοίωσης των παρατηρήσεων για την περιγραφή της παγκόσμιας ωκεάνιας κυκλοφορίας είναι το μοντέλο που προέκυψε από τις εργασίες των ερευνητικών ομάδων του WOCE. Το **Παράλληλο Μοντέλο Ωκεάνιου Κλίματος (Κυκλοφορίας)** (Parallel Ocean Climate (Circulation) Model – POCM) [28] αποτελεί μια από τις τελευταίες εξελίξεις στον τομέα της μελέτης του ωκεάνιου περιβάλλοντος. Περισσότερα για την περιγραφή των μοντέλων και τη σύγκρισή τους με υδρογραφικές και δορυφορικές παρατηρήσεις δίνονται από τους Stammer et al. [29], όπως επίσης και στη διεύθυνση του διαδικτύου <http://web.nps.navy.mil/~rtt>.

Με την έλευση των υπερυπολογιστών της τελευταίας πενταετίας (π.χ., CRAY) και με την πρόοδο στις παράλληλες επεξεργασίες των συστημάτων μοντελοποίησης η δυνατότητα συνεχούς παρακολούθησης των ωκεανών και των αλληλεπιδράσεών τους με την ατμόσφαιρα αποτελεί την μελλοντική προοπτική. Η εφαρμογή των παράλληλων υπολογιστικών επεξεργασιών οδήγησε στην ανάπτυξη μοντέλων περιγραφής των ιδιοτήτων των ωκεανών με μεγάλη διακριτική ικανότητα όπως τα μοντέλα του **Παράλληλου Προγράμματος για τον Ωκεανό** (Parallel Ocean Program – POP models) [24]. Τα μοντέλα αυτά έχουν φτάσει τη διακριτική ικανότητα του  $1/6^\circ$  και τοπικά στον Ατλαντικό Ωκεανό το  $1/10^\circ$ . Παρόλα αυτά τα μοντέλα των ωκεανών δεν θα αποδειχτεί ότι είναι καλώς ορισμένα παρά μόνον όταν θα μπορέσουν να αναπαραστήσουν με σαφήνεια τις κατανομές της θερμοκρασίας, της αλατότητας και των άλλων ιδιοτήτων του ωκεανού, όπως επίσης και τις σύγχρονες διαδόσεις των ανθρωπογενών αερίων και των ραδιενεργών καταλοίπων. Η πλήρης κατανόηση της φανεράς πλέον αλληλεπίδρασης της ωκεάνιας κυκλοφορίας με τις αλλαγές του γήινου κλίματος αποτελεί μια από τις προκλήσεις του μέλλοντος.

## 5.6 Ωκεανογραφικές εφαρμογές του πεδίου βαρύτητας

Από τις προηγούμενες παραγράφους γίνεται αντιληπτή η μεγάλη σημασία της επιστήμης της ωκεανογραφίας στην προσέγγιση του γεωειδούς και του εξωτερικού πεδίου βαρύτητας. Ο συνδυασμός κρίκος μεταξύ της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας είναι η απόκλιση του γεωειδούς από τη μέση στάθμη της θάλασσας, δηλαδή η δυναμική ωκεάνια τοπογραφία, η οποία είναι δυνατό να υπολογιστεί, τόσο από καθαρά ωκεανογραφικές παρατηρήσεις, όσο και από το συνδυασμό γεωδαισίας και αλτιμετρίας. Η εισαγωγή της δορυφορικής αλτιμετρίας στις μελέτες της ωκεάνιας κυκλοφορίας με σκοπό τη βελτίωση του γεωειδούς παρουσιάστηκε από τους Wunsch and Gaposchkin [36]. Για πρώτη φορά παρουσιάστηκαν τα μοντέλα βέλτιστου συνδυασμού ωκεανογραφικών και γεωδαιτικών δεδομένων και αναλύθηκαν περιπτώσεις βελτίωσης στην προσέγγιση του γεωειδούς και της ωκεάνιας κυκλοφορίας ανάλογα με την ποιότητα των δεδομένων. Ο Engelis [7] ανέπτυξε σε σφαιρικές αρμονικές το μοντέλο του ωκεανογραφικού άτλαντα του Levitus [15], με όριο το βαθμό ανάπτυξης 36. Οι Tai and Wunsch [30] υπολόγισαν μια εκτίμηση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας αναλύοντας παγκόσμια δεδομένα του δορυφόρου Seasat και το γεωδυναμικό μοντέλο GEM-9 του κέντρου διαστημικών πτήσεων Goddard. Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα δεδομένα του ωκεανογραφικού άτλαντα του Levitus [15]. Ο Engelis [8] παρουσίασε μια εκτίμηση της παγκόσμιας ωκεάνιας κυκλοφορίας στηριζόμενος στην παγκόσμια δορυφορική κάλυψη του Seasat και το μοντέλο GEML2. Έμφαση δόθηκε στο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής έναντι των καθαρά ωκεανογραφικών μεθόδων

και της παραδοχής τους για το επίπεδο ακινησίας. Ο Marshall [16] παρουσίασε μια μέθοδο προσέγγισης του γεωειδούς και της δυναμικής ωκεάνιας κυκλοφορίας, η οποία στηρίζεται στις αρχές της βέλτιστης εκτίμησης ελάχιστης μεταβλητότητας. Μια αναλυτική μελέτη της ακρίβειας προσδιορισμού του βαρυτημετρικού γεωειδούς σε σύγκριση με την προσέγγιση της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας και της θαλάσσιας κυκλοφορίας δίνεται από τον Zlotnicki [37]. Οι Tapley et al. [31] παρουσίασαν την παγκόσμια εκτίμηση της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας σε ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών φτάνοντας μέχρι τον βαθμό 9, αφού απέδειξαν ότι η φασματική συμπεριφορά του σφάλματος στην προσέγγιση του γεωειδούς και του σήματος της θαλάσσιας τοπογραφίας είναι όμοια και τα δύο σήματα είναι αδύνατο να διαχωριστούν πέρα από τον προαναφερθέντα βαθμό. Η μέχρι τότε εξέλιξη στις βαρυτημετρικές διαδικασίες στη θάλασσα δεν επέτρεπαν τη χρήση θαλάσσιων μετρήσεων. Μια από τις αρχικές εφαρμογές στη μελέτη συγκεκριμένων ρευμάτων του πλανήτη δόθηκε από τους Fu and Chelton [10] με την αναγνώριση του Παραπόλειου Ρεύματος της Ανταρκτικής. Η παγκόσμια ανάλυση της δυναμικής ωκεάνιας κυκλοφορίας παρουσιάστηκε, τόσο μέσω επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών, ορθοκανονικών συναρτήσεων [11], [12], όσο και ειδικών συναρτήσεων, π.χ. συναρτήσεων Proudman [27], [20]. Παραδείγματα για τοπικές εφαρμογές στον προσδιορισμό της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας και των διανυσμάτων της γεωστροφικής ροής δίνονται από τους [4] για τη Μεσόγειο και από τον Knudsen για τη Βόρεια Θάλασσα [14] χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Fourier και για τα νησιά Faeroes [13] χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής και εκ των προτέρων πληροφορία για το φάσμα του στάσιμου και του δυναμικού μέρους της θαλάσσιας τοπογραφίας. Η εφαρμογή της θεωρίας της πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου στον προσδιορισμό του στάσιμου μέρους της θαλάσσιας τοπογραφίας σε συνδυασμό με την ανάλυση σφαλμάτων των αλτιμετρικών δεδομένων στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο παρουσιάζονται από τους Andritsanos et al. [2], [1], [3].

## 5.7 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι αρχές της ωκεάνιας κυκλοφορίας. Οι κινήσεις των υδάτινων μαζών στις ωκεάνιες εκτάσεις έχουν άμεση σχέση με την κλίση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας που συνδέει το βαρυτημετρικό γεωειδές, που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τη στιγμιαία θαλάσσια επιφάνεια που παρέχουν οι αλτιμετρικές παρατηρήσεις. Αναφέρθηκαν οι βασικές φυσικές ιδιότητες του θαλασσίου νερού και τα όργανα μέτρησης της ωκεάνιας ροής. Παρουσιάστηκαν οι νόμοι που διέπουν τις κινήσεις των υδάτινων μαζών και αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις περιγραφής της ροής. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην περίπτωση της γεωστροφικής ροής, η οποία συνδέεται άμεσα με την επιφάνεια της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας. Παρουσιάστηκαν οι μέθοδοι ωκεανογραφικού προσδιορισμού της θαλάσσιας τοπογραφίας χρησιμοποιώντας μετρήσεις των φυσικών υδάτινων ιδιοτήτων (θερμοκρασία, αλατότητα) και αναλύθηκαν οι αδυναμίες της προσέγγισης αυτής. Τέλος, πραγματοποιήθηκε μία αναδρομή στα κυριότερα παγκόσμια μοντέλα της ωκεάνιας κυκλοφορίας και περιγράφηκαν οι τρόποι προσέγγισης τους, καθώς και οι εφαρμογές τους στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας.

Με το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται η περιγραφή των μεθόδων μέτρησης στο θαλάσσιο περιβάλλον. Με την αναφορά στη δορυφορική αλτιμετρία, στη θαλάσσια βαρυτημετρία και στην ωκεάνια κυκλοφορία, καθώς επίσης και στις γνωστές μεθόδους μετρήσεων στις ηπειρωτικές εκτάσεις συλλέγονται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τις ετερογενείς παρατηρήσεις που είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν σε μία συνδυασμένη προσέγγιση παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας. Στο επόμενο κεφάλαιο αναλύεται η μέθοδος συνδυασμού, η οποία είναι και το κύριο ερευνητικό αντικείμενο της μελέτης, σύμφωνα με τους αλγορίθμους της θεωρίας των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου.

# Βιβλιογραφία

- [1] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. Quasi-stationary Sea Surface Topography Estimation by the Multiple Input / Output Method. Submitted to Journal of Geodesy, 1999.
- [2] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. Sea Surface Topography Estimation by a Generalised Multiple Input / Output Method. Presented at XXII IUGG General Assembly, Birmingham, July 18–30, 1999.
- [3] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. A survey of gravity field modeling applications of the Input–Output System Theory (IOST). Accepted for publication to IGeS Bulletin, 1999.
- [4] R. Barzaghi and G. Sona. The geoid and the steady circulation pattern in the Mediterranean Sea. *IGeS Bulletin*, 3, pp. 67–81, 1994.
- [5] European Commission. *Climate Change and Impacts*. European Commission, Belgium, 1999.
- [6] European Commission. *Global Change: Proceedings of the first Demetra meeting*. European Commission, Chianciano Terme, Italy, 1999.
- [7] T. Engelis. Analysis of Sea Surface Topography using SEASAT Altimeter Data. Report No. 343, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1983.
- [8] T. Engelis. Global Circulation for SEASAT Altimeter Data. *Marine Geodesy*, 9(1), pp. 45–69, 1985.
- [9] L. Fenoglio-Marc. *Sea Surface Determination with Respect to European Vertical Datum*. PhD Dissertation, heft nr. 464, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, Germany, 1996.
- [10] L. L. Fu and D. B. Chelton. Observing Large-Scale Temporal Variability of Ocean Currents by Satellite Altimetry: With Application to the Antarctic Circumpolar Current. *Journal of Geophysical Research*, 90(3), pp. 4721–4739, 1985.
- [11] C. Hwang. Orthogonal Functions Over the Oceans and Applications to the Determination of Orbit Error, Geoid and Sea Surface Topography from Satellite Altimetry. Report No. 414, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1991.
- [12] C. Hwang. Orthonormal Function Approach for Geosat Determination of Sea Surface Topography. *Marine Geodesy*, 18, pp. 245–271, 1995.
- [13] P. Knudsen. Simultaneous Estimation of the Gravity Field and Sea Surface Topography From Satellite Altimetry. *Geophysical Journal International*, 104(2), pp. 307–317, 1991.

- [14] P. Knudsen. Altimetry for Geodesy and Oceanography. In *Geodesy and Geophysics*, editor: J. Kakkuri, pp. 87–129. Finnish Geodetic Institute, 1992.
- [15] S. Levitus. Climatological atlas of the world ocean. Professional Paper 13, NOAA, Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, 1982.
- [16] J. C. Marshall. Determining the Ocean Circulation and Improving the Geoid from Satellite Altimetry. *Journal of Physical Oceanography*, 15, pp. 330–349, 1985.
- [17] P. Melchior. *The Tides of Planet Earth*. Pergamon Press, Oxford, 1978.
- [18] F. J. Millero and A. Poisson. International one-atmosphere equation of state of sea water. *Deep Sea Research*, A(28), pp. 625–629, 1981.
- [19] F. J. Millero, C. T. Tung, A. Bradshaw and K. Schleicher. A new high pressure equation of state for seawater. *Deep Sea Research*, A(27), pp. 255–264, 1980.
- [20] N. K. Pavlis and C. M. Cox and Y. M. Wang and F. G. Lemoine. Further analyses towards the introduction of ocean circulation model information into geopotential solutions. Presented at the 2nd Joint Meeting of the International Gravity Commission and the International Geoid Commission held in Trieste, September 1998. To appear in *Bollettino di Geofisica teorica ed applicata*, 1998.
- [21] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1987.
- [22] J. Pedlosky. *Ocean Circulation Theory*. Springer, Berlin, 1997.
- [23] S. Pond and G. L. Pickard. *Introductory Dynamical Oceanography*. Pergamon Press, England, 1983.
- [24] *WOCE Paraller Ocean Program – POP*. Internet resources: [http://climate.acl.lanl.gov/models/pop/pop\\_frames.htm](http://climate.acl.lanl.gov/models/pop/pop_frames.htm), 1999.
- [25] D. A. Ross. *Introduction to Oceanography*. HarperCollins College Publishers, New York, 1995.
- [26] R. Rummel. Satellite altimetry as part of a geodetic model. In *Proceedings of the I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*, International Association of Geodesy, pp. 757–786, Milano, Italy, June 3–6 1986.
- [27] B. V. Sanchez, W. J. Cunningham and N. K. Pavlis. The calculation of the dynamic sea surface topography and the associated flow field from altimetry data: a characteristic function method. *Journal of Physical Oceanography*, 27(7), pp. 1371–1385, 1997.
- [28] A. J. Semtner and R. M. Chervin. Ocean general circulation from a global eddy-resolving model. *Journal of Geophysical Research*, 97(), pp. 5493–5550, 1992.
- [29] D. Stammer, R. Tokmakian, A. Semtner and C. Wunsch. How well does a  $1/4^\circ$  global circulation model simulate large-scale oceanic observations? *Journal of Geophysical Research*, 101(11), pp. 25779–25812, 1996.
- [30] C. K. Tai and C. Wunsch. An Estimate of Global Absolute Dynamic Topography. *Journal of Physical Oceanography*, 14, pp. 457–463, 1984.
- [31] B. D. Tapley, R. S. Nerem, C. K. Shum, J. C. Ries and D. N. Yuan. Circulation from a joint gravity field solution determination of the general ocean. *Geophysical Research Letters*, 15(10), pp. 1109–1112, 1988.
- [32] A. J. Semtner. Modeling Ocean Circulation. Internet address: <http://sci.aaas.org/aaas/computers/semtner.html>, 1997.

- [33] *Tropical Ocean Global Atmospheres - TOGA*. Internet resources: <http://www.ncdc.noaa.gov/coare/toga.html>, 1999.
- [34] *World Ocean Circulation Experiment - WOCE*. Internet resources: <http://www.soc.soton.ac.uk/OTHERS/woceipo/ipo.html>, U.S. Home Page: [www-ocean.tamu.edu/WOCE/uswoce.html](http://www-ocean.tamu.edu/WOCE/uswoce.html), 1990–2002.
- [35] C. Wunsch. Physics of the Ocean Circulation. In *Satellite Altimetry for Geodesy and Oceanography*, editors: R. Rummel and F. Sansò, Lecture Notes in Earth Sciences No 50, pp. 9–98. Springer, 1993.
- [36] C. Wunsch and E. M. Gaposchkin. On Using Satellite Altimetry to Determine the General Circulation of the Oceans With Application to Geoid Improvement. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 18(4), pp. 725–745, 1980.
- [37] V. Zlotnicki. On the Accuracy of Gravimetric Geoids and the Recovery of Oceanographic Signals from Altimetry. *Marine Geodesy*, 8(1–4), pp. 129–157, 1984.



## Κεφάλαιο 6

# Μέθοδοι Βέλτιστου Συνδυασμού Ετερογενών Δεδομένων - Θεωρία Συστημάτων

### 6.1 Εισαγωγή

Από τις αρχές της δεκαετίας του '70 μέχρι σήμερα οι μετασχηματισμοί Fourier χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη λύση πρακτικών προβλημάτων της φυσικής γεωδαισίας. Η επίλυση πολύπλοκων ολοκληρωμάτων κατάλληλης μορφής (συνελικτικά ολοκληρώματα) αποτέλεσε τη σπουδαιότερη εφαρμογή των μετασχηματισμών στην προσέγγιση του γήινου πεδίου βαρύτητας. Η εφαρμογή του αλγορίθμου του Ταχέως Μετασχηματισμού (*Fast Fourier Transform - FFT*) είχε ως αποτέλεσμα τη σημαντική απλοποίηση της υπολογιστικής διαδικασίας [27]. Παρόλα τα αναμφισβήτητα πλεονεκτήματα, οι κλασικές φασματικές μέθοδοι παρουσιάζουν και κάποιες αδυναμίες, όπως, π.χ., την υπόθεση ύπαρξης ομοιογενών, χωρίς θόρυβο, δεδομένων. Η θεωρία των συστημάτων που παρουσιάζεται στη συνέχεια αντιμετωπίζει τις παραπάνω αδυναμίες. Με βάση τις ιδιότητες των μετασχηματισμών και τη θεωρία μετάδοσης των σφαλμάτων, η θεωρία συστημάτων συνδυάζει ετερογενή δεδομένα με βέλτιστο τρόπο και αξιοποιεί τις πληροφορίες για τις στατιστικές ιδιότητες των δεδομένων και τη μορφή τους. Η αδυναμία προσδιορισμού των ακριβειών υπολογισμού της βέλτιστης λύσης, που εμφανίζεται ως ένα σημαντικό μειονέκτημα της έως τώρα ανάλυσης στο πεδίο των συχνοτήτων, αντιμετωπίζεται με την εφαρμογή της κατάλληλης θεωρίας. Ειδικά κριτήρια αξιοποιούνται κατά την εύρεση της βέλτιστης λύσης και τη μετάδοση των σφαλμάτων των μετρήσεων στα αποτελέσματα (propagation errors).

### 6.2 Θεωρητικό υπόβαθρο

Ένα ιδεατό σύστημα ονομάζεται εκείνο το οποίο έχει σταθερές παραμέτρους και είναι γραμμικό μεταξύ δύο καλά ορισμένων σημείων, που ονομάζονται σημείο εισόδου (input) ή εξάρσης (excitation) και σημείο εξόδου (output) ή απόκρισης (response) [17]. Ένα σύστημα έχει σταθερές παραμέτρους, όταν όλες οι θεμελιώδεις ιδιότητές του είναι ανεξάρτητες του χρόνου (χώρου στην περίπτωση χωρικών μεταβλητών) και ονομάζεται γραμμικό, όταν στα χαρακτηριστικά απόκρισης του συστήματος ισχύουν οι ιδιότητες της προσθετικότητας και της ομοιογένειας. Έστω  $f(y)$  αντιπροσωπεύει το σήμα εξόδου σ' ένα σήμα εισόδου  $y$ , τότε το σύστημα είναι γραμμικό όταν:

$$f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2), \quad (6.1)$$

για την ιδιότητα της προσθετικότητας και

$$f(cy) = cf(y), \quad (6.2)$$

για την ιδιότητα της ομοιογένειας.  $y_1, y_2$  είναι τα σήματα εισόδου και  $c$  μια σταθερά.

Η παραδοχή των σταθερών παραμέτρων ισχύει στην περίπτωση πολλών φυσικών συστημάτων. Το πεδίο βαρύτητας μπορεί να θεωρηθεί, συμβατικά, ως ένα φυσικό σύστημα σταθερών παραμέτρων. Αντιθέτως, η ιδιότητα της γραμμικότητας είναι κάτι το πολύ σπάνιο για την περίπτωση φυσικών συστημάτων, τα οποία παρουσιάζουν αντιδράσεις μη γραμμικές. Παρόλα αυτά, τα χαρακτηριστικά απόκρισης πολλών φυσικών συστημάτων μπορεί να θεωρηθούν γραμμικά χωρίς την εισαγωγή σημαντικών σφαλμάτων. Το πεδίο βαρύτητας, αν και αποτελεί εν γένει μη γραμμικό σύστημα, αντιμετωπίζεται ως γραμμικό για την απλοποίηση των υπολογισμών και εξαιτίας του γεγονότος ότι τα σφάλματα λόγω γραμμικοποίησης είναι αμελητέα.

Ένα σημαντικό σήμα εισόδου που χρησιμοποιείται ευρέως είναι η **μοναδιαία συνάρτηση παλμού**  $\delta(m, n)$  (unit impulse function), η οποία ονομάζεται επίσης **συνεχής συνάρτηση δέλτα** (continuous delta function) ή **συνάρτηση Dirac** [21]. Η μοναδιαία συνάρτηση παλμού μπορεί να θεωρηθεί ως ένα συνεχές σήμα μηδενικού πλάτους και απείρου μήκους

$$\delta(m, n) = \begin{cases} \infty & \text{όταν το } n = m = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (6.3)$$

και μοναδιαίου εμβαδού

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(m, n) dm dn = 1. \quad (6.4)$$

Για τη συνάρτηση δέλτα ισχύει η μεταβατική ιδιότητα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, l) \delta(m - k, n - l) dk dl &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(m - k, n - l) \delta(k, l) dk dl &= f(m, n), \end{aligned} \quad (6.5)$$

με την οποία μπορεί να απομονωθεί ή να αναπαραχθεί μια συγκεκριμένη τιμή της συνάρτησης  $f(m, n)$ , με την υπόθεση μη ύπαρξης ασυνεχειών κατά  $m, n$ .

Τα δυναμικά χαρακτηριστικά ενός γραμμικού συστήματος σταθερών παραμέτρων μπορούν να περιγραφούν από μια συνάρτηση βάρους  $h(k, l)$ , που ονομάζεται και **συνεχής απόκριση παλμού** (continuous impulse response) και ορίζεται ως το αποτέλεσμα του συστήματος σε ένα μοναδιαίο σήμα παλμού εισόδου, που εφαρμόζεται σε ένα προηγούμενο σημείο  $k, l$ . Για κάθε αυθαίρετο σήμα εισόδου, η έξοδος του συστήματος προκύπτει από ένα συνελκτικό ολοκλήρωμα της μορφής [21], [15]:

$$\begin{aligned} x(m, n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(k, l) y(m - k, n - l) dk dl \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(m - k, n - l) y(k, l) dk dl. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Η συνεχής απόκριση παλμού μπορεί να θεωρηθεί ως η έξοδος του συστήματος σε μια συνάρτηση παλμού

$$h(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(k, l) \delta(m - k, n - l) dk dl. \quad (6.7)$$

Ό,τι παρουσιάζεται παραπάνω αναφέρεται σε διδιάστατα συστήματα, αφού τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στις γεωεπιστήμες αντιπροσωπεύουν διδιάστατες χωρικές μεταβλητές. Ένας ορισμός, ο οποίος διαφοροποιεί τα μονοδιάστατα συστήματα χρόνου που χρησιμοποιούνται στην ηλεκτρονική επιστήμη, από τα διδιάστατα χωρικά συστήματα, που χρησιμοποιούνται στις γεωεπιστήμες, είναι ο ορισμός της **περιοχής υποστήριξης** (region of support).

Το εύρος των  $m, n$  δεικτών, μέσα στο οποίο το διδιάστατο σύστημα λαμβάνει τιμές διάφορες του μηδενός ονομάζεται περιοχή εμπιστοσύνης [15].

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου, η επίλυση των συνελικτικών ολοκληρωμάτων πραγματοποιείται με μεγάλη ευκολία με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Fourier. Η συνελικτική μορφή από τον χώρο των αποστάσεων μορφοποιείται σε απλή πράξη πολλαπλασιασμού των συναρτήσεων στο χώρο των συχνοτήτων. Η εξίσωση (6.6) μετατρέπεται στη μορφή [6], [19]:

$$X(u, v) = H(u, v)Y(u, v), \quad (6.8)$$

όπου  $X(u, v)$ ,  $H(u, v)$  και  $Y(u, v)$  οι μετασχηματισμοί Fourier (φάσματα) των  $x(k, l)$ ,  $h(k, l)$  και  $y(k, l)$  αντίστοιχα. Η σχέση (6.8) ισχύει μόνο, όταν το φυσικό σύστημα είναι **πραγματοποιήσιμο** (physically realizable) και **σταθερό** (stable).

Ένα μονοδιάστατο ηλεκτρονικό σύστημα ονομάζεται φυσικά πραγματοποιήσιμο, όταν «απαντά» μόνο σε σήματα εισόδου προηγούμενης χρονικής στιγμής, δηλαδή, ισχύει  $h(\tau) = 0$  για κάθε  $\tau < 0$  [17]. Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει άμεσα στην περίπτωση διδιάστατων χωρικών σημάτων του πεδίου βαρύτητας. Για θεωρητικούς λόγους υιοθετείται μια κατάλληλη περιοχή υποστήριξης, που ονομάζεται **ασύμμετρο ημι-επίπεδο** (nonsymmetric half plane - NSHP) [15]. Με τον παραπάνω ορισμό της περιοχής υποστήριξης, η απαίτηση για φυσικά πραγματοποιήσιμο σύστημα ικανοποιείται, αφού πλέον το σήμα εξόδου υπολογίζεται με διαδικασίες ανάλογες προς την σάρωση της τηλεοπτικής εικόνας: Σάρωση γραμμής-γραμμής, από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά. Για το λόγο αυτόν, το κάτω όριο της ολοκληρωματικής σχέσης (6.6) είναι μηδέν. Σταθερό ονομάζεται τό σύστημα, για το οποίο κάποιο σήμα εισόδου με όριο  $A$  παράγει ένα σήμα εξόδου, το οποίο παρουσιάζει και αυτό όριο, δηλαδή [15],

$$\begin{aligned} |x(m, n)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(k, l)y(m-k, n-l)dkdl \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(k, l)||y(m-k, n-l)|dkdl. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ειδικότερα, η συνάρτηση  $H(u, v)$  της εξίσωσης (6.8) ονομάζεται **συνάρτηση απόκρισης συχνότητας** (frequency response function). Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τον παράγοντα σύνδεσης σήματος εισόδου / εξόδου και ο βέλτιστος προσδιορισμός της αποτελεί αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου. Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας είναι ο μετασχηματισμός Fourier της μοναδιαίας συνάρτησης παλμού και για ένα σύστημα σταθερό και φυσικά πραγματοποιήσιμο δίνεται από τη σχέση [21]:

$$H(u, v) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(k, l)e^{-j2\pi(uk+vl)}dkdl. \quad (6.10)$$

Παρατηρώντας τη σχέση (6.10), το κάτω όριο της ολοκλήρωσης είναι μηδέν και όχι  $-\infty$ , αφού  $h(k, l) = 0$  για κάθε  $k, l < 0$ . Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας είναι γενικά μια μιγαδική ποσότητα, η οποία μπορεί συμβατικά να οριστεί από το μέγεθός της και την αντίστοιχη φάση. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί γράφοντας την  $H(u, v)$  στη μορφή:

$$H(u, v) = |H(u, v)|e^{-j\phi(u, v)}, \quad (6.11)$$

όπου η απόλυτη τιμή  $|H(u, v)|$  καλείται **παράγοντας κέρδους** (gain factor) του συστήματος και η αντίστοιχη γωνία φάσης  $\phi$  **παράγοντας φάσης** (phase factor) του συστήματος. Η αντιστοιχία με το πεδίο βαρύτητας μπορεί πολύ εύκολα τώρα να περιγραφεί. Έστω η απλή περίπτωση της επίπεδης προσέγγισης του ολοκληρώματος του Stokes [42],

$$N(x_P, y_P) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \Delta g(x, y)l(x-x_P, y-y_P)dx dy, \quad (6.12)$$

όπου  $N$  είναι η αποχή του γεωειδούς,  $\Delta g$  η ανωμαλία βαρύτητας,  $x_P, y_P$  και  $x, y$  οι συνταγαμένες του σημείου υπολογισμού  $P$  και του τρέχοντος σημείου και  $l = \sqrt{(x-x_P)^2 + (y-y_P)^2}$

η απόσταση μεταξύ των σημείων. Πρόκειται για ένα διπλό ολοκλήρωμα συνελικτικής μορφής, όπως και η εξίσωση (6.6), το οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί σύμφωνα με την (6.8) [27],

$$N(u, v) = L(u, v)\Delta G(u, v), \quad (6.13)$$

όπου  $N(u, v)$ ,  $L(u, v)$  και  $\Delta G(u, v)$  είναι οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Fourier (φάσματα) των συναρτήσεων  $N(x, y)$ ,  $l(x, y)$  και  $\Delta g(x, y)$ .

Ό,τι αναφέρθηκε μέχρι αυτή τη στιγμή, αφορά σε συνεχείς μεταβλητές. Τα σήματα όμως στην περίπτωση της μελέτης του πεδίου βαρύτητας είναι διακριτά, αφού προέρχονται από διακριτές μετρήσεις. Σε αναλογία με τα συνεχή σήματα, ένα ειδικό είδος σήματος που αφορά σε διακριτά δεδομένα είναι η **μοναδιαία συνάρτηση παλμού** (unit impulse function)  $\delta[m, n]$ , η οποία ονομάζεται επίσης και **διακριτή συνάρτηση δέλτα** (discrete delta sequence). Υπολογίζεται ως [21], [15]

$$\delta[m, n] = \begin{cases} 1 & \text{όταν το } m = n = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (6.14)$$

Οποιαδήποτε διακριτή σειρά  $f[m, n]$  μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα της μορφής

$$\begin{aligned} f[m, n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[k, l]\delta[m-k, n-l] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[m-k, n-l]\delta[k, l]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Έστω  $h[m, n]$  είναι η **διακριτή απόκριση παλμού** (discrete impulse response) ενός διακριτού γραμμικού συστήματος. Η απόκριση εξόδου  $g[m, n]$  σε μια αυθαίρετη σειρά εισόδου  $f[m, n]$  υπολογίζεται από το άθροισμα της διακριτής συνέλιξης

$$g[m, n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[m-k, n-l]f[k, l]. \quad (6.16)$$

Η (6.16) αποτελεί την διακριτοποίηση του συνελικτικού ολοκληρώματος της (6.6) και χρησιμοποιείται στην περίπτωση διακριτών συστημάτων, όπως το φυσικό σύστημα του πεδίου βαρύτητας.

### 6.3 Στοιχεία ανάλυσης τυχαίων δεδομένων

Είναι ευρέως γνωστή στις φυσικές επιστήμες η διάκριση των δεδομένων σε (α) ντετερμινιστικά και (β) στοχαστικά ή τυχαία [41]. **Ντετερμινιστικά** δεδομένα είναι εκείνα τα οποία μπορούν να περιγραφούν αυστηρά με τη βοήθεια κάποιας μαθηματικής σχέσης. **Στοχαστικά** ή **τυχαία** ονομάζονται τα δεδομένα που δεν μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια μιας αυστηρής μαθηματικής σχέσης. Με άλλα λόγια, κάθε παρατήρηση αντιπροσωπεύει μόνο ένα από τα άπειρα δυνατά αποτελέσματα, τα οποία μπορούν να προκύψουν [8].

Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις της φυσικής, το πεδίο βαρύτητας αντιμετωπίζεται ως ένα πεδίο σημάτων. Τα σήματα αυτά αποτελούν στοιχεία του πεδίου, τα οποία εξαρτώνται άμεσα από το γήινο **διαταρακτικό δυναμικό** [16], [43], π.χ., ανωμαλίες βαρύτητας, αποχές γεωειδούς, αποκλίσεις της καταχορύφου. Τα σήματα αυτά αποτελούν τις τυχαίες μεταβλητές του φυσικού συστήματος. Η χρησιμοποίηση στοχαστικών μεταβλητών επιτρέπει την εισαγωγή των εννοιών της στασιμότητας και της εργοδικότητας. Περισσότερα για τη θεωρητική αντιμετώπιση του πεδίου βαρύτητας και τις σύγχρονες μεθόδους προσέγγισης παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 2.

Μία συνάρτηση, η οποία αντιπροσωπεύει ένα τυχαίο φαινόμενο σε κάποια χρονική στιγμή ονομάζεται **δειγματική συνάρτηση** [20]. Το σύνολο των δειγματικών συναρτήσεων που περιγράφουν το τυχαίο φαινόμενο στο σύνολο της εξέλιξής του ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** (stochastic - random process) [20], [21]. Μια διακριτή στοχαστική διαδικασία μπορεί να

θεωρηθεί ως μια συλλογή πραγματικών ή μιγαδικών χρονικών (ή χωρικών) σειρών, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να παρατηρηθεί σε οποιαδήποτε δοκιμή ενός πειράματος. Ως δοκιμή ενός πειράματος στην περίπτωση του γήινου πεδίου βαρύτητας μπορεί να θεωρηθεί μια σειρά μετρήσεων του μεγέθους του διανύσματος της βαρύτητας. Η αντιμετώπιση του πεδίου βαρύτητας ως πεδίου τυχαίων μεταβλητών μπορεί να φαίνεται καταρχήν αυθαίρετη (και στην πραγματικότητα είναι, βλ. κεφ. 2), αποτελεί όμως την ιδανική παραδοχή για την επίλυση πολλών προβλημάτων της φυσικής γεωδαισίας. Η λύση των αριθμητικών προβλημάτων σχετίζεται με δύο σημαντικές έννοιες ενός πεδίου τυχαίων μεταβλητών: την έννοια της **στασιμότητας** (stationarity) και της **εργοδικότητας** (ergodicity) [8], [5], [4]. Η έννοια της στασιμότητας αναφέρεται στη σταθερότητα των στατιστικών ποσοτήτων του πεδίου ανεξαρτήτως της απόστασης από το σημείο υπολογισμού. Το γήινο πεδίο βαρύτητας μπορεί να χαρακτηριστεί **αδύναμα στάσιμο** (weakly stationary), όταν η μέση τιμή (first statistical moment) της βαρύτητας παραμένει σταθερή, ανεξαρτήτως του σημείου υπολογισμού και η μεταβλητότητα (second statistical moment) ανάμεσα σε δύο σημεία εξαρτάται μόνο από τη μεταξύ τους απόσταση. Στην περίπτωση που και οι υπόλοιπες **στατιστικές στιγμές** (statistical moments) είναι ανεξάρτητες από το σημείο του χώρου που υπολογίζονται, τότε γίνεται λόγος για **ισχυρή μορφής στασιμότητα** (strongly stationarity) [20]. Η έννοια της στασιμότητας του πεδίου βαρύτητας, αν και οδηγεί σε λύσεις των μαθηματικών προβλημάτων που σχετίζονται με την προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας, δεν παύει να αποτελεί μια παραδοχή. Παραδοχή, η οποία είναι αναγκαία για την αντιμετώπιση των σύγχρονων γεωδαιτικών προβλημάτων σε συνδυασμό με την έννοια της εργοδικότητας. Στην περίπτωση που ένα πεδίο στάσιμων τυχαίων μεταβλητών μπορεί να χαρακτηριστεί από μία μοναδική δειγματική του συνάρτηση, τότε το πεδίο ονομάζεται **εργοδικό** [16], [42]. Η έννοια της εργοδικότητας προϋποθέτει την έννοια της στασιμότητας, έστω και στην αδύναμη μορφή της. Τα στοχαστικά πεδία που έχουν την ιδιότητα της εργοδικότητας αποτελούν μια σημαντική κατηγορία πεδίων, αφού οι ιδιότητές τους μπορεί να προσδιοριστούν από μία και μόνο δειγματική συνάρτηση [16]. Στην πραγματικότητα τα στοχαστικά δεδομένα που αναπαριστούν ένα στάσιμο φυσικό φαινόμενο είναι ως επί το πλείστον και εργοδικά. Η ανάλυση του πεδίου βαρύτητας μέσω καθαρά ντετερμινιστικών παραμέτρων αποτελεί μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία λόγω της δυσκολίας στη μορφή των μαθηματικών σχέσεων που προκύπτουν. Η σύγχρονη αντιμετώπιση του πεδίου βαρύτητας ως φυσικού συστήματος σημάτων οδηγεί στην επίλυση πολλών προβλημάτων στην επιστήμη της φυσικής γεωδαισίας. Από τη στιγμή που εισάγονται οι στοχαστικές παράμετροι του πεδίου, το δίπτυχο των εννοιών της στασιμότητας και της εργοδικότητας οδηγεί στην ολοκληρωμένη θεωρητική τεκμηρίωση του θέματος.

### 6.3.1 Βασικές ιδιότητες περιγραφής στοχαστικών δεδομένων

Οι βασικές στατιστικές ιδιότητες για την περιγραφή μιας σειράς στάσιμων στοχαστικών μεταβλητών είναι [5]:

1. Μέση τιμή και μέση τετραγωνική τιμή (*mean and mean square value*).
2. Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (*probability density functions*).
3. Συναρτήσεις αυτο-συσχέτισης (*autocorrelation functions*).
4. Συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος (*autospectral density functions*).

Η μέση τιμή  $\mu_x$  και η μεταβλητότητα  $\sigma_x^2$  μιας στάσιμης μεταβλητής αντιπροσωπεύουν, όπως είναι γνωστό, την κεντρική τάση και τη διασπορά, αντίστοιχα, των δεδομένων. Η μέση τετραγωνική τιμή  $\psi_x^2$ , η οποία ισούται με το άθροισμα της μεταβλητότητας και του τετραγώνου της μέσης τιμής, αποτελεί ένα μέτρο συνδυασμού της κεντρικής τάσης και της διασποράς. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $p(x)$  για ένα σύνολο στάσιμων μεταβλητών αναπαριστά το ρυθμό μεταβολής της πιθανότητας σε σχέση με την εκάστοτε τιμή των δεδομένων [41]. Είναι γνωστό ακόμη, ότι το συνολικό εμβαδόν της συνάρτησης πυκνότητας της πιθανότητας είναι μοναδιαίο, αφού απλώς αναφέρεται στη βεβαιότητα του γεγονότος ότι τα δεδομένα βρίσκονται στο διάστημα  $-\infty$  έως  $+\infty$  [41], [20].

Έως εδώ, έχουν περιγραφεί τα στατιστικά μεγέθη ανεξάρτητα από χρονικές παραμέτρους. Πρέπει να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι η αναφορά στη χρονική παράμετρο δεν αντιπροσωπεύει την περίπτωση του γήινου πεδίου βαρύτητας, όπου η παράμετρος αυτή αντικαθίσταται από την χωρική. Η συνάρτηση αυτο-συσχέτισης του πεδίου βαρύτητας παριστά ένα μέτρο των εξαρτώμενων από την απόσταση ιδιοτήτων των δεδομένων. Επίσης, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος αναπαριστά το ρυθμό της αλλαγής της μέσης τετραγωνικής τιμής σε σχέση με τη μεταβολή της συχνότητας. Το συνολικό εμβαδόν της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος ισούται με την μέση τετραγωνική τιμή του δείγματος.

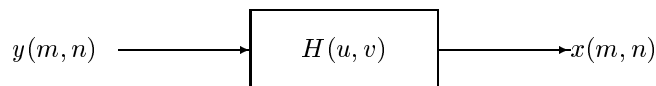
Στη συνέχεια θα αναφερθούν ορισμένες συναρτήσεις, μέσω των οποίων περιγράφονται οι στάσιμες τυχαίες μεταβλητές [41], [20], [5]:

1. Συνδυασμένες συναρτήσεις πυκνότητας της πιθανότητας (*joint probability density functions*)
2. Συναρτήσεις δια-συσχέτισης (*cross-correlation functions*)
3. Δια-φασματικές συναρτήσεις πυκνότητας (*cross-spectral density functions*)
4. Συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας (*frequency response functions*)
5. Συναρτήσεις συντονισμού (*coherence functions*)

Μέσω (α) των δια-φασματικών συναρτήσεων πυκνότητας μεταβλητών και (β) των αντιστοίχων απλών συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, είναι δυνατό να υπολογιστούν γραμμικές συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας, όπως επίσης και οι παράμετροι μεταφοράς από τη μία μεταβλητή στην άλλη. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται ουσιαστικά η θεωρία των συστημάτων.

### 6.3.2 Συνήθεις συναρτήσεις συντονισμού

Όπως ήδη προαναφέρθηκε, η συνάρτηση συντονισμού  $\gamma_{xy}^2(u, v)$  αποτελεί ένα μέτρο της ακρίβειας της γραμμικότητας που υποτίθεται ότι ισχύει για τα μοντέλα εισόδου-εξόδου. Στο απλό σύστημα του σχήματος 6.1  $y$  είναι το σήμα εισόδου και  $x$  το σήμα εξόδου. Στην περίπτωση



Σχήμα 6.1: Ιδεατό σύστημα απλής εισόδου-εξόδου.

ιδεατών γραμμικών συστημάτων η συνήθης συνάρτηση συντονισμού αντιπροσωπεύει, για κάθε συχνότητα, το κλασματικό μέρος της μέσης τετραγωνικής τιμής του  $x$  που προέρχεται από το  $y$  [29]. Η συνάρτηση συντονισμού μεταξύ του σήματος εισόδου  $y(m, n)$  και του σήματος εξόδου  $x(m, n)$  είναι μια πραγματική συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση [21], [4], [5]:

$$\gamma_{xy}^2(u, v) = \frac{|P_{xy}(u, v)|^2}{P_{xx}(u, v)P_{yy}(u, v)}, \quad (6.17)$$

όπου  $P_{xy}$  η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος ανάμεσα στο σήμα εισόδου και το σήμα εξόδου,  $P_{yy}$  η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του σήματος στην είσοδο και  $P_{xx}$  η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του σήματος στην έξοδο. Ισχύει η ανισότητα  $0 \leq \gamma_{xy}^2(u, v) \leq 1$ . Η σχέση (6.17) ισχύει με τις προϋποθέσεις (α)  $P_{xx}$  και  $P_{yy} \neq 0$  και (β) οι μετρήσεις έχουν μηδενική μέση τιμή. Όταν τα δεδομένα έχουν μέση τιμή διάφορη του μηδενός, η μέση τιμή πρέπει να αφαιρεθεί από κάθε μέτρηση [5], [7].

### 6.3.3 Πολλαπλές συναρτήσεις συντονισμού

Στην περίπτωση ύπαρξης περισσοτέρων του ενός σημάτων, απαιτείται ο βέλτιστος συνδυασμός των σημάτων εισόδου για τον προσδιορισμό του σήματος (ή των σημάτων) εξόδου. Απαραίτητη είναι, λοιπόν, η γενίκευση των συναρτήσεων συντονισμού με την εισαγωγή των πολλαπλών συναρτήσεων, οι οποίες περιγράφουν τη σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου και του αποτελέσματος του συνδυασμού στην έξοδο. Έστω η γενική περίπτωση, π.χ., δύο σημάτων εισόδου και ενός σήματος εξόδου, όπου τα δεδομένα εισόδου είναι ποσότητες συσχετισμένες μεταξύ τους και η συνήθης συνάρτηση συντονισμού  $\gamma_{12}^2$  μεταξύ των σημάτων 1 και 2 λαμβάνει οποιαδήποτε θετική τιμή μικρότερη της μονάδας. Οι συνήθεις συναρτήσεις συντονισμού μεταξύ καθενός από τα σήματα εισόδου και του σήματος εξόδου θα είναι [5]:

$$\begin{aligned}\gamma_{x1}^2 &= \frac{|P_{x1}|^2}{P_{11}P_{xx}} \\ \gamma_{x2}^2 &= \frac{|P_{x2}|^2}{P_{22}P_{xx}}.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Η πολλαπλή συνάρτηση συντονισμού (multiple coherence function) είναι ο λόγος του ιδεατού φάσματος εξόδου που οφείλεται σε μετρήσεις στην είσοδο δίχως την ύπαρξη θορύβου προς το συνολικό φάσμα εξόδου στην έξοδο, το οποίο και περιλαμβάνει το θόρυβο [5]. Η πολλαπλή συνάρτηση συντονισμού δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma_{x:y}^2 = \frac{P_{vv}}{P_{xx}} = 1 - \frac{P_{ee}}{P_{xx}}, \quad (6.19)$$

όπου

$$P_{vv} = P_{xx} - P_{ee} \quad (6.20)$$

το φάσμα στην έξοδο που οφείλεται σε μετρήσεις εισόδου απαλλαγμένες από θόρυβο. Ισχύει επίσης  $0 \leq \gamma_{x:y}^2 \leq 1$ . Η μοναδιαία τιμή της συνάρτησης λαμβάνεται όταν  $P_{ee} = 0$ , γεγονός που επιβεβαιώνει την ύπαρξη ενός τέλει γραμμικού συστήματος και η μηδενική τιμή της συνάρτησης προκύπτει όταν  $P_{xx} = P_{ee}$ , δηλαδή στην περίπτωση που κανένα από τα σήματα εξόδου δεν προκύπτει από γραμμικές διαδικασίες στις μετρήσεις εισόδου.

Στην περίπτωση συστήματος απλής εισόδου – απλής εξόδου, το φάσμα του σήματος στην έξοδο δίνεται από τη σχέση:

$$P_{vv} = |H|^2 P_{yy} = \gamma_{xy}^2 P_{xx}. \quad (6.21)$$

Από την (6.21) προκύπτει:

$$\gamma_{x:y}^2 = \frac{P_{vv}}{P_{xx}} = \gamma_{xy}^2 \quad (6.22)$$

και επομένως, για την περίπτωση απλού συστήματος, η πολλαπλή συνάρτηση συντονισμού είναι η ίδια με τη συνήθη συνάρτηση συντονισμού [4].

### 6.3.4 Υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση, κατά την οποία τα δεδομένα εισόδου έχουν κάποια μορφή συσχέτισης. Το γεγονός αυτό είναι και το πλέον σύνηθες στην περίπτωση των μετρήσεων των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας, αφού οι μετρούμενες ποσότητες εξαρτώνται άμεσα από το διαταραχτικό δυναμικό του πεδίου. Η σημασία, λοιπόν, της ανάλυσης συσχετισμένων σημάτων εισόδου είναι μεγάλη. Μια αρχική αναφορά για την εφαρμογή των αλγορίθμων συσχέτισης των μετρήσεων εισόδου παρουσιάζεται από τον Sideris [29]. Η ανάλυση ακολουθεί τις βασικές αρχές του βιβλίου των Bendat and Piersol [5].

Όταν παρουσιάζεται συσχέτιση μεταξύ των σημάτων εισόδου, απαραίτητη είναι η κατανόηση της μορφής της συσχέτισης των μετρήσεων. Στην περίπτωση του συστήματος των δύο σημάτων εισόδου τα  $y_1$  και  $y_2$  θεωρούνται ελεύθερα θορύβου. Εφόσον τα  $y_1$  και  $y_2$  είναι

μερικώς συσχετισμένα μεταξύ τους, τότε μέρος του  $y_2$  θα οφείλεται στην συνεισφορά του  $y_1$ . Τα βέλτιστα γραμμικά αποτελέσματα του  $y_1$  επί του  $y_2$  θα συμβολίζονται ως  $y_{2:1}$ . Αφαιρώντας την ποσότητα αυτή από την αρχική μέτρηση  $y_2$  οδηγούμαστε στο «υπολοιπόμενο» (*residual*) σήμα  $y_{2:1}$ , που αναπαριστά το μέρος της  $y_2$ , το οποίο δεν οφείλεται στην  $y_1$ . Σε μορφή εξίσωσης η  $y_2$  μπορεί να αναλυθεί σε δύο ασυσχέτιστες συνιστώσες

$$y_2 = y_{2:1} + y_{2,1} \quad (6.23)$$

Μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier οδηγούμαστε στη σχέση φασματικής μορφής:

$$Y_2 = Y_{2:1} + Y_{2,1}, \quad (6.24)$$

όπου

$$Y_{2:1} = L_{21}Y_1. \quad (6.25)$$

Οι παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουν τη βέλτιστη γραμμική πρόγνωση του  $Y_2$  από το  $Y_1$ . Το γραμμικό σύστημα σταθερών παραμέτρων  $L_{21}$  που εμφανίζεται στις εξισώσεις, αποτελεί το βέλτιστο σύστημα για τον προσδιορισμό του  $y_2$  από το  $y_1$  και ορίζεται, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, ως εξής [5]:

$$L_{21} = \frac{P_{21}}{P_{11}}. \quad (6.26)$$

Όπως αναφέρθηκε, το  $y_{2:1}$  είναι ασυσχέτιστο με το  $y_1$ . Επίσης το φάσμα του  $y_2$  αναλύεται σε

$$P_{22} = P_{22:1} + P_{22,1}, \quad (6.27)$$

όπου

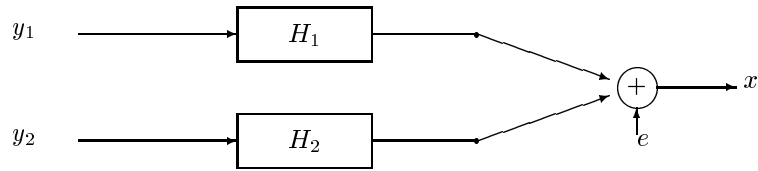
$$P_{22:1} = |L_{21}|^2 P_{11} = \left| \frac{P_{21}}{P_{11}} \right|^2 P_{11} = \gamma_{21}^2 P_{22} \quad (6.28)$$

$$P_{22,1} = [1 - \gamma_{21}^2] P_{22}. \quad (6.29)$$

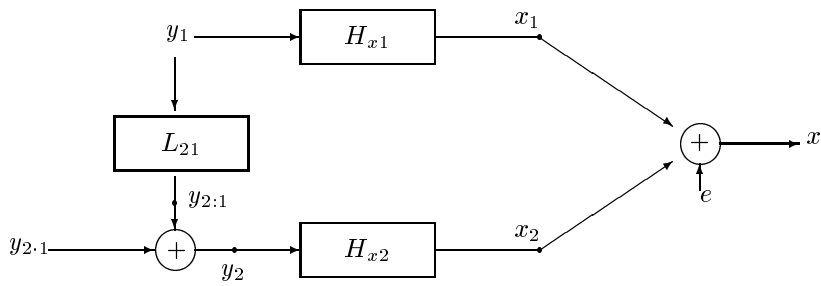
Στην περίπτωση της επιστήμης των ηλεκτρονικών σημάτων, η πηγή των σημάτων εισόδου είναι συνήθως γνωστή και επομένως οι σχέσεις συσχέτισης μεταξύ των σημάτων αυτών είναι προφανείς [21], [7]. Όταν αυτή η σχέση αιτίου-αιτιατού μεταξύ των σημάτων εισόδου παύει να υπάρχει, υπολογίζεται η συνάρτηση δια-συσχέτισης μεταξύ των δεδομένων και προσδιορίζεται η μορφή συσχέτισής τους ανάλογα με τη χρονική εμφάνισή τους στην είσοδο [5].

Στην περίπτωση της φυσικής γεωδαισίας τέτοιες σχέσεις είναι δύσκολο να εφαρμοστούν. Η πηγή των σημάτων είναι, όπως έχει αναφερθεί, το διαταραχτικό δυναμικό του πεδίου βαρύτητας, ποσότητα μη μετρήσιμη. Η χρονική παράμετρος που αναφέρθηκε παραπάνω αντικαθίσταται από τη χωρική. Στην περίπτωση αυτή η κατάταξη των μετρήσεων με τη βοήθεια της συνάρτησης δια-συσχέτισης είναι αδύνατη. Ένας προτεινόμενος τρόπος [5] είναι ο διαχωρισμός των σημάτων στις κυρίαρχες συχνότητες. Καταρχήν, υπολογίζεται η συνήθης συνάρτηση συντονισμού μεταξύ καθενός από τα σήματα εισόδου και εξόδου. Σε κάθε συγκεκριμένη συχνότητα οι μετρήσεις εισόδου κατανέμονται κατά φθίνουσα σειρά μεγέθους της συνάρτησης συντονισμού. Περισσότερα για την μέθοδο αυτή παρουσιάζονται από τους Bendat and Piersol [5]. Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι οι σχέσεις που συνδέουν καθαρά σήματα εισόδου στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας έχουν τη μορφή μαθηματικών τελεστών, π.χ., τελεστής του Stokes, όταν πρόκειται για ανωμαλίες βαρύτητας και αποχές του γεωειδούς.

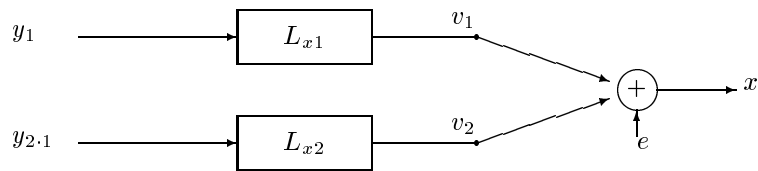
Θα δοθεί στη συνέχεια ένα παράδειγμα του συστήματος διπλής εισόδου – απλής εξόδου. Σύμφωνα με το σχήμα 6.2, τα δύο σήματα  $y_1$  και  $y_2$  είναι συσχετισμένες ποσότητες και τα σήματα εξόδου  $x_1$  και  $x_2$  είναι επίσης συσχετισμένα. Το παραπάνω σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε δύο ισοδύναμες καταστάσεις.



Σχήμα 6.2: Σύστημα δύο σημάτων εισόδου και ενός εξόδου.



Σχήμα 6.3: Σύστημα ισοδύναμο με το σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.4: Σύστημα ισοδύναμο με το σχήμα 6.3.

Στο σχήμα 6.3 τα σήματα εισόδου  $y_1$  και  $y_{2.1}$  είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους, όπως επίσης και τα σήματα εξόδου  $x_1$  και  $x_2$ . Η τελική μορφή του συστήματος με την εφαρμογή υπολοίπων συναρτήσεων μεταφοράς ( $L_{x1}$  και  $L_{x2}$ ) παρουσιάζεται στο σχήμα 6.4. Τα σήματα εισόδου είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τα σήματα εξόδου. Ισχύει η σχέση:

$$X = L_{x1}Y_1 + L_{x2}Y_{2.1} + E, \quad (6.30)$$

όπου

$$\begin{aligned} L_{x1} &= \frac{P_{x1}}{P_{11}} \\ L_{x2} &= \frac{P_{x2.1}}{P_{22.1}}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Η ποσότητα  $P_{x2.1}$  ονομάζεται υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας δια-φάσματος (conditioned (residual) cross-spectral density function) και είναι η συνάρτηση πυκνότητας μεταξύ των φασμάτων των  $y_{2.1}$  και  $x$ . Η  $P_{22.1}$  ονομάζεται υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος (conditioned (residual) auto-spectral density function) και είναι η συνάρτηση πυκνότητας του φάσματος του  $y_{2.1}$ . Και οι δύο υπολογίζονται σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους.

### 6.3.5 Συναρτήσεις μερικού συντονισμού

Από τη μελέτη του σχήματος 6.4 και λόγω της μη ύπαρξης συσχετίσεων μεταξύ των σημάτων εξόδου και του θορύβου, το φάσμα  $P_{xx}$  θα ισούται με το άθροισμα των φασμάτων

$$P_{xx} = P_{v_1v_1} + P_{v_2v_2} + P_{ee}, \quad (6.32)$$

όπου

$$P_{v_1v_1} = |L_{x1}|^2 P_{11} \quad (6.33)$$

$$P_{v_2v_2} = |L_{x2}|^2 P_{22.1} \quad (6.34)$$

$$P_{ee} = P_{xx.1,2}. \quad (6.35)$$

Ως  $P_{xx.1,2}$  συμβολίζεται το ποσοστό του φάσματος του  $x$  που δεν οφείλεται ούτε στο  $y_1$ , ούτε στο  $y_2$ . Σύμφωνα με την (6.31), η (6.34) μετατρέπεται σε

$$P_{v_2v_2} = \left| \frac{P_{x2.1}}{P_{22.1}} \right|^2 P_{22.1} = \gamma_{x2.1}^2 P_{xx.1}, \quad (6.36)$$

όπου

$$\gamma_{x2.1}^2 = \frac{|P_{x2.1}|^2}{P_{22.1}P_{xx.1}} \quad (6.37)$$

είναι η εξ ορισμού συνάρτηση μερικού συντονισμού (partial coherence function) ανάμεσα στα υπολοίπων σήματα  $y_{2.1}$  και  $x_{x.1}$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω:

1. Τα αρχικά σήματα  $y_1$  και  $x$  έχουν αντικατασταθεί από τα υπολοίπων  $y_{2.1}$  και  $x_{x.1}$ .
2. Οι αρχικές φασματικές ποσότητες  $P_{11}$ ,  $P_{xx}$  και  $P_{x1}$  έχουν αντικατασταθεί από τις αντίστοιχες υπολοίπων  $P_{22.1}$ ,  $P_{xx.1}$  και  $P_{x2.1}$ .
3. Η συνήθης συνάρτηση συντονισμού  $\gamma_{x1}^2$  έχει αντικατασταθεί από τη μερική συνάρτηση συντονισμού  $\gamma_{x2.1}^2$ .

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι οι μερικές συναρτήσεις συντονισμού έχουν ακριβώς τον ίδιο χαρακτήρα με τις συνήθεις συναρτήσεις συντονισμού, με τη διαφορά ότι οι αρχικές ποσότητες αντικαθίστανται από τις υπολοίπων. Το πλεονέκτημα της ανάλυσης σε

υπολοιπόμενες συνιστώσες σχετίζεται με την απλοποίηση των πολλαπλών συστημάτων σε συστήματα απλής εισόδου – εξόδου [29]. Η απλοποίηση αυτή επιτυγχάνεται, όπως αποδείχτηκε προηγουμένως, με την απαλοιφή των συσχετίσεων μεταξύ των μετρήσεων εισόδου. Η ανυπαρξία συσχετίσεων, τόσο στην είσοδο, όσο και στην ενδιάμεση έξοδο, οδηγεί στην ισοδυναμία των πολύπλοκων συστημάτων με πολλαπλά απλά συστήματα, η λύση των οποίων είναι εφικτή μέσα από συνήθεις μαθηματικές διεργασίες. Από την άλλη, ειδικότερα για τα γεωδαιτικά δεδομένα, προτιμότερη είναι η εφαρμογή συστημάτων συσχετισμένων σημάτων εισόδου, γιατί οι συσχετίσεις των σημάτων είναι μεγάλες [16] και η απλοποίηση των συστημάτων μπορεί να οδηγήσει σε αποτελέσματα μικρότερης ακρίβειας. Αυτά μπορεί να προκύψουν, είτε από την ανεπιτυχή εύρεση της ακριβούς συσχέτισης μεταξύ των δεδομένων εισόδου, είτε λόγω της ανυπαρξίας αναλυτικών σχέσεων που συνδέουν τα δεδομένα εισόδου. Για τους λόγους αυτούς, και εξαιτίας του γεγονότος ότι τα σύγχρονα υπολογιστικά μέσα παρέχουν δυνατότητες διαχείρισης και επεξεργασίας μεγάλου πλήθους δεδομένων, η γενικευμένη μορφή θεωρείται πιο σωστή στην περίπτωση του γήινου πεδίου βαρύτητας. Στην επόμενη παράγραφο αναλύεται η γενικευμένη μορφή των πολλαπλών συστημάτων εισόδου και παρουσιάζεται η απλοποιημένη διαδικασία, που στηρίζεται στη θεωρία των υπολοιπόμενων σημάτων.

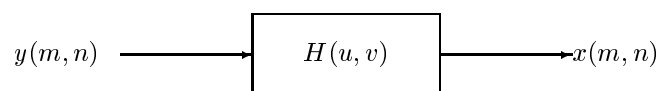
## 6.4 Θεωρία συστημάτων εισόδου – εξόδου

Οι σχέσεις εισόδου – εξόδου μπορούν να ταξινομηθούν και να μελετηθούν σύμφωνα με κάποιο από τα μοντέλα:

- Μοντέλο απλού σήματος εισόδου – απλού σήματος εξόδου.
- Μοντέλο απλού σήματος εισόδου – πολλαπλού σήματος εξόδου.
- Μοντέλο πολλαπλού σήματος εισόδου – απλού σήματος εξόδου.
- Μοντέλο πολλαπλού σήματος εισόδου – πολλαπλού σήματος εξόδου.

### 6.4.1 Μοντέλο απλού σήματος εισόδου – εξόδου

Ένα μοντέλο απλού σήματος εισόδου – εξόδου φαίνεται στο σχήμα 6.5. Οι συνήθεις παραδοχές



Σχήμα 6.5: Ιδεατό σύστημα απλής εισόδου – εξόδου.

που γίνονται για την ισχύ του συστήματος, όπως αναφέρθηκαν και προηγουμένως, είναι η στασιμότητα των μετρήσεων, η ύπαρξη μηδενικής μέσης τιμής και η θεώρηση του συστήματος ως ενός γραμμικού συστήματος σταθερών παραμέτρων. Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές, η έξοδος του συστήματος του σχήματος 6.5  $x(m, n)$  δίνεται από το παρακάτω συνελκτικό ολοκλήρωμα:

$$x(m, n) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(k, l) y(m - k, n - l) dk dl. \quad (6.38)$$

Στην περίπτωση ενός ιδεατού γραμμικού συστήματος σταθερών παραμέτρων, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6.17) τις (6.43) και (6.44), προκύπτει

$$\gamma_{xy}^2(u, v) = \frac{|H(u, v)|^2 P_{yy}^2(u, v)}{P_{yy}(u, v) |H(u, v)|^2 P_{yy}(u, v)} = 1. \quad (6.39)$$

Στην περίπτωση, λοιπόν, ενός ιδεατού γραμμικού συστήματος σταθερών παραμέτρων με μοναδικά ορισμένο σήμα εισόδου και εξόδου, η συνάρτηση συντονισμού θα είναι μοναδιαία. Δηλαδή, το σήμα εξόδου προέρχεται εξ ολοκλήρου από τη συνεισφορά του σήματος εισόδου. Αν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι πλήρως ασυσχέτιστα, τότε η συνάρτηση συντονισμού θα ισούται με μηδέν. Στην ενδιάμεση περίπτωση, που η συνάρτηση συντονισμού λαμβάνει τιμές μεταξύ μηδενός και μονάδας, τότε αυτό οφείλεται σε ένα από τα παρακάτω αίτια [5], [29]:

1. Οι μετρήσεις περιέχουν εκτός από καθαρό σήμα και ποσοστό εξωτερικού θορύβου.
2. Το σύστημα δεν είναι γραμμικό.
3. Το σήμα εξόδου προέρχεται από τη συνεισφορά περισσότερων του ενός σημάτων εισόδου.

Στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων η συνάρτηση συντονισμού μπορεί να ερμηνευθεί ως το κλασματικό μέρος της μέσης τετραγωνικής τιμής του σήματος εξόδου, που προέρχεται από το σήμα εισόδου, στις συχνότητες  $u$  και  $v$ .

Όπως είναι γνωστό, ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων συσχέτισης που αναλύθηκαν παραπάνω, οδηγεί στις συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος [10], [28]:

$$P_{xx}(u, v) = |H(u, v)|^2 P_{yy}(u, v) \quad (6.40)$$

$$P_{xy}(u, v) = H(u, v) P_{yy}(u, v). \quad (6.41)$$

Η εξίσωση (6.40) προσδιορίζει τη συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος ενός σήματος εξόδου  $x$ , όταν είναι γνωστή η συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος του σήματος εισόδου  $y$ . Επίσης, η σχέση (6.41) προσδιορίζει τη δια-φασματική συνάρτηση πυκνότητας μεταξύ του σήματος εισόδου και εξόδου από τη συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος του σήματος εισόδου. Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης συσχέτισης των δεδομένων και μια μέθοδος προσδιορισμού της σχετίζεται με την απευθείας εφαρμογή του μετασχηματισμού στις συναρτήσεις συσχέτισης [6], [10]. Η μέθοδος αυτή ονομάστηκε ([15], [5], [13]) **έμμεση μέθοδος προσδιορισμού** (indirect method - correlogram) της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος, γιατί οι τελευταίες δεν υπολογίζονται άμεσα από τα δεδομένα (σήματα), αλλά προσδιορίζονται σε δεύτερο στάδιο από τις συναρτήσεις αυτο- και δια-συσχέτισης των μετρήσεων.

Μια εναλλακτική μέθοδος για την εξαγωγή των εξισώσεων (6.40) και (6.41) παρουσιάζεται στη συνέχεια. Χρησιμοποιώντας ευθείς μετασχηματισμούς Fourier στα δεδομένα, χωρίς τον υπολογισμό των αρχικών συναρτήσεων συσχέτισης, επιτυγχάνεται ο απευθείας υπολογισμός των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος. Για κάθε ζευγάρι διακριτών σημάτων η εξίσωση (6.38) ισοδυναμεί με

$$X(u, v) = H(u, v)Y(u, v), \quad (6.42)$$

όπου  $Y(u, v)$  και  $X(u, v)$  είναι οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier (φάσματα) των σημάτων εισόδου  $y(u, v)$  και εξόδου  $x(u, v)$ . Από τις ιδιότητες των μετασχηματισμών ισχύουν [6], [27]:

$$X^*(u, v) = H^*(u, v)Y^*(u, v)$$

$$|X(u, v)|^2 = |H(u, v)|^2 |Y(u, v)|^2.$$

$$X(u, v)Y^*(u, v) = H(u, v)|Y(u, v)|^2$$

Λαμβάνοντας την προσδοκία των δύο τελευταίων σχέσεων, πολλαπλασιάζοντας με  $1/(T_m T_n)$ , όπου  $T_m, T_n$  τα μήκη του πεδίου (record length) κατά  $m$  και  $n$  αντίστοιχα, και αυξάνοντας τα  $T_m, T_n$  χωρίς όριο οδηγούμαστε στις σχέσεις της **ευθείας προσέγγισης** (direct method - periodogram) [5], [13], [15].

$$P_{xx}(u, v) = |H(u, v)|^2 P_{yy}(u, v) \quad (6.43)$$

$$P_{xy}(u, v) = H(u, v)P_{yy}(u, v). \quad (6.44)$$

Η απευθείας προσέγγιση θεωρείται ακριβέστερη από την έμμεση προσέγγιση, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2.

Ο συζυγής μιγαδικός της εξίσωσης (6.44) δίνεται από τη σχέση:

$$P_{xy}^*(u, v) = P_{yx}(u, v) = H^*(u, v)P_{yy}(u, v), \quad (6.45)$$

όπου,

$$P_{yx}(u, v) = |P_{xy}(u, v)|e^{j\theta_{xy}(u, v)} \quad (6.46)$$

$$H^*(u, v) = |H(u, v)|e^{j\phi(u, v)}. \quad (6.47)$$

Επομένως, για τον προσδιορισμό του παράγοντα φάσης του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$\frac{P_{xy}(u, v)}{P_{yx}(u, v)} = \frac{H(u, v)}{H^*(u, v)} = e^{-j2\phi(u, v)} \quad (6.48)$$

Το ζητούμενο όμως σε προβλήματα που σχετίζονται με τη φυσική γεωδαισία είναι η εύρεση της συνολικής συνάρτησης απόκρισης συχνότητας  $H(u, v)$ , η οποία αποτελεί το συνδυαστικό κρίκο μεταξύ ενός σήματος εισόδου (π.χ., μετρήσεις ανωμαλιών της βαρύτητας  $\Delta g$ ) και του σήματος εξόδου (π.χ., προγνώσεις των αποχών του γεωειδούς  $N$ ). Από το συνδυασμό των (6.43) και (6.45) προκύπτει τελικά [5], [10], [28]:

$$P_{xx}(u, v) = H(u, v)[H^*(u, v)P_{yy}(u, v)] = H(u, v)P_{yx}(u, v) \quad (6.49)$$

Έτσι, στην περίπτωση ενός ιδεατού μοντέλου απλού συστήματος εισόδου – εξόδου, η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας μπορεί να προσδιοριστεί σύμφωνα με την εξίσωση

$$H(u, v) = \frac{P_{xy}(u, v)}{P_{yy}(u, v)}, \quad (6.50)$$

ή ισοδύναμα με τη σχέση

$$H(u, v) = \frac{P_{xx}(u, v)}{P_{yx}(u, v)}. \quad (6.51)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει η αναλογία

$$\frac{P_{xy}(u, v)}{P_{xx}(u, v)} = \frac{P_{yy}(u, v)}{P_{yx}(u, v)}, \quad (6.52)$$

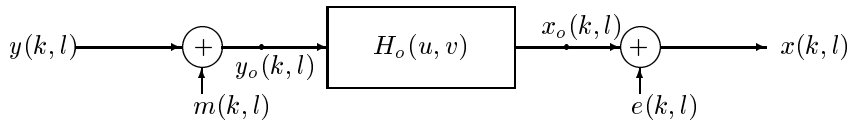
η οποία και ισοδυναμεί με τη θεμελιώδη εξίσωση:

$$|P_{xy}(u, v)|^2 = P_{yy}(u, v)P_{xx}(u, v). \quad (6.53)$$

Όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως ισχύουν στην περίπτωση ενός ιδεατού γραμμικού συστήματος, χωρίς την ύπαρξη θορύβου στα σήματα εισόδου ή εξόδου. Στην περίπτωση του προσδιορισμού των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας τα παραπάνω μοντέλα έχουν καθαρά θεωρητική χροιά, αφού η ύπαρξη εξωτερικού θορύβου είναι προφανής. Για την περίπτωση όμως της απλής θεώρησης ενός ιδεατού συστήματος μεταξύ δύο συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας, π.χ., των ανωμαλιών βαρύτητας ως σήματος εισόδου και της μεσημβρινής συνιστώσας της απόκλισης της κατακορύφου ως σήματος εξόδου, χωρίς την ύπαρξη θορύβου και μη γραμμικών παρεμβολών μεταξύ σημάτων εισόδου – εξόδου, όλες οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν και οδηγούν στο βέλτιστο προσδιορισμό των συναρτήσεων σύνδεσης  $H(u, v)$ . Οι συναρτήσεις σύνδεσης στην περίπτωση σημάτων χωρίς την παρουσία θορύβου αντιστοιχούν στις αναλυτικές εκφράσεις σύνδεσης μεταξύ των σημάτων, όπως περιγράφονται στη θεωρία του κεφαλαίου 2. Ειδικότερα, στην περίπτωση του παραδείγματος που προαναφέρθηκε, οι σχέσεις σύνδεσης των ανωμαλιών βαρύτητας με τα σήματα εξόδου των μεσημβρινών αποκλίσεων είναι οι σχέσεις του Venning-Meinesz [42]. Στη συνέχεια αναφέρονται πιο σύνθετες περιπτώσεις με την εισαγωγή της έννοιας του εξωτερικού θορύβου.

### 6.4.2 Μοντέλο απλής εισόδου – εξόδου με θόρυβο

Έστω ότι στα γραμμικά συστήματα που έχουν περιγραφεί υπάρχει εξωτερικός θόρυβος. Η περίπτωση αυτή προσεγγίζει περισσότερο τις εφαρμογές της φυσικής γεωδαισίας, όπου ως σήματα θεωρούνται οι μετρήσεις των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας, που εμπεριέχουν σφάλματα. Έστω τα πραγματικά μετρούμενα σήματα είναι τα  $y_o(k, l)$  και  $x_o(k, l)$ , τα τυχαία σφάλματα των μετρήσεων είναι  $m(k, l)$  και  $e(k, l)$  τα σφάλματα της πρόγνωσης αντίστοιχα. Ένα σύστημα αυτής της μορφής παρουσιάζεται στο σχήμα 6.6. Το σύστημα 6.6 μπορεί να



Σχήμα 6.6: Σύστημα απλής εισόδου – εξόδου με θόρυβο.

περιγράφει από τη συνελικτική μορφή:

$$x = (y + m) * h_o + e, \quad (6.54)$$

και από την οποία εξάγονται και οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} y_o(k, l) &= y(k, l) + m(k, l) \\ x(k, l) &= x_o(k, l) + e(k, l) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Στη γενικότερη περίπτωση, όπου σήμα και θόρυβος θεωρούνται συσχετισμένες ποσότητες, οι συναρτήσεις πυκνότητας αυτο- και δια-φάσματος των  $y(k, l)$  και  $x(k, l)$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} P_{y_o y_o}(u, v) &= P_{yy}(u, v) + P_{mm}(u, v) + P_{ym}(u, v) + P_{my}(u, v) \\ P_{xx}(u, v) &= P_{x_o x_o}(u, v) + P_{ee}(u, v) + P_{x_o e}(u, v) + P_{e x_o}(u, v) \\ P_{x y_o}(u, v) &= P_{xy}(u, v) + P_{xm}(u, v). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Ανάλογα με το βαθμό συσχέτισης μεταξύ σημάτων και θορύβων, οι γενικότερες σχέσεις (6.56) μπορούν να διακριθούν σε τρεις επιμέρους κατηγορίες.

1. Μη ύπαρξη θορύβου στο σήμα εισόδου και μη ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ θορύβου και σήματος εξόδου.
2. Μη ύπαρξη θορύβου στο σήμα εξόδου και μη ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ θορύβου και σήματος εισόδου.
3. Ύπαρξη θορύβου στα σήματα εισόδου – εξόδου και μη ύπαρξη συσχετίσεων μεταξύ σήματος και θορύβου στην είσοδο.

Η περίπτωση που ενδιαφέρει είναι προφανώς η τρίτη, αφού η φύση των μετρήσεων στη φυσική γεωδαισία, και στη γεωδαισία γενικότερα, έχει τη μορφή σημάτων και τα τυχαία σφάλματα τη μορφή θορύβου. Ισχύουν, λοιπόν, οι σχέσεις (6.55). Ο θόρυβος στην είσοδο θεωρείται ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου, δηλαδή,  $(P_{ym}(u, v) = 0)$ . Οι γενικότερες σχέσεις (6.56) απλοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_{y_o y_o}(u, v) &= P_{yy}(u, v) + P_{mm}(u, v) \\ P_{x y_o}(u, v) &= P_{xy}(u, v) = H(u, v)P_{yy}(u, v) \\ P_{xx}(u, v) &= |H(u, v)|^2 P_{yy}(u, v). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Η συνάρτηση σύνδεσης  $H(u, v)$  είναι η συνάρτηση που συνδέει τα «καθαρά» σήματα εισόδου και εξόδου μεταξύ τους. Αποτελεί το θεωρητικό τελεστή που συνδέει τα δύο σήματα, τα οποία δεν επηρεάζονται από εξωτερικό θόρυβο. Τέτοιοι τελεστές είναι στην περίπτωση του γήινου πεδίου βαρύτητας ο τελεστής του Stokes, ο οποίος συνδέει ανωμαλίες της βαρύτητας με αποχές του γεωειδούς, ή ο τελεστής του Vening-Meinesz που συνδέει ανωμαλίες της βαρύτητας με αποκλίσεις της κατακορύφου [42].

Ειδικότερα, η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας στην περίπτωση απλού μοντέλου εισόδου – εξόδου με επιπλέον θόρυβο δίνεται ως εξής:

$$H_o(u, v) = \frac{P_{xy_o}(u, v)}{P_{y_o y_o}(u, v)} = \frac{P_{xy}(u, v)}{P_{yy}(u, v) + P_{mm}(u, v)}. \quad (6.58)$$

Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας  $H_o(u, v)$  δεν μπορεί να υπολογιστεί μόνο με τη γνώση των σημάτων, αλλά απαραίτητη είναι και η γνώση του θορύβου των μετρήσεων. Το γεγονός αυτό αποτελεί και το σημαντικότερο μειονέκτημα της εφαρμογής της θεωρίας των συστημάτων στις γεωεπιστήμες και την ωκεανογραφία. Και αυτό γιατί, ο διαχωρισμός του σήματος από το θόρυβο είναι αδύνατος από τις μετρήσεις των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας. Όπως θα αναπτυχθεί παρακάτω, το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται εν μέρει με την παραδοχή κατάλληλων μοντέλων που περιγράφουν το θόρυβο των μετρήσεων. Άλλες τεχνικές για το διαχωρισμό σήματος και θορύβου έχουν μελετηθεί από τους Sideris [29], Sideris and Sansò [25], Sansò and Sona [26]. Στην παρούσα εργασία δίνεται μια διαφορετική πρόταση για το θέμα αυτό, που εκτίθεται σε επόμενη ενότητα.

### 6.4.3 Βέλτιστες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας

Οι συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας αποτελούν μέρος ενός συνόλου γραμμικών συναρτήσεων που ενεργούν άμεσα στο σήμα εισόδου. Από το άπειρο σύνολο των συναρτήσεων αυτών, άμεσου ενδιαφέροντος, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, είναι η ειδική συνάρτηση  $H_o(u, v)$ , η οποία ελαχιστοποιεί το θόρυβο στο σήμα εξόδου. Η ελαχιστοποίηση νοείται με την εισαγωγή της θεωρίας των ελαχίστων τετραγώνων [41]. Στην περίπτωση συσχετίσεων μεταξύ του σήματος και του θορύβου εξόδου, όπως συμβαίνει όταν η έξοδος περιλαμβάνει θόρυβο των οργάνων μετρήσεων, ή τη συνεισφορά επιπλέον σημάτων εισόδου, τα οποία συσχετίζονται με το  $y_o(k, l)$ , η λαμβανόμενη βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας  $H_o(u, v)$  δεν αντιπροσωπεύει την άμεση φυσική σύνδεση μεταξύ των  $y_o(k, l)$  και  $x(k, l)$ . Επίσης μπορεί να υφίστανται μη γραμμικές σχέσεις μεταξύ των δεδομένων εισόδου και εξόδου. Σε κάθε περίπτωση όμως, η βέλτιστη συνάρτηση  $H_o(u, v)$  θα αποτελεί μια μαθηματική σχέση, η οποία ορίζει τη βέλτιστη γραμμική σχέση ανάμεσα στα  $y_o(k, l)$  και  $x(k, l)$  σύμφωνα με τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι μαθηματικές σχέσεις για τον προσδιορισμό της βέλτιστης συνάρτησης μεταφοράς έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} X_o &= H_o Y_o \\ X &= H_o(Y + M) + E, \end{aligned} \quad (6.59)$$

όπου τα κεφαλαία σύμβολα αντιπροσωπεύουν τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier των ποσοτήτων της (6.55). Για την απλούστευση των σχέσεων στη συνέχεια παραλείπονται τα ορίσματα  $u$  και  $v$ . Επιλύοντας την (6.59) ως προς τον θόρυβο εξόδου  $E$  και το συζυγικό του  $E^*$  προκύπτει

$$\begin{aligned} E &= X - H_o(Y + M) \\ E^* &= X^* - H_o^*(Y^* + M^*). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (6.60) προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} EE^* &= XX^* - H_o^*XY^* - H_oXM - H_oYX^* - H_oMX^* + H_oYY^*H_o^* \\ &\quad + H_oYM^*H_o^* + H_oMY^*H_o^* + H_oMM^*H_o^*. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Από την προηγούμενη εξίσωση προκύπτει η σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος λαμβάνοντας την προσδοκία των γινομένων και πολλαπλασιάζοντας με  $1/(T_k T_l)$ . Τα  $T_k, T_l$  αυξάνουν μέχρι το άπειρο. Η γενικότερη μορφή της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην έξοδο δίνεται από τη σχέση:

$$P_{ee} = P_{xx} - H_o^*(P_{xy} + P_{xm}) - H_o(P_{yx} + P_{mx}) + H_o(P_{yy} + P_{ym} + P_{my} + P_{mm})H_o^*. \quad (6.62)$$

Θεωρώντας το θόρυβο και τις μετρήσεις ασυσχέτιστες ποσότητες η (6.62) απλοποιείται ως εξής:

$$P_{ee} = P_{xx} - H_o^*P_{xy} - H_oP_{yx} + H_oP_{yy}H_o^* + H_oP_{mm}H_o^*. \quad (6.63)$$

Από τον ορισμό της, η βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς  $H_o$  είναι η συγκεκριμένη συνάρτηση μέσα από ένα άπειρο σύνολο συναρτήσεων, η οποία ελαχιστοποιεί την  $P_{ee}$  στην έξοδο. Η εκτίμηση αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση σύμφωνα με τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων. Η ελαχιστοποίηση της  $P_{ee}$  προκύπτει από την ανάλυση των όρων της (6.63) σε πραγματικές και φανταστικές τιμές [4], [5]:

$$\begin{aligned} H_o &= H_{Ro} - jH_{Io} & H_o^* &= H_{Ro} + jH_{Io} \\ P_{yx} &= P_R - jP_I & P_{xy} &= P_R + jP_I. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην έξοδο μπορεί να γραφτεί σε μιγαδική μορφή ως εξής:

$$P_{ee} = P_{xx} - (H_{Ro} - jH_{Io})P_{yx} - (H_{Ro} + jH_{Io})P_{xy} + (H_{Ro}^2 + H_{Io}^2)(P_{yy} + P_{mm}).$$

Για την εύρεση της  $H_o$ , η οποία θα ελαχιστοποιεί την  $P_{ee}$ , οι μερικές παράγωγοι της  $P_{ee}$  ως προς  $H_{Ro}$  και  $H_{Io}$  τίθενται ίσες με μηδέν και επιλύεται το ζεύγος των εξισώσεων που προκύπτουν

$$\frac{\partial P_{ee}}{\partial H_{Ro}} = -P_{yx} - P_{xy} + 2H_{Ro}(P_{yy} + P_{mm}) = 0 \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial P_{ee}}{\partial H_{Io}} = jP_{yx} - jP_{xy} + 2H_{Io}(P_{yy} + P_{mm}) = 0 \quad (6.65)$$

$$H_{Ro} = \frac{P_{xy} + P_{yx}}{2(P_{yy} + P_{mm})} = \frac{P_R}{(P_{yy} + P_{mm})} \quad (6.66)$$

$$H_{Io} = \frac{j(P_{xy} - P_{yx})}{2(P_{yy} + P_{mm})} = -\frac{P_I}{(P_{yy} + P_{mm})} \quad (6.67)$$

Η βέλτιστη συνάρτηση  $\hat{H}_o$  είναι

$$\hat{H}_o = H_{Ro} - jH_{Io} = \frac{P_R + jP_I}{(P_{yy} + P_{mm})} = \frac{P_{xy}}{(P_{yy} + P_{mm})}. \quad (6.68)$$

Αποδεικνύεται ότι [5] το σήμα εξόδου και ο αντίστοιχος θόρυβος είναι ασυσχέτιστες ποσότητες όταν η βέλτιστη συνάρτηση  $H_o$  χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του γραμμικού συστήματος. Πρέπει να σημειωθεί, ότι, λόγω της ειδικής μορφής της εξίσωσης (6.63), ένας διαφορετικός και απλούστερος τρόπος για τον προσδιορισμό της βέλτιστης συνάρτησης  $\hat{H}_o$  συνίσταται στο να τεθεί είτε η μερική παράγωγος της  $P_{ee}$  ως προς  $H_o$  ίση με το μηδέν (διατηρώντας σταθερή την  $H_o^*$ ), είτε η παράγωγος ως προς  $H_o^*$  διατηρώντας σταθερή την  $H_o$  [5], [29]. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ee}}{\partial H_o} = -P_{yx} + \hat{H}_o^*(P_{yy} + P_{mm}) = 0 & \quad \frac{\partial P_{ee}}{\partial H_o^*} = -P_{xy} + \hat{H}_o(P_{yy} + P_{mm}) = 0 \\ \hat{H}_o^* = \frac{P_{yx}}{P_{yy} + P_{mm}} & \quad \hat{H}_o = \frac{P_{xy}}{P_{yy} + P_{mm}} \end{aligned} \quad (6.69)$$

Μετά τον προσδιορισμό της βέλτιστης συνάρτησης σύνδεσης μεταξύ του σήματος εισόδου και εξόδου, η εκτίμηση του σήματος εξόδου δίνεται από:

$$\hat{X}_o = \hat{H}_o Y_o. \quad (6.70)$$

Το μεγάλο πλεονέκτημα της εφαρμογής της μεθόδου στον προσδιορισμό παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας έγκειται στη δυνατότητα εκτίμησης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην έξοδο και επομένως της πληροφορίας, η οποία σχετίζεται με την ακρίβεια της εκτιμώμενης τιμής στην έξοδο. Η πληροφορία για την ακρίβεια της εκτίμησης προκύπτει χρησιμοποιώντας τη βέλτιστη συνάρτηση σύνδεσης που υπολογίστηκε και τη γνωστή συνάρτηση  $H$ , η οποία συνδέει θεωρητικά τα σήματα εισόδου και εξόδου. Το σφάλμα στην έξοδο δίνεται ως εξής [1]:

$$\hat{E} = X - \hat{X}_o \Rightarrow \hat{E}\hat{E}^* = XX^* - X\hat{X}_o^* - \hat{X}_o X^* + \hat{X}_o \hat{X}_o^* \Rightarrow \quad (6.71)$$

$$P_{\hat{e}\hat{e}} = H_{xy} H_{xy}^* P_{yy} - H_{xy} \hat{H}_{x_o y_o}^* P_{y_o y_o} - \hat{H}_{x_o y_o} H_{xy}^* P_{y_o y} + \hat{H}_{x_o y_o} \hat{H}_{x_o y_o}^* P_{y_o y_o}. \quad (6.72)$$

Ο υπολογισμός των  $P_{y_o y}$  ή  $P_{y_o y_o}$  γίνεται θεωρώντας την παραδοχή ασυσχέτιστου σήματος και θορύβου στην είσοδο ως εξής:

$$P_{y_o y} = (Y + M)Y^* = YY^* + MY^* = P_{yy}. \quad (6.73)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου υπολογίζεται σύμφωνα με:

$$P_{x_y o} = XY_o^* = X(Y^* + M^*) = XY^* + XM^* = H_{xy}YY^* + H_{xy}YM^* = H_{xy}(P_{y_o y_o} - P_{mm}). \quad (6.74)$$

Υπό τις ανωτέρω προϋποθέσεις, οι τελικές σχέσεις υπολογισμού για την εκτίμηση του σήματος στην έξοδο και τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος στην έξοδο δίνονται από τις εξισώσεις [1]:

$$\hat{X}_o = \frac{H_{xy}(P_{y_o y_o} - P_{mm})}{P_{y_o y_o}} Y_o \quad (6.75)$$

$$P_{\hat{e}\hat{e}} = H_{xy} P_{yy} (H_{xy}^* - \hat{H}_{x_o y_o}^*) - \hat{H}_{x_o y_o} P_{y_o y_o} (H_{xy}^* - \hat{H}_{x_o y_o}^*) + \hat{H}_{x_o y_o} P_{mm} H_{xy}^* \Rightarrow (6.76)$$

$$P_{\hat{e}\hat{e}} = \left[ H_{xy}(P_{y_o y_o} - P_{mm}) - \hat{H}_{x_o y_o} P_{y_o y_o} \right] (H_{xy}^* - \hat{H}_{x_o y_o}^*) + \hat{H}_{x_o y_o} P_{mm} H_{xy}^*. \quad (6.77)$$

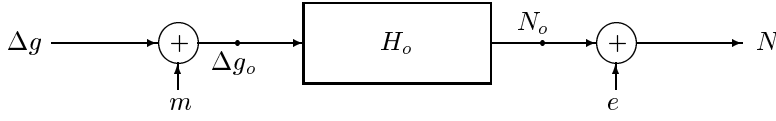
Ο υπολογισμός της  $P_{y_o y_o}$  είναι άμεσα δυνατός από τις παρατηρήσεις ακολουθώντας την ευθεία μέθοδο υπολογισμού (periodogram) [15]. Όπως φαίνεται και από τις τελευταίες εξισώσεις, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην είσοδο  $P_{mm}$  πρέπει να είναι γνωστή.

### Εφαρμογή απλού συστήματος εισόδου – εξόδου στο πεδίο βαρύτητας

Στην ενότητα αυτή, και για την πληρέστερη κατανόηση της θεωρίας δίνεται ένα παράδειγμα σχετικό με το πεδίο βαρύτητας. Έστω ότι τα δεδομένα (σήματα εισόδου) αποτελούν μετρήσεις ανωμαλιών βαρύτητας ελευθέρου αέρα, διαθέσιμες σε μορφή πίνακα. Το πρόβλημα με τις συνιστώσες του πεδίου βαρύτητας, όπως ήδη έχει αναφερθεί, είναι ο διαχωρισμός του καθαρού σήματος από τον θόρυβο. Ενώ είναι γνωστές οι μεταβλητότητες των μετρήσεων, οι τιμές του θορύβου σε κάθε μέτρηση δεν είναι γνωστές. Ο διαχωρισμός του καθαρού σήματος από το θόρυβο επιτυγχάνεται με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων περιγραφής της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου ή με την προσομοίωση τυχαίου θορύβου.

Στο σχήμα 6.7  $\Delta g$  είναι οι μετρήσεις των ανωμαλιών βαρύτητας (παρατηρήσεις),  $\Delta g$  είναι το άγνωστο «καθαρό» σήμα,  $m$  είναι ο θόρυβος των  $\Delta g$ ,  $N_o$  είναι το σήμα εξόδου,  $e$  είναι ο θόρυβος των σημάτων αποχών του γεωειδούς και  $N$  είναι οι πραγματικές αποχές του γεωειδούς. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις του συστήματος εκφράζονται ως εξής:

$$N = (\Delta g + m) * h_o + e \quad (6.78)$$



Σχήμα 6.7: Σύστημα απλής εισόδου – εξόδου του πεδίου βαρύτητας.

Η συνάρτηση απόκρισης συχνότητας  $h_o$  αποτελεί τη συνάρτηση σύνδεσης μεταξύ του σήματος εισόδου (ανωμαλίες ελευθέρου αέρα) και του σήματος εξόδου (αποχές του γεωειδούς). Η συνάρτηση αυτή έχει την ιδιότητα του φιλτραρίσματος των επηρεασμένων από θόρυβο ανωμαλιών εισόδου. Αν από το σήμα εισόδου απουσιάζει ο θόρυβος, τότε η σχέση που συνδέει τα δύο σήματα είναι ο τελεστής του Stokes. Η συνάρτηση  $h_o$  αποτελεί, λοιπόν, ένα είδος τροποποιημένης συνάρτησης του Stokes (modification of the kernel function) με σκοπό το φιλτράρισμα των ανωμαλιών εισόδου και τον περιορισμό του θορύβου.

Η παραπάνω σχέση τροποποιείται με την εφαρμογή διακριτών μετασχηματισμών Fourier και καταλήγει στην αντίστοιχη της (6.59)

$$N = (\Delta G + M)H_o + E. \quad (6.79)$$

Ακολουθώντας τις διαδικασίες του προηγούμενου κεφαλαίου, θεωρώντας δηλαδή τις μετρήσεις και τους θορύβους ποσότητες ασυσχέτιστες μεταξύ τους, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος:

$$P_{ee} = P_{NN} - H_o^* P_{N\Delta g} - H_o P_{\Delta g N} + H_o H_o^* (P_{\Delta g \Delta g} + P_{mm}) \quad (6.80)$$

Η βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς  $H_o$  προσδιορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ee}}{\partial H_o^*} &= -P_{N\Delta g} + \hat{H}_o (P_{\Delta g \Delta g} + P_{mm}) = 0 \Rightarrow \\ \hat{H}_o &= \frac{P_{N\Delta g}}{(P_{\Delta g \Delta g} + P_{mm})} = \frac{P_{N\Delta g}}{P_{\Delta g_o \Delta g_o}} \end{aligned} \quad (6.81)$$

Η διαδικασία για την εύρεση της βέλτιστης συνάρτησης μεταφοράς έχει ως εξής:

1. Εύρεση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των δεδομένων. Επιτυγχάνεται είτε με την απευθείας εφαρμογή μετασχηματισμών στα δεδομένα (ευθεία προσέγγιση), είτε με την εφαρμογή μετασχηματισμών στις συναρτήσεις συσχέτισης των δεδομένων (έμμεση προσέγγιση), είτε, τέλος, με την εφαρμογή παραμετρικών μοντέλων, όπως αυτά παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 2.
2. Προσδιορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ των  $\Delta g$  και των  $N$ . Οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος προσδιορίζονται από τις γνωστές αναλυτικές σχέσεις που συνδέουν τα σήματα εισόδου και εξόδου (βλ. κεφ. 2):

$$\begin{aligned} P_{N\Delta g} &= P_{N\Delta g_o} = N\Delta G^* \\ &= H\Delta G\Delta G^* = H P_{\Delta g \Delta g} \\ &= H(P_{\Delta g_o \Delta g_o} - P_{mm}), \end{aligned} \quad (6.82)$$

όπου  $H$  ταυτίζεται με τον τελεστή του Stokes, μόνο για τη συγκεκριμένη περίπτωση (δεδομένα χωρίς θόρυβο).

3. Προσδιορίζεται η βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης συχνότητας  $\hat{H}_o$  από την εξίσωση (6.81).
4. Υπολογίζονται τα σήματα εξόδου σύμφωνα με τη (6.79).

Το σήμα εξόδου των αποχών του γεωειδούς δίνεται από την εξίσωση [1]:

$$\hat{N}_o = \hat{H}_{N_o \Delta G_o} \Delta G_o = \frac{H_{N \Delta g} (P_{\Delta g_o \Delta g_o} - P_{mm})}{P_{\Delta g_o \Delta g_o}} \Delta G_o, \quad (6.83)$$

και η συνάρτηση πυκνότητα φάσματος του σφάλματος προσέγγισης είναι:

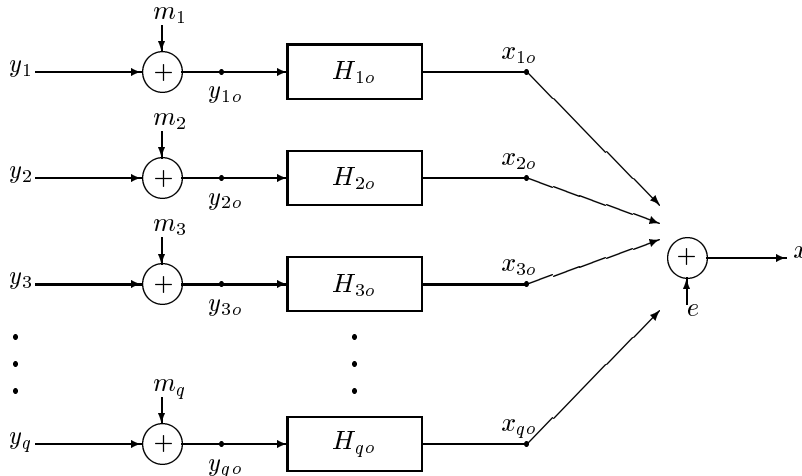
$$P_{\hat{e}\hat{e}} = \left[ H_{N \Delta g} (P_{\Delta g_o \Delta g_o} - P_{mm}) - \hat{H}_{N_o \Delta g_o} P_{\Delta g_o \Delta g_o} \right] (H_{N \Delta g}^* - \hat{H}_{N_o \Delta g_o}^*) + \hat{H}_{N_o \Delta g_o} P_{mm} H_{N \Delta g}^* \quad (6.84)$$

#### 6.4.4 Μοντέλο πολλαπλού σήματος εισόδου – εξόδου

Το είδος των συστημάτων της μορφής αυτής παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στις εφαρμογές της γεωδαισίας, της γεωφυσικής, της ωκεανογραφίας και των γεωεπιστημών, γενικότερα. Χρησιμοποιώντας πλήθος ετερογενών δεδομένων εισόδου, δίνεται η δυνατότητα προσδιορισμού (πρόγνωσης) συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας.

Τα συστήματα που συνδέουν τα σήματα εισόδου και εξόδου θεωρούνται γραμμικά συστήματα σταθερών παραμέτρων.

Έστω, λοιπόν, οι μετρήσεις  $q$  σημάτων εισόδου  $y_{io}(k, l)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , οι οποίες εισέρχονται μέσα από  $q$  γραμμικά συστήματα σταθερών παραμέτρων, π.χ.,  $H_{io}(u, v)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$  και έχουν ως αποτέλεσμα το απλό σήμα εξόδου  $x(k, l)$ . Κάθε σήμα εισόδου συνοδεύεται από τον αντίστοιχο θόρυβο  $m_i(k, l)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , ενώ  $e(k, l)$  είναι ο θόρυβος στην έξοδο, ο οποίος και αντιπροσωπεύει κάθε απόκλιση από το ιδεατό μοντέλο, λόγω μη μετρήσιμων ποσοτήτων στην περιοχή εισόδου ή έλλειψη γραμμικότητας ή στασιμότητας στο σύστημα. Ένα σύστημα αυτής της μορφής φαίνεται στο σχήμα 6.8. Θεωρώντας το σύστημα του σχήματος 6.8, απαραίτητο



Σχήμα 6.8: Σύστημα πολλαπλής εισόδου – εξόδου με θόρυβο.

είναι να πληρούνται τέσσερις όροι, έτσι ώστε το μοντέλο να παρουσιάζεται επαρκώς ορισμένο.

1. Καμία από τις συνήθεις συναρτήσεις συντονισμού μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους σημάτων εισόδου δεν πρέπει να είναι ίση με τη μονάδα. Αν αυτό συμβαίνει, τότε τα δύο σήματα περιέχουν όμοια πληροφορία και απαραίτητη είναι η απαλοιφή ενός εκ των δύο.
2. Καμία από τις συνήθεις συναρτήσεις συντονισμού μεταξύ οποιουδήποτε από τα σήματα εισόδου και το σήμα εξόδου δεν πρέπει να είναι ίση με τη μονάδα. Αν αυτό συμβαίνει,

τότε όλα τα υπόλοιπα σήματα εισόδου δεν συνεισφέρουν καθόλου στο σήμα εξόδου και θα πρέπει να απαλειφθούν από το σύστημα. Το μοντέλο στην απλοποιημένη μορφή του θα αντιμετωπίζεται ως ένα σύστημα απλής εισόδου – εξόδου, όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα 6.4.2.

3. Η πολλαπλή συνάρτηση συντονισμού μεταξύ οποιουδήποτε σήματος εισόδου και των υπολοίπων σημάτων εισόδου δεν πρέπει να είναι μοναδιαία. Αν αυτό συμβαίνει, τότε το συγκεκριμένο σήμα εισόδου μπορεί να προσδιοριστεί ως γραμμικός συνδυασμός από τα υπόλοιπα σήματα. Το σήμα αυτό δεν παρέχει πρόσθετη πληροφορία για τον προσδιορισμό του σήματος εξόδου και πρέπει να απαλειφθεί από τα δεδομένα.
4. Για τις πρακτικές εφαρμογές, η πολλαπλή συνάρτηση συντονισμού μεταξύ του σήματος εξόδου και των σημάτων εισόδου πρέπει να παρουσιάζεται υψηλή, γεγονός που επιβεβαιώνει τη συνεισφορά των σημάτων εισόδου. Σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να μελετηθεί είτε η παράλειψη κάποιων σημαντικών σημάτων εισόδου, είτε να εξεταστούν έντονα μη γραμμικά φαινόμενα. Οι Bendat and Piersol [5] παρουσιάζουν μια τιμή της συνάρτησης της τάξης του 0.50. Επισημαίνουν, όμως, ότι η τιμή αυτή δεν είναι ακριβής, αλλά προέρχεται μετά από στατιστική ανάλυση, αναλόγως του φυσικού περιβάλλοντος των μετρήσεων και της διαθεσιμότητας των δεδομένων της ανάλυσης.

Για την ορθή εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων απαραίτητη είναι η σωστή εκτίμηση των πραγματικών τιμών των συναρτήσεων πυκνότητας αυτο-φάσματος και των μιγαδικών τιμών των συναρτήσεων πυκνότητας δια-φάσματος ανάμεσα σε κάθε ζεύγος δεδομένων. Η εύρεση των συναρτήσεων αυτών γίνεται, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, με δύο κυρίως τρόπους (ευθεία και έμμεση προσέγγιση). Ένας τρίτος τρόπος με την εφαρμογή παραμετρικών μοντέλων παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2. Για τις φασματικές αυτές ποσότητες, τα αποτελέσματα που αναμένονται μετά την εφαρμογή της θεωρίας συστημάτων είναι:

- Ανάλυση του φάσματος εξόδου στις συνιστώσες εκείνες που προέρχονται από τα σήματα εισόδου. Ο διαχωρισμός στις συνιστώσες παρουσιάζει το πλεονέκτημα της εύρεσης της κυρίαρχης τάσης στην έξοδο του συστήματος.
- Εύρεση της βέλτιστης συνάρτησης απόκρισης συχνότητας. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τον παράγοντα μεταφοράς από τα χαρακτηριστικά των σημάτων εισόδου στη μορφή του σήματος εξόδου. Η βέλτιστη αυτή συνάρτηση προσδιορίζεται με βάση την ελαχιστοποίηση του φάσματος του θορύβου στην έξοδο, το οποίο οφείλεται σε μη γραμμικές διαδικασίες των μετρήσεων στην είσοδο.

Η έξοδος του συστήματος αυτής της μορφής  $x(k, l)$  μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των επιμέρους σημάτων εξόδου  $x_i(k, l)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , και του παράγοντα θορύβου  $e(k, l)$ , ώστε:

$$x(k, l) = \sum_{i=1}^q x_{i_o}(k, l) + e(k, l). \quad (6.85)$$

Ακολουθώντας την ανάλυση κατά Fourier, όπως και στην περίπτωση του απλού συστήματος έχουμε:

$$X(u, v) = \sum_{i=1}^q X_{i_o}(u, v) + E(u, v). \quad (6.86)$$

Για κάθε ξεχωριστό σήμα εξόδου  $X_{i_o}(u, v)$  ισχύει η σχέση που το συνδέει με το αντίστοιχο σήμα και τον θόρυβο στην είσοδο:

$$X_{i_o}(u, v) = H_{i_o}(u, v)[Y_i(u, v) + M_i(u, v)] \quad (6.87)$$

Θεωρώντας την περίπτωση πολλαπλών μετρήσεων στην είσοδο, η γενική εξίσωση που περιγράφει μαθηματικά το σύστημα του σχήματος 6.8 γράφεται ως εξής:

$$X(u, v) = \sum_{j=1}^q H_{j_o}(u, v)[Y_j(u, v) + M_j(u, v)] + E(u, v). \quad (6.88)$$

Με την εισαγωγή ενός διαφορετικού δείκτη άθροισης  $i = 1, 2, \dots, q$ , την απαλοιφή των ορισμάτων  $k, l$  και  $u, v$  για λόγους συντομίας και τον πολλαπλασιασμό της σχέσης (6.88) με τον συζυγή μιγαδικό  $Y_i^*$ , προκύπτει:

$$XY_i^* = \sum_{j=1}^q H_{jo} Y_j Y_i^* + H_{jo} M_j Y_i^* + EY_i^*. \quad (6.89)$$

Θεωρώντας τις προσδοκίες των δύο μερών της παραπάνω σχέσης και πολλαπλασιάζοντας κάθε ένα μέρος με τον παράγοντα κλίμακας  $1/(T_k T_l)$  προκύπτει:

$$P_{xi} = \sum_{j=1}^q H_{jo} (P_{ji} + P_{mi}) + P_{ei} \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (6.90)$$

Στην παραπάνω σχέση ο παράγοντας  $P_{mi}$  είναι ίσος με το μηδέν στην περίπτωση που ο αντίστοιχος θόρυβος  $m$  και οι μετρήσεις εισόδου  $y_i$  είναι ποσότητες ασυσχέτιστες. Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, προκύπτει:

$$P_{xi} = \sum_{j=1}^q H_{jo} P_{ji} \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (6.91)$$

Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη διαδικασία η εύρεση της συνολικής συνάρτησης πυκνότητας αυτο-φάσματος του σήματος εξόδου δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} X^* &= \sum_{i=1}^q H_{io}^* (Y_i^* + M_i^*) + E^* \\ XX^* &= \left[ \sum_{i=1}^q H_{io} (Y_i + M_i) + E \right] \left[ \sum_{j=1}^q H_{jo}^* (Y_j^* + M_j^*) + E^* \right] \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_{io} (Y_i + M_i) (Y_j^* + M_j^*) H_{jo}^* + EE^* \\ &\quad + \sum_{i=1}^q H_{io} (Y_i + M_i) E^* + \sum_{j=1}^q E H_{jo}^* (Y_j^* + M_j^*) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας τις μαθηματικές προσδοκίες των δύο μερών και πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα κλίμακας  $1/T_k T_l$  προκύπτει:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_{io} (P_{ij} + P_{m_i m_j} + P_{im_j} + P_{m_i j}) H_{jo}^* + P_{ee} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q H_{io} (P_{ie} + P_{m_i e}) + \sum_{j=1}^q H_{jo}^* (P_{ej} + P_{em_j}). \end{aligned} \quad (6.92)$$

Με την υπόθεση των ασυσχέτιστων ποσοτήτων μεταξύ των μετρήσεων εισόδου και του θορύβου στην έξοδο η (6.92) λαμβάνει τη μορφή:

$$P_{xx} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_{io} (P_{ij} + P_{m_i m_j}) H_{jo} + P_{ee}. \quad (6.93)$$

Στην περίπτωση  $q$  διαφορετικών μετρήσεων εισόδου και με την παραδοχή  $P_{ei} = 0$  η έξοδος  $P_{xx}$  περιλαμβάνει  $(q^2 + 1)$  μέρη. Η ανάλυση μιας τέτοιας μορφής και η ερμηνεία καθενός μέρους χωριστά αποτελεί μια επίπονη υπολογιστική διαδικασία. Η παραπάνω περίπτωση απλοποιείται συνήθως με τη χρήση δύο τεχνικών:

1. Το σύστημα αντιμετωπίζεται με ασυσχέτιστες μετρήσεις εισόδου. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις (6.91) και (6.92) καταλήγουν στη μορφή

$$P_{xi} = P_{xio} = H_{io}(P_{ii} + P_{mm}), i = 1, 2, \dots, q \quad (6.94)$$

$$P_{xx} = \sum_{i=1}^q |H_{io}|^2 (P_{ii} + P_{mm}) + P_{ee}. \quad (6.95)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ιδιαίτερες περιπτώσεις πολλών απλών συστημάτων εισόδου / εξόδου. Δεν απαιτείται κάποιο σύστημα εξισώσεων για την εύρεση των  $H_{io}$  και ισχύει:

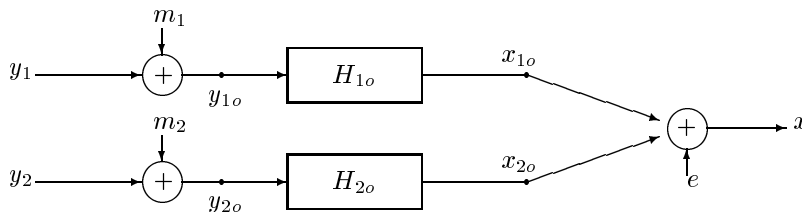
$$H_{io} = \frac{P_{xi}}{(P_{ii} + P_{mm})} = \frac{P_{xi}}{P_{ioio}} \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (6.96)$$

Η έξοδος  $P_{xx}$  περιέχει μόνο  $(q + 1)$  μέρη.

2. Το πολλαπλό σύστημα αναλύεται σε επιμέρους απλά συστήματα δύο ή τριών εισόδων χρησιμοποιώντας τις επιμέρους συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος που προκύπτουν. Εκτενέστερη παρουσίαση της θεωρίας αυτής δίνεται στην ενότητα 6.4.6.

#### 6.4.5 Μοντέλο διπλής εισόδου / απλής εξόδου

Στην περίπτωση αυτή δύο σήματα εισόδου «μεταφέρονται» μέσω των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας και παράγουν το σήμα εξόδου. Η μορφή παρουσιάζεται στο σχήμα 6.9. Το



Σχήμα 6.9: Σύστημα διπλής εισόδου / απλής εξόδου με θόρυβο.

σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη εξίσωση, που προκύπτει από την (6.88):

$$X = H_1 Y_1 + H_2 Y_2 + E. \quad (6.97)$$

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται σε σήματα εισόδου χωρίς θόρυβο. Το σύστημα με την εισαγωγή θορύβου στις μετρήσεις εισόδου λαμβάνει τη μορφή:

$$X = H_{1o}(Y_1 + M_1) + H_{2o}(Y_2 + M_2) + E, \quad (6.98)$$

όπου  $X$  ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου,  $H_{io}$  ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας,  $Y_i$  ο μετασχηματισμός Fourier των «καθαρών» (απαλλαγμένων από σφάλματα) σημάτων στην είσοδο,  $M_i$  το φάσμα του θορύβου στις μετρήσεις εισόδου και  $E$  το φάσμα του θορύβου στην έξοδο, που οφείλεται στη μη γραμμικότητα του μοντέλου. Οι βέλτιστες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας των παραπάνω σχέσεων στην περίπτωση συστημάτων διπλής εισόδου και απλής εξόδου προσδιορίζονται με τη διαδικασία του πολλαπλού συστήματος που αναφέρθηκε προηγουμένως. Ισχύει:

$$E = X - H_{1o}(Y_1 + M_1) - H_{2o}(Y_2 + M_2), \quad E = X - H_{1o}Y_{1o} - H_{2o}Y_{2o}. \quad (6.99)$$

Για την περίπτωση των συναρτήσεων  $H_{1o}$  και  $H_{2o}$  το φάσμα του θορύβου στην έξοδο είναι:

$$P_{ee} = \frac{1}{T_k T_l} E \{ EE^* \}. \quad (6.100)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος του θορύβου στην έξοδο δίνεται από τη γενικότερη εξίσωση:

$$\begin{aligned} P_{ee} = & P_{xx} - H_{1o}^* P_{x1o} - H_{2o}^* P_{x2o} - H_{1o} P_{1o,x} \\ & + H_{1o} P_{1o,1o} H_{2o}^* + H_{1o} P_{1o,2o} H_{2o}^* - H_{2o} P_{2o,x} \\ & + H_{2o} P_{2o,1o} H_{1o}^* + H_{2o} P_{2o,2o} H_{2o}^*. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Για την εύρεση των βέλτιστων συναρτήσεων μεταφοράς  $H_{1o}$  και  $H_{2o}$  ακολουθείται η γνωστή θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων. Η ελαχιστοποίηση οδηγεί στο μηδενισμό της μερικής παραγώγου της  $P_{ee}$  ως προς τη αντίστοιχη συζυγή μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς. Είναι:

$$\frac{\partial P_{ee}}{\partial H_{1o}^*} = - P_{x1o} + H_{1o} P_{1o,1o} + H_{2o} P_{1o,2o} = 0 \quad (6.102)$$

$$\frac{\partial P_{ee}}{\partial H_{2o}^*} = - P_{x2o} + H_{1o} P_{2o,1o} + H_{2o} P_{2o,2o} = 0 \quad (6.103)$$

Το γραμμικό σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων έχει ως άγνωστες ποσότητες τις βέλτιστες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{H}_{1o} = \frac{P_{2o,2o} P_{x1o}}{P_{1o,1o} P_{2o,2o} - P_{1o,2o} P_{2o,1o}} \quad (6.104)$$

$$\hat{H}_{2o} = \frac{P_{1o,1o} P_{x2o}}{P_{1o,1o} P_{2o,2o} - P_{1o,2o} P_{2o,1o}}. \quad (6.105)$$

Ο υπολογισμός των παραπάνω ποσοτήτων στην περίπτωση μετρήσεων του πεδίου βαρύτητας είναι προφανής, εκτός από την περίπτωση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος μεταξύ των δεδομένων εισόδου και εξόδου  $P_{x1o}$  και  $P_{x2o}$ , όπου εμπλέκονται τα άγνωστα σήματα εξόδου  $x$ . Οι ποσότητες αυτές υπολογίζονται όπως και στην περίπτωση της (6.62). Προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned} P_{x1o} &= XY_{1o}^* = X(Y_1^* + M_1^*) \\ &= XY_1^* + XM_1^* = XY_1^* \\ &= P_{x1} \end{aligned} \quad (6.106)$$

και ισχύει  $P_{x2o} = P_{x2}$ . Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια των γνωστών τελεστών που συνδέουν θεωρητικά τις ποσότητες του πεδίου βαρύτητας (π.χ., τελεστές Stokes, Vening-Meinesz, Hotine, κ.λπ.), δηλαδή:

$$P_{x1} = XY_1^* = H_1 Y_1 Y_1^* = H_1 P_{11}, \quad (6.107)$$

όπου  $H_1$  ο τελεστής που συνδέει θεωρητικά το σήμα εξόδου με το «καθαρό» σήμα εισόδου.

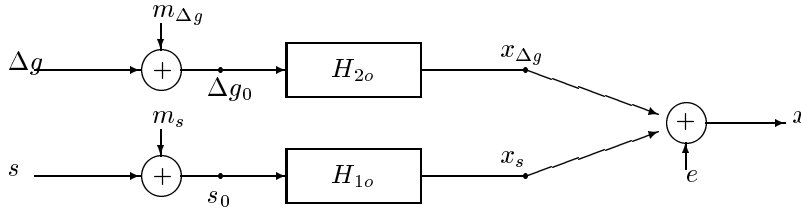
Πρέπει να σημειωθεί ότι, όταν επιλέγονται οι βέλτιστες τιμές για τις συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας, οι συναρτήσεις πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ των μετρήσεων στην είσοδο και του θορύβου στην έξοδο είναι ίσες με μηδέν. Συμπερασματικά, ο υπολογισμός των βέλτιστων συναρτήσεων μεταφοράς οδηγεί στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης πυκνότητας αυτο-φάσματος του θορύβου στην έξοδο και μηδενίζει τις συναρτήσεις δια-φάσματος μεταξύ μετρήσεων και εξωτερικού θορύβου [5].

### Παράδειγμα για την περίπτωση του πεδίου βαρύτητας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα σύστημα διπλής εισόδου και απλής εξόδου του πεδίου βαρύτητας, με μετρήσεις εισόδου τιμές ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g$  και μετρήσεις αποχών του γεωειδούς  $s$  που προέρχονται από την επεξεργασία αλτιμετρικών δεδομένων. Η επίδραση της θαλάσσιας τοπογραφίας (Sea Surface Topography - SST) θεωρείται αμελητέα, με αποτέλεσμα τα σήματα των αλτιμετρικών δεδομένων να ταυτίζονται με τα σήματα των αποχών του γεωειδούς. Ως σήμα εξόδου μπορεί να ληφθεί, είτε η αποχή του γεωειδούς  $N$ , είτε νέες τιμές ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g$ . Η ανάλυση ακολουθεί τη περιγραφή προγενέστερων εργασιών [29], [13], [14], [33], [32], [34], [31], [30]. Με το παράδειγμα αυτό φαίνεται η μεγάλη χρησιμότητα της θεωρίας των συστημάτων στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας. Με τη χρήση ετερογενών πηγών δεδομένων (π.χ., ανωμαλίες της βαρύτητας από μετρήσεις θαλάσσιας βαρυτημετρίας και υψόμετρα της επιφάνειας της θάλασσας προερχόμενα από μετρήσεις δορυφορικής αλτιμετρίας) επιτυγχάνεται ο βέλτιστος συνδυασμός τους και ο προσδιορισμός διαφόρων συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας. Η εξίσωση του συστήματος δίνεται σε συνελικτική μορφή από τη σχέση:

$$x = h_{1o} * (s + m_s) + h_{2o} * (\Delta g + m_{\Delta g}) + e, \quad (6.108)$$

όπου  $e$  τα σφάλματα που οφείλονται στη μη γραμμικότητα του συστήματος. Το σχήμα 6.10 περιγράφει τη μορφή του συστήματος αυτού. Η (6.108) μετατρέπεται σε απλή μορφή πολλα-



Σχήμα 6.10: Σύστημα διπλής εισόδου / απλής εξόδου του πεδίου βαρύτητας με θόρυβο.

πλασιασμού, εάν οι εμπλεκόμενες ποσότητες μετασχηματιστούν σε φάσματα με την εφαρμογή του ευθέως μετασχηματισμού Fourier:

$$X = H_{1o}(S + M_s) + H_{2o}(\Delta G + M_{\Delta g}) + E. \quad (6.109)$$

Για την εύρεση των βέλτιστων  $\hat{H}_{1o}$  και  $\hat{H}_{2o}$ , θεωρώντας τους θορύβους ασυσχέτιστες ποσότητες και κάθε συνιστώσα θορύβου ασυσχέτιστη με το σήμα εξόδου, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\hat{H}_{1o} = \frac{(P_{\Delta g \Delta g} + P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}}) P_{x s}}{(P_{s s} + P_{m_s m_s})(P_{\Delta g \Delta g} + P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}}) - P_{s \Delta g} P_{\Delta g s}} \quad (6.110)$$

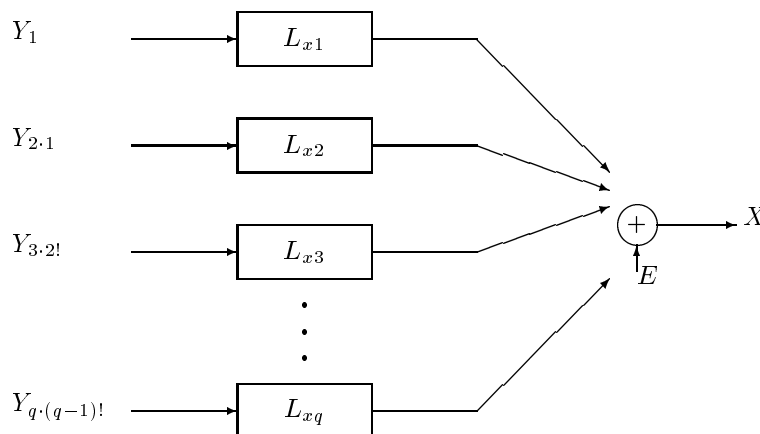
$$\hat{H}_{2o} = \frac{(P_{s s} + P_{n_s n_s}) P_{x \Delta g}}{(P_s + P_{m_s m_s})(P_{\Delta g \Delta g} + P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}}) - P_{s \Delta g} P_{\Delta g s}}, \quad (6.111)$$

όπου  $x$  μπορεί να είναι είτε το  $N$  είτε το  $\Delta g$ ,  $P_{s s}$  και  $P_{\Delta g \Delta g}$  είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας αυτο-φάσματος των  $s$  και  $\Delta g$  αντιστοίχως,  $P_{s \Delta g} = P_{\Delta g s}^*$  είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ των  $s$  και  $\Delta g$ ,  $P_{x s}$  και  $P_{x \Delta g}$  είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας αυτο-φάσματος μεταξύ των  $x$  και  $s$  και  $\Delta g$  αντιστοίχως,  $P_{m_s m_s}$  και  $P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}}$  είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας αυτο-φάσματος μεταξύ των αντίστοιχων θορύβων των σημάτων εισόδου. Η διαδικασία προσδιορισμού των βέλτιστων συναρτήσεων μεταφοράς και των τελικών σημάτων εξόδου ακολουθεί την κλασική θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων και διακρίνεται στα επόμενα βήματα, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο των απλών συστημάτων:

1. Εύρεση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των δεδομένων. Πραγματοποιείται είτε με την απευθείας εφαρμογή μετασχηματισμών στα δεδομένα (ευθεία προσέγγιση), είτε με την εφαρμογή μετασχηματισμών στις συναρτήσεις συσχέτισης των δεδομένων (έμμεση προσέγγιση), είτε, τέλος, με την εφαρμογή παραμετρικών μοντέλων.
2. Προσδιορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ των  $\Delta g$  και των  $x$  και η αντίστοιχη συνάρτηση μεταξύ των  $s$  και  $x$ , με τις παραδοχές που ισχύουν και στην περίπτωση απλού συστήματος.
3. Προσδιορίζονται οι βέλτιστες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας  $\hat{H}_{1_0}, \hat{H}_{2_0}$  από τις εξισώσεις (6.110).
4. Υπολογίζονται τα σήματα εξόδου.
5. Υπολογίζονται οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων της εκτίμησης.

#### 6.4.6 Υπό συνθήκη συστήματα πολλαπλής εισόδου

Ένα σύστημα αυτής της μορφής παρουσιάζεται στο σχήμα 6.11. Στο σχήμα παρουσιάζονται



Σχήμα 6.11: Σύστημα πολλαπλής εισόδου για υπολοιπόμενα δεδομένα.

οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων εισόδου και για κάθε  $i$ , ο συμβολισμός  $i \cdot (i-1)!$  παριστά την υπολοιπόμενη  $i$  μέτρηση, απαλλαγμένη από συσχετίσεις με τις υπόλοιπες  $(i-1)$  μετρήσεις. Τα σήματα εισόδου σε αυτήν την κατάσταση είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους [5].

Στη συνέχεια αναπτύσσονται οι αλγόριθμοι εύρεσης των διακριτών μετασχηματισμών Fourier των «υπολοιπόμενων» (residual) δεδομένων. Τα σήματα θεωρούνται απαλλαγμένα από εξωτερικό θόρυβο. Η εξίσωση που περιγράφει το σύστημα του σχήματος 6.11 έχει τη μορφή:

$$X = \sum_{i=1}^q L_{xi} Y_{i \cdot (i-1)!} + E. \quad (6.112)$$

Αν η έξοδος  $X$  θεωρηθεί ότι αποτελεί την  $(q+1)$  μέτρηση, τότε ο θόρυβος  $E$  θα αποτελεί την  $(q+1)$  μέτρηση, αφού θα έχουν απαλειφθεί οι επιδράσεις των υπολοίπων  $q$ . Όπως έχει

αναφερθεί, ο θόρυβος στην έξοδο αντιπροσωπεύει την υπολοιπόμενη συνεισφορά των μη γραμμικών επιδράσεων που δεν οφείλονται στα σήματα εισόδου. Η προηγούμενη εξίσωση καταλήγει στη μορφή:

$$Y_{(q+1)} = \sum_{i=1}^q L_{(q+1)i} Y_{i \cdot (i-1)!} + Y_{(q+1) \cdot q!}. \quad (6.113)$$

Στην περίπτωση των  $r$  πρώτων δεδομένων εισόδου, όπου  $r \leq q$ , ισχύει

$$Y_{(q+1)} = \sum_{i=1}^r L_{(q+1)i} Y_{i \cdot (i-1)!} + Y_{(q+1) \cdot r!}. \quad (6.114)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την  $(q+1)$  μέτρηση με την τυχαία  $j$  προκύπτει η γενικότερη σχέση:

$$Y_j = \sum_{i=1}^r L_{ji} Y_{i \cdot (i-1)!} + Y_{j \cdot r!}. \quad (6.115)$$

Αν η μεταβλητή  $r$  αντικατασταθεί από την  $(r-1)$ , τότε η (6.115) γίνεται:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{r-1} L_{ji} Y_{i \cdot (i-1)!} + Y_{j \cdot (r-1)!}. \quad (6.116)$$

Με συνδυασμό των (6.115) και (6.116) προκύπτει η βασική σχέση υπολογισμού των «υπολοιπόμενων» (residual) σημάτων σε φασματική μορφή:

$$Y_{j \cdot r!} = Y_{j \cdot (r-1)!} - L_{jr} Y_{r \cdot (r-1)!}. \quad (6.117)$$

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζεται ένα τυχαίο σήμα  $Y_{j \cdot r!}$  από τη γνώση του  $Y_{j \cdot (r-1)!}$ . Ειδικότερα, κάθε όρος  $Y_{j \cdot 1}$  μπορεί να προκύψει από τη γνώση του  $Y_j$  και των αντίστοιχων υπολοιπόμενων συναρτήσεων μεταφοράς  $L_{j1}$ . Κατόπιν, ο παράγοντας  $X_{j \cdot 2!}$  μπορεί να προκύψει από τη γνώση του  $X_{j \cdot 1}$  και των  $L_{j2}$  υπολοιπόμενων συναρτήσεων.

Ο γενικευμένος αλγόριθμος προσδιορισμού των υπολοιπόμενων συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των δεδομένων ακολουθεί παρόμοια ανάλυση. Έστω για τα δεδομένα  $X_{j \cdot r!}$  και  $X_{i \cdot r!}$  δίνεται η υπολοιπόμενη συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος, καθώς, επίσης, και η υπολοιπόμενη συνάρτηση πυκνότητας διαφάσματος:

$$P_{jj \cdot r!} = \frac{1}{T_k T_l} E[X_{j \cdot r!} X_{j \cdot r!}^*] \quad (6.118)$$

$$P_{ij \cdot r!} = \frac{1}{T_k T_l} E[X_{i \cdot r!} X_{j \cdot r!}^*].$$

Για τις συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος προκύπτει τελικά η σχέση [5]

$$P_{ij \cdot r!} = P_{ij \cdot (r-1)!} - L_{jr} P_{ri \cdot (r-1)!}. \quad (6.119)$$

Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται για την ανάλυση υπό συνθήκη συστημάτων πολλαπλών σημάτων εισόδου / εξόδου. Ειδικότερα για τον υπολογισμό του φάσματος  $P_{ij \cdot 1}$  απαιτείται η γνώση του  $P_{ij}$  και των  $L_{j1}$  συστημάτων. Κατόπιν, για τον υπολογισμό του  $P_{ij \cdot 2!}$  απαιτείται η γνώση του  $P_{ij \cdot 1}$  και των  $L_{j2}$  συστημάτων. Όπως γίνεται αντιληπτό, για την εφαρμογή των σχέσεων (6.117) και (6.119) είναι απαραίτητη η γνώση των  $L_{jr}$  υπολοιπόμενων συστημάτων.

Όπως αναφέρθηκε, το μεγάλο πλεονέκτημα της χρήσης των υπολοιπόμενων δεδομένων είναι η απλοποίηση των πολύπλοκων μοντέλων πολλαπλών σημάτων εισόδου. Η απλοποίηση αυτή περιγράφεται στη συνέχεια, όπου και αναλύεται ένα πολλαπλό σύστημα σε επιμέρους

απλά. Η συνάρτηση μεταφοράς  $L_{xi}$ , που αντιπροσωπεύει το απλό σύστημα, δίνεται από τη σχέση:

$$L_{xi} = \frac{P_{xi \cdot (i-1)!}}{P_{ii \cdot (i-1)!}} \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (6.120)$$

Αναλύοντας τους τρεις πρώτους παράγοντες της σχέσης προκύπτει:

$$\begin{aligned} i = 1 \quad L_{x1} &= \frac{P_{x1}}{P_{11}} \\ i = 2 \quad L_{x2} &= \frac{P_{x2 \cdot 1}}{P_{22 \cdot 1}} \\ i = 3 \quad L_{x3} &= \frac{P_{x3 \cdot 2!}}{P_{33 \cdot 2!}} \end{aligned} \quad (6.121)$$

Από την (6.120) προκύπτει η σχέση:

$$|L_{xi}|^2 P_{ii \cdot (i-1)!} = \gamma_{xi \cdot (i-1)!}^2 P_{xx \cdot (i-1)!}, \quad (6.122)$$

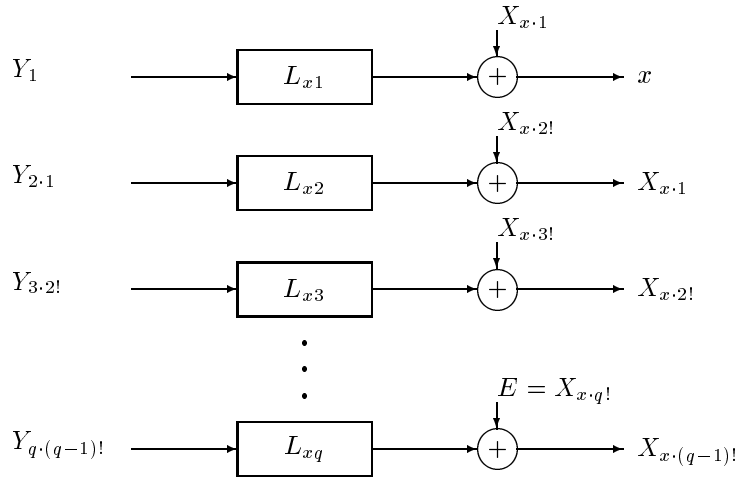
όπου

$$\gamma_{xi \cdot (i-1)!} = \frac{|P_{xi \cdot (i-1)!}|^2}{P_{ii \cdot (i-1)!} P_{xx \cdot (i-1)!}} \quad (6.123)$$

είναι η μερική συνάρτηση συντονισμού μεταξύ των υπολοιπόμενων σημάτων της μορφής  $Y_{i \cdot (i-1)!}$  και  $X_{x \cdot (i-1)!}$ . Επίσης, από την (6.119), όταν  $i = j = y$  και  $r = i$ ,

$$P_{xx \cdot i!} = [1 - \gamma_{xi \cdot (i-1)!}^2] P_{xx \cdot (i-1)!} \quad (6.124)$$

Η εφαρμογή των δύο τελευταίων σχέσεων απλοποιεί ένα πολλαπλό σύστημα σε επιμέρους απλά με ασυσχέτιστα σήματα εισόδου. Το σύνολο των συστημάτων, που ισοδυναμούν με τη μορφή του πολλαπλού συστήματος του σχήματος 6.11, έχει την ακόλουθη μορφή:



Σχήμα 6.12: Απλά συστήματα ισοδύναμα με το πολλαπλό του σχ. 6.11.

Οι υπολοιπόμενες συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος, μέσω των (6.119) και (6.120), δίνονται από την εξίσωση:

$$P_{ij \cdot r!} = P_{ij \cdot (r-1)!} - \left[ \frac{P_{jr \cdot (r-1)!}}{P_{rr \cdot (r-1)!}} \right] P_{ri \cdot (r-1)!}, \quad (6.125)$$

αφού αντικατασταθούν οι βέλτιστες συναρτήσεις  $L_{jr}$ . Για την πληρέστερη κατανόηση αναπτύσσεται το παράδειγμα για  $r = 1, 2, 3$ .

- Για  $r = 1$  η (6.125) έχει τη μορφή

$$P_{ij.1} = P_{ij} - \left[ \frac{P_{j1}}{P_{11}} \right] P_{1i}. \quad (6.126)$$

Οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος σ' αυτό το στάδιο προκύπτουν από τα αρχικά σήματα. Οι υπολοιπούμενες συναρτήσεις  $P_{ij.1}$  έχουν πραγματικές τιμές, όταν  $i = j$  (συναρτήσεις αυτο-φάσματος) και μιγαδικές τιμές για  $i \neq j$  (συναρτήσεις δια-φάσματος). Πρέπει, επίσης,  $i, j > 1$ .

- Για  $r = 2$  η (6.125) γίνεται

$$P_{ij.2!} = P_{ij.1} - \frac{P_{j2.1}}{P_{22.1}} P_{2i.1}. \quad (6.127)$$

Οι συναρτήσεις πυκνότητας αυτό- ή δια-φάσματος υπολογίζονται από τις συναρτήσεις του προηγούμενου βήματος και λαμβάνουν αντίστοιχα πραγματικές ή μιγαδικές τιμές, αντίστοιχα. Πρέπει, επίσης,  $i, j > 2$ .

- Για  $r = 3$  η (6.125) μετατρέπεται σε μια αλγεβρική σχέση από την οποία υπολογίζονται οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος της μορφής  $P_{ij.3!}$ , γνωρίζοντας τις ήδη υπολογισμένες συναρτήσεις των προηγούμενων βημάτων.

Μια εφαρμογή των υπό συνθήκη συστημάτων πολλαπλής εισόδου στον προσδιορισμό των συνιστωσών του διανύσματος της βαρύτητας από μετρήσεις από αέρα βαρυτημετρίας (airborne gravimetry) δίνεται από τους Wu and Sideris [40].

#### 6.4.7 Γενικευμένα μοντέλα πολλαπλής εισόδου/εξόδου

Στην ενότητα αυτή δίνεται η τελική μορφή της θεωρίας των συστημάτων που αφορά σε γενικευμένα μοντέλα πολλαπλής εισόδου/εξόδου. Τα προηγούμενα παραδείγματα των συστημάτων απλής εξόδου μπορούν να χαρακτηριστούν ως ειδικές περιπτώσεις της θεωρίας που αναλύεται στην παρούσα ενότητα. Τα σήματα δίνονται πλέον μέσω πινάκων, ενώ η εύρεση των κριτηρίων ακρίβειας των συστημάτων σε μορφή πινάκων παρουσιάζεται πολυπλοκότερη.

Έστω  $\mathbf{Y}$  είναι ένα διάνυσμα, το οποίο αντιπροσωπεύει τους ευθείς μετασχηματισμούς Fourier (φάσματα) των  $q$  σημάτων εισόδου και  $\mathbf{X}$  είναι το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Fourier των  $w$  σημάτων εξόδου

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_w \end{bmatrix} \quad (6.128)$$

Στην περίπτωση εφαρμογής των συστημάτων στις γεωεπιστήμες (εφαρμογή σε δύο διαστάσεις), τα στοιχεία των διανυσμάτων των σημάτων που αναφέρονται αντιστοιχούν σε υποπίνακες δεδομένων. Οι διαστάσεις των υποπινάκων αυτών είναι ίσες με τον αριθμό των γραμμών και των στηλών που έχει το αντίστοιχο σήμα σε μορφή μητρώου.

Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν σε προηγούμενες ενότητες, οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος μεταξύ ομοιογενών και ετερογενών σημάτων είναι [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} &= \frac{1}{T_k T_l} E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^{*T}\} \\ \mathbf{P}_{xx} &= \frac{1}{T_k T_l} E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^{*T}\} \\ \mathbf{P}_{xy} &= \frac{1}{T_k T_l} E\{\mathbf{X}\mathbf{Y}^{*T}\}, \end{aligned} \quad (6.129)$$

όπου  $\mathbf{X}^{*T}$ ,  $\mathbf{Y}^{*T}$  τα ανάστροφα συζυγή μιγαδικά διανύσματα των  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ , αντίστοιχα.  
Τα στοιχεία των μητρώων της (6.129) δίνονται ως εξής

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{T_k T_l} E[Y_i Y_j^*] \\ P_{x_i x_j} &= \frac{1}{T_k T_l} E[X_i X_j^*] \\ P_{x_i j} &= \frac{1}{T_k T_l} E[X_i Y_j^*]. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος των σημάτων στην είσοδο ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{yy} &= \frac{1}{T_k T_l} E \left\{ \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^* & Y_2^* & \cdots & Y_q^* \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1q} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{q1} & P_{q2} & \cdots & P_{qq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.131)$$

Ομοίως, η συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος στην έξοδο γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xx} &= \frac{1}{T_k T_l} E \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* & \cdots & X_w^* \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{x_1 x_1} & P_{x_1 x_2} & \cdots & P_{x_1 x_w} \\ P_{x_2 x_1} & P_{x_2 x_2} & \cdots & P_{x_2 x_w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{x_w x_1} & P_{x_w x_2} & \cdots & P_{x_w x_w} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.132)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι  $\mathbf{P}_{yy}$  και  $\mathbf{P}_{xx}$  είναι πίνακες Ερμιτιανής μορφής (Hermitian matrices), δηλαδή ισχύει  $P_{ij} = P_{ji}^*$  για κάθε  $i$  και  $j$  [18]. Για τους παραπάνω Ερμιτιανούς ισχύει ακόμη  $P_{yy}^* = P_{yy}^T$  και  $P_{xx}^* = P_{xx}^T$ . Είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xy} &= \frac{1}{T_k T_l} E \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^* & Y_2^* & \cdots & Y_q^* \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} P_{x_1 1} & P_{x_1 2} & \cdots & P_{x_1 q} \\ P_{x_2 1} & P_{x_2 2} & \cdots & P_{x_2 q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{x_w 1} & P_{x_w 2} & \cdots & P_{x_w q} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.133)$$

όπου  $P_{x_i j} = P_{x_i y_j}$ .

Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσης ορίζεται με τη βοήθεια του πίνακα των συ-

ναρτήσεων απόκρισης συχνότητας

$$\mathbf{H}_{xy} = \begin{bmatrix} H_{x_1 y_1} & H_{x_1 y_2} & \cdots & H_{x_1 y_q} \\ H_{x_2 y_1} & H_{x_2 y_2} & \cdots & H_{x_2 y_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{x_w y_1} & H_{x_w y_2} & \cdots & H_{x_w y_q} \end{bmatrix} \quad (6.134)$$

ως εξής:

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}_{xy} \mathbf{Y}. \quad (6.135)$$

Κάθε στοιχείο της λύσης δίνεται συνοπτικά από τη σχέση:

$$X_k = \sum_{i=1}^q H_{x_k i} Y_i \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (6.136)$$

Ο προσδιορισμός του πίνακα  $\mathbf{H}_{xy}$  προκύπτει αναλυτικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{H}_{xy} \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} \mathbf{Y}^* \mathbf{T} &= \mathbf{H}_{xy} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^* \mathbf{T} \end{aligned} \quad (6.137)$$

Λαμβάνοντας τις προσδοκίες και των δύο μελών της τελευταίας σχέσης, πολλαπλασιάζοντας με  $(1/T_k T_l)$  και με  $\mathbf{P}_{yy}^{-1}$  προκύπτει:

$$\mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} = \mathbf{H}_{xy} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \quad (6.138)$$

όπου  $\mathbf{P}_{yy}^{-1}$  είναι ο αντίστροφος πίνακας του  $\mathbf{P}_{yy}$ , ενώ ο πίνακας των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{H}_{xy} = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1}. \quad (6.139)$$

Από τη σχέση (6.139) διακρίνεται η ομοιότητα της θεωρίας των συστημάτων με τη θεωρία της σημειακής προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων. Η συνάρτηση σύνδεσης των σημάτων εισόδου και εξόδου σχετίζεται άμεσα με τις συναρτήσεις συμμεταβλητότητας σημάτων και προγνώσεων στο μοντέλο της σημειακής προσαρμογής. Η άμεση σύγκριση με τη συνάρτηση σύνδεσης σήματος στη σημειακή προσαρμογή, όπως παρουσιάζεται από το Moritz [16], οδηγεί στην κατανόηση των κοινών στοιχείων των δύο προσεγγίσεων. Οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ της θεωρίας των συστημάτων και του μοντέλου της σημειακής προσαρμογής αναλύονται από τους Sansò and Sideris [25].

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στη σχέση (6.139). Καθένας από τους πίνακες που αναφέρονται στην (6.139) έχει ως στοιχεία τα πεδία των δεδομένων εισόδου. Η αντιστροφή που παρουσιάζεται αντιπροσωπεύει ουσιαστικά την επίλυση του συστήματος που δημιουργείται με στοιχεία τους πίνακες των δεδομένων και όχι τα δεδομένα αυτά καθαυτά. Για να γίνει κατανοητή η διεργασία επίλυσης του συστήματος αναφέρεται το ακόλουθο σύντομο παράδειγμα: Έστω ότι δύο πηγές δεδομένων συνδυάζονται βέλτιστα για τον προσδιορισμό ενός σήματος εξόδου. Έστω ότι κάθε σήμα εισόδου αποτελείται από ένα πεδίο μετρήσεων  $(4 \times 4)$ , οπότε και το σήμα εξόδου έχει τις ίδιες διαστάσεις. Το τελικό σύστημα παρατήρησης δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x1} \\ \mathbf{H}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{x2} \end{bmatrix}, \quad (6.140)$$

όπου  $\mathbf{P}_{11}$ ,  $\mathbf{P}_{22}$ ,  $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_{21}^*$  είναι οι πίνακες των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου διαστάσεων  $(4 \times 4)$  ο καθένας,  $\mathbf{H}_{x1}$ ,  $\mathbf{H}_{x2}$  είναι οι πίνακες των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας  $(4 \times 4)$  και  $\mathbf{P}_{x1}$ ,  $\mathbf{P}_{x2}$  οι πίνακες των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ σημάτων εισόδου και εξόδου. Για την επίλυση του συστήματος

απαραίτητη είναι η αντιστροφή του σύνθετου πίνακα των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σημάτων στην είσοδο. Η αντιστροφή αυτή δεν αναφέρεται σε καθένα από τα στοιχεία των υποπινάκων του  $\mathbf{P}_{yy}$ , αλλά στον ίδιο τον  $\mathbf{P}_{yy}$  διαστάσεων  $(2 \times 2)$ . Η επίλυση του συστήματος οδηγεί στην

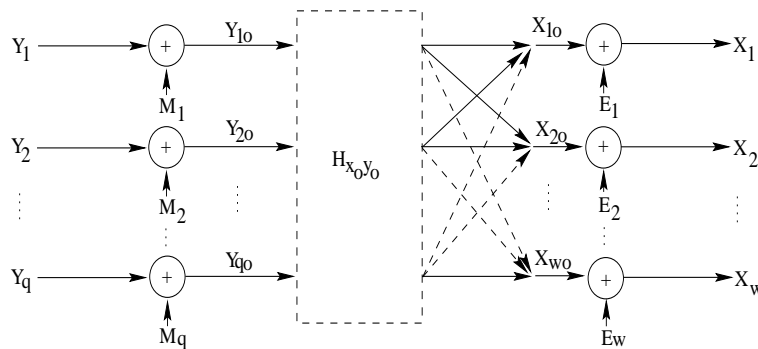
$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{x1} \\ \mathbf{H}_{x2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{22} & -\mathbf{P}_{12} \\ -\mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x1} \\ \mathbf{P}_{x2} \end{bmatrix}, \quad (6.141)$$

όπου  $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{21}$ . Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος περιλαμβάνει την αντιστροφή του πίνακα  $\mathbf{P}_{yy}$  με στοιχεία τα  $\mathbf{P}_{11}$ ,  $\mathbf{P}_{12}$ ,  $\mathbf{P}_{21}$  και  $\mathbf{P}_{22}$  και όχι τη συνολική αντιστροφή του σύνθετου πίνακα  $\mathbf{P}_{yy}$ . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η αντιστροφή πραγματοποιείται σε πίνακα  $2 \times 2$  και όχι στο συνολικό  $8 \times 8$  πίνακα. Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος είναι απαραίτητη στην περίπτωση περισσοτέρων των δύο σημάτων εισόδου, γιατί στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολο να εξαχθούν σχέσεις ανάλογες των (6.104).

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάστηκαν οι μητρικές σχέσεις προσδιορισμού των στοιχείων ενός συστήματος πολλαπλής εισόδου – πολλαπλής εξόδου. Οι αναλυτικές εκφράσεις που αναπτύχθηκαν αντιπροσωπεύουν τη γενικότερη περίπτωση της θεωρίας των συστημάτων. Όλες οι προηγούμενες απλούστερες μορφές συστημάτων μπορούν με μεγάλη ευκολία να εξαχθούν από τις γενικότερες σχέσεις της ενότητας αυτής. Πρέπει να σημειωθεί όμως, ότι η ανάπτυξη των συστημάτων σε μορφή πινάκων δεν προσφέρει την ανάλυση στις ξεχωριστές συνιστώσες των σημάτων εξόδου, ανάλυση ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας. Προτείνεται, λοιπόν, ο διαχωρισμός των σημάτων σε τελικά μη συσχετισμένα μεταξύ τους δεδομένα (υπολοιπόμενα δεδομένα) και η διάσπαση των πολλαπλών μοντέλων σε επιμέρους απλά. Εντούτοις, η χρήση «υπό-συνθήκη» δεδομένων προϋποθέτει την κατάλληλη ταξινόμηση των δεδομένων, ανάλογα με την «δύναμη» (power) των φασματικών τους ιδιοτήτων, διαδικασία εξαιρετικά δύσκολη στην περίπτωση των έντονα συσχετισμένων δεδομένων του γήινου πεδίου βαρύτητας. Η ανάλυση της θεωρίας των συστημάτων σε μορφή πινάκων δεν προϋποθέτει καμία ταξινόμηση ή συνθήκη για τις μετρήσεις εισόδου. Σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της γενικευμένης θεωρίας έχει και η αντιμετώπιση του θορύβου, τόσο στην είσοδο, όσο και στην έξοδο, που δίνεται διεξοδικότερα στην ενότητα 6.4.5.

### 6.4.8 Γενικευμένα μοντέλα πολλαπλής εισόδου – πολλαπλής εξόδου με θόρυβο

Η γενικευμένη αναπαράσταση ενός συστήματος πολλαπλής εισόδου – πολλαπλής εξόδου με θόρυβο παρουσιάζεται στο σχήμα 6.13. Έστω ότι τα δεδομένα εισόδου παρουσιάζονται επη-



Σχήμα 6.13: Σύστημα πολλαπλής εισόδου – πολλαπλής εξόδου με θόρυβο.

ρεασμένα από εξωτερικό θόρυβο  $m$ . Η εξίσωση του συστήματος σε μορφή πινάκων, με στοιχεία

τα φάσματα των σημάτων και των θορύβων, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_o &= \mathbf{H}_{x_o y_o} \mathbf{Y}_o \\ \mathbf{X} &= \mathbf{H}_{x_o y_o} (\mathbf{Y} + \mathbf{M}) + \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (6.142)$$

όπου  $\mathbf{X}$  το διάνυσμα των  $w$  μετασχηματισμένων σημάτων εξόδου,  $\mathbf{Y}$  το διάνυσμα των  $q$  μετασχηματισμένων σημάτων εισόδου,  $\mathbf{M}$  το  $(q \times 1)$  διάνυσμα του μετασχηματισμένου θορύβου των σημάτων εισόδου,  $\mathbf{Y}_o = \mathbf{Y} + \mathbf{M}$  το διάνυσμα των παρατηρούμενων μετρήσεων στην είσοδο,  $\mathbf{H}_{x_o y_o}$  ο  $(w \times q)$  πίνακας με στοιχεία τις μετασχηματισμένες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας και  $\mathbf{E}$  το διάνυσμα του μετασχηματισμένου θορύβου στην έξοδο, το οποίο οφείλεται στις μη γραμμικές υπολοιπόμενες συσχετίσεις μεταξύ σημάτων εισόδου και εξόδου. Τα παραπάνω διανύσματα και πίνακες δίνονται αναλυτικά ως εξής:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_w \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_q \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_w \end{bmatrix} \quad (6.143)$$

$$\mathbf{H}_{x_o y_o} = \begin{bmatrix} H_{x_1 o y_1 o} & H_{x_1 o y_2 o} & \cdots & H_{x_1 o y_q o} \\ H_{x_2 o y_1 o} & H_{x_2 o y_2 o} & \cdots & H_{x_2 o y_q o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{x_w o y_1 o} & H_{x_w o y_2 o} & \cdots & H_{x_w o y_q o} \end{bmatrix} \quad (6.144)$$

Σκοπός της ανάλυσης είναι η εύρεση του βέλτιστου πίνακα των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας ακολουθώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων. Επιλύοντας την (6.142) ως προς το διάνυσμα του θορύβου στην έξοδο και λαμβάνοντας το συζυγές μιγαδικό διάνυσμα  $\mathbf{E}^*$  προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{X} - \mathbf{H}_{x_o y_o} \mathbf{Y}_o &\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{X} - \mathbf{H}_{x_o y_o} \mathbf{Y}_o \\ \mathbf{E}^* &= \mathbf{X}^* - \mathbf{H}_{x_o y_o}^* \mathbf{Y}_o^* \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μεταξύ τους, λαμβάνοντας τις προσδοκίες τους και πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα  $(1/(T_k T_l))$ , όπου  $T \rightarrow \infty$ , προσδιορίζονται οι σχέσεις που συνδέουν τις συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος

$$\mathbf{P}_{ee} = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xy_o} \mathbf{H}_{x_o y_o}^{*T} - \mathbf{H}_{x_o y_o} \mathbf{P}_{y_o x} + \mathbf{H}_{x_o y_o} \mathbf{P}_{y_o y_o} \mathbf{H}_{x_o y_o}^{*T}. \quad (6.145)$$

Για την εύρεση του βέλτιστου πίνακα των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας είναι απαραίτητη η ελαχιστοποίηση του πίνακα  $\mathbf{P}_{ee}$ . Η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}_{ee}}{\partial \mathbf{H}_{x_o y_o}^{*T}} &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ -\mathbf{P}_{xy_o} + \hat{\mathbf{H}}_{x_o y_o} \mathbf{P}_{y_o y_o} &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ \mathbf{P}_{xy_o} &= \hat{\mathbf{H}}_{x_o y_o} \mathbf{P}_{y_o y_o} \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{H}}_{x_o y_o} &= \mathbf{P}_{xy_o} \mathbf{P}_{y_o y_o}^{-1} \end{aligned} \quad (6.146)$$

Η (6.146) είναι η γενική σχέση των συστημάτων πολλαπλών σημάτων εισόδου – εξόδου. Από την παραπάνω μορφή προκύπτουν όλες οι ειδικότερες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν σε

προηγούμενες παραγράφους (συστήματα απλής εισόδου, απλής εξόδου, σήματα και θόρυβοι ασυσχέτιστες ποσότητες, κ.λπ.). Στην περίπτωση που οι συσχετίσεις μεταξύ σημάτων και θορύβων θεωρούνται αμελητέες, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{P}_{ym} = \mathbf{P}_{my} = \mathbf{0}, \quad (6.147)$$

τότε η γενικότερη σχέση καταλήγει στη μορφή:

$$\hat{\mathbf{H}}_{x_0y_0} = \mathbf{P}_{xy}(\mathbf{P}_{yy} + \mathbf{P}_{mm})^{-1} = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_{y_0y_0}^{-1}. \quad (6.148)$$

Στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας, τόσο η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου, όσο και το σήμα εξόδου είναι άγνωστες ποσότητες. Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου, η οποία είναι απαραίτητη για την τελική λύση, είναι δυνατός μόνον όταν είναι γνωστός ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος του θορύβου των σημάτων στην είσοδο. Ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου  $\mathbf{P}_{xy}$  μπορεί να προσδιοριστεί από τις γνωστές αναλυτικές σχέσεις που συνδέουν τα βαρυτημετρικά σήματα (βλ. κεφάλαιο 2). Ισχύει η γενική σχέση:

$$\mathbf{P}_{xy} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^{*T} = \mathbf{H}_{xy}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^{*T} = \mathbf{H}_{xy}\mathbf{P}_{yy} = \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{P}_{y_0y_0} - \mathbf{P}_{mm}), \quad (6.149)$$

όπου  $\mathbf{H}_{xy}$  είναι ο θεωρητικός τελεστής που ισχύει μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου, π.χ. ο τελεστής του Stokes αν πρόκειται για την περίπτωση ανωμαλιών ελευθέρου αέρα στην είσοδο και αποχών του γεωειδούς στην έξοδο.

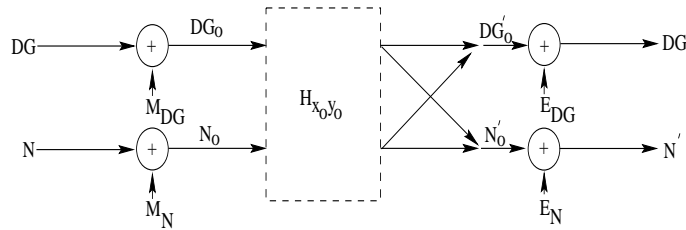
Το διάνυσμα των σημάτων εξόδου και ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων δίνονται από τις εξισώσεις [1]:

$$\hat{\mathbf{X}}_o = \hat{\mathbf{H}}_{x_0y_0}\mathbf{Y}_o = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_{y_0y_0}^{-1}\mathbf{Y}_o = \mathbf{H}_{xy}(\mathbf{P}_{y_0y_0} - \mathbf{P}_{mm})\mathbf{P}_{y_0y_0}^{-1}\mathbf{Y}_o \quad (6.150)$$

$$\mathbf{P}_{e\hat{e}} = [\mathbf{H}_{xy}(\mathbf{P}_{y_0y_0} - \mathbf{P}_{mm}) - \hat{\mathbf{H}}_{x_0y_0}\mathbf{P}_{y_0y_0}] (\mathbf{H}_{xy}^{*T} - \hat{\mathbf{H}}_{x_0y_0}^{*T}) + \hat{\mathbf{H}}_{x_0y_0}\mathbf{P}_{mm}\mathbf{H}_{xy}^{*T} \quad (6.151)$$

### Παραδείγματα γενικευμένων συστημάτων στο πεδίο βαρύτητας

Παράδειγμα 1. Το σύστημα που παρουσιάζεται στο σχήμα 6.14 περιγράφει τη διαδικασία φιλτραρίσματος των παρατηρήσεων (ανωμαλιών βαρύτητας και γεωειδούς). Παρατηρήσεις επηρεασμένες από θόρυβο εισάγονται στο σύστημα και, αφού εκτιμηθεί ο βέλτιστος πίνακας των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας, υπολογίζεται το διάνυσμα των σημάτων στην έξοδο. Στην περίπτωση αυτή, τα δεδομένα παρουσιάζονται σε διανυσματική μορφή και μορφή πινάκων,



Σχήμα 6.14: Σύστημα δύο δεδομένων εισόδου / δύο εξόδου.

έτσι ώστε να είναι δυνατός ο συνδυασμός των σημάτων εισόδου και η μελέτη των αλληλοσυσχετισμών τους. Τα διανύσματα των παρατηρήσεων εξόδου και εισόδου δίνονται από:

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} \Delta G'_o \\ N'_o \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_o = \begin{bmatrix} \Delta G_o \\ N_o \end{bmatrix}, \quad (6.152)$$

όπου οι ποσότητες  $\Delta G'_o$ ,  $N'_o$  αντιστοιχούν στα σήματα εξόδου. Ο πίνακας των βέλτιστων συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας δίνεται από την εξίσωση:

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o} = \mathbf{P}_{\mathbf{xy}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}_o\mathbf{y}_o}^{-1}, \quad (6.153)$$

όπου, στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{xy}} &= \begin{bmatrix} P_{\Delta g'\Delta g} & P_{\Delta g'N} \\ P_{N'\Delta g} & P_{N'N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\Delta g\Delta g} & H_{N'\Delta g}P_{\Delta g\Delta g} \\ H_{N'\Delta g}P_{\Delta g\Delta g} & P_{NN} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}) & H_{N'\Delta g}(P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}) \\ H_{N'\Delta g}(P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}) & (P_{N_oN_o} - P_{m_{N}m_{N}}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.154)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των παρατηρήσεων δίνεται απευθείας από:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_o\mathbf{y}_o}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} P_{N_oN_o} & -P_{\Delta g_oN_o} \\ -P_{N_o\Delta g_o} & P_{\Delta g_o\Delta g_o} \end{bmatrix}, \quad (6.155)$$

όπου  $\Delta = P_{\Delta g_o\Delta g_o}P_{N_oN_o} - P_{N_o\Delta g_o}P_{\Delta g_oN_o}$ . Η αναλυτική σχέση του πίνακα των βέλτιστων συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o} &= \begin{bmatrix} \hat{H}_{\Delta g'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{\Delta g'_oN_o} \\ \hat{H}_{N'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{N'_oN_o} \end{bmatrix} = \frac{P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & H_{N'\Delta g} \\ H_{N'\Delta g} & \frac{P_{N_oN_o} - P_{m_{N}m_{N}}}{P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}} \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} P_{N_oN_o} & -P_{\Delta g_oN_o} \\ -P_{N_o\Delta g_o} & P_{\Delta g_o\Delta g_o} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται η τελική λύση και ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην έξοδο:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta G'_o \\ N'_o \end{bmatrix} &= \frac{P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & H_{N'\Delta g} \\ H_{N'\Delta g} & \frac{P_{N_oN_o} - P_{m_{N}m_{N}}}{P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}}} \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} P_{N_oN_o} & -P_{\Delta g_oN_o} \\ -P_{N_o\Delta g_o} & P_{\Delta g_o\Delta g_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G_o \\ N_o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.157)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} &= \begin{bmatrix} P_{\hat{e}_{\Delta g}\hat{e}_{\Delta g}} & P_{\hat{e}_{\Delta g}\hat{e}_N} \\ P_{\hat{e}_N\hat{e}_{\Delta g}} & P_{\hat{e}_N\hat{e}_N} \end{bmatrix} = \\ &\left\{ \begin{bmatrix} 1 & H_{\Delta g'N} \\ H_{N'\Delta g} & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} P_{\Delta g_o\Delta g_o} & P_{\Delta g_oN_o} \\ P_{N_o\Delta g_o} & P_{N_oN_o} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}} & 0 \\ 0 & P_{m_{N}m_{N}} \end{bmatrix} \right) - \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} \hat{H}_{\Delta g'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{\Delta g'_oN_o} \\ \hat{H}_{N'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{N'_oN_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\Delta g_o\Delta g_o} & P_{\Delta g_oN_o} \\ P_{N_o\Delta g_o} & P_{N_oN_o} \end{bmatrix} \right\} \cdot \\ &\left( \begin{bmatrix} 1 & H_{N'\Delta g}^* \\ H_{\Delta g'N}^* & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{H}_{\Delta g'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{N'_o\Delta g_o} \\ \hat{H}_{\Delta g'_oN_o} & \hat{H}_{N'_oN_o} \end{bmatrix} \right) + \\ &\begin{bmatrix} \hat{H}_{\Delta g'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{\Delta g'_oN_o} \\ \hat{H}_{N'_o\Delta g_o} & \hat{H}_{N'_oN_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m_{\Delta g}m_{\Delta g}} & 0 \\ 0 & P_{m_{N}m_{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\Delta g'\Delta g}^* & H_{N'\Delta g}^* \\ H_{\Delta g'N}^* & H_{N'N}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.158)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις με  $H_{N'\Delta g}$  παριστάνεται ο τελεστής του Stokes και με  $H_{\Delta g'N}$  ο αντίστροφος τελεστής Stokes στο χώρο των συχνοτήτων. Παρότι η σχέση μεταξύ του ευθύ και αντίστροφου τελεστή του Stokes έχει πολύπλοκη μορφή στο χώρο των αποστάσεων, η μορφή αυτή απλοποιείται στο χώρο των συχνοτήτων σε  $H_{N'\Delta g} = 1/H_{\Delta g'N}$ .

Παράδειγμα 2. Το διάνυσμα εισόδου αποτελείται από μετρήσεις συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου  $\xi_o$  και  $\eta_o$ , αποχές του γεωειδούς, που προήλθαν από την επεξεργασία αλτιμετρικών δεδομένων  $s_o$  και πρωτογενείς μετρήσεις ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g_o$ . Όπως και στο παράδειγμα της ενότητας 6.4.3, έτσι και εδώ, η επίδραση της θαλάσσιας τοπογραφίας θεωρείται αμελητέα και για το λόγο αυτό τα σήματα των αλτιμετρικών δεδομένων θεωρούνται ως σήματα αποχών του γεωειδούς. Σκοπός είναι ο προσδιορισμός των σημάτων εξόδου, δηλαδή των αποχών του γεωειδούς  $N$  και των ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g'$ . Τα δύο σήματα  $\Delta g$  και  $\Delta g'$  δεν αποτελούν τις ίδιες ποσότητες, γιατί τα σήματα εξόδου προκύπτουν από τη συνεισφορά όλων των σημάτων εισόδου. Όπως και στα απλούστερα συστήματα, οι μετρήσεις εισόδου συνοδεύονται από την ύπαρξη θορύβου, ο οποίος περιγράφεται καταρχήν με τη βοήθεια στάσιμων μοντέλων (βλ. ενότητα 6.5.2). Τα διανύσματα εισόδου – εξόδου δεδομένων και θορύβων, μετά την εφαρμογή μετασχηματισμών Fourier για τον υπολογισμό των φασμάτων, δίνονται ως εξής:

$$\mathbf{Y}_o = \begin{bmatrix} \Xi_o \\ H_o \\ S_o \\ \Delta G_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi + M_\xi \\ H + M_\eta \\ S + M_s \\ \Delta G + M_{\Delta g} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} N \\ \Delta G' \end{bmatrix} \quad (6.159)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_s \\ M_{\Delta g} \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_N \\ E_{\Delta g'} \end{bmatrix} \quad (6.160)$$

Οι εξισώσεις παρατήρησης δίνονται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} N \\ \Delta G' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N_o\xi_o} & H_{N_o\eta_o} & H_{N_o s_o} & H_{N_o\Delta g_o} \\ H_{\Delta g'_o\xi_o} & H_{\Delta g'_o\eta_o} & H_{\Delta g'_o s_o} & H_{\Delta g'_o\Delta g_o} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Xi \\ H \\ S \\ \Delta g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_s \\ M_{\Delta g} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} E_N \\ E_{\Delta g'} \end{bmatrix} \quad (6.161)$$

Έστω ότι θόρυβοι και σήματα είναι ποσότητες ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Ο βέλτιστος πίνακας μεταφοράς  $\mathbf{H}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o}$  δίνεται από μια σχέση ανάλογη με την (6.148), όπου

$$\mathbf{H}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o} = \begin{bmatrix} H_{N_o\xi_o} & H_{N_o\eta_o} & H_{N_o s_o} & H_{N_o\Delta g_o} \\ H_{\Delta g'_o\xi_o} & H_{\Delta g'_o\eta_o} & H_{\Delta g'_o s_o} & H_{\Delta g'_o\Delta g_o} \end{bmatrix} \quad (6.162)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} P_{\xi\xi} & P_{\xi\eta} & P_{\xi s} & P_{\xi\Delta g} \\ P_{\eta\xi} & P_{\eta\eta} & P_{\eta s} & P_{\eta\Delta g} \\ P_{s\xi} & P_{s\eta} & P_{ss} & P_{s\Delta g} \\ P_{\Delta g\xi} & P_{\Delta g\eta} & P_{\Delta g s} & P_{\Delta g\Delta g} \end{bmatrix} \quad (6.163)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{m}\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} P_{m_\xi m_\xi} & P_{m_\xi m_\eta} & P_{m_\xi m_s} & P_{m_\xi m_{\Delta g}} \\ P_{m_\eta m_\xi} & P_{m_\eta m_\eta} & P_{m_\eta m_s} & P_{m_\eta m_{\Delta g}} \\ P_{m_s m_\xi} & P_{m_s m_\eta} & P_{m_s m_s} & P_{m_s m_{\Delta g}} \\ P_{m_{\Delta g} m_\xi} & P_{m_{\Delta g} m_\eta} & P_{m_{\Delta g} m_s} & P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}} \end{bmatrix}. \quad (6.164)$$

Ακόμη, με την υπόθεση ότι ο θόρυβος στην είσοδο και το σήμα εξόδου είναι ποσότητες ασυσχέτιστες, ισχύει:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o} = \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{x}_o} = \begin{bmatrix} P_{N\xi} & P_{N\eta} & P_{Ns} & P_{N\Delta g} \\ P_{\Delta g'\xi} & P_{\Delta g'\eta} & P_{\Delta g's} & P_{\Delta g'\Delta g} \end{bmatrix} \quad (6.165)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα στοιχεία των παραπάνω πινάκων αντιστοιχούν σε υποπίνακες διαστάσεων ίσων με τις σειρές και τις στήλες των δεδομένων της περιοχής μελέτης.

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των σημάτων εξόδου που δίνεται συνοπτικά στη συνέχεια, αποτελεί τη γενίκευση του αλγορίθμου των απλών συστημάτων:

1. Υπολογίζονται οι πίνακες των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σημάτων και των θορύβων στην είσοδο. Οι συναρτήσεις θορύβων για κάθε πηγή δεδομένων προσδιορίζονται ξεχωριστά με τη βοήθεια στάσιμων μοντέλων (βλ. ενότητα 6.5.2). Ο υπολογισμός των στοιχείων των πινάκων μπορεί να γίνει είτε άμεσα από τα δεδομένα, είτε έμμεσα από τις συναρτήσεις μεταβλητότητας των δεδομένων.
2. Υπολογίζεται ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ σημάτων εισόδου και εξόδου. Έτσι, π.χ., για τη συνιστώσα  $P_{\Delta g' \xi}$  του πίνακα  $\mathbf{P}_{xy}$  ισχύει:

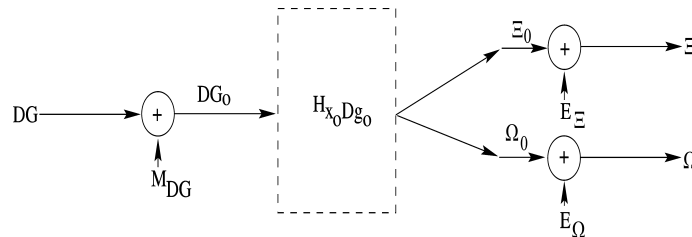
$$P_{\Delta g' \xi} = \Delta G' \Xi^* = H_{\Delta g \xi} \Xi \Xi^* = H_{\Delta g \xi} P_{\xi \xi}, \quad (6.166)$$

όπου  $H_{\Delta g \xi}$  ο τελεστής που συνδέει θεωρητικά τα σήματα των αποκλίσεων της καταχορύφου με τις ανωμαλίες βαρύτητας, δηλαδή ο αντίστροφος τελεστής Vening-Meinesz. Για τον προσδιορισμό αυτό είναι απαραίτητη, όπως γίνεται φανερό, η προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην είσοδο  $P_{m_{\xi} m_{\xi}}$ . Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος για τα σήματα εισόδου προκύπτει με εφαρμογή του νόμου μετάδοσης:

$$P_{\xi \xi} = P_{\xi_0 \xi_0} - P_{m_{\xi} m_{\xi}} \quad (6.167)$$

3. Υπολογίζεται ο βέλτιστος πίνακας των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως.
4. Προσδιορίζεται ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σημάτων εξόδου και από εκεί υπολογίζονται τα σήματα εξόδου και τα διανύσματα του θορύβου (σφάλματα πρόγνωσης του κάθε σήματος) στην έξοδο.

**Παράδειγμα 3.** Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η βαρυτημετρική προσέγγιση των συνιστωσών της απόκλισης της καταχορύφου. Η προσέγγιση πραγματοποιείται με τη χρήση των εξισώσεων Vening-Meinesz μέσω ενός συστήματος απλής εισόδου και διπλής εξόδου. Το σύστημα παρουσιάζεται στο σχήμα 6.15. Και σ' αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση πυκνότητας



Σχήμα 6.15: Προσέγγιση των συνιστωσών απόκλισης της καταχορύφου με τη χρήση συστήματος απλής εισόδου – διπλής εξόδου.

φάσματος του θορύβου στα σήματα των ανωμαλιών βαρύτητας στην είσοδο προσεγγίζεται με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων και εκ των προτέρων πληροφορία για την ακρίβεια των παρατηρήσεων. Τα διανύσματα σημάτων εξόδου και εισόδου σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} \Xi_o \\ \Omega_o \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_o = [ \Delta G_o ], \quad (6.168)$$

όπου  $\Xi_o$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου της συνιστώσας της απόκλισης κατά μεσημβρινό και  $\Omega_o$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εξόδου της κατά παράλληλο συνιστώσας. Χρησιμοποιείται στο παράδειγμα ο συμβολισμός  $\Omega$  για την κατά παράλληλο συνιστώσα αντί για τον κλασικό  $H$  (και  $\eta$ ), έτσι ώστε να αποφευχθούν οι παρανοήσεις με τη συνάρτηση μεταφοράς.

Η βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από την εξίσωση:

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o} = \mathbf{P}_{\mathbf{xy}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}_o\mathbf{y}_o}^{-1} = \frac{P_{\Delta g\Delta g}}{P_{\Delta g_o\Delta g_o}} \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g} \\ H_{\omega\Delta g} \end{bmatrix} \quad (6.169)$$

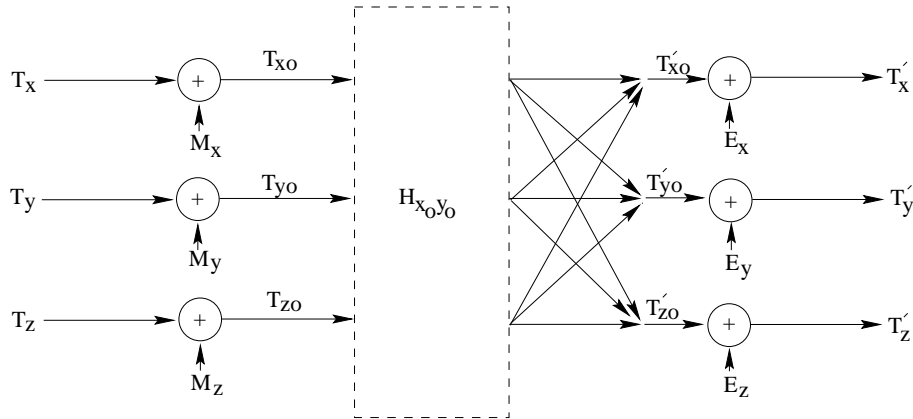
και η τελική σχέση:

$$\hat{\mathbf{X}}_o = \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{x}_o\mathbf{y}_o}\mathbf{Y}_o = \frac{(P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{mm})\Delta G_o}{P_{\Delta g_o\Delta g_o}} \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g} \\ H_{\omega\Delta g} \end{bmatrix}, \quad (6.170)$$

όπου  $H_{\xi\Delta g}$  και  $H_{\omega\Delta g}$  είναι οι συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας, οι οποίες συνδέουν θεωρητικά τα σήματα εισόδου και εξόδου. Στο παράδειγμα οι συναρτήσεις αυτές είναι οι πυρήνες Vening-Meinesz στο χώρο των συχνοτήτων. Τελικά, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην έξοδο  $P_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}$  γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}} &= \begin{bmatrix} P_{\hat{\epsilon}_\xi\hat{\epsilon}_\xi} & P_{\hat{\epsilon}_\xi\hat{\epsilon}_\omega} \\ P_{\hat{\epsilon}_\omega\hat{\epsilon}_\xi} & P_{\hat{\epsilon}_\omega\hat{\epsilon}_\omega} \end{bmatrix} = \\ & (P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{mm}) \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g} \\ H_{\omega\Delta g} \end{bmatrix} (1 - 1) \bullet \\ & \left( \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g}^* & H_{\omega\Delta g}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g} & H_{\omega\Delta g} \end{bmatrix} \frac{P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{mm}}{P_{\Delta g_o\Delta g_o}} \right) + \\ & \frac{P_{mm}(P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{mm})}{P_{\Delta g_o\Delta g_o}} \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g}^2 & H_{\xi\Delta g}H_{\omega\Delta g}^* \\ H_{\omega\Delta g}H_{\xi\Delta g}^* & H_{\omega\Delta g}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ P_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}} &= \frac{P_{mm}(P_{\Delta g_o\Delta g_o} - P_{mm})}{P_{\Delta g_o\Delta g_o}} \begin{bmatrix} H_{\xi\Delta g}^2 & H_{\xi\Delta g}H_{\omega\Delta g}^* \\ H_{\omega\Delta g}H_{\xi\Delta g}^* & H_{\omega\Delta g}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.171) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4. Η εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων στην επεξεργασία των παρατηρήσεων της από αέρα βαρυτημετρίας παρουσιάζεται στις αναφορές [38], [37] και [39]. Στις εφαρμογές αυτές χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα προσομοίωσης και μελετήθηκε το αποτελεσματικό φιλτράρισμα των μετρούμενων συνιστωσών του διαταρακτικού δυναμικού. Η επεξεργασία των μετρούμενων συνιστωσών του διαταρακτικού δυναμικού παρουσιάζεται στο σχήμα 6.16. Στις



Σχήμα 6.16: Εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων στην επεξεργασία των παρατηρήσεων της από αέρα βαρυτημετρίας.

πρακτικές εφαρμογές, οι περιοχές κάλυψης είναι σχετικά μικρές. Η γήινη επιφάνεια μπορεί να προσεγγιστεί από ένα εραπτόμενο επίπεδο δίχως την εισαγωγή σημαντικών σφαλμάτων.

Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή,  $T_x$ ,  $T_y$  και  $T_z$  είναι οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της διαταραχής της βαρύτητας και ορίζονται σύμφωνα με:

$$T_x = \partial T / \partial x \quad T_y = \partial T / \partial y \quad T_z = \partial T / \partial z. \quad (6.172)$$

Τα διανύσματα των σημάτων εισόδου και εξόδου είναι:

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} T_{x_o} \\ T_{y_o} \\ T_{z_o} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_o = \begin{bmatrix} T'_{x_o} \\ T'_{y_o} \\ T'_{z_o} \end{bmatrix} \quad (6.173)$$

Σύμφωνα με τους Wu and Sideris [38] και Wu [37], η εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των δεδομένων εισόδου και εξόδου είναι δυνατό να βασιστεί στο μετασχηματισμό Fourier του διαταρακτικού δυναμικού της βαρύτητας  $P_{TT}$ :

$$\mathbf{P}_{xy} = 4\pi P_{TT} \begin{bmatrix} u^2 & uv & -juq \\ uv & v^2 & -jvq \\ -juq & -jvq & q^2 \end{bmatrix}, \quad (6.174)$$

όπου  $u$  και  $v$  είναι οι συχνότητες, οι οποίες αντιστοιχούν στα  $x$  και  $y$ ,  $j$  είναι η φανταστική μονάδα ( $j = \sqrt{-1}$ ) και  $q = \sqrt{v^2 + u^2}$ . Ειδικές διαδικασίες ακολουθούνται για την προσέγγιση του θορύβου, οι οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην είσοδο προκύπτουν ακολουθώντας μοντέλα της μορφής [38]:

$$P_{vv} = \frac{A}{f^2} + W \quad (6.175)$$

$$P_{hh} = \frac{B}{f^4} + W, \quad (6.176)$$

όπου  $P_{vv}$  είναι η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος της κατακόρυφης συνιστώσας,  $P_{hh}$  η αντίστοιχη συνάρτηση των οριζόντιων συνιστωσών,  $f$  είναι η συχνότητα,  $A$ ,  $B$  και  $W$  είναι οι σταθερές του μοντέλου. Η τελική λύση και η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος στην έξοδο δίνονται από την (6.150).

Παράδειγμα 5. Δίνεται ένα παράδειγμα συνδυασμού ετερογενών δεδομένων με σκοπό το βέλτιστο προσδιορισμό ενός μοντέλου γεωειδούς σε θαλάσσια περιοχή. Ως δεδομένα εισόδου λαμβάνονται μετρήσεις ανωμαλιών βαρύτητας ( $\Delta g$ ) που προέρχονται από θαλάσσιες μετρήσεις βαρύτητας και αποχές του γεωειδούς που λαμβάνονται μετά από επεξεργασία αλτιμετρικών δεδομένων διαφόρων δορυφορικών αποστολών (π.χ.,  $N_{T/P}$ ,  $N_{ERS1}$ ,  $N_{ERS2}$ ). Το πλήθος των αλτιμετρικών αποστολών επιτρέπει τη χρήση μεγάλου αριθμού μετρήσεων υψομέτρων της επιφάνειας της θάλασσας. Τα παραπάνω υψόμετρα, αφού διορθωθούν από τη σταθερή συνιστώσα της θαλάσσιας τοπογραφίας, όπως θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο των εφαρμογών, αποτελούν τα δεδομένα εισαγωγής στο σύστημα:

$$\mathbf{Y}_o = \begin{bmatrix} N_{T/P_o} \\ N_{ERS1_o} \\ N_{ERS2_o} \\ \Delta G_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{T/P} + M_{N_{T/P}} \\ N_{ERS1} + M_{N_{ERS1}} \\ N_{ERS2} + M_{N_{ERS2}} \\ \Delta G + M_{\Delta g} \end{bmatrix}, \quad (6.177)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{N_{T/P}} \\ M_{N_{ERS1}} \\ M_{N_{ERS2}} \\ M_{\Delta g} \end{bmatrix}. \quad (6.178)$$

Η διαφοροποίηση του συστήματος που παρουσιάζεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα σε σύγκριση με τα συστήματα που έχουν ήδη αναλυθεί σχετίζεται με τον προσδιορισμό των συναρτήσεων

πυκνότητας φάσματος των δεδομένων. Όσον αφορά στις ανωμαλίες βαρύτητας  $\Delta g$  ο προσδιορισμός ακολουθεί τα μοντέλα που έχουν αναφερθεί προηγουμένως. Στην περίπτωση των αλτιμετρικών μετρήσεων παρουσιάζεται η δυνατότητα προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θόρυβου, αφού είναι δυνατή η απόκτηση περισσότερων της μιας δειγματικών τιμών. Ενώ στις μετρήσεις βαρύτητας όλες οι στατιστικές ποσότητες που αφορούν στο πεδίο προσδιορίζονται με τη βοήθεια μιας δειγματικής τιμής, οι επαναλαμβανόμενες τροχιές των αλτιμετρικών δορυφόρων δίνουν τη δυνατότητα επιπλέον διαδικασιών [24], οι οποίες αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 2.

Ως δεδομένα εξόδου είναι δυνατό να ληφθούν αποχές του γεωειδούς ή ακόμη και ανωμαλίες βαρύτητας, οι οποίες προκύπτουν από τον βέλτιστο συνδυασμό επιφανειακών και δορυφορικών δεδομένων. Τα διανύσματα των σημάτων εξόδου δίνονται ως εξής:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} N \\ \Delta G' \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_N \\ E_{\Delta g'} \end{bmatrix}. \quad (6.179)$$

Στην παραπάνω περίπτωση είναι δυνατή η κάλυψη μεγάλων θαλάσσιων περιοχών με πληροφορίες για το πεδίο βαρύτητας και ο προσδιορισμός ενός ακριβούς θαλάσσιου γεωειδούς υψηλής ανάλυσης. Η λύση προκύπτει τελικά σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} N \\ \Delta G' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{N_o N_{T/P_o}} & H_{N_o N_{ERS1_o}} & H_{N_o N_{ERS2_o}} & H_{N_o N_{\Delta g_o}} \\ H_{\Delta g'_o N_{T/P_o}} & H_{\Delta g'_o N_{ERS1_o}} & H_{\Delta g'_o N_{ERS2_o}} & H_{\Delta g'_o \Delta g} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} N_{T/P} \\ N_{ERS1} \\ N_{ERS2} \\ \Delta g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{N_{T/P}} \\ M_{N_{ERS1}} \\ M_{N_{ERS2}} \\ M_{\Delta g} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} E_N \\ E_{\Delta g'} \end{bmatrix} \quad (6.180)$$

Έστω ότι θόρυβοι και σήματα είναι ποσότητες ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Ο βέλτιστος πίνακας μεταφοράς  $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{x}_o \mathbf{y}_o}$  δίνεται από μια σχέση ανάλογη με την (6.148), όπου

$$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{x}_o \mathbf{y}_o} = \begin{bmatrix} H_{N_o N_{T/P_o}} & H_{N_o N_{ERS1_o}} & H_{N_o N_{ERS2_o}} & H_{N_o N_{\Delta g_o}} \\ H_{\Delta g'_o N_{T/P_o}} & H_{\Delta g'_o N_{ERS1_o}} & H_{\Delta g'_o N_{ERS2_o}} & H_{\Delta g'_o \Delta g} \end{bmatrix} \quad (6.181)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} = \begin{bmatrix} P_{T/P T/P} & P_{T/P ERS1} & P_{T/P ERS2} & P_{T/P \Delta g} \\ P_{ERS1 T/P} & P_{ERS1 ERS1} & P_{ERS1 ERS2} & P_{ERS1 \Delta g} \\ P_{ERS2 T/P} & P_{ERS2 ERS1} & P_{ERS2 ERS2} & P_{ERS2 \Delta g} \\ P_{\Delta g T/P} & P_{\Delta g ERS1} & P_{\Delta g ERS2} & P_{\Delta g \Delta g} \end{bmatrix} \quad (6.182)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{mm}} = \begin{bmatrix} P_{m_{T/P} m_{T/P}} & P_{m_{T/P} m_{ERS1}} & P_{m_{T/P} m_{ERS2}} & P_{m_{T/P} m_{\Delta g}} \\ P_{m_{ERS1} m_{T/P}} & P_{m_{ERS1} m_{ERS1}} & P_{m_{ERS1} m_{ERS2}} & P_{m_{ERS1} m_{\Delta g}} \\ P_{m_{ERS2} m_{T/P}} & P_{m_{ERS2} m_{ERS1}} & P_{m_{ERS2} m_{ERS2}} & P_{m_{ERS2} m_{\Delta g}} \\ P_{m_{\Delta g} m_{T/P}} & P_{m_{\Delta g} m_{ERS1}} & P_{m_{\Delta g} m_{ERS2}} & P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}} \end{bmatrix}. \quad (6.183)$$

Ακόμη, με την υπόθεση ότι ο θόρυβος στην είσοδο και το σήμα εξόδου είναι ποσότητες ασυσχέτιστες, ισχύει:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xy}_o} = \mathbf{P}_{\mathbf{xy}} = \begin{bmatrix} P_{N N_{T/P}} & P_{N N_{ERS1}} & P_{N N_{ERS2}} & P_{N \Delta g} \\ P_{\Delta g' N_{T/P}} & P_{\Delta g' N_{ERS1}} & P_{\Delta g' N_{ERS2}} & P_{\Delta g' \Delta g} \end{bmatrix} \quad (6.184)$$

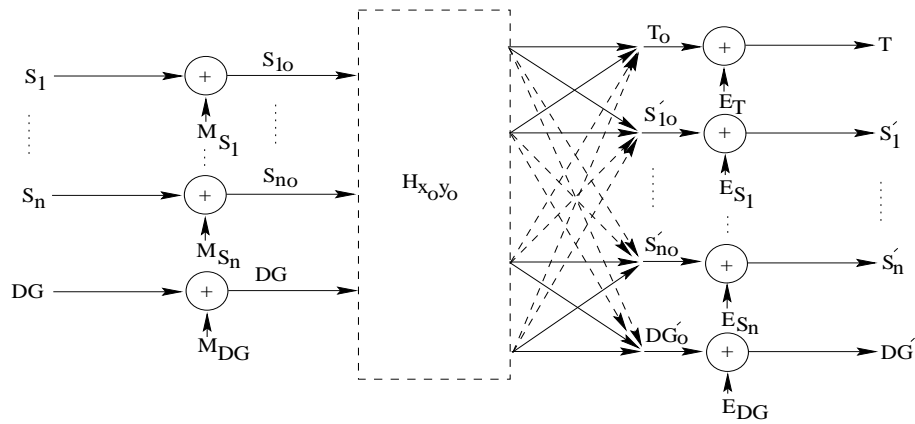
Η διαδικασία που αναφέρεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι δυνατό να ακολουθηθεί και την περίπτωση των μετρήσεων GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης. Τα υψόμετρα GPS που προκύπτουν μπορεί να αντιμετωπιστούν ανάλογα με τα ύψη της θαλάσσιας επιφάνειας που δίνονται από τους αλτιμετρικούς δορυφόρους. Σύμφωνα με τη θεωρία, οι αλτιμετρικές μετρήσεις αποτελούν τις αντίστοιχες μετρήσεις GPS-χωροστάθμησης στο θαλάσσιο περιβάλλον, διότι και τα δύο είδη μετρήσεων παρέχουν υψόμετρα από την επιφάνεια του γεωειδούς. Η βασική διαφορά τους σε σχέση με τη θέση του πομπού και δέκτη των σημάτων σχετίζεται με

τη διακριτική ικανότητα των μετρήσεων και την ευκολία και ταχύτητα στη μέτρηση. Στην περίπτωση των αλτιμετρικών μετρήσεων, πομπός και δέκτης των παλμών είναι ο αλτιμετρικός δορυφόρος και οι μετρήσεις αναφέρονται σε κάθε σημείο του ίχνους του στη γήινη επιφάνεια. Στην περίπτωση των δεδομένων GPS-χωροστάθμησης, αν και ο πομπός είναι το δορυφορικό σύστημα, οι μετρήσεις αναφέρονται μόνο στο σημείο της γήινης επιφάνειας, όπου υπάρχει και ο αντίστοιχος δέκτης. Η αντιμετώπιση των μετρήσεων GPS-χωροστάθμησης με τη βοήθεια της θεωρίας των συστημάτων περιορίζεται από τη χαμηλή διακριτική ικανότητα των μετρήσεων. Παραδείγματα προσομοιώσεων και ανάλυσης πραγματικών δεδομένων παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7.

Παράδειγμα 6. Το τελευταίο παράδειγμα εφαρμογής της γενικευμένης θεωρίας των συστημάτων εισόδου – εξόδου αναφέρεται στη διαδικασία προσδιορισμού του σήματος της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας ή της τοπογραφίας της θαλάσσιας επιφάνειας (Dynamic Ocean Topography–DOT, Sea Surface Topography–SST). Στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ο βέλτιστος συνδυασμός δεδομένων θαλάσσιας βαρυτημετρίας και δορυφορικής αλτιμετρίας. Έστω  $t$  είναι το σήμα εξόδου της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας και  $s_i$  είναι τα ύψη της θαλάσσιας στάθμης, όπως αυτά προκύπτουν από  $n$  διαφορετικές αλτιμετρικές αποστολές. Τα διανύσματα των σημάτων εισόδου και εξόδου δίνονται ως εξής:

$$\mathbf{Y}_o = \begin{bmatrix} S_{1o} \\ \vdots \\ S_{2o} \\ \Delta g_o \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} T_o \\ S'_{1o} \\ \vdots \\ S'_{2o} \\ \Delta G'_o \end{bmatrix} \quad (6.185)$$

Το γενικευμένο σύστημα του παραδείγματος παρουσιάζεται στο σχήμα 6.17. Ο πίνακας των



Σχήμα 6.17: Η εφαρμογή της γενικευμένης θεωρίας των συστημάτων στην προσέγγιση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας.

συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σημάτων εισόδου-εξόδου έχει τη μορφή:

$$\mathbf{P}_{xy} = \begin{bmatrix} P_{ts_1} & \cdots & P_{ts_n} & P_{t\Delta g} \\ P_{s'_1 s_1} & \cdots & P_{s'_1 s_n} & P_{s'_1 \Delta g} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{s'_n s_1} & \cdots & P_{s'_n s_n} & P_{s'_n \Delta g} \\ P_{\Delta g' s_1} & \cdots & P_{\Delta g' s_n} & P_{\Delta g' \Delta g} \end{bmatrix}. \quad (6.186)$$

Τα στοιχεία του πίνακα είναι δυνατό να υπολογιστούν ακολουθώντας την ανάλυση των ανα-

φορών [3] και [1]:

$$\begin{aligned} P_{ts_i} &= TS_i^* = (\bar{S} - N)S_i^* = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n} S_i^* - H_{N\Delta g} \Delta G S_i^* = \\ &= \frac{P_{s_1 s_i} + \dots + P_{s_n s_i}}{n} - H_{N\Delta g} P_{\Delta g s_i} \end{aligned} \quad (6.187)$$

Στην περίπτωση που η μη ύπαρξη συσχέτισης αναφέρεται στο σύνολο των σημάτων και των θορύβων εισόδου, τότε ισχύει η γενικευμένη μορφή:

$$P_{\Delta g s_i} = P_{\Delta g_o s_{i_o}}. \quad (6.188)$$

Οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος των αλτιμετρικών υψών της θαλάσσιας στάθμης υπολογίζονται σύμφωνα με:

$$P_{s'_i s'_j} = \begin{cases} i = j & P_{s'_i s'_i} = P_{s_i s_i} = P_{s_{i_o} s_{i_o}} - P_{m_{s_i} m_{s_i}} \\ i \neq j & P_{s'_i s'_j} = P_{s_i s_j} = P_{s_{i_o} s_{j_o}} \end{cases} \quad (6.189)$$

Στην παρούσα εφαρμογή ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των θορύβων των μετρήσεων είναι δυνατό να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την επαναλαμβανόμενη πληροφορία των ακριβώς επαναλαμβανόμενων τροχιών, όπως περιγράφεται και από τους Andritsanos et al. [2]. Ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των μετρήσεων υπολογίζεται άμεσα από τις παρατηρήσεις και έχει τη μορφή:

$$\mathbf{P}_{y_o y_o} = \begin{bmatrix} P_{s_{1_o} s_{1_o}} & \dots & P_{s_{1_o} s_{n_o}} & P_{s_{1_o} \Delta g_o} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{s_{n_o} s_{1_o}} & \dots & P_{s_{n_o} s_{n_o}} & P_{s_{n_o} \Delta g_o} \\ P_{\Delta g_o s_{1_o}} & \dots & P_{\Delta g_o s_{n_o}} & P_{\Delta g_o \Delta g_o} \end{bmatrix}. \quad (6.190)$$

Η τελική λύση δίνεται από την (6.150). Η εκτίμηση του πίνακα των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί: η συνάρτηση σύνδεσης, η οποία ενώνει θεωρητικά τα σήματα των υψών της θαλάσσιας στάθμης και των ανωμαλιών της βαρύτητας δεν είναι γνωστή. Η μόνη πληροφορία, με την οποία μπορεί να συγκριθεί η εκτίμηση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας είναι η σύγκριση με ωκεανογραφικές εκτιμήσεις της θαλάσσιας τοπογραφίας. Τέτοιες συγκρίσεις είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν χρησιμοποιώντας αναπτύξεις σφαιρικών αρμονικών των δεδομένων του ωκεανογραφικού άτλαντα του Levitus [11], [12], οι οποίες παρουσιάστηκαν από τον Engelis [9] ή την ανάπτυξη του παράλληλου μοντέλου ωκεάνιας κυκλοφορίας (POCM-4B, βλ. κεφ. 5), η οποία παρουσιάστηκε από τους Pavlis et al. [23].

## 6.5 Το πρόβλημα του θορύβου

Η θεμελιώδης δυσκολία στη διαδικασία των λύσεων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως σχετίζεται με τη στοχαστική φύση του θορύβου των μετρήσεων. Ειδικότερα, σε σύγκριση με τη σημειακή προσαρμογή, η συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος του θορύβου  $P_{mm}$  στο σήμα εισόδου πρέπει να είναι γνωστή [βλ. χρήση του  $P_{mm}$  στην (6.82)]. Στην πράξη, όμως, μόνον οι μεταβλητότητες των μετρήσεων είναι γνωστές και όχι τα ίδια τα σφάλματα. Τα τελευταία θεωρούνται τιμές της τυχαίας μεταβλητής [41]:

$$v = b - x, \quad (6.191)$$

όπου  $v$  η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τα σφάλματα,  $b$  οι μετρούμενες ποσότητες και  $x$  η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Από τη στιγμή που οι μεταβλητότητες αλλάζουν από σημείο σε σημείο ο εξωτερικός θόρυβος που εισάγεται στις παρατηρήσεις δεν αποτελεί μέρος στάθμης στοχαστικής διαδικασίας [29]. Το γεγονός αυτό περιπλέκει τη λύση στο χώρο

των συχνοτήτων, όπου, πλέον, οι απλές αλγεβρικές εξισώσεις μετατρέπονται σε ολοκληρωματικές σχέσεις [25]. Η λύση προσδιορίζεται μετά από πολύπλοκους υπολογισμούς, οι οποίοι καταργούν τον απλοποιημένο φασματικό χαρακτήρα. Η διαδικασία γίνεται εξίσου πολύπλοκη με τη λύση στο χώρο των αποστάσεων μέσω σημειακής προσαρμογής. Τονίζεται ότι στη σημειακή προσαρμογή η ανυπαρξία στασιμότητας δεν αποτελεί πρόβλημα από τη στιγμή που οι ίδιες οι μεταβλητότητες εισέρχονται στη διαδικασία της λύσης μέσω του διαγωνίου πίνακα  $C_{nn}$  [16].

Επίσης, οι διαστάσεις των πινάκων στην περίπτωση της σημειακής προσαρμογής είναι διαφορετικές από τις διαστάσεις των αντίστοιχων πινάκων στις φασματικές λύσεις που παρουσιάστηκαν. Εάν, π.χ., ένα πεδίο δεδομένων  $n \times m$  διαστάσεων αντιμετωπιστεί με τις φασματικές θεωρίες οι πίνακες των συναρτήσεων πυκνότητας φασμάτος θα είναι επίσης διαστάσεων  $n \times m$ . Στην περίπτωση της σημειακής προσαρμογής τα δεδομένα εισάγονται στη μορφή διανύσματος  $n \cdot m \times 1$  και οι αντίστοιχες συναρτήσεις συμμεταβλητότητας είναι πίνακες διαστάσεων  $n \cdot m \times n \cdot m$ . Εξαιτίας των παραπάνω, δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί άμεσα ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φασμάτος  $P_{mm}$  από το μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων  $C_{nn}$ , καθώς οι υποτιθέμενες μηδενικές μέσες τιμές των δεδομένων μετατρέπουν τις  $C_{nn}$  σε συναρτήσεις συσχέτισης.

Ο θόρυβος στις παρατηρήσεις μπορεί να εισαχθεί με τρεις κυρίως τρόπους:

### 6.5.1 Προσομοίωση τυχαίου θορύβου

Η προσομοίωση μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια ειδικού προγράμματος-γεννήτριας τυχαίων αριθμών (random noise generator). Η συνήθης κατανομή που ακολουθούν τα τυχαία σφάλματα είναι η **κανονική κατανομή** ή **κατανομή Gauss** (normal or Gaussian distribution). Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση [20], [41]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (6.192)$$

όπου  $\sigma$  η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής,  $x$  η τιμές της τυχαίας μεταβλητής και  $\mu$  η μέση τιμή. Η κανονική κατανομή είναι η συχνότερα εμφανιζόμενη κατανομή τυχαίων μεταβλητών στη φύση, αλλά όχι και η μοναδική. Ο θόρυβος που εισάγουμε στις μετρήσεις μπορεί να ακολουθεί και κάποια άλλη μορφή κατανομής, όπως είναι, π.χ., η **ομογενής κατανομή** (uniform distribution) με συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής [20]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2-x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (6.193)$$

Άλλες μορφές κατανομών που θα δοκιμαστούν στο κεφάλαιο των εφαρμογών είναι η **διωνυμική κατανομή** (binomial distribution) με συνάρτηση πυκνότητας [20]:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{m} p^k q^{n-k} \delta(x-k), \quad (6.194)$$

όπου  $\delta(x-k)$  η συνάρτηση δέλτα του Dirac,  $n$  η τάξη της κατανομής και  $p+q=1$ . Άλλες κατανομές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι η **κατανομή Laplace** και η **κατανομή Cauchy** [20], [21]. Σημειώνεται ότι η μορφή των κατανομών που χρησιμοποιούνται είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων και η μέγιστη τιμή τους λαμβάνεται για  $f(0)$ .

Η γεννήτρια τυχαίων αριθμών δημιουργεί το πεδίο του θορύβου με διαστάσεις ίδιες του πεδίου των δεδομένων, που χαρακτηρίζεται από μηδενική μέση τιμή και μεταβλητότητας  $\sigma$ . Η μεταβλητότητα του θορύβου προκύπτει απευθείας από τον πίνακα (συμ)μεταβλητοτήτων των σφαλμάτων των παρατηρήσεων.

### 6.5.2 Στάσιμα μοντέλα προσομοίωσης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος

Η προσομοίωση του θορύβου δεν αποτελεί μια αυστηρά μαθηματική διεργασία. Η συνάρτηση πυκνότητας αυτο-φάσματος του θορύβου  $P_{mm}$  μπορεί να προσεγγιστεί με τη βοήθεια μοντέλων στασιμότητας. Τα μοντέλα αυτά αποτελούν εκφράσεις των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, οι οποίες δεν προκύπτουν από την ανάλυση πραγματικών δεδομένων, αλλά είναι αποτελέσματα τιμών μαθηματικών συναρτήσεων κατάλληλων ιδιοτήτων. Η ανάλυση πραγματικών δεδομένων θορύβου είναι αδύνατη, αφού τα σφάλματα των μετρήσεων είναι άγνωστα. Έτσι, π.χ., αν θεωρηθεί ότι ο θόρυβος στις μετρήσεις είναι μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία (βλ. κεφ. 2) με συνάρτηση (αυτο)συσχέτισης που περιγράφεται από ένα σήμα απόκρισης παλμού, τότε η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου θα έχει μια σταθερή τιμή. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται **λευκός θόρυβος** (white noise). Ακόμη, αν θεωρηθεί ότι συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου δεν έχει σταθερή τιμή, τότε ο θόρυβος ονομάζεται **χρωματισμένος θόρυβος** (colored noise). Περισσότερα για τη διάκριση σήματος-θορύβου δίνονται από τους [20], [21], [35], [22], [36].

### 6.5.3 Προσδιορισμός συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου

Στην περίπτωση μετρήσεων του πεδίου βαρύτητας, οι παρατηρήσεις θεωρούνται τιμές μιας μοναδικής δοκιμής ενός πειράματος. Η έννοια της εργοδικότητας, που εισάγεται στη θεωρία του πεδίου βαρύτητας, επιτρέπει την αξιοποίηση των ιδιοτήτων του πεδίου με χρήση μίας και μόνης δειγματικής τιμής. Αντιθέτως, το γεγονός αυτό δυσκολεύει τον προσδιορισμό της συνάρτησης πυκνότητας αυτο-φάσματος του θορύβου  $P_{mm}$ , αφού είναι απαραίτητες περισσότερες δειγματικές τιμές του πεδίου. Στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας το γεγονός αυτό μπορεί να υλοποιηθεί αν επαναληφθούν οι μετρήσεις σε διαφορετικές εποχές στην περιοχή μελέτης. Η επανάληψη των επίγειων μετρήσεων βαρύτητας σε διαφορετικές εποχές είναι προφανώς μια διαδικασία χρονοβόρα και πρακτικά αδύνατη να πραγματοποιηθεί με τις κλασικές μετρήσεις. Για το λόγο αυτόν, για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου χρησιμοποιούνται οι τεχνικές που προαναφέρθηκαν. Βέβαια, με την εξέλιξη των δορυφορικών συστημάτων παρακολούθησης και τις προγραμματισμένες δορυφορικές αποστολές GRACE, CHAMP και GOCE μέσα στο 2000 ή αργότερα, οι οποίες ως άμεσο σκοπό τους έχουν τη βελτιστοποίηση στη μέτρηση των υψηλών συχνοτήτων του πεδίου βαρύτητας, οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις βαρύτητας θα είναι μία πραγματικότητα. Με τη διάθεση των μετρήσεων των βαρυτημετρικών δορυφόρων η αντιμετώπιση θα ακολουθήσει πλέον τις τεχνικές της αλτιμετρίας. Στην περίπτωση αλτιμετρικών δεδομένων, όπως αυτά προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες δορυφορικές τροχιές, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου είναι δυνατό να προσδιοριστεί, εφόσον οι δειγματικές τιμές του πειράματος είναι περισσότερες της μιας. Με τη βοήθεια των περισσότερων δειγματικών τιμών της στοχαστικής διαδικασίας των μετρήσεων είναι πλέον δυνατός ο διαχωρισμός του σήματος από το θόρυβο στο επίπεδο των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος. Έστω για παράδειγμα ότι εξετάζονται δεδομένα από δύο ακριβώς επαναλαμβανόμενα ίχνη τροχιών (exact repeat tracks). Οι **Εγγραφές Γεωφυσικών Δεδομένων** (Geophysical Data Records (GDRs)) που καταγράφονται περιλαμβάνουν και τις τιμές υψομέτρων της επιφάνειας της θάλασσας. Οι τιμές αυτές δίνονται στη μορφή χρονικών σειρών. Στην περίπτωση της φασματικής ανάλυσης των μετρήσεων οι διαδοχικές χρονικές σειρές αντιπροσωπεύουν τις επαναλαμβανόμενες δειγματικές τιμές μιας στοχαστικής διαδικασίας:

$$h_1[k] = N[k] + m_1[k] \tag{6.195}$$

$$h_2[k] = N[k] + m_2[k],$$

όπου  $N[k]$  είναι το κοινό σήμα αποχών του γεωειδούς, αμετάβλητο με το χρόνο, και  $m_1$  και  $m_2$  αποτελούν ανεξάρτητες δοκιμές της στοχαστικής διαδικασίας του θορύβου, ο οποίος

θεωρείται ασυσχέτιστος με το σήμα των αποχών. Επιπλέον, η στοχαστική διαδικασία του θορύβου θεωρείται στάσιμη, τόσο στη χωρική, όσο και στη χρονική κλίμακα. Η παραδοχή αυτή ισχύει στις πρακτικές εφαρμογές εκτός από τις περιπτώσεις «σταθερών» ωκεανογραφικών χαρακτηριστικών, όπως, π.χ., στην περίπτωση ενός ισχυρού ρεύματος, όπως το Gulf Stream, ή ενός αργά κινούμενου ρεύματος, του οποίου η κίνηση δεν μπορεί να διακριθεί εξετάζοντας διαφορετικές τροχιές διάρκειας λίγων ημερών. Σε τέτοιες περιπτώσεις ένα ωκεανογραφικό χαρακτηριστικό, «θόρυβος» για τη γεωδαισία, το οποίο μετακινείται πολύ αργά, μπορεί να ληφθεί εσφαλμένα ως σήμα ωκεάνιου γεωειδούς που δε μεταβάλλεται χρονικά. Η υπόθεση μη ύπαρξης συσχετίσεων μεταξύ θορύβου και σήματος αποχών του γεωειδούς είναι σχεδόν πάντα αληθής εκτός σπανίων περιπτώσεων, π.χ., υψηλών σφαλμάτων λόγω ακτινικών τροχιακών επιταγύσεων [24]. Οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος μεταξύ δύο διαδοχικών τροχιών πρέπει να είναι ίσες και η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του «καθαρού» σήματος και του θορύβου να συνδέονται με τη σχέση:

$$P_{h_1} = P_{h_2} = P_N + P_m. \quad (6.196)$$

Με τον τρόπο αυτόν είναι δυνατό να εκτιμηθεί η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου από μια χρονική σειρά μετρήσεων πραγματοποιώντας διαδοχικές αφαιρέσεις ανάμεσα στα επαναλαμβανόμενα σήματα. Λαμβάνοντας τις διαφορές μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων οποιοδήποτε σήμα θεωρείται αμετάβλητο με την πάροδο του χρόνου (όπως είναι το «καθαρό» σήμα των αποχών του γεωειδούς) εξαλείφεται και απομένει το διπλάσιο της πυκνότητας του θορύβου. Έτσι [24]:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= m_1 - m_2 \Rightarrow \\ (H_1 - H_2) * (H_1 - H_2) &= (M_1 - M_2) * (M_1 - M_2) \Rightarrow \\ P_{h_1 - h_2} &= P_{m_1} + P_{m_2} = 2P_m \Rightarrow \\ P_m &= \frac{1}{2} P_{h_1 - h_2}. \end{aligned} \quad (6.197)$$

Από τις (6.196) και (6.197) φαίνεται ο τρόπος διαχωρισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σήματος από τον θόρυβο. Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του σήματος μπορεί να προκύψει λαμβάνοντας τον μέσο όρο των διαδοχικών αλτιμετρικών μετρήσεων και αφαιρώντας τη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου, σύμφωνα με:

$$P_N = \frac{1}{2} [P_{h_1} + P_{h_2}] - P_m \quad (6.198)$$

Ένας καλύτερος τρόπος για το διαχωρισμό του σήματος από το θόρυβο είναι η καταρχήν άθροιση των μετρήσεων των διαδοχικών τροχιών και στη συνέχεια η εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του αθροίσματος. Τα επαναλαμβανόμενα ίχνη περιέχουν το σταθερό σήμα της αποχή του γεωειδούς  $N$ , οπότε το άθροισμα αυτών θα περιλαμβάνει δύο φορές το «καθαρό» σήμα και τέσσερις φορές τη συνάρτηση πυκνότητας σύμφωνα με:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= N + N + m_1 + m_2 \Rightarrow \\ (H_1 + H_2) * (H_1 + H_2) &= (N + N + M_1 + M_2) * (N + N + M_1 + M_2) \Rightarrow \\ P_{h_1 + h_2} &= 4P_N + 2P_m \end{aligned} \quad (6.199)$$

Συνδυάζοντας τη σχέση (6.197) και την (6.199) προσδιορίζεται η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του σήματος των αποχών του γεωειδούς σύμφωνα με:

$$P_N = \frac{1}{4} [P_{h_1 + h_2} - P_{h_1 - h_2}]. \quad (6.200)$$

Η σχέση (6.200) σε σύγκριση με την (6.198) οδηγεί σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Οι δύο σχέσεις δίνουν όμοια αποτελέσματα για μήκη κύματος μεγαλύτερα των 100 km [24].

Στη συνέχεια προτείνονται δύο διαφορετικές μέθοδοι υπολογισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου εισόδου, οι οποίες αναφέρονται για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία. Ο πρώτος τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου είναι η χρήση περισσότερων επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Το πλήθος των μετρήσεων πρέπει να ορίζεται έτσι, ώστε από τη στιγμή της πρώτης μέτρησης μέχρι τη στιγμή της τελευταίας, να ισχύει η στασιμότητα του σήματος της αποχής του γεωειδούς. Το σύνολο των μετρήσεων διαχωρίζεται σε δύο κλάσεις, ανάλογα με το πλήθος και τις α-priori πληροφορίες των δεδομένων. Ο διαχωρισμός στις δύο κλάσεις σχετίζεται με την απαλοιφή του κοινού σήματος της αποχής του γεωειδούς για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου. Έστω, π.χ., ότι  $K$  μετρήσεις κατατάσσονται στην πρώτη κλάση και  $L$  στη δεύτερη. Ισχύουν:

$$\begin{aligned}\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K h_i &= N + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K m_i \\ \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L h_j &= N + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L m_j\end{aligned}\quad (6.201)$$

Αθροίζοντας τις δύο κλάσεις έχουμε:

$$\bar{h}_i + \bar{h}_j = N + N + \bar{m}_i + \bar{m}_j \quad (6.202)$$

$$\bar{h}_i - \bar{h}_j = \bar{m}_i - \bar{m}_j, \quad (6.203)$$

όπου  $\bar{h}_i, \bar{h}_j$  οι μέσοι όροι των μετρήσεων των δύο κλάσεων και  $\bar{m}_i, \bar{m}_j$  οι μέσοι όροι του θορύβου στις δύο κλάσεις. Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}(\bar{H}_i + \bar{H}_j)^*(\bar{H}_i + \bar{H}_j) &= (2N + \bar{M}_i + \bar{M}_j)^*(2N + \bar{M}_i + \bar{M}_j) \\ (\bar{H}_i - \bar{H}_j)^*(\bar{H}_i - \bar{H}_j) &= (\bar{M}_i - \bar{M}_j)^*(\bar{M}_i - \bar{M}_j) \Rightarrow \\ P_{\bar{h}_i + \bar{h}_j} &= 4P_N + 2P_m \\ P_{\bar{h}_i - \bar{h}_j} &= 2P_m \Rightarrow \\ P_N &= \frac{1}{4}[P_{\bar{h}_i + \bar{h}_j} - P_{\bar{h}_i - \bar{h}_j}]\end{aligned}\quad (6.204)$$

Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού σχετίζεται με τις εφαρμογές προσέγγισης της θαλάσσιας τοπογραφίας. Στην περίπτωση χρησιμοποίησης αλτιμετρικών δεδομένων για τον υπολογισμό της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας, ο υπολογισμός των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σημάτων και των θορύβων στην είσοδο πραγματοποιείται με αντίστοιχο τρόπο. Οι επαναλαμβανόμενες τροχιές παρέχουν τη δυνατότητα μελέτης ενός πολλαπλού δείγματος τιμών. Η επαναλαμβανόμενη μέτρηση των υψών της θαλάσσιας στάθμης γράφεται ως [2]:

$$h_i = h + \Delta\zeta_i + n_i, \quad (6.205)$$

όπου  $h_i$  είναι οι αλτιμετρικές παρατηρήσεις, διορθωμένες από τροχιακά, γεωφυσικά και περιβαλλοντικά σφάλματα, όπως περιγράφονται στο κεφάλαιο 3,  $h$  είναι το ανεξάρτητο από τη χρονική παράμετρο μέρος της αλτιμετρικής εξίσωσης, δηλαδή το σήμα του γεωειδούς και το στάσιμο μέρος της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας,  $\Delta\zeta_i$  είναι το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας και  $n_i$  είναι το σφάλμα της αλτιμετρικής παρατήρησης. Αν θεωρηθεί ότι οι αποκλίσεις από το σταθερό μέρος της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας  $\Delta\zeta_i$  ακολουθούν μια τυχαία κατανομή και τα  $\Delta\zeta_i$  και  $n_i$  είναι ασυσχέτιστα, τότε μια νέα τυχαία μεταβλητή  $e_i$  είναι δυνατό να εισαχθεί στους υπολογισμούς:

$$\Delta\zeta_i + n_i = e_i. \quad (6.206)$$

Η νέα μεταβλητή περιέχει στατιστική πληροφορία για το σφάλμα της αλτιμετρικής παρατήρησης, όπως επίσης και για το θεωρούμενο ως τυχαίως χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος της θαλάσσιας τοπογραφίας. Μετασχηματίζοντας στο χώρο των συχνοτήτων και αφαιρώντας κάθε εξίσωση παρατήρησης από την προηγούμενή της λαμβάνονται  $k$  εξισώσεις διαφορών [2]:

$$H_i - H_{i+1} = E_i - E_{i+1} \quad i = 1, \dots, k \quad (6.207)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην είσοδο είναι δυνατό να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη συζυγή μιγαδική μορφή της προηγούμενης εξίσωσης, πολλαπλασιάζοντας και θεωρώντας ασυσχέτιστους τους θορύβους:

$$\begin{aligned} k(P_{e_k e_k} + P_{e_{k+1} e_{k+1}}) &= 2k\bar{P}_{ee} = \\ \sum_{i=1}^k (H_k - H_{k+1})(H_k - H_{k+1})^* &\Rightarrow \\ \bar{P}_{ee} &= \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^k P_{h_i - h_{i+1}} \end{aligned} \quad (6.208)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου στην είσοδο υπολογίζεται άμεσα μέσω της (6.208) από τις εξισώσεις παρατήρησης. Η συνάρτηση πυκνότητας που υπολογίζεται από την (6.208) περιγράφει τη μέση στατιστική συμπεριφορά του θορύβου στην είσοδο κατά τη χρονική περίοδο της μελέτης. Ένα μέσο πεδίο παρατηρήσεων, που χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο, οδηγεί στην εκτίμηση της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των παρατηρήσεων  $\bar{P}_{h_o h_o}$ .

Στην περίπτωση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των «καθαρών» σημάτων στην είσοδο είναι απαραίτητος ένας ειδικός υπολογισμός. Απλή αφαίρεση της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου από την αντίστοιχη συνάρτηση των παρατηρήσεων οδηγεί σε λανθασμένα αποτελέσματα, αφού, στις πρακτικές εφαρμογές, καμιά από τις παρακάτω παραδοχές δεν είναι αληθής:

$$\bar{P}_{h_o h_o} - \bar{P}_{ee} = P_{hh} + P_{he} + P_{eh}, \quad P_{he}, P_{eh} \neq 0 \quad (6.209)$$

Η εκτίμηση της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του «καθαρού» σήματος υπολογίζεται με κατάλληλη προσθετική διαδικασία της εξίσωσης (6.205) χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της (6.208):

$$\begin{aligned} H_i + H_{i+1} &= 2H + E_i + E_{i+1} \quad i = 1, \dots, k \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^k P_{h_i + h_{i+1}} &= 4k\bar{P}_{hh} + 2k\bar{P}_{ee} \Rightarrow \\ \bar{P}_{hh} &= \frac{1}{4k} \sum_{i=1}^k (P_{h_i + h_{i+1}} - P_{h_i - h_{i+1}}) \end{aligned} \quad (6.210)$$

Από τις (6.208) και (6.210) και το πεδίο των μέσων παρατηρήσεων στη χρονική περίοδο της μελέτης υπολογίζεται μία εκτίμηση της μέσης δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας στη συγκεκριμένη περίοδο. Οι αποκλίσεις από τη μέση θαλάσσια τοπογραφία απομακρύνονται εξαιτίας της εισαγωγής του χρονικά μεταβαλλόμενου μέρους στο θόρυβο, της χρήσης του πεδίου των μέσων παρατηρήσεων και της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των «καθαρών» σημάτων.

## 6.6 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύθηκε η θεωρία συνδυασμού ετερογενών δεδομένων, η οποία βασίζεται στη θεωρία των συστημάτων εισόδου-εξόδου. Παρουσιάστηκε το θεωρητικό υπόβαθρο και οι

βασικές συναρτήσεις περιγραφής των φασματικών ιδιοτήτων των δεδομένων. Αναλύθηκαν οι συναρτήσεις συντονισμού, οι οποίες εκφράζουν με τη γραμμικότητα των συστημάτων που χρησιμοποιούνται. Αναπτύχθηκε αρχικά η απλούστερη μορφή της θεωρίας, το σύστημα απλής εισόδου - απλής εξόδου χωρίς θόρυβο. Η παρουσία του θορύβου εισήγαγε την αναγκαιότητα εφαρμογής καταλλήλων κριτηρίων για την εκτίμηση της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας, δηλαδή της συνάρτησης σύνδεσης μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου. Η γενίκευση των συστημάτων κατέληξε στη ανάπτυξη των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου με θόρυβο, η οποία αναλύθηκε σε μητρική μορφή. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην ανάπτυξη των τελικών σχέσεων της εκτίμησης των αγνώστων, καθώς και της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων εκτίμησης σε μορφή πινάκων κατάλληλη για την εισαγωγή σε αλγορίθμους υπολογισμού. Για πρώτη φορά παρουσιάζονται στην παρούσα διατριβή οι σχέσεις συνδυασμού ετερογενών δεδομένων και οι ολοκληρωμένες εκτιμήσεις των συναρτήσεων περιγραφής των σφαλμάτων. Επιπλέον αναλύονται νέες τεχνικές προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων των αλτιμετρικών παρατηρήσεων, με τη χρήση των ιδιοτήτων της επαναλαμβανόμενης πληροφορίας.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν θεωρητικά οι σχέσεις συνδυασμού μετρήσεων του πεδίου βαρύτητας μέσα από παραδείγματα. Οι εφαρμογές των σχέσεων που παρουσιάστηκαν αναλύονται μέσα από αριθμητικές εφαρμογές προσομοίωσης και χρήσης πραγματικών δεδομένων στο κεφάλαιο που ακολουθεί.



# Βιβλιογραφία

- [1] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. A survey of gravity field modeling applications of the Input–Output System Theory (IOST). Accepted for publication to IGeS Bulletin, 1999.
- [2] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. Quasi-stationary Sea Surface Topography Estimation by the Multiple Input / Output Method. Submitted to Journal of Geodesy, 1999.
- [3] V. D. Andritsanos and I. N. Tziavos. Estimation of gravity field parameters by a multiple input/output system. *Physics and Chemistry of the Earth*, 25(1), pp. 39–46, 2000.
- [4] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1980.
- [5] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Random data - Analysis and measurements procedures*. 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [6] R.N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications, Second edition, revised*. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [7] P.J. Brockwell and R.A. Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer texts in Statistics. Springer, New York, 1996.
- [8] A. Dermanis. *Probabilistic and Deterministic Aspects of Linear Estimation in Geodesy*. PhD Dissertation, OSU Report no 244, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A., October 1976.
- [9] T. Engelis. Global Circulation for SEASAT Altimeter Data. *Marine Geodesy*, 9(1), pp. 45–69, 1985.
- [10] K. Eren. *Spectral Analysis of GEOS-3 Altimeter Data and Frequency Domain Collocation*. PhD Dissertation, OSU Report no 297, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A., February 1980.
- [11] S. Levitus. Climatological atlas of the world ocean. Professional Paper 13, NOAA, Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, 1982.
- [12] S. Levitus, R. Burgett and T. Boyer. World Ocean Atlas 1994. Vol 3: Salinity and Vol 4: Temperature, NOAA Atlas NESDIS 3-4, U.S. Department of Commerce, 1994.
- [13] J. Li. Detailed marine gravity field determination by combination of heterogeneous data. Msc Thesis, UCGE Report 20102, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, August 1996.
- [14] J. Li and M.G. Sideris. Marine gravity and geoid determination by optimal combination of satellite altimetry and shipborne gravimetry data. *Journal of Geodesy*, 71(1), 1996.

- [15] S.L. Marple Jr. *Digital spectral analysis with applications*. Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1987.
- [16] H. Moritz. *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, 2nd edition, Karlsruhe, 1989.
- [17] A.W. Naylor and G.R. Sell. *Linear Operator Theory in Engineering and Science*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [18] B. Noble and J.W. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1988.
- [19] A. Papoulis. *The Fourier Integral and its Applications*. Electronic Science Series. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [20] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [21] A. Papoulis. *Signal Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1977.
- [22] E. Parzen. *Time Series Analysis Papers*. Holden-Day Inc., San Francisco, 1967.
- [23] N. K. Pavlis and C. M. Cox and Y. M. Wang and F. G. Lemoine. Further analyses towards the introduction of ocean circulation model information into geopotential solutions. Presented at the 2nd Joint Meeting of the International Gravity Commission and the International Geoid Commission held in Trieste, September 1998. To appear in *Bollettino di Geofisica teorica ed applicata*, 1998.
- [24] R.V. Sailor. Signal processing techniques. In *Geoid and Its Geophysical Interpretations*, pp. 147–185. P. Vaníček and N.T. Christou, 1994.
- [25] F. Sansò and M.G. Sideris. On the similarities and differences between systems theory and least-squares collocation in physical geodesy. *Bollettino di Geodesia e scienze affini*, (2), pp. 174–206, 1997.
- [26] F. Sansò and G. Sona. The theory of optimal linear estimation for continuous fields of measurements. *Manuscripta Geodætica*, 20, pp. 204–230, 1995.
- [27] M.G. Sideris. Computation of gravimetric terrain corrections using fast Fourier transform techniques. Msc Thesis, UCSE Report 20007, Division of Surveying Engineering, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, March 1984.
- [28] M.G. Sideris. On the application of spectral techniques to the gravimetric problem. In *Proceedings of the IUGG XIX General Assembly*, Tome II, pp. 428–442, Vancouver, B.C., Canada, August 1987.
- [29] M.G. Sideris. On the use of heterogeneous noisy data in spectral gravity field modeling methods. *Journal of Geodesy*, 70, pp. 470–479, 1996.
- [30] I.N. Tziavos. Least squares collocation and systems theory - a comparison. In *The Earth and The Universe*. Volume dedicated to Professor Lyssimachos Mavridis on the occasion of his completing forty-five years of academic activities, Aristotle University of Thessaloniki, Ziti Editions, 1997.
- [31] I.N. Tziavos, R. Forsberg, M.G. Sideris and V.D. Andritsanos. A comparison of satellite altimetry methods for the recovery of gravity field quantities. In *Proceedings of the IAG Scientific Assembly "Geodesy on the Move, Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica"*, editors: R. Forsberg, M. Feissel and R. Dietrich, pp. 150–155, Rio de Janeiro, Brasil, September 3–9 1997.

- [32] I.N. Tziavos, J. Li and M.G. Sideris. A comparison of marine gravity field modeling methods using non-isotropic a-priori information. In *Proceedings of the IAG Symposium "Gravity, Geoid and Marine Geodesy"*, editors: J. Segawa, H. Fujimoto and S. Okubo, pp. 400–407, Tokyo, Japan, September 30 – October 5 1996.
- [33] I.N. Tziavos, M.G. Sideris and R. Forsberg. Combined satellite altimetry and shipborne gravimetry data processing. *Marine Geodesy*, 21, pp. 299–317, 1998.
- [34] I.N. Tziavos, M.G. Sideris and J. Li. Optimal spectral combination of satellite altimetry and marine gravity data. In *Proceedings of the XXI EGS General Assembly "Techniques for Local Geoid Determination"*, editors: I.N. Tziavos and M. Vermeer, pp. 41–56, The Hague, Netherlands, May, 6–10 1996.
- [35] L.A. Wainstein and V.D. Zubakov. *Extraction of Signals from Noise*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1962.
- [36] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology. John Wiley and Sons Inc., New York, 1950.
- [37] L. Wu. Spectral methods for post processing of airborne vector gravity data. Msc Thesis, UCGE Rep. 20103, Dept. of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Alberta, Canada, 1996.
- [38] L. Wu and M. G. Sideris. Using multiple input-single output system relationships in post processing of airborne gravity vector data. In *Proceedings of the symposium on airborne gravity field determination*, editors: H. Sünkel and I. Marson, pp. 87–94, 1995.
- [39] L. Wu and M. G. Sideris. Accuracy improvement of airborne vector gravimetry with and without noise PSDs. In *Proceedings of IAG Symposia no 117 "Gravity, Geoid and Marine Geodesy"*, editors: H. Fujimoto J. Segawa and S. Okubo, pp. 147–154, 1997.
- [40] L. Wu and M.G. Sideris. Using multiple input-single output system relationships in post processing of airborne gravity vector data. In *Proceedings of the IAG Symposium on Airborne Gravity Field Determination*, IUGG XXI General Assembly, pp. 87–94, Boulder, Colorado, U.S.A., August 1995.
- [41] Αθ. Δερμάνης. *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης – Τόμος 1*. Εκδόσεις Ζήτη, 1986.
- [42] Κ. Ε. Κατσάμπαλος και Η. Ν. Τζιαβός. *Φυσική Γεωδαισία*. Εκδόσεις Ζήτη, 1991.
- [43] Η. Ν. Τζιαβός. *Μελέτη του Βέλτιστου Συνδυασμού Ετερογενών Δεδομένων για τον Προσδιορισμό του γεωειδούς με Εφαρμογές στον Ελληνικό Χώρο*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του ΑΠΘ, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, 1984.



## Κεφάλαιο 7

# Εφαρμογές της θεωρίας συστημάτων στο βέλτιστο προσδιορισμό παραμέτρων του πεδίου βαρύτητας

### 7.1 Εισαγωγή

Η εφαρμογή των μεθόδων βέλτιστου συνδυασμού ετερογενών δεδομένων, καθώς επίσης και τροποποιήσεις στις υπάρχουσες διαδικασίες προσέγγισης συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας παρουσιάζονται μέσα από μελέτες προσομοίωσης δεδομένων και αναλύσεις πραγματικών μετρήσεων. Δίνεται έμφαση στο βέλτιστο συνδυασμό σε περιπτώσεις, τόσο θαλάσσιων, όσο και ηπειρωτικών περιοχών. Οι εφαρμογές στον Ελληνικό χώρο παρουσιάζουν την ιδιαιτερότητα της ταυτόχρονης παρουσίας ηπειρωτικών και θαλάσσιων εκτάσεων, κάτι που επισημαίνεται στις διαδικασίες προσέγγισης. Βαρυτημετρικά, αλτιμετρικά δεδομένα και μετρήσεις GPS συνδυάζονται βέλτιστα σε μετρήσεις προσομοίωσης, αλλά και σε πραγματικές εφαρμογές για τη φασματική ανάλυση και την προσέγγιση συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας.

### 7.2 Μελέτες προσομοίωσης

Ο έλεγχος των τεχνικών φασματικού συνδυασμού ετερογενών δεδομένων ελέγχεται καταρχήν με εφαρμογές προσομοίωσης. Στις εφαρμογές αυτές τα δεδομένα προσομοιώνουν την πραγματική φύση του πεδίου βαρύτητας. Με τον τρόπο αυτό, μελετάται η επίδραση του θορύβου στα δεδομένα, η ποιότητα των σημάτων εξόδου, η δυνατότητα συνδυασμού ηπειρωτικών και θαλάσσιων δεδομένων και η αποτελεσματικότητα των προτεινόμενων τεχνικών.

#### 7.2.1 Φιλτράρισμα σε παρατηρήσεις αποχών του γεωειδούς και ανωμαλιών της βαρύτητας

Στο παρόν πείραμα προσομοίωσης μελετάται η επίδραση της εισαγωγής του θορύβου στα σήματα εισόδου και η ικανότητα φιλτραρίσματος του θορύβου από ένα σύστημα πολλαπλού σήματος εισόδου - πολλαπλού σήματος εξόδου. Παρόμοια τεχνική για την περίπτωση δύο σημάτων εισόδου και δύο εξόδου ακολουθείται και από τους Tziavos et al. [40], [43], [39], [41], [42]. Ταυτόχρονα δοκιμάζονται διαφορετικοί τύποι κατανομών για τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών του θορύβου εισόδου. Προσεγγίζεται τέλος το σφάλμα προσδιορισμού του σήματος στην έξοδο.

Τα όρια της περιοχής προσομοίωσης είναι:  $45.05^\circ \leq \phi \leq 55.00^\circ$  και  $-55.00^\circ \leq \lambda \leq -45.10^\circ$  και τα σήματα εισόδου δίνονται σε κάρναβο διαστάσεων  $d\phi = 3'$  και  $d\lambda = 6'$ . Οι διαστάσεις των πεδίων είναι  $200 \times 100$ . Τα στατιστικά στοιχεία των σημάτων εισόδου παρουσιάζονται στον πίνακα 7.1. Στα σχήματα 7.1 και 7.2 παρουσιάζονται τα πεδία εισόδου.

Πίνακας 7.1: Στατιστικά των σημάτων εισόδου.

Τύπος σήματος	M	E	MT	MTΣ	TA
Αποχές γεωειδούς (m)	0.492	-2.058	-0.937	0.990	$\pm 0.320$
Ανωμαλίες βαρύτητας (mGal)	88.115	-54.968	-2.177	11.174	$\pm 10.960$

M - Μέγιστη τιμή

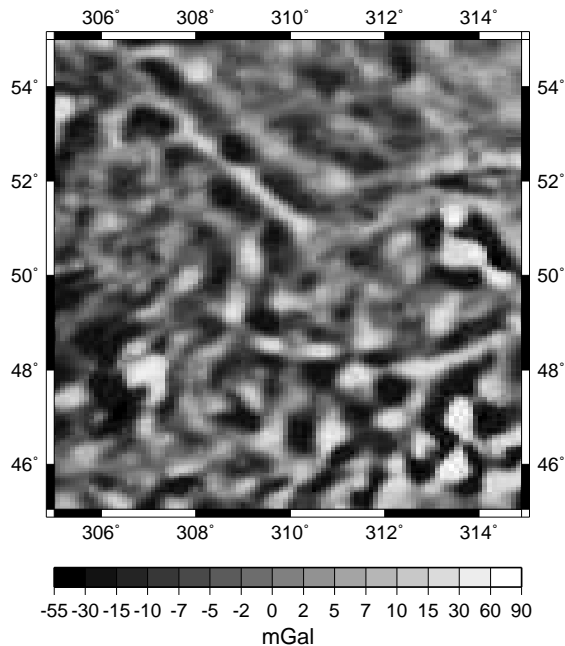
E - Ελάχιστη τιμή

MT - Μέση τιμή

MTΣ - Μέσο τετραγωνικό σφάλμα

TA - Τυπική απόκλιση

Τα δεδομένα των θορύβων εισόδου προσομοιώθηκαν χρησιμοποιώντας γεννήτρια τυχαίων

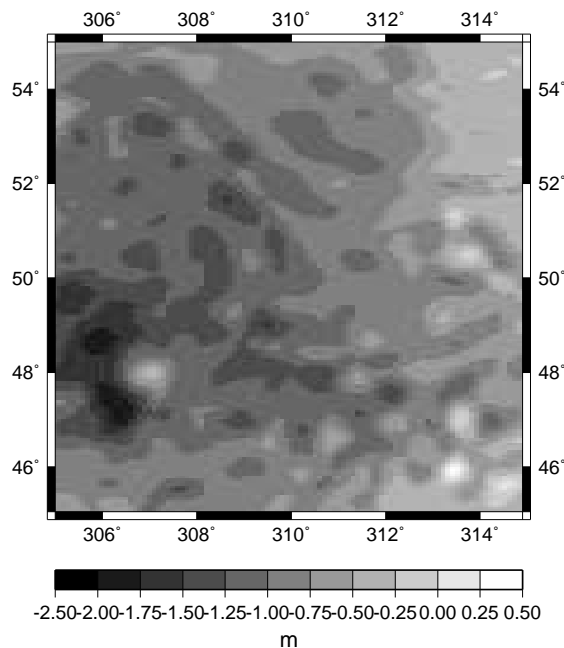


Σχήμα 7.1: Το πεδίο σημάτων εισόδου των ανωμαλιών της βαρύτητας.

αριθμών. Ακολούθησαν δύο είδη κατανομών: η κανονική κατανομή και η ομογενής κατανομή [49]. Τα πεδία των θορύβων δημιουργήθηκαν έτσι, ώστε να καλύπτουν τρία επίπεδα τυπικών αποκλίσεων. Δημιουργήθηκαν θόρυβοι τυπικής απόκλισης 3, 5 και 10 mGal για τα σήματα εισόδου των ανωμαλιών βαρύτητας και 3, 5 και 10 cm για τα σήματα εισόδου των αποχών γεωειδούς. Τα στατιστικά των παραγόμενων θορύβων, τόσο στην περίπτωση της κανονικής, όσο και στην περίπτωση ομογενούς κατανομής δίνονται στον πίνακα 7.2.

Το πεδίο του θορύβου στα σήματα των αποχών του γεωειδούς στην περίπτωση ομογενούς κατανομής και TA 3 cm, καθώς επίσης και το αντίστοιχο πεδίο για τις ανωμαλίες της βαρύτητας στην περίπτωση κανονικής κατανομής και TA 10 mGal δίνονται στα σχήματα 7.3 και 7.4, αντίστοιχα.

Σήματα και θόρυβοι εισάγονται στο σύστημα διπλής εισόδου - διπλής εξόδου που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 6. Οι θόρυβοι προστίθενται στα καθαρά σήματα στο χώρο των

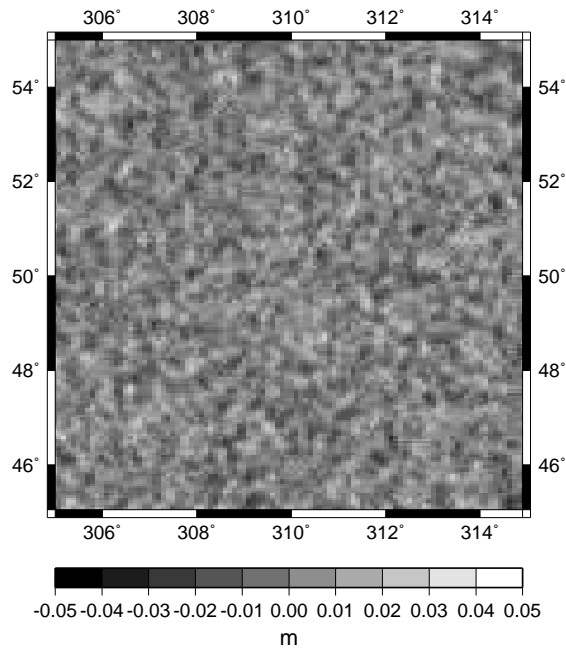


Σχήμα 7.2: Το πεδίο σημάτων εισόδου των αποχών του γεωειδούς.

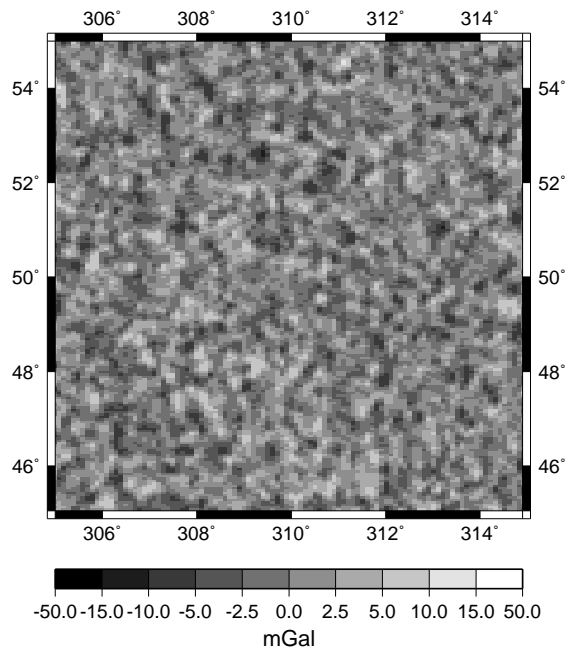
Πίνακας 7.2: Τα στατιστικά των θορύβων προσομοίωσης.

Κανονική κατανομή					
Τύπος σήματος	M	E	MT	MTΣ	TA
Θόρυβος στις αποχές (TA 0.03 m)	0.124	-0.103	0.000	0.030	±0.030
Θόρυβος στις αποχές (TA 0.05 m)	0.189	-0.183	0.000	0.050	±0.050
Θόρυβος στις αποχές (TA 0.10 m)	0.464	-0.386	-0.001	0.100	±0.100
Θόρυβος στις ανωμαλίες (TA 3 mGal)	22.144	-21.963	-0.026	5.023	±5.023
Θόρυβος στις ανωμαλίες (TA 5 mGal)	11.479	-11.700	-0.025	3.017	±3.017
Θόρυβος στις ανωμαλίες (TA 10 mGal)	44.289	-43.926	-0.060	10.046	±10.046
Ομογενής κατανομή					
Τύπος σήματος	M	E	MT	MTΣ	TA
Θόρυβος στις αποχές (TA 0.03 m)	0.052	-0.052	0.000	0.030	±0.030
Θόρυβος στις αποχές (TA 0.05 m)	0.085	-0.085	0.001	0.049	±0.049
Θόρυβος στις αποχές (TA 0.10 m)	0.170	-0.170	-0.001	0.099	±0.099
Θόρυβος στις ανωμαλίες (TA 3 mGal)	5.190	-5.189	-0.004	3.004	±3.004
Θόρυβος στις ανωμαλίες (TA 5 mGal)	8.650	-8.650	0.057	4.994	±4.994
Θόρυβος στις ανωμαλίες (TA 10 mGal)	17.298	-17.294	-0.023	10.001	±10.001

συχνοτήτων και οι δημιουργούμενες παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση της βέλτιστης συνάρτησης απόκρισης συχνότητας. Ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των δεδομένων υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την απευθείας μέθοδο υπολογισμού (periodogram) και τις δημιουργούμενες παρατηρήσεις, ενώ ο πίνακας των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τα καθαρά σήματα. Στην περίπτωση εφαρμογών με πραγματικά δεδομένα, όπου τα καθαρά σήματα είναι άγνωστα, χρησιμοποιούνται, όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 6, οι θεωρητικές σχέσεις σύνδεσης μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου. Οι τελικές εκτιμήσεις των σημάτων εξόδου προκύπτουν ύστερα από το φιλτράρισμα των παρατηρήσεων μέσω των βέλτιστων συναρτήσεων σύνδεσης. Οι διαφορές των εκτιμήσεων των σημάτων εξόδου από τα



Σχήμα 7.3: Ο θόρυβος στις αποχές του γεωειδούς (ομογενής κατανομή, ΤΑ 3 cm).



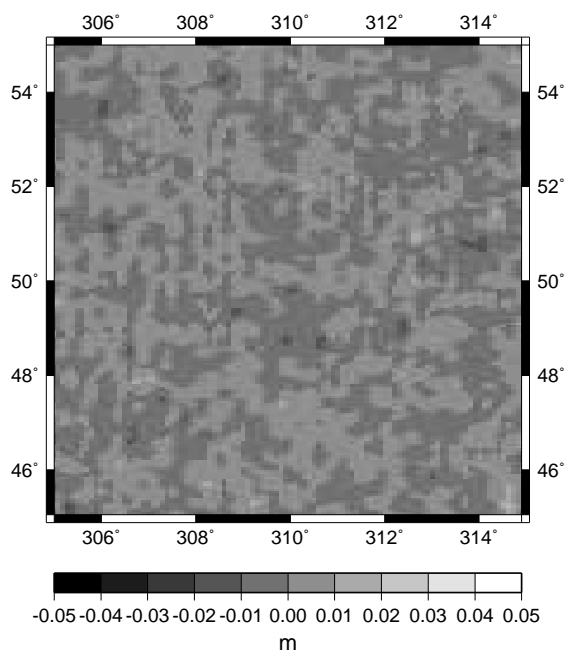
Σχήμα 7.4: Ο θόρυβος στις ανωμαλίες της βαρύτητας (κανονική κατανομή, ΤΑ 10 mGal).

σήματα εισόδου, οι οποίες στη συγκεκριμένη περίπτωση προσομοίωσης αντιπροσωπεύουν και το εσωτερικό σφάλμα προσδιορισμού της μεθόδου, δίνονται στον πίνακα 7.3. Στο σχήμα 7.5 παρουσιάζονται το σφάλμα στην εκτίμηση των αποχών του γεωειδούς για επίπεδα θορύβων των δεδομένων εισόδου 0.03 m για τις αποχές και 3 mGal για τις ανωμαλίες. Ο θόρυβος και στα δύο δεδομένα εισόδου ακολουθεί την ομογενή κατανομή. Στο σχήμα 7.6 παρουσιάζεται το σφάλμα στην εκτίμηση των ανωμαλιών της βαρύτητας για επίπεδα θορύβων των δεδομένων εισόδου 0.10 m για τις αποχές και 10 mGal για τις ανωμαλίες. Ο θόρυβος των δύο δεδομένων

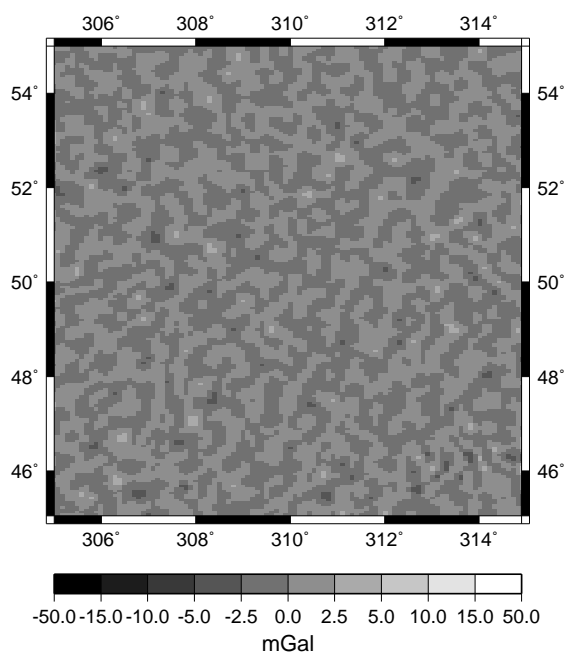
Πίνακας 7.3: Οι διαφορές των εκτιμήσεων από τα σήματα εισόδου.

<b>Αποχές του γεωειδούς (m) – Κανονική κατανομή</b>					
TA θορύβων	M	E	MT	MTΣ	TA
0.03 m και 3 mGal	0.028	-0.052	0.000	0.007	±0.007
0.03 m και 5 mGal	0.034	-0.063	0.000	0.009	±0.009
0.03 m και 10 mGal	0.043	-0.071	0.000	0.010	±0.010
0.10 m και 3 mGal	0.047	-0.059	0.000	0.012	±0.012
0.10 m και 5 mGal	0.064	-0.079	0.000	0.015	±0.015
0.10 m και 10 mGal	0.079	-0.094	-0.001	0.019 ±	0.019
<b>Αποχές του γεωειδούς (m) – Ομογενής κατανομή</b>					
TA θορύβων	M	E	MT	MTΣ	TA
0.03 m και 3 mGal	0.032	-0.052	0.000	0.007	±0.007
0.03 m και 5 mGal	0.033	-0.061	0.000	0.009	±0.009
0.03 m και 10 mGal	0.047	-0.069	0.000	0.010	±0.010
0.10 m και 3 mGal	0.046	-0.072	0.001	0.012	±0.012
0.10 m και 5 mGal	0.058	-0.087	0.000	0.015	±0.015
0.10 m και 10 mGal	0.074	-0.120	0.000	0.019	±0.019
<b>Ανωμαλίες της βαρύτητας (mGal) – Κανονική κατανομή</b>					
TA θορύβων	M	E	MT	MTΣ	TA
0.03 m και 3 mGal	6.543	-7.080	-0.001	1.174	±1.174
0.03 m και 5 mGal	8.157	-8.859	-0.001	1.397	±1.397
0.03 m και 10 mGal	10.552	-11.828	0.000	1.666 ±	1.666
0.10 m και 3 mGal	8.509	-8.708	-0.002	1.418	±1.418
0.10 m και 5 mGal	10.249	-11.470	-0.002	1.804	±1.804
0.10 m και 10 mGal	14.996	-16.301	-0.002	2.311	±2.311
<b>Ανωμαλίες της βαρύτητας (mGal) – Ομογενής κατανομή</b>					
TA θορύβων	M	E	MT	MTΣ	TA
0.03 m και 3 mGal	7.428	-6.866	0.001	1.174	±1.174
0.03 m και 5 mGal	10.261	-9.196	0.001	1.416	±1.416
0.03 m και 10 mGal	11.261	-11.453	0.002	1.690	±1.690
0.10 m και 3 mGal	7.771	-8.950	0.000	1.427	±1.427
0.10 m και 5 mGal	13.030	-12.317	0.000	1.814	±1.814
0.10 m και 10 mGal	17.151	-18.258	0.002	2.355	±2.355

εισόδου ακολουθεί την κανονική κατανομή. Όπως φαίνεται από τη μελέτη των πινάκων και των σχημάτων, το σφάλμα στην έξοδο παρουσιάζει μικρότερες τιμές από το θόρυβο στην είσοδο. Με τη μέθοδο της προσομοίωσης που παρουσιάστηκε μελετήθηκε η ευαισθησία της μεθόδου στους θορύβους εισόδου. Όπως φαίνεται η εισαγωγή του θορύβου στις παρατηρήσεις επηρεάζει τα σήματα στην έξοδο. Το φιλτράρισμα που επιτυγχάνεται με την απομάκρυνση του θορύβου δεν οδηγεί στην πλήρη ανακατασκευή των σημάτων εισόδου. Παρόλα αυτά, το σφάλμα στην έξοδο είναι 2–3 φορές μικρότερο στο μέγεθος από το θόρυβο εισόδου στα σήματα των ανωμαλιών της βαρύτητας και 5–10 φορές μικρότερο στα σήματα του γεωειδούς [4]. Αυτό σημαίνει ότι η πλειονότητα του θορύβου στα σήματα εισόδου φιλτράρεται και μόνο ένα μικρό ποσοστό αυτού μεταδίδεται στα αποτελέσματα της μεθόδου. Αυτό είναι και ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα της μεθόδου των συστημάτων. Η διαφορά στην ανακατασκευή των σημάτων σχετίζεται με τη μορφή των ίδιων των σημάτων εισόδου. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα 7.1, τα σήματα των αποχών του γεωειδούς παρουσιάζουν μέση τιμή κοντά στο μηδέν, κάτι που οδηγεί σε ορθότερο υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος [9]. Για το λόγο αυτό προτείνεται η απομάκρυνση της μέσης τιμής των δεδομένων και η επαναφορά της στον υπολογισμό της συναρτησης πυκνότητας φάσματος ως τιμής αναφοράς (DC value). Τονίζεται

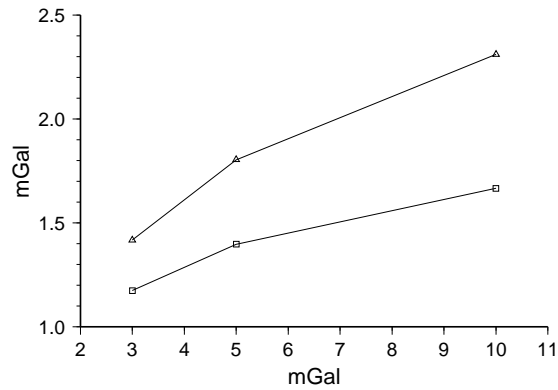


Σχήμα 7.5: Τα σφάλματα εκτίμησης των αποχών του γεωειδούς.

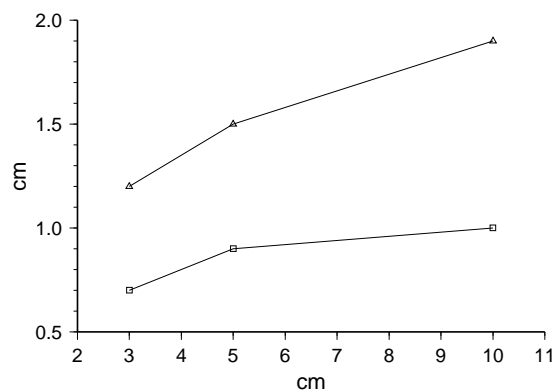


Σχήμα 7.6: Τα σφάλματα εκτίμησης των ανωμαλιών της βαρύτητας.

ακόμη ότι, λόγω της θεωρητικής μορφής της μεθόδου (βλ. κεφάλαιο 6), και τα δύο σήματα είναι δυνατό να ανακατασκευαστούν πλήρως στην περίπτωση εισαγωγής ενός μόνο θορύβου. Η δυνατότητα της μεθόδου στο αποτελεσματικό φιλτράρισμα παρατηρήσεων επηρεασμένων από εξωτερικό θόρυβο παρουσιάζεται στα σχήματα 7.7 και 7.8. Πρέπει να σημειωθεί τέλος ότι η επίδραση της κατανομής των θορύβων στην είσοδο ελάχιστα επηρεάζει τα αποτελέσματα στην έξοδο. Το γεγονός αυτό φαίνεται καθαρά από τα αποτελέσματα του πίνακα 7.3.



Σχήμα 7.7: Σύγκριση θορύβων εισόδου και σφαλμάτων εξόδου στα σήματα των ανωμαλιών βαρύτητας. Κανονική κατανομή των θορύβων. □: ΤΑ θορύβου αποχών εισόδου 3 cm. Δ: ΤΑ θορύβου αποχών εισόδου 10 cm.



Σχήμα 7.8: Σύγκριση θορύβων εισόδου και σφαλμάτων εξόδου στα σήματα των αποχών γεωειδούς. Ομογενής κατανομή των θορύβων. □: ΤΑ θορύβου ανωμαλιών εισόδου 3 mGal. Δ: ΤΑ θορύβου αποχών εισόδου 10 mGal.

### 7.2.2 Μελέτη των συναρτήσεων μεταβλητότητας των σφαλμάτων στη διαδικασία προσέγγισης του γεωειδούς

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα προσομοίωσης μελετάται η επίδραση του θορύβου εισόδου στον προσδιορισμό της εκτίμησης του σήματος στην έξοδο και της συνάρτησης μεταβλητότητας των

σφαλμάτων. Χρησιμοποιείται το πεδίο εισόδου των ανωμαλιών ελεύθερου αέρα σε συνδυασμό με τα τρία επίπεδα του θορύβου που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Λόγω της αμελητέας επίδρασης της μορφής της κατανομής των προσομοιωμένων θορύβων, επιλέχθηκαν τα πεδία θορύβων του προηγούμενου παραδείγματος που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Οι ανωμαλίες της βαρύτητας εισήχθησαν στο σύστημα και προέκυψαν οι εκτιμήσεις του σήματος των αποχών του γεωειδούς  $\dot{N}_o$ , όπως επίσης και οι εκτιμήσεις της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος  $P_{\epsilon\epsilon}$  των σφαλμάτων της εκτίμησης. Ιδιαίτερη αναφορά δίνεται στην συνάρτηση  $H_{N\Delta g}$ , η οποία συνδέει θεωρητικά τα σήματα ανωμαλιών βαρύτητας και αποχών του γεωειδούς, είναι δηλαδή ο τελεστής του Stokes στο χώρο των συχνοτήτων. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε η επίπεδη προσέγγιση του τελεστή του Stokes, η οποία παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 2 (εξίσωση 2.131). Τονίζεται ότι στη θέση της συνάρτησης  $H_{N\Delta g}$  είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί ο τελεστής του Stokes σε διδιάστατη, όπως επίσης και σε μονοδιάστατη σφαιρική προσέγγιση. Οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις αποτελούν τις ακριβέστερες προσεγγίσεις στο φασματικό προσδιορισμό του γεωειδούς, αφού εξαλείφουν κάθε είδους σφάλματα, τα οποία οφείλονται στις επίπεδες παραδοχές. Οι εκτιμήσεις των αποχών του γεωειδούς παρουσιάζονται στον πίνακα 7.4. Από τις προσδιοριστέες τιμές της

Πίνακας 7.4: Οι εκτιμήσεις των αποχών του γεωειδούς ανάλογα με το θόρυβο στις ανωμαλίες εισόδου (τιμές σε m).

TA θορύβου εισόδου	M	E	MT	MTΣ	TA
3 mGal	0.496	-2.076	-0.952	1.006	$\pm 0.324$
5 mGal	0.458	-2.107	-0.950	1.002	$\pm 0.319$
10 mGal	0.410	-2.109	-0.963	1.013	$\pm 0.316$

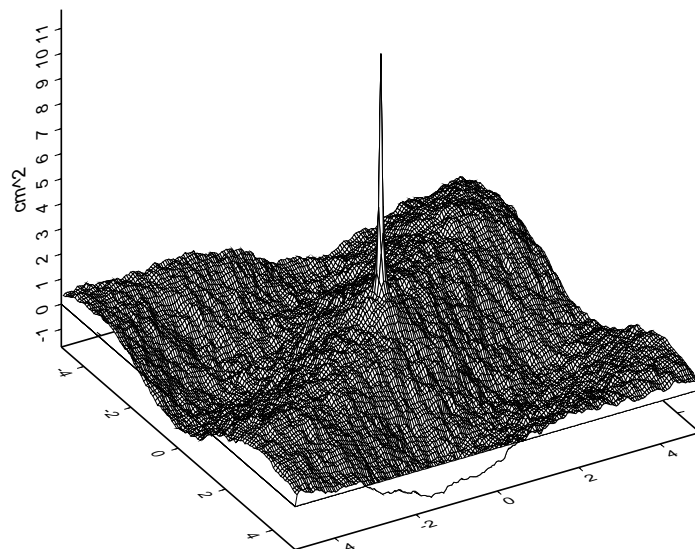
συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων στην έξοδο είναι δυνατό να προσεγγιστεί η συνάρτηση μεταβλητότητας των σφαλμάτων ακολουθώντας την αντίστροφη έμμεση μέθοδο που περιγράφεται στο κεφάλαιο 2 (inverse correlogram). Οι διδιάστατες συναρτήσεις μεταβλητότητας των σφαλμάτων που προκύπτουν απεικονίζονται στα σχήματα 7.9 και 7.10.

Οι συντεταγμένες στους οριζόντιους άξονες αντιστοιχούν στις σφαιρικές αποστάσεις σε μοίρες από κάθε σημείο υπολογισμού. Όπως φαίνεται από τα σχήματα η συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος στον προσδιορισμό των αποχών του γεωειδούς προσεγγίζει την εκθετική μορφή και το μήκος συσχέτισής της είναι πολύ μικρό. Η μορφή αυτή είναι δικαιολογημένη, αφού τα σφάλματα στις ανωμαλίες της βαρύτητας προσομοιώθηκαν από ένα πεδίο σημάτων, το οποίο ακολουθεί την κανονική κατανομή και η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του αντιπροσωπεύει μια μοναδιαία συνάρτηση Dirac. Στην περίπτωση γνωστής συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων στις ανωμαλίες βαρύτητας, η μορφή της συνάρτησης μεταβλητότητας σφάλματος των αποχών του γεωειδούς θα ήταν διαφορετική. Στον πίνακα 7.5 παρουσιάζονται οι μεταβλητότητες των σφαλμάτων εξόδου σε σύγκριση με τις μεταβλητότητες των σφαλμάτων εισόδου. Η συνάρτηση μεταβλητότητας των σφαλμάτων των αποχών του

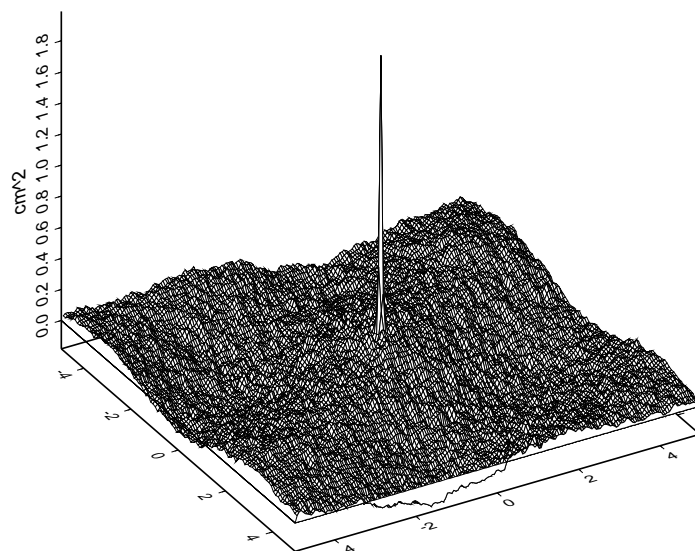
Πίνακας 7.5: Οι μεταβλητότητες των σφαλμάτων των ανωμαλιών βαρύτητας και των αποχών του γεωειδούς.

Ανωμαλίες της βαρύτητας (mGal <sup>2</sup> )	Αποχές του γεωειδούς (cm <sup>2</sup> )
9	0.56
25	1.99
100	11.75

γεωειδούς είναι μηδενική στην περίπτωση ανυπαρξίας θορύβου στις ανωμαλίες βαρύτητας. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή η βέλτιστη συνάρτηση απόκρισης παλμού μεταξύ του σήματος εισόδου και εξόδου ταυτίζεται με τη θεωρητική συνάρτηση σύνδεσης, δηλαδή με τη συνάρτηση Stokes



Σχήμα 7.9: Η συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος προσδιορισμού των αποχών του γεωειδούς (τιμές σε  $\text{cm}^2$ ). Τα θορύβου ανωμαλιών της βαρύτητας 10 mGal.



Σχήμα 7.10: Η συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος προσδιορισμού των αποχών του γεωειδούς (τιμές σε  $\text{cm}^2$ ). Τα θορύβου ανωμαλιών της βαρύτητας 5 mGal.

στο χώρο των συχνοτήτων.

### 7.2.3 Προσέγγιση συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου – Επίδραση της μέσης τιμής και της χρήσης γεωδυναμικών μοντέλων διαφορετικής διακριτικής ικανότητας

Στην παρούσα εφαρμογή μελετώνται οι επιδράσεις της τεχνικής προσέγγισης των σφαλμάτων προσέγγισης των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την βέλτιστη εκτίμηση των συναρτήσεων σύνδεσης των σημάτων εισόδου και εξόδου. Εξετάζεται ακόμα και η επίδραση της χρήσης γεωδυναμικών μοντέλων διαφορετικής διακριτικής ικανότητας στην εκτίμηση του σήματος εξόδου. Ακολουθείται το μοντέλο εισόδου-εξόδου, όπου δεδομένα ανωμαλιών της βαρύτητας χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των συνιστωσών απόκλισης της κατακορύφου (βλ. ενότητα 6.4.7, παράδειγμα 3). Οι αποκλίσεις της κατακορύφου επιλέχθηκαν ως σήματα εξόδου, λόγω της ευαισθησίας τους στις μεταβολές υψηλών συχνοτήτων. Οι διαφορές στον υπολογισμό των συνιστωσών απόκλισης της κατακορύφου εντοπίζονται στη χρήση των γεωδυναμικών μοντέλων διαφορετικής διακριτικής ικανότητας.

Η περιοχή μελέτης έχει όρια  $40^{\circ}.25 \leq \phi \leq 41^{\circ}$  και  $22^{\circ}.45 \leq \lambda \leq 24^{\circ}$  και επιλέχθηκε λόγω των έντονων διακυμάνσεων στις τιμές των ανωμαλιών βαρύτητας. Η περιοχή χαρακτηρίζεται από τις παρυφές του ορεινού όγκου του Ολύμπου. Τα δεδομένα εισόδου είναι 408 σημειακές τιμές ανωμαλιών ελευθέρου αέρα, οι οποίες προέρχονται από το ψηφιακό αρχείο της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (Γ.Υ.Σ.). Από τις αρχικές τιμές απομακρύνθηκε η συνεισφορά των γεωδυναμικών μοντέλων. Χρησιμοποιήθηκαν το παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο Earth Gravity Models 1996 – EGM96 [22], του οποίου οι συντελεστές φτάνουν το βαθμό και τάξη 360 και το παγκόσμιο μοντέλο Global Geopotential Model 1998 – GPM98 [44], του οποίου οι συντελεστές φτάνουν το βαθμό και τάξη 1800. Τα στατιστικά στοιχεία των σημειακών ανωμαλιών της βαρύτητας, όπως επίσης και των ανηγμένων σημειακών τιμών παρουσιάζονται στον πίνακα 7.6. Από τα αποτελέσματα του πίνακα 7.6 διακρίνεται η εξομάλυνση του πεδίου

Πίνακας 7.6: Οι σημειακές τιμές των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα και οι ανηγμένες τιμές τους στα γεωδυναμικά μοντέλα (mGal).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g$	153.466	-9.685	57.854	66.701	$\pm 33.196$
$\Delta g - \Delta g_{EGM96}$	96.360	-50.240	13.178	32.984	$\pm 30.237$
$\Delta g - \Delta g_{GPM98}$	72.212	-60.527	11.460	19.954	$\pm 16.334$

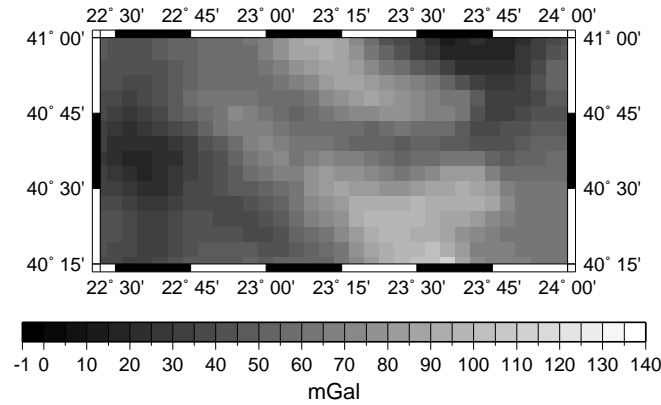
μετά την απομάκρυνση των τιμών του γεωδυναμικού μοντέλου. Ειδικότερα διαφαίνεται η ομαλοποίηση του πεδίου με τη χρήση γεωδυναμικού μοντέλου πολύ υψηλής ανάλυσης. Το γεγονός αυτό αποτελεί και την αρχή της μεθόδου της απομάκρυνσης-επαναφοράς που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Από τη συνολική διαδικασία παραλείπεται η απομάκρυνση των πολύ υψηλών συχνοτήτων μέσω των τοπογραφικών διορθώσεων. Ακολούθησε η πρόγνωση των δεδομένων σε πλέγμα. Επιλέχθηκε βήμα καννάβου ίσο με  $3' \times 3'$  και οι διαστάσεις του αρχείου δεδομένων που προέκυψε στις διευθύνσεις Βορρά-Νότου και Ανατολής-Δύσης είναι  $16 \times 32$ . Τα στατιστικά των σημάτων εισόδου δίνονται στον πίνακα 7.7. Τα αρχικά σήματα εισόδου και οι

Πίνακας 7.7: Στατιστικά των σημάτων εισόδου του πλέγματος (mGal).

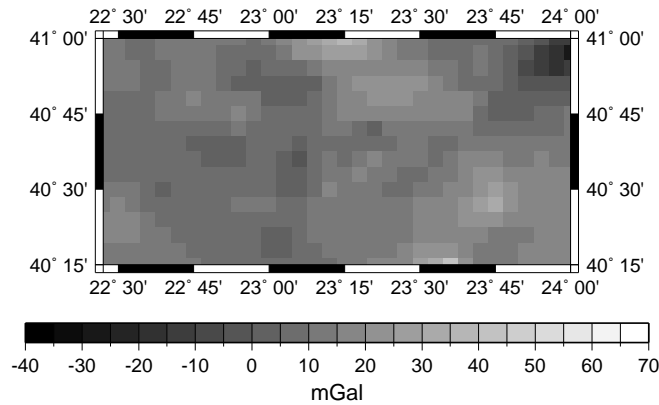
	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g - \Delta g_{EGM96}$	84.989	-42.046	11.843	21.649	$\pm 18.122$
$\Delta g - \Delta g_{GPM98}$	66.875	-39.800	11.320	14.152	$\pm 8.493$

ανηγμένες στο GPM98 ανωμαλίες ελευθέρου αέρα παρουσιάζονται στα σχήματα 7.11 και 7.12.

Στα σχήματα αυτά παρουσιάζεται η ομαλοποίηση των τιμών του πεδίου των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα μετά την αφαίρεση των τιμών ενός γεωδυναμικού μοντέλου υψηλής ανάλυσης.



Σχήμα 7.11: Οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα στην περιοχή μελέτης.



Σχήμα 7.12: Το πεδίο των ανηγμένων στο παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο GPM ανωμαλιών ελευθέρου αέρα.

Τα μεγάλα μήκη κύματος των τιμών έχουν απομακρυνθεί.

Εξετάστηκε καταρχήν η επίδραση της μέσης τιμής του πεδίου εισόδου στον υπολογισμό της συνάρτησης μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας την αντίστροφη μέθοδο υπολογισμού (inverse correlogram). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή για την προσέγγιση της συνάρτησης μεταβλητότητας από τη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος είναι απαραίτητη η αναφορά των δεδομένων στη μέση τιμή. Για τον έλεγχο της επίδρασης στον υπολογισμό της συνάρτησης

μεταβλητότητας αφαιρέθηκε η μέση τιμή από τα δεδομένα. Τα στατιστικά των ανηγμένων πεδίων που προέκυψαν δίνονται στον πίνακα 7.8. Προσεγγίστηκαν καταρχήν οι συναρτήσεις

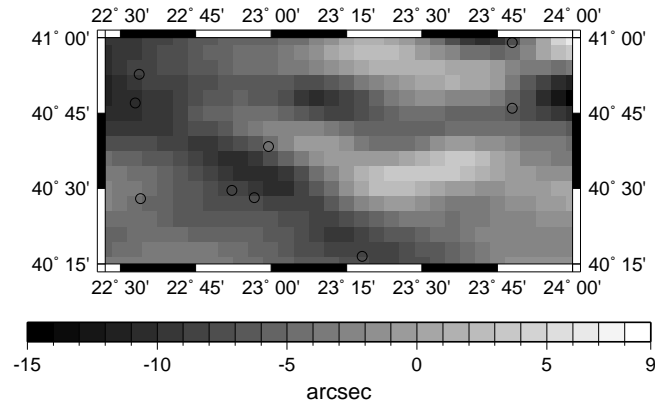
Πίνακας 7.8: Τα κεντρωμένα πεδία των ανηγμένων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα mGal.

	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g - \Delta g_{EGM96}$	73.146	-53.889	0.000	18.122	18.122
$\Delta g - \Delta g_{GPM98}$	55.555	-51.120	0.000	8.493	8.493

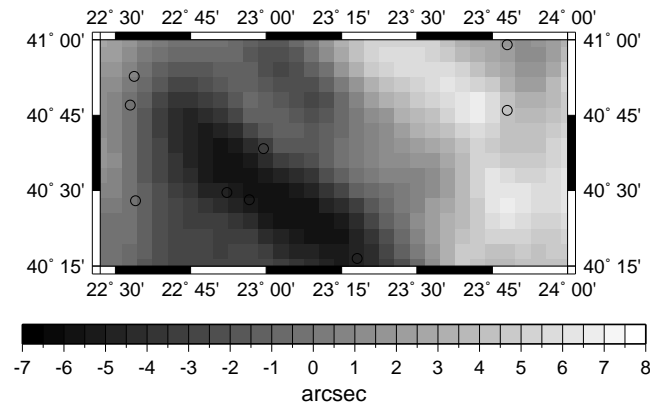
μεταβλητότητας σφάλματος, τόσο στην περίπτωση των αρχικών ανηγμένων δεδομένων, όσο και στην περίπτωση των κεντρωμένων (ανηγμένων στη μέση τιμή) τιμών χρησιμοποιώντας την αντίστροφη έμμεση μέθοδο προσδιορισμού. Στην περίπτωση υπολογισμού με τις κεντρωμένες τιμές, η μέση τιμή των ανωμαλιών εισήχθη μετά την προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος ως μια σταθερά (DC value). Η διαφορά στον υπολογισμό της μεταβλητότητας της συνάρτησης κυμαίνεται στα  $0.4547 \cdot 10^{-11}$  mGal<sup>2</sup> στην περίπτωση χρησιμοποίησης των ανηγμένων στο EGM96 δεδομένων και  $0.284 \cdot 10^{-12}$  mGal<sup>2</sup> στην περίπτωση υπολογισμού από τις ανηγμένες στο GPM98. Όπως είναι φανερό, η διαφορά στο υπολογισμό είναι ελάχιστη και χαρακτηρίζεται ως αμελητέα. Αυτό συμβαίνει, γιατί οι τιμές που χρησιμοποιούνται στη μελέτη του πεδίου βαρύτητας σπάνια ξεπερνούν τις μερικές εκατοντάδες, ενώ συνήθως είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Επιπλέον παρατηρείται, όπως είναι και αναμενόμενο, ότι το σφάλμα στον υπολογισμό της μεταβλητότητας της συνάρτησης είναι μικρότερο στην περίπτωση της χρησιμοποίησης του μοντέλου υψηλής ανάπτυξης GPM98. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο, αφού τα μοντέλα υψηλής ανάπτυξης οδηγούν σε μεγαλύτερη ομαλοποίηση το αρχικό πεδίο των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα. Η μέση τιμή των ανηγμένων στο GPM98 ανωμαλιών προσεγγίζει περισσότερο τη μηδενική τιμή και η TA των τιμών είναι βελτιωμένη σε σχέση με τα ανηγμένα στο EGM96 δεδομένα. Η υψηλή ανάπτυξη του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου, σε συνδυασμό με τις απαραίτητες τοπογραφικές αναγωγές και διορθώσεις, ελαχιστοποιούν τα σφάλματα από την εμφάνιση της μέσης τιμής στα δεδομένα εισόδου. Για το λόγο αυτόν, προτείνεται η τεχνική απομάκρυνσης-επαναφοράς στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται οι αλγόριθμοι βέλτιστου συνδυασμού ετερογενών δεδομένων της θεωρίας των συστημάτων.

Στη συνέχεια υπολογίστηκαν οι προσεγγίσεις των συνιστωσών αποκλίσεων της κατακορύφου και οι συναρτήσεις μεταβλητότητας και συμμεταβλητότητας των σφαλμάτων στην έξοδο. Το σύστημα που χρησιμοποιήθηκε έχει τη μορφή του σχήματος 6.15. Για το θόρυβο εισόδου κατασκευάστηκε πεδίο βασισμένο σε γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Τα σήματα του θορύβου ακολουθούν την κανονική κατανομή και η τυπική τους απόκλιση προσεγγίζει τα 5 mGal. Στη συνάρτηση πυκνότητας φάσματος των καθαρών σημάτων προστίθεται η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος των θορύβων, έτσι ώστε να προκύψει η συνολική συνάρτηση πυκνότητας φάσματος  $P_{y_o, y_o}$ , θεωρώντας, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 6, τα σήματα ασυσχέτιστα με τους θορύβους στην είσοδο. Ως σήματα εισόδου χρησιμοποιήθηκαν οι «μη κεντρωμένες» τιμές των ανηγμένων δεδομένων των ανωμαλιών της βαρύτητας.

Στην έξοδο προσεγγίστηκαν οι συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου κατά μεσημβρινό και κατά παράλληλο ( $\xi$  και  $\eta$ ), καθώς επίσης και οι συναρτήσεις μεταβλητότητας των σημάτων στην έξοδο και συμμεταβλητότητας των σημάτων μεταξύ τους. Οι μεσημβρινές συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου στην περίπτωση χρησιμοποίησης του GPM98 και οι συνιστώσες κατά παράλληλο στην περίπτωση χρήσης του EGM96 παρουσιάζονται στα σχήματα 7.13 και 7.14, αντίστοιχα. Οι εκτιμήσεις των συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου συγκρίθηκαν με τις παρατηρήσεις αστρογεωδαιτικών μετρήσεων, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής [50]. Οι 9 σταθμοί των αποκλίσεων της κατακορύφου που βρίσκονται στα όρια της περιοχής μελέτης παρουσιάζονται στα σχήματα 7.13 και 7.14. Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων παρουσιάζονται στον πίνακα 7.9. Στον πίνακα παρουσιάζονται οι απευθείας συγκρίσεις των τιμών στις συντεταγμένες των σταθμών παρατηρήσεις, όπως επίσης και οι συγκρίσεις μετά το μετασχηματισμό με τη βοήθεια ενός παραμετρικού μοντέλου 4 παραμέτρων. Οι τιμές που παρουσιάζονται μέσα σε παρένθεση απο-



Σχήμα 7.13: Οι μεσημβρινές συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο GPM98 (arcsec).



Σχήμα 7.14: Οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου κατά παράλληλο με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο EGM96 (arcsec).

τελούν τις συγκρίσεις στους αστρογεωδαιτικούς σταθμούς, όταν χρησιμοποιηθούν μόνον οι τιμές των παγκόσμιων μοντέλων. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα του πίνακα 7.9, η χρήση μοντέλων υψηλής ανάπτυξης βελτιώνει αισθητά τα αποτελέσματα. Τονίζεται ότι οι συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου συγκεντρώνουν την πυκνότητα του φάσματός τους στις υψηλές συχνότητες, λόγω της μορφής της συνάρτησης Vening-Meinesz [32]. Η ευαι-

Πίνακας 7.9: Οι συγκρίσεις στα σημεία αστρογεωδαιτικών παρατηρήσεων (τιμές σε arcsec).

Πριν το μετασχ.	M	E	MT	TA
$\xi_a - \xi_{GPM98}$	2.987(2.592)	-3.376(-3.361)	-0.726(-0.848)	$\pm 2.049(\pm 2.155)$
$\xi_a - \xi_{EGM96}$	2.826(2.614)	-9.787(-8.290)	-5.302(-4.152)	$\pm 3.712(\pm 3.188)$
$\eta_a - \eta_{GPM98}$	3.357(3.102)	-2.867(-3.335)	1.024(0.875)	$\pm 1.707(\pm 2.022)$
$\eta_a - \eta_{EGM96}$	5.539(4.823)	-3.693(-5.266)	0.212(-1.430)	$\pm 2.713(\pm 3.244)$
Μετά το μετασχ.	M	E	MT	TA
$\xi_a - \xi_{GPM98}$	2.203(1.951)	-1.322(-1.253)	0.000(0.000)	$\pm 1.216(\pm 0.917)$
$\xi_a - \xi_{EGM96}$	3.662(2.071)	-3.304(-2.706)	0.000(0.000)	$\pm 2.483(\pm 1.533)$
$\eta_a - \eta_{GPM98}$	1.085(1.229)	-1.076(-1.345)	0.000(0.000)	$\pm 0.779(\pm 0.919)$
$\eta_a - \eta_{EGM96}$	3.075(4.269)	-2.754(-3.883)	0.000(0.000)	$\pm 1.806(\pm 2.635)$

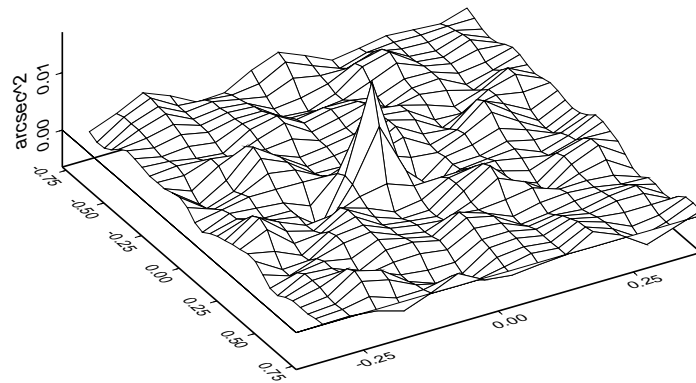
σθησία των βαρυτημετρικών αποκλίσεων της κατακορύφου αποτυπώνεται στη μεγάλη ποσοστιαία βελτίωση των διαφορών στους αστρογεωδαιτικούς σταθμούς σύγκρισης. Κατά κανόνα η χρήση των σημάτων εξόδου του πολλαπλού συστήματος σε συνδυασμό με τις τιμές των γεωδυναμικών μοντέλων συνεισφέρει στη βελτίωση των αποτελεσμάτων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υπάρχουν περιπτώσεις, όπου η χρήση ενός γεωδυναμικού μοντέλου μόνο δείχνει να παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα από την επαναφορά των μεσαίων συχνοτήτων μέσω της εξόδου του συστήματος (βλ. τιμές της TA μέσα στις παρενθέσεις στα ξ). Η φαινομενική αυτή βελτίωση είναι δυνατό να αποδοθεί στην ανυπαρξία υπολογισμών των τοπογραφικών διορθώσεων. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2, οι τοπογραφικές διορθώσεις συμπληρώνουν το φάσμα του πεδίου βαρύτητας στις υψηλές συχνότητες. Η παράλειψη υπολογισμού τους, ειδικότερα στην περίπτωση των αποκλίσεων της κατακορύφου είναι δυνατό να οδηγήσει σε λανθασμένα αποτελέσματα. Στη συγκεκριμένη μελέτη προσομοίωσης ο υπολογισμός των τοπογραφικών διορθώσεων παραλείπεται, γιατί η εφαρμογή εξετάζει τη συνεισφορά των γεωδυναμικών μοντέλων μόνον.

Για την εκτίμηση των διδιάστατων συναρτήσεων (συμ)μεταβλητοτήτων των σφαλμάτων ακολουθείται η θεωρία του κεφαλαίου 6 και η διαδικασία που παρουσιάζεται στο προηγούμενο παράδειγμα. Ακολουθεί η σχηματική αναπαράσταση των συναρτήσεων μεταβλητότητας των σφαλμάτων της μεσημβρινής συνιστώσας της απόκλισης της κατακορύφου, στην περίπτωση χρησιμοποίησης του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98, της συνιστώσας της απόκλισης κατά παράλληλο, στην περίπτωση χρησιμοποίησης του μοντέλου EGM96 και της συμμεταβλητότητας των συνιστωσών στην περίπτωση του EGM96. Η ακρίβεια της εκτίμησης είναι της ίδιας τάξης και στις δύο περιπτώσεις υπολογισμού (μοντέλα GPM98 και EGM96), αφού οι TA  $\sigma_{\xi}$  είναι  $\pm 0.13''$  και  $\pm 0.12''$  αντίστοιχα, ενώ οι  $\sigma_{\eta}$  είναι  $\pm 0.25''$  και  $\pm 0.24''$  αντίστοιχα.

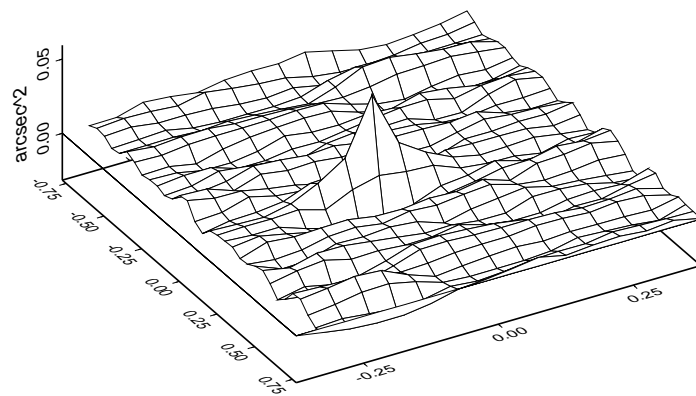
## 7.2.4 Συνδυασμός μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης και ανωμαλιών της βαρύτητας για την προσέγγιση του γεωειδούς

Στο παράδειγμα αυτό συνδυάζονται αποχές του γεωειδούς, οι οποίες έχουν προκύψει από μετρήσεις GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης και μετρήσεις ανωμαλιών της βαρύτητας για την προσέγγιση του γεωειδούς, η οποία αντικατοπτρίζει την πληροφορία που λαμβάνεται και από τις δύο πηγές σημάτων εισόδου. Τα δύο σήματα εισόδου είναι εντελώς διαφορετικής φύσης και αναφέρονται συνήθως σε διαφορετικές περιοχές του φάσματος του σήματος εξόδου. Με την εφαρμογή των αλγορίθμων των πολλαπλών συστημάτων εισόδου-εξόδου επιτυγχάνεται η βέλτιστη σύνδεση των δύο πληροφοριών, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα της εκτίμησης.

Ως δεδομένα εισόδου χρησιμοποιήθηκαν τα σήματα των ανωμαλιών βαρύτητας της προηγούμενης ενότητας, τα οποία αναφέρονται στο γεωδυναμικό μοντέλο EGM96. Τα σήματα εισόδου των αποχών του γεωειδούς, τα οποία προέρχονται από μετρήσεις GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης, προσομοιώθηκαν με τη βοήθεια του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου υψηλής

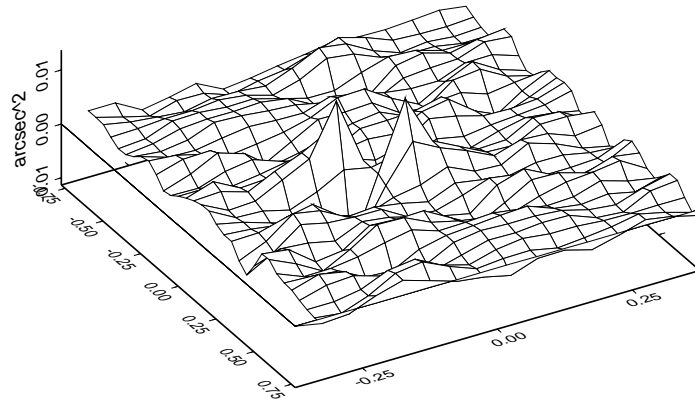


Σχήμα 7.15: Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας των σφαλμάτων εκτίμησης της μεσημβρινής συνιστώσας της απόκλισης της κατακορύφου με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο GPM98 ( $\text{arcsec}^2$ ).



Σχήμα 7.16: Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας των σφαλμάτων εκτίμησης της συνιστώσας της απόκλισης της κατακορύφου κατά παράλληλο με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο EGM96 ( $\text{arcsec}^2$ ).

ανάπτυξης GPM98. Από τα προσομοιούμενα δεδομένα απομακρύνθηκε η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου EGM96. Τα σήματα εισόδου των αποχών του γεωειδούς αναφέρονται στην υψηλή περιοχή του φάσματος (360–1800) και προσομοιώνουν αρκετά καλά την περιοχή



Σχήμα 7.17: Η διδιάστατη συνάρτηση συμμεταβλητότητας των σφαλμάτων εκτίμησης των συνιστωσών της απόκλισης της κατακορύφου με δεδομένα εισόδου ανηγμένα στο EGM96 ( $\text{arcsec}^2$ ).

του φάσματος που αναφέρονται οι πραγματικές μετρήσεις. Τα στατιστικά του πεδίου εισόδου των αποχών του γεωειδούς δίνονται στον πίνακα 7.10. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα προ-

Πίνακας 7.10: Τα στατιστικά του σήματος εισόδου των αποχών του γεωειδούς (m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$N_{GPM98}$	44.304	41.226	42.902	42.908	$\pm 0.715$
$N_{EGM96}$	43.800	41.510	42.661	42.664	$\pm 0.477$
$N_{red}$	1.006	-0.349	0.241	0.420	$\pm 0.343$

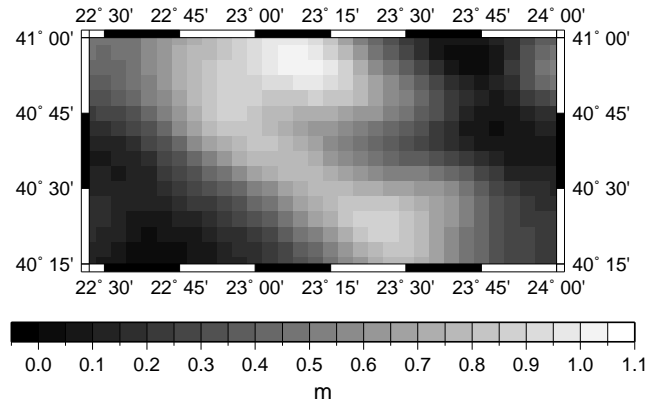
σομοιώθηκαν πεδία θορύβου, τα οποία ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η TA των τιμών των θορύβων εισόδου είναι 5 cm για στην περίπτωση των αποχών του γεωειδούς και 5 mGal για την περίπτωση των ανωμαλιών της βαρύτητας.

Τα σήματα εισόδου και τα πεδία των θορύβων εισήχθησαν σε σύστημα διπλής εισόδου απλής εξόδου με θόρυβο (βλ. σχήμα 6.10). Το πεδίο εξόδου του συστήματος αποτελείται από τα συνδυασμένα σήματα των αποχών του γεωειδούς και παρουσιάζονται στο σχήμα 7.18, ενώ τα στατιστικά στοιχεία τους δίνονται στον πίνακα 7.11. Οι τελικές τιμές των αποχών του

Πίνακας 7.11: Τα στατιστικά της εκτίμησης των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς (m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$N$	1.054	-0.025	0.443	0.286	$\pm 0.527$

γεωειδούς λαμβάνονται μετά και την επαναφορά του πεδίου αναφοράς EGM96. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν τρία σημαντικά σημεία για τη θεωρία του αλγορίθμου που συνοδεύει την παρούσα εφαρμογή:



Σχήμα 7.18: Οι εκτιμήσεις των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς.

1. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και του σήματος εξόδου. Όπως αναφέρεται και στη θεωρία του κεφαλαίου 6, ο υπολογισμός του πίνακα των συναρτήσεων αυτών είναι δυνατός, όταν είναι γνωστός ο πίνακας των αντίστοιχων συναρτήσεων φάσματος των σφαλμάτων στην είσοδο ( $\mathbf{P}_{mm}$ ), αφού χρησιμοποιείται και η αντίστοιχη συνάρτηση, η οποία ενώνει θεωρητικά τα σήματα στην είσοδο και την έξοδο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, όταν με  $N'$  συμβολιστεί το σήμα των αποχών του γεωειδούς στην έξοδο, ισχύει:

$$N' = \frac{(N + H_{N\Delta g}\Delta G)}{2}, \quad (7.1)$$

όπου  $N$  τα σήματα εισόδου των αποχών GPS,  $\Delta g$  τα σήματα εισόδου των ανωμαλιών της βαρύτητας και  $H_{N\Delta g}$  η θεωρητική συνάρτηση σύνδεσης μεταξύ  $\Delta g$  και  $N$ , δηλαδή η συνάρτηση Stokes. Η εξίσωση ουσιαστικά αναφέρεται στο μέσο όρο των σημάτων εισόδου. Πρόκειται για τον απλό μέσο όρο, δίχως την προσθήκη βάρους στις παρατηρήσεις, αφού οι εμπλεκόμενες ποσότητες αφορούν σε σήματα απαλλαγμένα από το θόρυβο.

2. Μια αντίστοιχη ανάλυση ακολουθείται στον υπολογισμό του πίνακα των συναρτήσεων σύνδεσης μεταξύ των σημάτων εισόδου και του σήματος στην έξοδο. Ο πίνακας σύνδεσης δίνεται από:

$$\mathbf{H}_{xy} = \begin{bmatrix} H_{N'N} \\ H_{N'\Delta g} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Η θεωρητική σύνδεση του σήματος εξόδου με τα σήματα εισόδου είναι δυνατό να περιγραφεί από την εξίσωση:

$$N' = \mathbf{H}_{xy} \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} H_{N'N} & H_{N'\Delta g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \Delta g \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Συνδυάζοντας τις (7.1) και (7.3), οι συναρτήσεις σύνδεσης των απαλλαγμένων από σφάλματα σημάτων δίνονται από τις σχέσεις:

$$H_{N'N} = 1/2 \quad (7.4)$$

$$H_{N'\Delta g} = (1/2)H_{N\Delta g}. \quad (7.5)$$

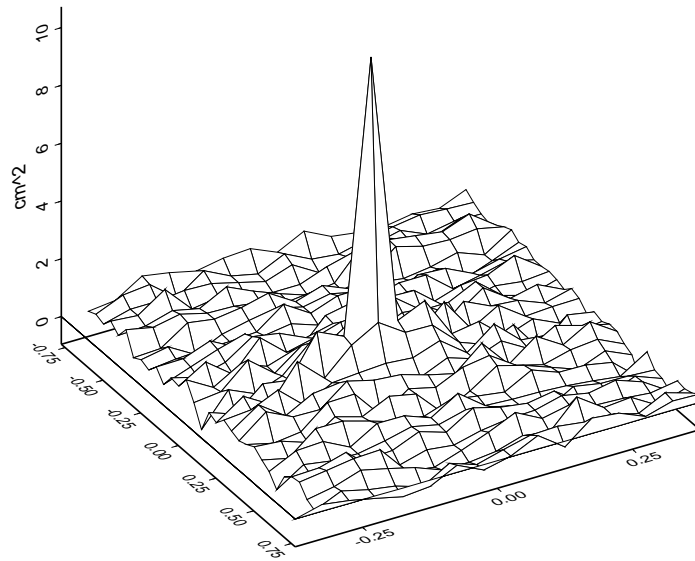
Οι τελευταίες εξισώσεις παρουσιάζουν και τη διαδικασία συνδυασμού των δεδομένων εισόδου στην εκτίμηση των αποχών του γεωειδούς.

3. Ένα τελευταίο σημείο αναφοράς είναι η διαχείριση της πληροφορίας για το θόρυβο στην είσοδο. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή ο πίνακας της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος στην είσοδο έχει τη μορφή:

$$\mathbf{P}_{mm} = \begin{bmatrix} P_{m_N m_N} & P_{m_N m_{\Delta g}} \\ P_{m_{\Delta g} m_N} & P_{m_{\Delta g} m_{\Delta g}} \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Στις εφαρμογές προσομοίωσης τα πεδία του θορύβου θεωρούνται γνωστά και είναι επομένως εφικτός ο υπολογισμός των συναρτήσεων πυκνότητας δια-φάσματος μεταξύ των διαφορετικών θορύβων. Στην περίπτωση πραγματικών εφαρμογών, όπου είναι συνήθως γνωστές μόνον οι συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος των ομοειδών θορύβων, ο πίνακας  $\mathbf{P}_{mm}$  παρουσιάζεται διαγώνιος.

Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος εκτίμησης στην έξοδο παρουσιάζεται στο σχήμα 7.19. Η μεταβλητότητα του σφάλματος εκτίμησης στην συγκεκριμένη εφαρμογή είναι  $10.7 \text{ cm}^2$ .



Σχήμα 7.19: Η συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος της εκτίμησης των αποχών γεωειδούς συνδυασμού.

### 7.2.5 Συνδυασμός υψομέτρων GPS, δεδομένων αλτιμετρικού γεωειδούς και ανωμαλιών ελευθέρου αέρα για την προσέγγιση γεωειδούς συνδυασμού

Το παράδειγμα που αναλύεται περιγράφει το συνδυασμό ετερογενούς φύσης δεδομένων στην προσέγγιση του γεωειδούς. Χρησιμοποιούνται δεδομένα υψομέτρων GPS, μετρήσεις της στάθμης της θάλασσας από τη γεωδαιτική φάση του δορυφόρου ERS1 (βλ. ενότητα 3.2) και ανωμαλίες της βαρύτητας. Η εφαρμογή προσομοίωσης που περιγράφεται παρουσιάζει τη

δυνατότητα συνδυασμού μετρήσεων σε περιοχές ξηράς και θάλασσας. Στην ενότητα των εφαρμογών με πραγματικά δεδομένα θα περιγραφούν κάποια επιπλέον προβλήματα που παρουσιάζονται και θα αναλυθούν οι προτεινόμενοι τρόποι αντιμετώπισής τους.

Η περιοχή μελέτης της συγκεκριμένης εφαρμογής είναι  $45.^\circ 05' \leq \phi \leq 55.^\circ 00'$  και  $-55.^\circ 00' \leq \lambda \leq -45.^\circ 10'$  και το βήμα του καννάβου είναι  $3' \times 6'$ . Με την επιλογή της περιοχής ελέγχεται η δυνατότητα του αλγορίθμου σε πεδία μεγάλων διαστάσεων ( $200 \times 100$ ), όπως και η χρονική διάρκεια του υπολογισμού της εκτίμησης και της συνάρτησης μεταβλητότητας σφάλματος. Τρία είναι τα πεδία σημάτων εισόδου που χρησιμοποιούνται:

- Δεδομένα υψομέτρων GPS (δεδομένα προσομοίωσης), τα οποία προέκυψαν με τη χρήση των συντελεστών του μοντέλου GPM98.
- Δεδομένα δορυφορικής αλτιμετρίας από τη γεωδαιτική φάση του ERS1. Οι μετρήσεις των υψών της στάθμης της θάλασσας, αφού διορθώθηκαν από όλες τις περιβαλλοντικές, γεωφυσικές και ατμοσφαιρικές επιδράσεις, όπως επίσης και από την επίδραση του συστήματος μέτρησης, όπως έχει περιγραφεί στο κεφάλαιο 3, χρησιμοποιούνται ως δεδομένα αλτιμετρικού γεωειδούς. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η επίδραση της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας έχει θεωρηθεί αμελητέα, έτσι ώστε οι μετρήσεις της μέσης θαλάσσιας επιφάνειας να αντιστοιχούν σε δεδομένα ωκεάνιου γεωειδούς.
- Δεδομένα ανωμαλιών της βαρύτητας ελευθέρου αέρα.

Τα αρχικά πεδία αναφέρθηκαν στο παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο EGM96. Τα στατιστικά στοιχεία των σημάτων εισόδου δίνονται στον πίνακα 7.12. Οι θόρυβοι που χρησιμοποιούνται

Πίνακας 7.12: Τα πεδία των σημάτων εισόδου.

	M	E	MT	MTΣ	TA
Υψόμετρα GPS (m)	2.250	-0.603	0.211	0.385	$\pm 0.323$
Αλτιμετρικά δεδομένα (m)	1.267	-0.623	-0.005	0.253	$\pm 0.253$
Ανωμαλίες βαρύτητας (mGal)	88.115	-54.968	-2.177	11.174	$\pm 10.960$

για τα σήματα εισόδου έχουν TA 10 cm, 5 cm και 5 mGal, αντίστοιχα. Τα επίπεδα των θορύβων που επιλέχθηκαν είναι από τα χειρότερα δυνατά, επιλέχθηκαν δε έτσι ώστε να φανεί η επίδρασή τους στην τελική ακρίβεια προσδιορισμού. Τα σήματα εισόδου εισήχθησαν σε ένα σύστημα πολλαπλής εισόδου-απλής εξόδου με θόρυβο (βλ. σχήμα 6.8). Ο υπολογισμός των πινάκων των συνάρτησεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και του σήματος στην έξοδο, όπως επίσης και οι συναρτήσεις θεωρητικής σύνδεσης των σημάτων εισόδου-εξόδου υπολογίστηκαν ακολουθώντας τη συλλογιστική του προηγούμενου πειράματος:

$$\begin{aligned} P_{N'N_G} &= N'N_G^* = (N_G + N_A + H_{N\Delta g}\Delta G)N_G^*/3 = \\ &= (P_{N_G N_G} + P_{N_A N_G} + H_{N\Delta g}P_{\Delta g N_G})/3 \end{aligned} \quad (7.7)$$

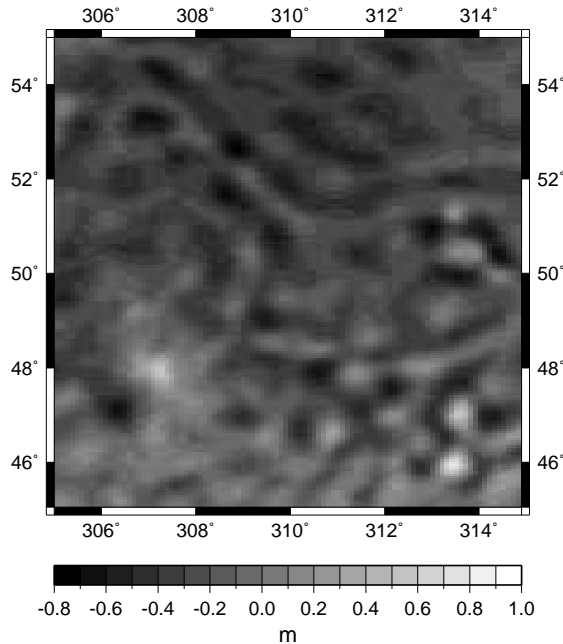
$$\begin{aligned} P_{N'N_A} &= N'N_A^* = (N_G + N_A + H_{N\Delta g}\Delta G)N_A^*/3 = \\ &= (P_{N_G N_A} + P_{N_A N_A} + H_{N\Delta g}P_{\Delta g N_A})/3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} P_{N'\Delta g} &= N'\Delta g^* = (N_G + N_A + H_{N\Delta g}\Delta G)\Delta g^*/3 = \\ &= (P_{N_G \Delta g} + P_{N_A \Delta g} + H_{N\Delta g}P_{\Delta g \Delta g})/3. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Τα στατιστικά της εκτίμησης των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς πριν και μετά την επαναφορά του πεδίου αναφοράς EGM96 παρουσιάζονται στον πίνακα 7.13. Τα δύο προαναφερθέντα πεδία παρουσιάζονται στα σχήματα 7.20 και 7.21. Από τα σχήματα παρατηρείται η μεγάλη συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου στα τελικά αποτελέσματα. Η εσωτερική ακρίβεια της εκτίμησης παρουσιάζεται από τη συνάρτηση μεταβλητότητας, η οποία προκύπτει ως αποτέλεσμα της διαδικασίας. Η μεταβλητότητα στη συγκεκριμένη περίπτωση για την εκτίμηση των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς είναι  $8.7 \text{ cm}^2$ . Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας παρουσιάζεται στο σχήμα 7.22.

Πίνακας 7.13: Τα στατιστικά στοιχεία των εκτιμήσεων των αποχών του γεωειδούς (m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$N_{out}$	0.921	-0.776	-0.245	0.309	$\pm 0.188$
$N_{out} + N_{EGM96}$	38.872	-0.738	20.914	22.482	$\pm 8.250$



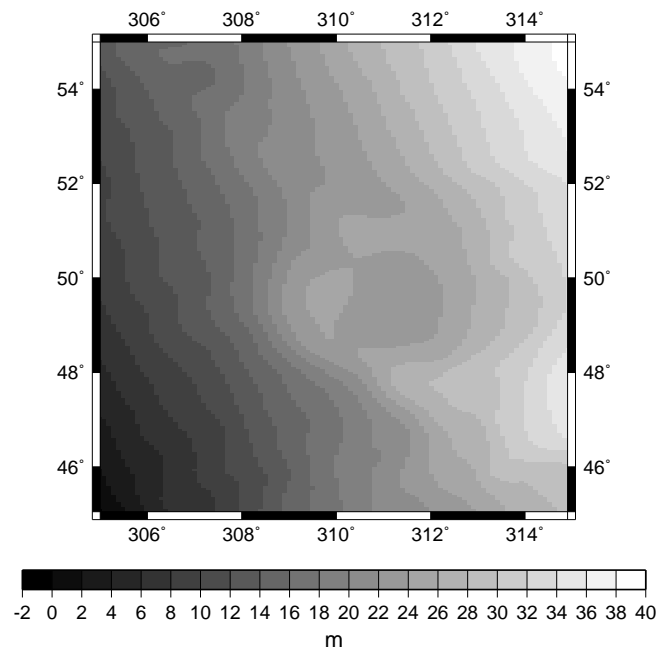
Σχήμα 7.20: Οι εκτιμήσεις των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς (m).

### 7.3 Μελέτες με τη χρήση πραγματικών δεδομένων

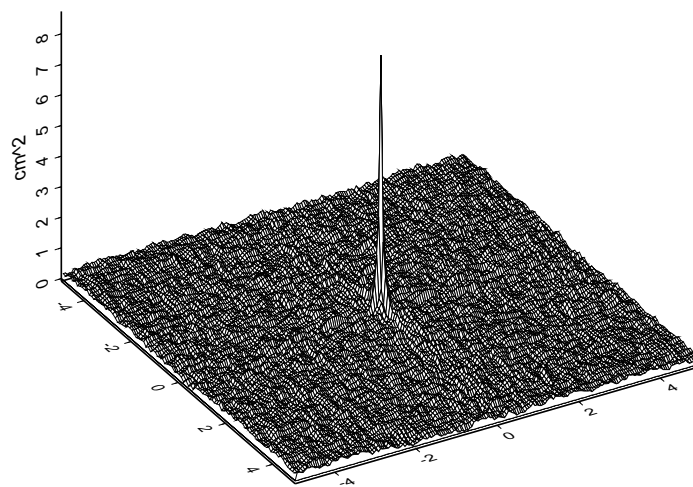
Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου περιγράφονται τα πειράματα με τη χρήση πραγματικών δεδομένων. Η βασική διαφορά από τις προηγούμενες αριθμητικές εφαρμογές έγκειται στο γεγονός της χρησιμοποίησης των δεδομένων ως πραγματικών παρατηρήσεων, επηρεασμένων δηλαδή από την επίδραση εξωτερικού θορύβου, και όχι ως καθαρών σημάτων, όπως χρησιμοποιήθηκαν έως τώρα. Βασικό βήμα στο διαχωρισμό των διαδικασιών των δύο ενότιων είναι οι κατάλληλες αλγοριθμικές επεξεργασίες των δεδομένων, έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου εισόδου. Η συνάρτηση αυτή είναι απαραίτητη για την εφαρμογή του αλγορίθμου των συστημάτων εισόδου-εξόδου. Οι περιοχές που επιλέγονται για την εφαρμογή των μεθόδων συνδυασμού βρίσκονται κατά βάση στην ελληνική επικράτεια, ενώ παρουσιάζονται και αποτελέσματα πειραμάτων σε ευρύτερες ωκεάνιες περιοχές. Οι ευρύτερες αυτές περιοχές παρουσιάζουν ιδιαίτερα γεωφυσικά και ωκεανογραφικά χαρακτηριστικά, τα οποία δικαιολογούν την αναλυτική μελέτη τους.

#### 7.3.1 Εφαρμογή στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου – Προσέγγιση δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας

Η περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου που επιλέγεται για το διαχρονικό υπολογισμό του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας αποτελεί την πιο ενδιαφέρουσα περιοχή της θαλάσσιας λεκάνης. Στην περιοχή αυτή συναντώνται οι τεκτονικές πλάκες Αφρικής και Ευρασίας, ενώ βρίσκονται και τα όρια της Ελληνικής Τάφρου (Hellenic trench). Η περιοχή μελέτης έχει όρια  $32^{\circ}03' \leq \phi \leq 35^{\circ}$  και  $22^{\circ}05' \leq \lambda \leq 32^{\circ}$ .



Σχήμα 7.21: Οι εκτιμήσεις των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς μετά την επαναφορά του πεδίου αναφοράς EGM96 (m).



Σχήμα 7.22: Η συνάρτηση μεταβλητότητας των εκτιμήσεων των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς ( $\text{cm}^2$ ).

Για τον υπολογισμό του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας της περιοχής χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα ανωμαλιών βαρύτητας και δορυφορικά δεδομένα αλτιμετρικών αποστολών. Τα δεδομένα των ανωμαλιών βαρύτητας προέρχονται από δύο πηγές: μέρος των τιμών προέρχεται από την ψηφιακή βάση δεδομένων του Ινστιτούτου Γεωδαισίας του Πανεπιστημίου του Αννόβερου (Institut für Erdmessung – IfE) [8], ενώ οι υπόλοιπες

τιμές προέρχονται από το ευρωπαϊκό πρόγραμμα μελέτης του γεωειδούς στη Μεσόγειο (GEO-MED) [15], [16], [17], [18]). Η πρώτη βάση δεδομένων αποτελείται από σημειακές τιμές θαλάσσιων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα, οι οποίες είναι αποτέλεσμα ψηφιοποιήσεων των γεωφυσικών χαρτών του Morelli [25], [29], [27], [28]. Τα δεδομένα της δεύτερης βάσης είναι σε μορφή καννάβου. Το σύνολο των δεδομένων (18644 τιμές) αναφέρθηκαν στα παγκόσμια γεωδυναμικά μοντέλα EGM96 και GPM98. Τα στατιστικά των ανηγμένων δεδομένων στα αντίστοιχα μοντέλα παρουσιάζονται στον πίνακα 7.14. Όπως διακρίνεται από τον πίνακα, τα

Πίνακας 7.14: Τα στατιστικά των ανηγμένων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε mGal).

Μοντέλο αναφοράς	M	E	MT	MTΣ	TA
EGM96	72.102	-87.387	2.249	10.328	±10.080
GPM98	107.214	-165.979	-9.071	28.262	±26.766

δεδομένα στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου προσαρμόζονται καλύτερα στο μοντέλο EGM96, παρά στο μοντέλο πολύ υψηλής ανάπτυξης GPM98. Το γεγονός αυτό πιθανόν να οφείλεται στην απουσία των συγκεκριμένων δεδομένων από τη διαδικασία προσδιορισμού των συντελεστών του μοντέλου GPM98. Η απουσία των συγκεκριμένων δεδομένων αντανακλά, όπως είναι φυσικό, στις υψηλότερες συχνότητες του φάσματος του πεδίου βαρύτητας (στους μεγαλύτερους βαθμούς ανάπτυξης του μοντέλου). Στη συνέχεια της μελέτης χρησιμοποιούνται τα ανηγμένα στο EGM96 δεδομένα.

Τα αλτιμετρικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται είναι οι μετρήσεις των δορυφόρων ERS-1 (φάσεις c, e-f και g) και ERS-2 (φάση a). Χρησιμοποιούνται δηλαδή όλες οι επαναλαμβανόμενες φάσεις των ERS δορυφόρων, όπως επίσης και η γεωδαιτική αποστολή του ERS-1 (φάση e-f). Τα δεδομένα του T/P δεν χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη περίπτωση λόγω της περιορισμένης έκτασης της περιοχής μελέτης. Τα δεδομένα ανακτήθηκαν από τα CD-ROMs της AVISO [5]. Οι μετρήσεις αυτές έχουν διορθωθεί από κάθε περιβαλλοντικό, γεωφυσικό και τροχιακό σφάλμα, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3. Η περίοδος της μελέτης της διακύμανσης της στάσιμης συνιστώσας της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας επιλέχθηκε ανά έτος, από το 1993 έως το 1998. Οι αλτιμετρικές παρατηρήσεις αποθηκεύθηκαν στους αντίστοιχους ετήσιους καταλόγους και κατηγοριοποιήθηκαν με αναφορά την τροποποιημένη Ιουλιανή ημερομηνία (Modified Julian Date). Η ημερομηνία έναρξης της μελέτης είναι η 1η Ιανουαρίου 1993 και η ημερομηνία τερματισμού είναι η 31η Δεκεμβρίου 1998. Στον πίνακα 7.15 παρουσιάζονται οι χρονικές περίοδοι μελέτης και οι δορυφόροι που εξετάζονται στη συγκεκριμένη περίοδο.

Πίνακας 7.15: Οι χρονικές περίοδοι των αλτιμετρικών δεδομένων.

Περίοδος μελέτης	Δορυφορικά δεδομένα από
1/1/1993 – 31/12/1993	ERS-1 φάση C
1/1/1994 – 31/12/1994	ERS-1 γεωδαιτική αποστολή, φάσεις E-F
1/1/1995 – 31/12/1995	ERS-1 φάση G, ERS-2 φάση A
1/1/1996 – 31/12/1996	ERS-1 φάση G, ERS-2 φάση A
1/1/1997 – 31/12/1997	ERS-2 φάση A
1/1/1998 – 31/12/1998	ERS-2 φάση A

Τα δεδομένα κάθε χρονιάς, σε συνδυασμό με το πεδίο των θαλάσσιων ανωμαλιών βαρύτητας, αποτελούν τα δεδομένα εισόδου στο σύστημα πολλαπλής εισόδου – απλής εξόδου για την εκτίμηση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας, όπως περιγράφεται στα παραδείγματα του κεφαλαίου 6. Μια σημαντική διαφορά, σε σύγκριση με τις μεθόδους προσομοίωσης που προαναφέρθηκαν, είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος του θορύβου και

του σήματος εισόδου. Αντί για την προσομοίωση πεδίων του θορύβου εισόδου χρησιμοποιείται μια ειδική τεχνική, η οποία δίνει τη δυνατότητα εκτίμησης των συναρτήσεων. Οι επαναλαμβανόμενες αλτιμετρικές τροχιές παρέχουν μια μέθοδο επαναλαμβανόμενων μετρήσεων. Με τον τρόπο αυτόν είναι δυνατός ο προσδιορισμός των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων και των σημάτων εισόδου, όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 6. Εκτιμώντας τις συναρτήσεις αυτές για τις χρονικές περιόδους του πίνακα 7.15 και χρησιμοποιώντας ένα πεδίο μέσων παρατηρήσεων για κάθε έτος, είναι δυνατή η εκτίμηση μιας μέσης δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας κατά την περίοδο μελέτης. Οι αποκλίσεις από τη μέση θαλάσσια τοπογραφία εξαλείφονται εξαιτίας της εισαγωγής του δυναμικού μέρους της στο πεδίο σφαλμάτων, τη χρησιμοποίηση μέσων παρατηρήσεων και την εκτίμηση της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σήματος. Για το λόγο αυτόν, η πληροφορία για την μέση ετήσια τιμή των συναρτήσεων και των παρατηρήσεων, όταν εισάγεται στο σύστημα, οδηγεί στην εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας.

Οι παρατηρήσεις των υψών της θαλάσσιας επιφάνειας κατηγοριοποιήθηκαν, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Για κάθε χρονική περίοδο, συγκεντρώθηκε ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων από τον αντίστοιχο δορυφόρο. Το μέσο πεδίο των παρατηρήσεων για κάθε χρονιά υπολογίστηκε από το σύνολο των ετήσιων παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας την υπορουτίνα *blockmean* του προγράμματος Generic Mapping Tools – GMT [45]. Το αποτέλεσμα της επεξεργασίας ήταν η κατασκευή του μέσου ετήσιου πεδίου παρατηρήσεων, από το οποίο αφαιρέθηκε η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου EGM96 και στη συνέχεια δημιουργήθηκε γεωγραφικό πλέγμα (κάνναβος) στις διαστάσεις της περιοχής μελέτης. Ακολούθησε η εκτίμηση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος του σήματος και του θορύβου στην είσοδο για τα δεδομένα κάθε χρονιάς. Οι διορθωμένες αλτιμετρικές παρατηρήσεις αναφέρθηκαν στη μέση θαλάσσια επιφάνεια, τιμές της οποίας παρέχονται σε κάθε σημείο μέτρησης από την AVISO. Οι παρατηρήσεις των υψών της θαλάσσιας επιφάνειας παρέχονται σε χρονικά διαστήματα ενός δευτερολέπτου και, όπως είναι φυσικό, δε συμπίπτουν από κύκλο σε κύκλο. Στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητη η αρχική πρόγνωση των δεδομένων σε πλέγμα προκειμένου να αποκτηθεί ακριβής επαναλαμβανόμενη πληροφορία. Μια ειδική επεξεργασία για τους κύκλους της γεωδαιτικής φάσης του ERS-1 είναι αναγκαία. Καθένας από τους δύο κύκλους των 168 ημερών διαχωρίζεται σε υποκύκλους στα CDs της AVISO, οι οποίοι έχουν σχεδόν ίδια διακριτική ικανότητα με τους κύκλους των φάσεων της ERM. Η αναγωγή στη μέση θαλάσσια επιφάνεια πραγματοποιήθηκε για την εξομάλυνση των δεδομένων κατά την πρόγνωση σε πλέγμα και την ελαχιστοποίηση της παραποίησης στη φασματική μέθοδο. Η αναγωγή αυτή αφήνει ανεπηρεάστη την εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου εισόδου, αφού η μέση θαλάσσια στάθμη απαλείφεται με την εφαρμογή των διαδοχικών αφαιρέσεων (βλ. κεφ. 6). Στη συνέχεια ακολουθείται η διαδικασία της πρόγνωσης σε πλέγμα, χρησιμοποιώντας τη ρουτίνα *surface* των GMT [45], η οποία αποτελεί μια διαδικασία παρεμβολής με τη βοήθεια συνεχώς τεταμένων χαμπύλων *splines* [34]. Τα τελικά αποτελέσματα της διαδικασίας ήταν αρχεία-κάνναβι ανά κύκλο με τιμές σε συγκεκριμένα βήματα. Μετά τον υπολογισμό της πληροφορίας πολλαπλών καννάβων υπολογίστηκαν οι διαφορές ανάμεσα στους διαδοχικούς κύκλους. Η μέση συνάρτηση πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων εισόδου για κάθε χρονιά προσεγγίστηκε στη συνέχεια, όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 6.

Στην περίπτωση υπολογισμού της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σήματος εισόδου, η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου EGM96 αφαιρέθηκε καταρχήν με σκοπό την εξομάλυνση των αλτιμετρικών δεδομένων και την κοινή μελέτη τους με τις παρατηρήσεις των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα. Ακολούθησε η διαδικασία ελαχιστοποίησης της παραποίησης (*blockmean*), η πρόγνωση των δεδομένων σε πλέγμα (*surface*) και ο υπολογισμός της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σήματος των μετρήσεων ακολουθώντας την ανάλυση του κεφαλαίου 6.

Για τον αυτοματοποιημένο υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος του σήματος και του θορύβου εισόδου, καθώς επίσης και για τον υπολογισμό των μέσων παρατηρήσεων για κάθε χρονιά δημιουργήθηκε κατάλληλο αρχείο (*script file*) και προσδιορίστηκε ο χρόνος που απαιτείται για την ολοκλήρωση της εφαρμογής. Το αρχείο χρησιμοποιεί τις ρουτίνες των

GMT [45] *blockmean*, *surface* και *xyz2grd*, το πρόγραμμα *harmexp.f* του γεωδαιτικού πακέτου GRAVSOFIT [36] και δύο προγράμματα γραμμένα σε κώδικα fortran (*noisecomp.f* και *signalcomp.f*) για την εκτίμηση της μέσης συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σήματος και του θορύβου εισόδου. Το αρχείο ενεργοποιήθηκε σε περιβάλλον Linux (πυρήνας 2.0.35) σε προσωπικό ηλεκτρονικό υπολογιστή με επεξεργαστή Pentium II στα 450 MHz. Ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης για τον υπολογισμό των παραμέτρων για κάθε χρονιά έφτασε τη 1 ώρα, 37 λεπτά και 27 δευτερόλεπτα χρησιμοποιώντας 96% της CPU. Οι υπολογισμένες μεταβλητότητες των σφαλμάτων για κάθε δορυφόρο στο αντίστοιχο έτος λειτουργίας δίνονται στον πίνακα 7.16. Με μια αρχική εξέταση του πίνακα 7.16 φαίνεται η σταθερή σχεδόν μεταβλητότητα των αλ-

Πίνακας 7.16: Οι μεταβλητότητες των σφαλμάτων για κάθε δορυφόρο (τιμές σε  $\text{cm}^2$ ).

Δορυφόρος, Έτος	Μεταβλητότητα
ERS-1 C, 1993	55.008
ERS-1 E-F, 1994	45.929
ERS-1 G, 1995	41.989
ERS-1 A, 1995	41.256
ERS-1 G, 1996	97.177
ERS-2 A, 1996	56.481
ERS-2 A, 1997	75.121
ERS-2 A, 1998	63.191

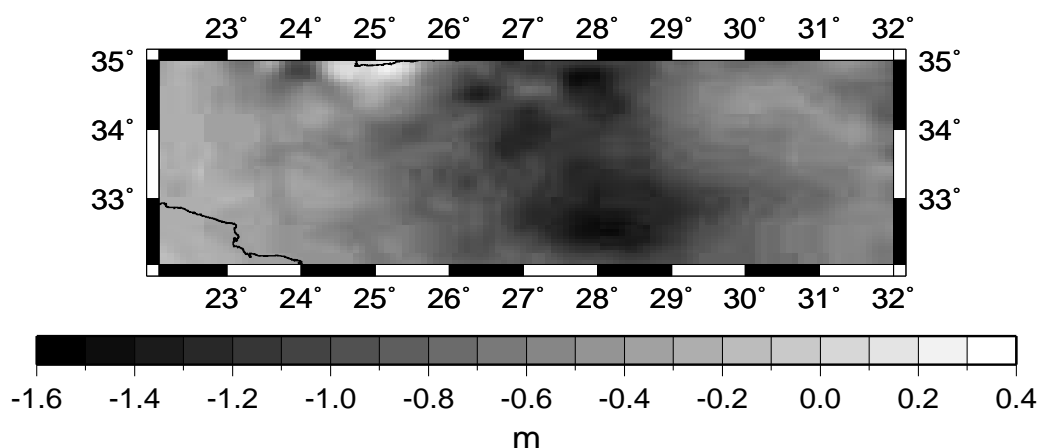
τιμετρικών δεδομένων κατά τη διάρκεια των ετών 1994 και 1995. Από το 1996 και μετά παρατηρείται μια αύξηση του σφάλματος των μετρήσεων, η οποία κατά κύριο λόγο αποδίδεται στις έντονες μεταβολές της θαλάσσιας στάθμης τη χρονική αυτή περίοδο. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος των δορυφορικών μετρήσεων εισάγεται στο σφάλμα εισόδου των δεδομένων. Εφόσον δεν έχουν αναφερθεί σημαντικά σφάλματα στις τροχιές των ERS-1, ERS-2, οι τιμές των μεταβλητοτήτων οφείλονται κυρίως στις μεταβολές της θαλάσσιας στάθμης. Προσεκτικότερη μελέτη απαιτείται στην περίπτωση του δορυφόρου ERS-1 για το 1996. Στο συγκεκριμένο έτος, αναφέρονται μόνο τέσσερις κύκλοι και η διαδικασία προσέγγισης των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων στην είσοδο παρουσιάζει την αδυναμία του μικρού αριθμού επαναλαμβανόμενων δειγμάτων. Για το λόγο αυτόν, οι επιλύσεις πραγματοποιήθηκαν, τόσο με τη συνεισφορά και των δύο δορυφόρων που αντιστοιχούν στο 1996, όσο και με τη συνεισφορά μόνον του ERS-2.

Οι ετήσιες συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος των σημάτων και των σφαλμάτων εισόδου, όπως επίσης και οι μέσες παρατηρήσεις για κάθε χρονιά, οι οποίες υπολογίστηκαν με τις προηγούμενες διαδικασίες, εισήχθησαν ανά έτος σε συστήματα πολλαπλής εισόδου-απλής εξόδου. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 6, η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του σφάλματος των αλτιμετρικών δεδομένων στην είσοδο είναι απαραίτητη για την εκτίμηση της βέλτιστης συνάρτησης απόκρισης συχνότητας που συνδέει τις παρατηρήσεις με την εκτίμηση στην έξοδο. Όσον αφορά στις παρατηρήσεις των ανωμαλιών της βαρύτητας μια παρόμοια, με τα αλτιμετρικά δεδομένα, επεξεργασία για την εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου εισόδου είναι δυνατή μόνο στην περίπτωση που οι μετρήσεις συνοδεύονται με τις αντίστοιχες χρονικές περιόδους μέτρησης. Μια διαδικασία προσδιορισμού της συνάρτησης μεταβλητότητας των σφαλμάτων των θαλάσσιων μετρήσεων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα παρουσιάζεται από τον Behrend [8]. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, λόγω της απουσίας πληροφορίας για το χρόνο, χρησιμοποιήθηκε προσομοιωμένο πεδίο σφαλμάτων TA 5 mGal. Με την έλευση των προγραμματισμένων δορυφορικών αποστολών, προσανατολισμένων στη μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας (GOCE, GRACE και CHAMP), η επαναλαμβανόμενη τροχιά τους θα διευκολύνει αντίστοιχους αλγόριθμους για την εκτίμηση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων. Οι εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας για τη χρονική περίοδο της μελέτης δίνονται στον πίνακα 7.17. Στο σχήμα 7.23 παρουσιάζεται το πεδίο της εκτίμησης του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπο-

Πίνακας 7.17: Οι εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας την περίοδο 1993–1998 για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε m, α: δεδομένα εισόδου ERS-1 και ERS-2, β: δεδομένα εισόδου ERS-2).

Έτος	M	E	MT	MTΣ	TA
1993	0.464	-1.815	-0.843	0.923	±0.374
1994	0.217	-1.763	-0.783	0.855	±0.343
1995	0.334	-1.547	-0.726	0.794	±0.322
1996α	0.307	-1.598	-0.752	0.827	±0.343
1996β	0.306	-1.547	-0.729	0.800	±0.329
1997	0.581	-1.568	-0.705	0.778	±0.329
1998	0.656	-1.610	-0.718	0.791	±0.333

γραφίας για το έτος 1995. Οι μεταβλητότητες του σφάλματος της εκτίμησης της θαλάσσιας

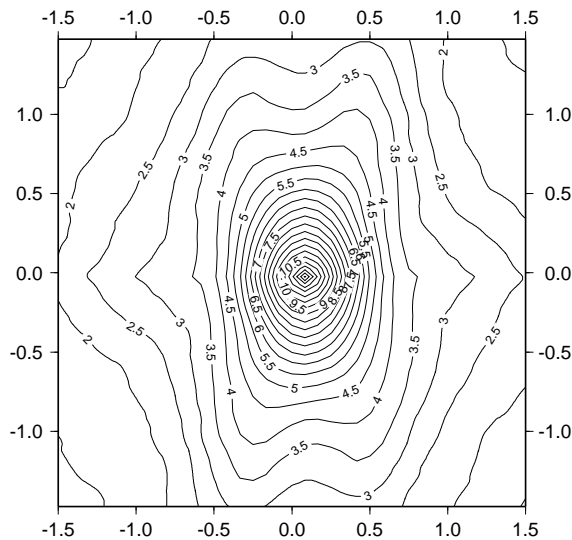


Σχήμα 7.23: Η εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας της Ανατολικής Μεσογείου για το έτος 1995.

τοπογραφίας παρουσιάζονται στον πίνακα 7.18. Από τη σύγκριση των πινάκων 7.16 και 7.18 επιβεβαιώνεται για ακόμη μία φορά η μικρή ευαισθησία της μεθόδου των συστημάτων εισόδου-εξόδου στα σφάλματα εισόδου. Η συνάρτηση μεταβλητότητας του σφάλματος της εκτίμησης της στάσιμης συνιστώσας της θαλάσσιας τοπογραφίας παρουσιάζεται στο σχήμα 7.24. Στη συνέχεια μελετήθηκε η ετήσια μεταβολή της εκτίμησης της θαλάσσιας τοπογραφίας με χρόνο αναφοράς την έναρξη της μελέτης, δηλαδή το 1993. Τα ετήσια πεδία εξόδου της θαλάσσιας τοπογραφίας αναφέρθηκαν στο έτος 1993 και μελετήθηκαν οι διαφορές από το έτος αναφοράς. Οι διαφορές παρουσιάζονται στον πίνακα 7.19. Παρατηρείται γενικά μια μεταβολή της ετήσιας εκτίμησης της θαλάσσιας τοπογραφίας κατά τη διάρκεια της εξαετούς μελέτης. Οι μεταβολές αυτές οφείλονται κατά κύριο λόγο στις έντονες γεωφυσικές ιδιαιτερότητες της περιοχής, οι οποίες αναφέρθηκαν και στην αρχική περιγραφή της εφαρμογής. Η έκταση της περιοχής είναι αντικειμενικά μικρή για την ολοκληρωμένη ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Εντούτοις, οι παρουσιάζόμενες μεταβολές είναι δυνατό να αποτελέσουν την εισαγωγική εκτίμηση για τις ιδιότητες

Πίνακας 7.18: Οι μεταβλητότητες της εκτίμησης της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας για κάθε έτος (τιμές σε  $\text{cm}^2$ ).

Έτος	Μεταβλητότητα
1993	18.360
1994	16.995
1995	13.083
1996α	23.253
1996β	25.219
1997	34.753
1998	29.361

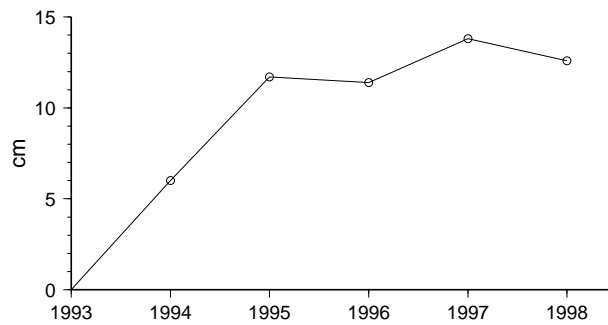


Σχήμα 7.24: Η συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος της εκτίμησης της θαλάσσιας τοπογραφίας για το 1995 (τιμές σε  $\text{cm}^2$ ).

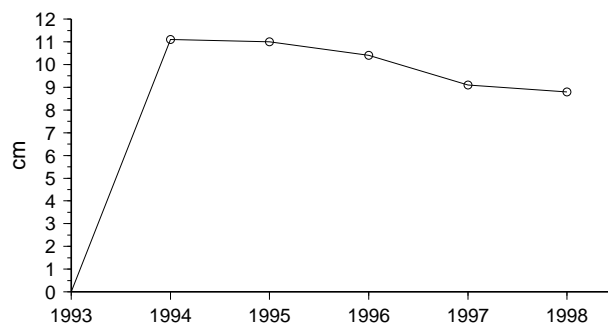
Πίνακας 7.19: Οι διαφορές των ετήσιων εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας (τιμές σε m).

Έτος	M	E	MT	MTΣ	TA
1994-1993	0.775	-1.023	0.060	0.126	$\pm 0.111$
1995-1993	0.603	-1.059	0.117	0.161	$\pm 0.110$
1996β-1993	0.507	-1.051	0.114	0.154	$\pm 0.104$
1997-1993	0.749	-0.702	0.138	0.165	$\pm 0.091$
1998-1993	0.769	-0.878	0.126	0.153	$\pm 0.088$

της περιοχής. Οι μεταβολές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης των διαφορών των ετήσιων εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας σε σχέση με το έτος αναφοράς παρουσιάζονται στα σχήματα 7.25 και 7.26. Όπως φαίνεται από το σχήμα 7.25, υπάρχει μια σταθερή τάση αύξησης της μέσης τιμής στην εκτίμηση της ετήσιας θαλάσσιας τοπογραφίας στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου. Η τάση αυτή είναι πιο εμ-



Σχήμα 7.25: Οι μεταβολές της μέσης τιμής της εκτίμησης της ετήσιας στάσιμης συνιστώσας της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας ως προς το έτος αναφοράς 1993 για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε cm).

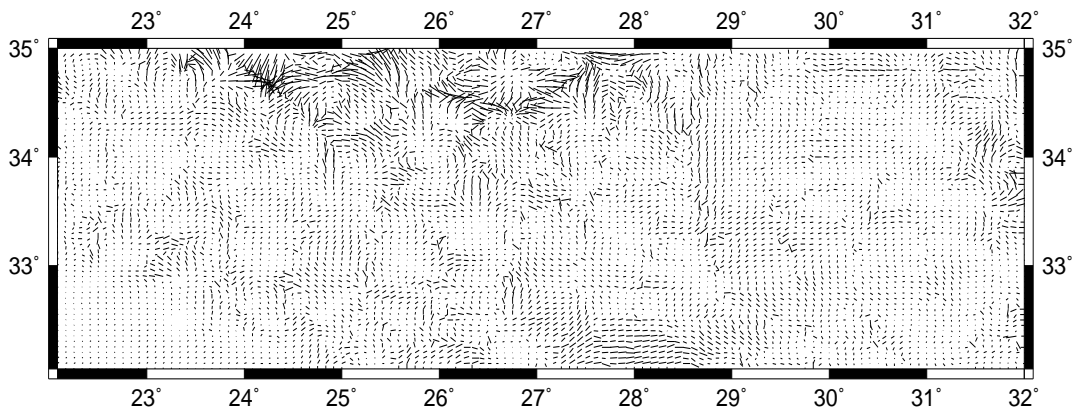


Σχήμα 7.26: Οι μεταβολές της τυπικής απόκλισης της εκτίμησης της ετήσιας στάσιμης συνιστώσας της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας ως προς το έτος αναφοράς 1993 για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε cm).

φανής τις πρώτες χρονιές της μελέτης. Από το 1995 και μετά η μέση τιμή των διαφορών δείχνει να σταθεροποιείται με κάποιες μεταβολές μικρής τάξης. Σε αντίθεση με τα προηγούμενα οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων των διαφορών των εκτιμήσεων παρουσιάζουν μια σταθερή τιμή

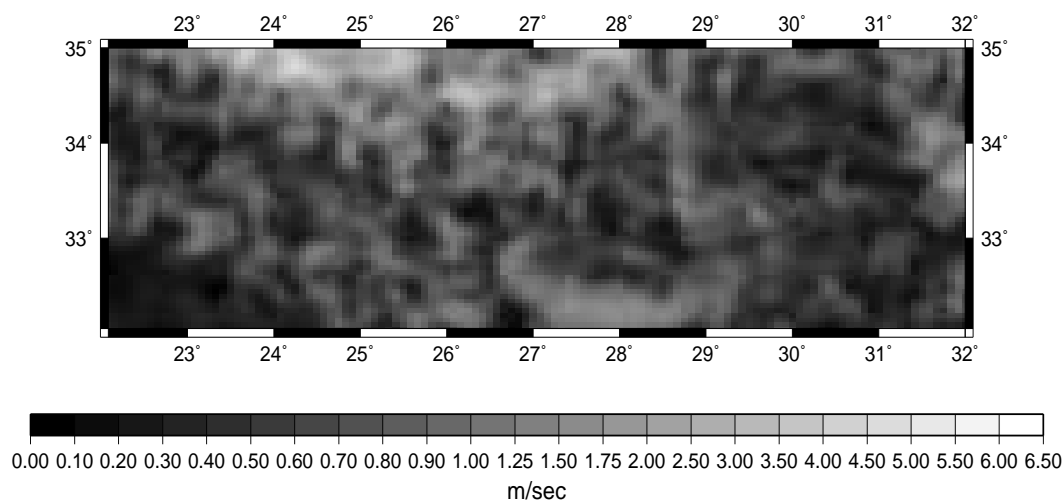
της τάξης των 10 εκατοστών, με μια μικρή τάση μείωσης. Οι διακυμάνσεις αυτές είναι δυνατό να οφείλονται σε ετήσιες μεταβολές της θαλάσσιας επιφάνειας, οι οποίες μεταδίδονται στην εκτίμηση της θαλάσσιας τοπογραφίας. Οι ετήσιες μεταβολές περιγράφουν τα αμιγώς γεωφυσικά χαρακτηριστικά της περιοχής μελέτης, αφού οι εποχικές μεταβολές έχουν σχεδόν εξαλειφθεί.

Ακολούθησε ο υπολογισμός των συνιστωσών της σταθερής γεωστροφικής ροής στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου. Ο υπολογισμός βασίστηκε στις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 5 και αναφέρονται στη διαδικασία προσδιορισμού της θαλάσσιας τοπογραφίας από μετρήσεις των φυσικών ιδιοτήτων του νερού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η αντίστροφη διαδικασία ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό των σταθερών ταχυτήτων ροής. Τα διανύσματα ροής που προέκυψαν από την επεξεργασία της εκτίμησης του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας για το 1995 παριστάνουν τη μέση ετήσια σταθερή ροή για την περιοχή και παρουσιάζονται στο σχήμα 7.27. Στο σχήμα 7.28 παρουσιάζεται το



Σχήμα 7.27: Τα διανύσματα σταθερής ροής της Ανατολικής Μεσογείου για το έτος 1995.

μέγεθος των ταχυτήτων ροής στην περιοχή μελέτης. Από την παρατήρηση των σχημάτων διακρίνονται κάποιες κινήσεις στην περιοχή  $34^\circ \leq \phi \leq 35^\circ$  και  $26^\circ \leq \lambda \leq 28^\circ$ . Οι κινήσεις αυτές αναφέρονται στα όρια της Ελληνικής Τάφρου και περιγράφουν τις γεωφυσικές εναλλαγές που πραγματοποιούνται στην περιοχή. Οι τιμές που παρουσιάζονται είναι σχετικά μεγάλες λόγω της επίδρασης των παράκτιων περιοχών στον υπολογισμό της θαλάσσιας τοπογραφίας. Σε μια κλειστή θάλασσα, όπως είναι η Μεσόγειος, οι κινήσεις λόγω γεωστροφικής ροής είναι κατά κανόνα μικρές και οι μεγάλες τιμές εμφανίζονται λόγω της ασυμβατότητας του μοντέλου στις παράκτιες περιοχές (βλ. μειονεκτήματα της μεθόδου στο κεφάλαιο 5). Παρόλα αυτά, κάποιες αρχικές ενδείξεις των κινήσεων των υδάτων στην περιοχή είναι δυνατό να ανιχνευτούν από τη μελέτη σχημάτων παρόμοιων με τα 7.27 και 7.28. Επιπλέον πληροφορίες λαμβάνονται από τη διαχρονική μελέτη των μεταβολών στα πεδία των ταχυτήτων. Οι διαφορές στις συνιστώσες κατά παράλληλο ( $u$ ) και κατά μεσημβρινό ( $v$ ) παρουσιάζονται στον πίνακα 7.20. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές που παρουσιάζονται στον πίνακα αναφέρονται σε περιοχές κοντά στις ηπειρωτικές εκτάσεις, όπου το μοντέλο της γεωστροφικής ροής αποκλίνει. Οι μεγάλες κλίσεις της θαλάσσιας τοπογραφίας, όπως υπολογίζονται με τη βοήθεια του πολλαπλού συστήματος εισόδου-εξόδου, οδηγούν σε υπερεκτιμημένες τιμές των ταχυτήτων των ρευμάτων. Εξάλλου, η γεωστροφική θεώρηση και οι παραδοχές που την ακολουθούν αποκλίνουν στην

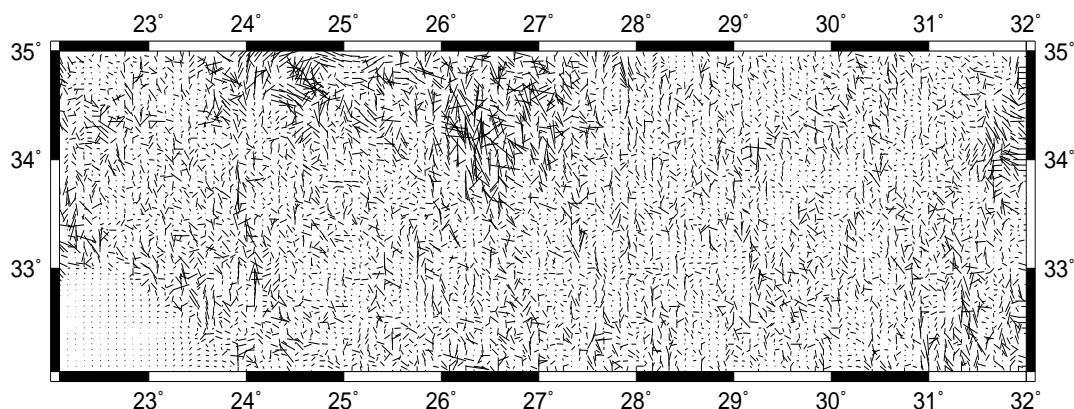


Σχήμα 7.28: Το μέγεθος των διανυσμάτων σταθερής ροής για την περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου και στο έτος 1995 (τιμές σε m/sec).

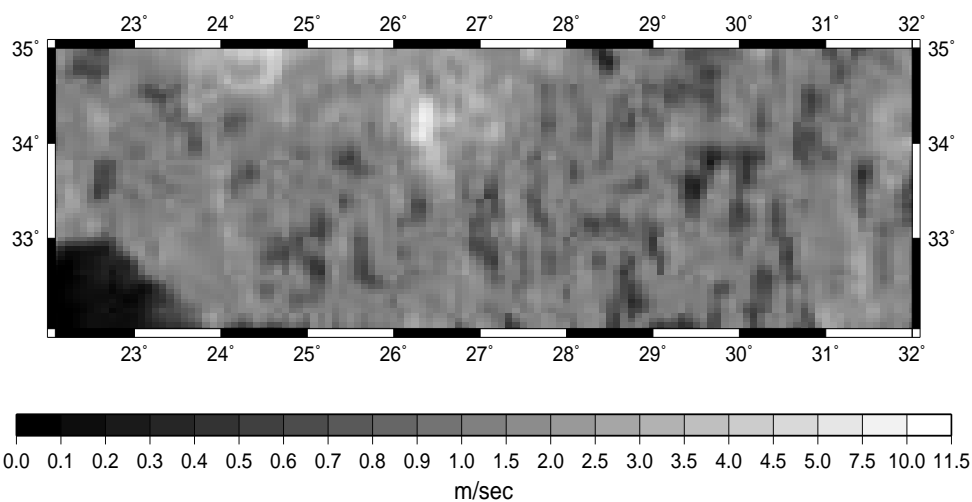
Πίνακας 7.20: Διαφορές στις συνιστώσες της σταθερής ταχύτητας ροής των υδάτων στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου (τιμές σε m/sec).

Συνιστώσα $u$	M	E	MT	MTΣ	TA
1994-1993	8.387	-6.169	0.033	1.077	$\pm 1.077$
1995-1994	7.740	-9.181	-0.007	1.098	$\pm 1.098$
1996-1995	3.094	-3.804	-0.005	0.466	$\pm 0.466$
1997-1996	6.792	-7.477	-0.024	0.739	$\pm 0.739$
1998-1997	6.650	-5.481	0.000	0.606	$\pm 0.606$
Συνιστώσα $v$	M	E	MT	MTΣ	TA
1994-1993	9.539	-7.038	-0.028	1.241	$\pm 1.241$
1995-1994	7.309	-7.835	0.010	1.247	$\pm 1.247$
1996-1995	3.223	-3.286	0.009	0.398	$\pm 0.398$
1997-1996	6.082	-6.609	-0.010	0.640	$\pm 0.640$
1998-1997	6.649	-4.179	-0.001	0.527	$\pm 0.527$

περίπτωση κλειστών θαλασσών, όπως στην περίπτωση της Μεσογείου. Όπως φαίνεται και από τη μελέτη της TA των μεταβολών στις ταχύτητες κίνησης, στις περιόδους των τάσεων αύξησης της τιμής της θαλάσσιας τοπογραφίας παρουσιάζεται και η εντονότερη κινητικότητα της ροής. Αυτό είναι δικαιολογημένο, αφού οι συνιστώσες των ταχυτήτων ροής προκύπτουν από την κλίση της επιφάνειας της θαλάσσιας τοπογραφίας κατά την περίοδο μελέτης. Οι μεταβολές στην ταχύτητα ροής των υδάτων παρουσιάζονται στα σχήματα 7.29 και 7.30 κατά τη διάρκεια της περιόδου έντονης μεταβολής της ετήσιας στάσιμης θαλάσσιας τοπογραφίας (1993-94), όπως επίσης και στα σχήματα 7.31 και 7.32 κατά τη διάρκεια της ύφεσης των χαρακτηριστικών της περιοχής (1995-96). Όπως φαίνεται από τα σχήματα, οι μεγάλες διαφορές παρουσιάζονται κατά την περίοδο 1993-94 σε συγκεκριμένες περιοχές. Οι περιοχές αυτές βρίσκονται συνήθως κοντά στις ηπειρωτικές εκτάσεις. Οι διαφορές είναι δυνατό να οφείλονται επίσης στις διαφορετικές μεθόδους εκτίμησης της τιμής της θαλάσσιας τοπογραφίας, μέσω των

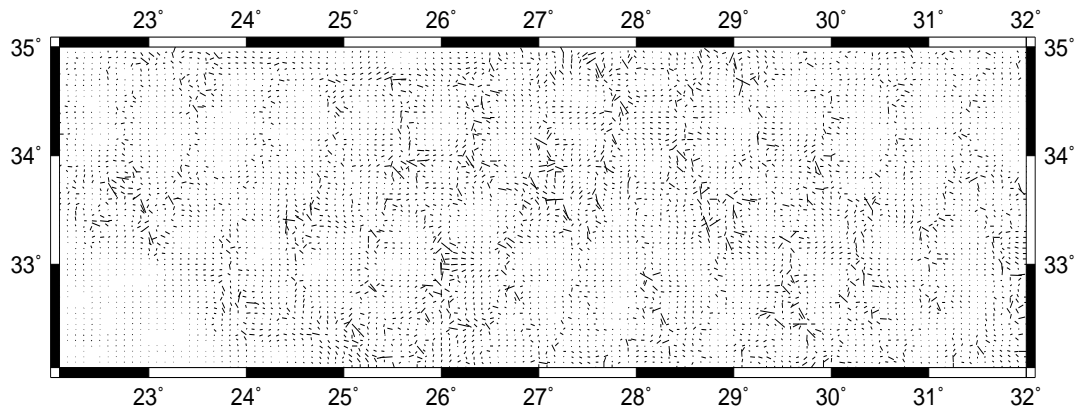


Σχήμα 7.29: Οι διευθύνσεις των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1993 και 1994.

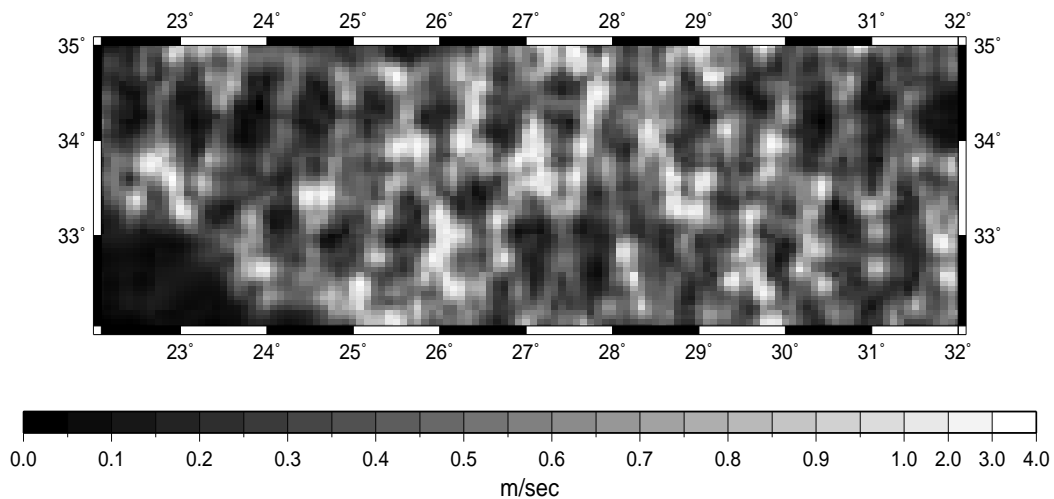


Σχήμα 7.30: Τα μεγέθη των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1993 και 1994 (τιμές σε m/sec).

διαφορετικών μεθόδων υπολογισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σφάλματος στην είσοδο. Υπενθυμίζεται ότι για τη γεωδαιτική αποστολή του ERS-1 δεν υφίστανται ακριβώς επαναλαμβανόμενες τροχιές, αλλά αυτές δημιουργήθηκαν τεχνητά, λαμβάνονται δεδομένα κύκλων με παρόμοια διακριτική ικανότητα με τις επαναλαμβανόμενες φάσεις. Οι μεταβολές που παρουσιάζονται κατά την περίοδο ύφεσης είναι σαφώς μικρότερες.



Σχήμα 7.31: Οι διευθύνσεις των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1995 και 1996.



Σχήμα 7.32: Τα μεγέθη των μεταβολών της ταχύτητας ροής μεταξύ του 1995 και 1996 (τιμές σε m/sec).

### 7.3.2 Εφαρμογή σε περιφερειακή κλίμακα – Βόρειος Ατλαντικός - Στενά Labrador

Η εφαρμογή της προσέγγισης της ωκεάνιας τοπογραφίας πραγματοποιήθηκε και σε περιφερειακή κλίμακα, σε ανοιχτή θάλασσα, όπου η θαλάσσια κυκλοφορία και όλα τα σχετικά φαινόμενα παρουσιάζουν έντονα χαρακτηριστικά. Η εφαρμογή αυτή πραγματοποιήθηκε για

την ασφαλή σύγκριση των αποτελεσμάτων με μοντέλα ωκεάνιας κυκλοφορίας. Όπως είναι γνωστό τα μοντέλα κυκλοφορίας αδυνατούν να παρουσιάσουν αξιόπιστα αποτελέσματα σε κλειστές θάλασσες, όπως είναι η Μεσόγειος. Αυτό συμβαίνει, γιατί στις περιοχές αυτές δεν ικανοποιούνται οι απαιτήσεις της γεωστροφικής θεώρησης, όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 5. Η μελέτη στην περιοχή του Βορείου Ατλαντικού θα εξετάσει τις εκτιμήσεις της ωκεάνιας τοπογραφίας διαχρονικά, στο ίδιο χρονικό εύρος με την προηγούμενη εφαρμογή, δίνοντας έμφαση στον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων και σημάτων στην είσοδο.

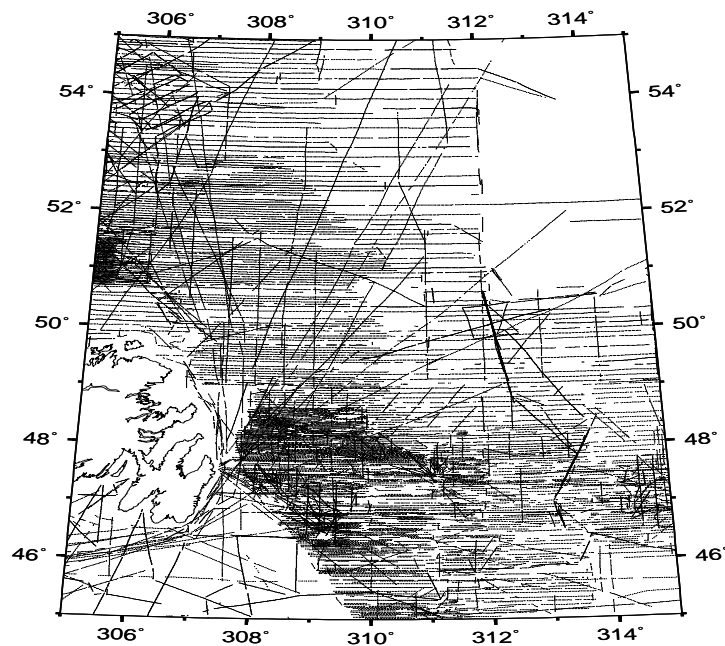
Τα όρια της περιοχής είναι  $45.05^\circ \leq \phi \leq 55^\circ$  και  $-55^\circ \leq \lambda \leq -45.10^\circ$ . Η περιοχή αυτή επιλέχθηκε λόγω της διαθεσιμότητας σημειακών τιμών θαλάσσιων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα και λόγω της μεγάλης της σημασίας από ωκεανογραφική πλευρά: η περιοχή βρίσκεται στα όρια του Ρεύματος του Κόλπου, ενώ τη διασχίζει το μικρότερο έντασης ρεύμα Labrador.

Για τη μελέτη της επίδρασης της εξαρχής ή εκ των υστέρων πρόγνωσης των αλτιμετρικών δεδομένων σε πλέγμα χρησιμοποιήθηκαν, τόσο δεδομένα διορθωμένων υψών της θαλάσσιας στάθμης (CORSSH) [6], όσο και δεδομένα ανωμαλιών της θαλάσσιας στάθμης (SLA) [7]. Στη δεύτερη περίπτωση τα δεδομένα των διορθωμένων υψών της θαλάσσιας στάθμης αναφέρονται σε συγκεκριμένες γεωγραφικές θέσεις στην επιφάνεια της Γης και αναφέρονται στη μέση θαλάσσια στάθμη μιας χρονικής περιόδου. Οι ανωμαλίες της θαλάσσιας στάθμης έχουν το πλεονέκτημα ότι παρουσιάζονται στην πολλαπλή δειγματική διαδικασία προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος θορύβου και σήματος σε συγκεκριμένες γεωγραφικές θέσεις και για το λόγο αυτόν, η διαδικασία της εξαρχής πρόγνωσης των αλτιμετρικών δεδομένων σε πλέγμα παραλείπεται. Για την εκτίμηση της ωκεάνιας τοπογραφίας χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από τον T/P, τη συνολική αποστολή του ERS-1 και το διάδοχο δορυφόρο ERS-2. Οι αλτιμετρικές παρατηρήσεις ταξινομήθηκαν αναφορικά με την τροποποιημένη Ιουλιανή ημερομηνία, η οποία παρουσιάζεται στις Εγγραφές των Γεωφυσικών Δεδομένων (GDRs). Οι ετήσιες περίοδοι μελέτης και οι αντίστοιχοι δορυφόροι παρουσιάζονται στον πίνακα 7.21.

Πίνακας 7.21: Χρονικές περίοδοι και αλτιμετρικά δεδομένα.

Χρονική περίοδος	Δορυφορικά δεδομένα
1/1/1993 - 31/12/1993	ERS1-φάση C, T/P
1/1/1994 - 31/12/1994	ERS1-GM, T/P
1/1/1995 - 31/12/1995	ERS1-φάση G, ERS2-φάση A, T/P
1/1/1996 - 31/12/1996	ERS1-φάση G, ERS2-φάση A, T/P
1/1/1997 - 31/12/1997	ERS2-φάση A, T/P
1/1/1998 - 31/12/1998	ERS2-φάση A, T/P

Όσον αφορά στα θαλάσσια βαρυτημετρικά δεδομένα, χρησιμοποιήθηκαν 84169 σημειακές τιμές ανωμαλιών ελευθέρου αέρα, οι οποίες συλλέχθηκαν από ειδικές βαρυτημετρικές αποστολές και παραχωρήθηκαν ευγενικά από τον Marc Veronneau (National Geodetic Survey of Canada). Δυστυχώς, δεν υπάρχει καμιά επιπλέον πληροφορία για την κατανομή των μετρήσεων κατά αποστολή, ούτε κάποια ένδειξη ημερομηνίας στις σημειακές μετρήσεις, η οποία θα βοηθούσε στον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων και του σήματος των μετρήσεων βαρύτητας. Μια μελέτη της συμπεριφοράς της συνάρτησης σφάλματος των ανωμαλιών της βαρύτητας σε διάφορες θαλάσσιες περιοχές της Ευρώπης παρουσιάζεται από τον Behrend [8], η οποία βασίζεται στις εκ των προτέρων πληροφορίες για τις ημερομηνίες και τις αντίστοιχες αποστολές μετρήσεων. Με αυτόν τον τρόπο, η δημιουργία ενός πολλαπλού δείγματος των τιμών των ανωμαλιών της βαρύτητας είναι δυνατό να οδηγήσει στην εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων, με παρόμοιες διαδικασίες με αυτές που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 6. Η κατανομή των θαλάσσιων μετρήσεων ανωμαλιών της βαρύτητας παρουσιάζεται στο σχήμα 7.33. Από τα δεδομένα ανωμαλιών ελευθέρου αέρα αφαιρέθηκε η συνεισφορά του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου EGM96.



Σχήμα 7.33: Οι μετρήσεις βαρύτητας στην περιοχή του Βορείου Ατλαντικού.

Ακολούθησε η δημιουργία καννάβου με βήμα  $3' \times 6'$ . Λόγω της απουσίας πληροφορίας για την ακρίβεια των μετρήσεων, χρησιμοποιήθηκε θόρυβος προσομοίωσης, κανονικής κατανομής και  $TA$  5 mGal. Τα στατιστικά των παρατηρήσεων και του θορύβου εισόδου παρουσιάζονται στον πίνακα 7.22. Οι παρατηρήσεις των υψών της θαλάσσιας στάθμης ταξινομήθηκαν έτσι, ώστε

Πίνακας 7.22: Στατιστικά των ανηγμένων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα και του θορύβου εισόδου.

Τύπος (mGal)	M	E	MT	MTΣ	TA
Παρατηρήσεις	88.115	-54.968	-2.177	11.174	$\pm 10.960$
Θόρυβος	22.144	-21.963	-0.026	5.023	$\pm 5.023$

για κάθε χρονική περίοδο να συλλέγεται ο συνολικός αριθμός των μετρήσεων συγκεκριμένου δορυφόρου. Στη συνέχεια υπολογίστηκε το πεδίο των μέσων ετήσιων παρατηρήσεων για κάθε έτος, όπως ακριβώς περιγράφεται στην εφαρμογή της Μεσογείου. Από τα πεδία των μέσων παρατηρήσεων για κάθε έτος αφαιρέθηκε η συνεισφορά του γεωδυναμικού μοντέλου EGM96 και ακολούθησε η πρόγνωση των δεδομένων σε πλέγμα βήματος  $3' \times 6'$ .

Δύο διαφορετικές στρατηγικές ακολουθήθηκαν για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος θορύβου και σήματος [1]. Η πρώτη τεχνική, η οποία ονομάζεται για συντομία τεχνική CORSSH και αναφέρεται στη χρήση διορθωμένων υψών της θαλάσσιας στάθμης, περιγράφηκε στην προηγούμενη εφαρμογή. Οι παρατηρήσεις, αφού αναχθούν στη μέση θαλάσσια στάθμη, παρεμβάλλονται στις κορυφές του καννάβου, έτσι ώστε να είναι διαθέσιμη ακριβώς επαναλαμβανόμενη πληροφορία. Αυτό συμβαίνει, τόσο για τις ERM αποστολές, όσο και για τη γεωδαιτική φάση του ERS-1, αφού τα δεδομένα κατηγοριοποιούνται σε υποκύκλους, όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη εφαρμογή. Κατά την παρεμβολή στις κορυφές του καννάβου ακολουθήθηκαν διάφορες τεχνικές, όπως η τεχνική του κεντροβαρικού μέσου όρου και της σημειακής προσαρμογής-kriging του προγράμματος *geogrid*, καθώς και η ρουτίνα *surface* των GMT [45], η οποία πραγματοποιεί την παρεμβολή με τη χρήση *splines* συνεχούς καμπυλότητας [34]. Η τελευταία μέθοδος πρόγνωσης σε πλέγμα επιλέχθηκε

τελικώς, λόγω των ελάχιστων διαφορών στα στατιστικά στοιχεία του πεδίου-πλέγματος σε σύγκριση με τα αυθεντικά δεδομένα. Μια αναλυτική μελέτη των διαδικασιών πρόγνωσης αλτιμετρικών και θαλάσσιων δεδομένων σε πλέγμα παρουσιάζεται από τον Kirby [20]. Στη συνέχεια προσεγγίστηκε η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος του θορύβου και του σήματος των αλτιμετρικών δεδομένων, όπως περιγράφεται στην εφαρμογή της Ανατολικής Μεσογείου.

Η δεύτερη μέθοδος προσδιορισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου, η οποία ονομάστηκε για συντομία τεχνική SLA, βασίζεται στις ανωμαλίες της θαλάσσιας στάθμης. Οι ανωμαλίες αυτές αντιπροσωπεύουν τις αποκλίσεις από τη μέση θαλάσσια επιφάνεια και υπολογίζονται σε συγκεκριμένες γεωγραφικές περιοχές για κάθε κύκλο. Για ένα συγκεκριμένο ίχνος τροχιάς και για κάθε κύκλο, τα διορθωμένα δεδομένα παρεμβάλλονται σε συγκεκριμένες θέσεις κάθε 7 χιλιόμετρα χρησιμοποιώντας κυβικές καμπύλες splines [7]. Σε αυτήν την περίπτωση, οι διαφορές από κύκλο σε κύκλο υπολογίζονται πριν από τη διαδικασία πρόγνωσης σε πλέγμα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται όσο το δυνατό περισσότερο στο σφάλμα στην τελική εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος. Οι διαφορές υπολογίστηκαν μόνο στις περιοχές εκείνες, όπου υπήρχαν τιμές και για τους δύο διαδοχικούς κύκλους. Ο υπολογισμός της τελικής συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 6. Ο υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σφάλματος των μετρήσεων της γεωδαιτικής φάσης του ERS-1, ακολουθώντας τη μεθοδολογία των ανωμαλιών της θαλάσσιας στάθμης, δεν είναι δυνατός, αφού απουσιάζει η ακριβώς επαναλαμβανόμενη πληροφορία στις συγκεκριμένες γεωγραφικές θέσεις.

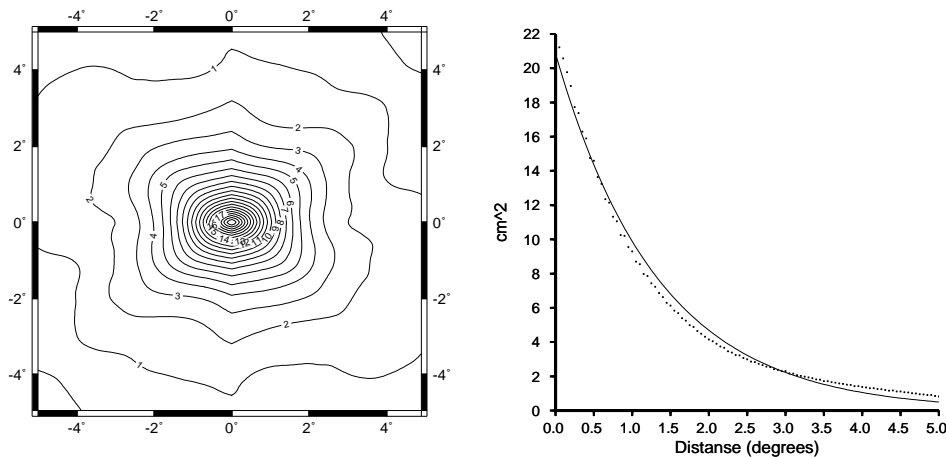
Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην προσέγγιση των συνάρτησεων μεταβλητότητας σφάλματος για κάθε δορυφόρο, μέσα στα όρια της περιοχής μελέτης και για τις συγκεκριμένες χρονικές περιόδους ανάλυσης. Ο υπολογισμός βασίζεται στην αντίστροφη μέθοδο υπολογισμού της συνάρτησης μεταβλητότητας, η οποία παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2 (inverse correlogram approach). Οι υπολογισμένες μεταβλητότητες παρουσιάζονται στον πίνακα 7.23. Από τον

Πίνακας 7.23: Υπολογισμένες μεταβλητότητες για κάθε δορυφόρο και κάθε έτος (τιμές σε  $\text{cm}^2$ ).

Δορυφόρος και έτος	περίπτωση CORSSH	περίπτωση SLA
ERS1-C 1993	47.294	35.890
T/P 1993	32.573	27.704
ERS1-GM 1994	33.280	-
T/P 1994	30.085	23.601
ERS1-G 1995	33.579	34.356
ERS2-A 1995	34.677	32.823
T/P 1995	28.738	26.175
ERS1-G 1996	42.465	33.305
ERS2-A 1996	44.134	34.482
T/P 1996	23.956	22.605
ERS2-A 1997	45.784	34.661
T/P 1997	27.498	25.324
ERS2-A 1998	44.831	31.510
T/P 1998	21.919	20.457

πίνακα διακρίνεται η διαφορά στην εκτίμηση της μεταβλητότητας χρησιμοποιώντας τις δύο διαφορετικές μεθοδολογίες. Οι μεταβλητότητες σφάλματος είναι κατά κανόνα μεγαλύτερες στην περίπτωση της χρησιμοποίησης της μεθόδου των διορθωμένων υψών της θαλάσσιας στάθμης (CORSSH), παρά στην περίπτωση της μεθόδου των ανωμαλιών της θαλάσσιας στάθμης (SLA). Η διαφορά αυτή μπορεί να αποδοθεί στην εκ των προτέρων διαδικασία πρόγνωσης σε πλέγμα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ρουτίνα *surface* χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία των καννάβων, λόγω της συμφωνίας των στατιστικών με τα αυθεντικά σημειακά δεδομένα. Παρόλα αυτά

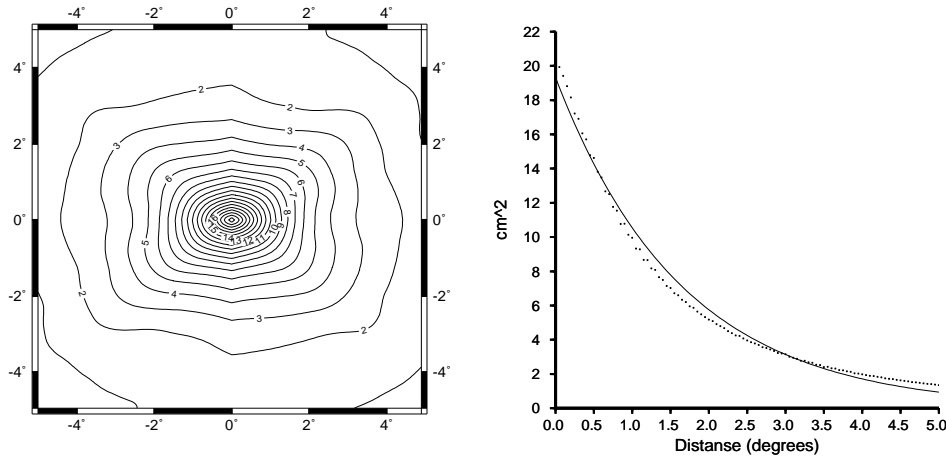
στην περίπτωση μεγάλων κενών στην κατανομή των δεδομένων, ο κάναβος που προκύπτει είναι εξομαλυνμένος σε σχέση με πεδία πλήρης κάλυψης δεδομένων. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μέθοδο, αν και η διαδικασία της πρόγνωσης σε πλέγμα περιορίζεται μόνο στο τελευταίο βήμα πριν από τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος, πολλά κενά δεδομένων προκύπτουν λόγω της απουσίας κοινών μετρήσεων σε δύο διαδοχικούς κύκλους. Ο πίνακας 7.23 παρουσιάζει τις μεταβλητότητες σφάλματος του T/P ως τις μικρότερες σε μέγεθος σε σύγκριση με τους υπόλοιπους δορυφόρους. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στις υψηλές ακρίβειες των μετρήσεων του T/P, καθώς επίσης και στη διαφορετική διακριτική ικανότητα των δεδομένων σε σχέση με το σχηματισμό των δορυφόρων ERS. Η χαμηλή διακριτική ικανότητα των μετρήσεων του T/P έχει ως αποτέλεσμα επιπλέον εξομάλυνση του τελικού πεδίου και αντίστοιχη επίδραση στην εκτίμηση της μεταβλητότητας σφάλματος. Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι διδιάστατες συναρτήσεις μεταβλητότητας σφάλματος, όπως επίσης και οι εμπειρικές και αναλυτικές εκφράσεις των μονοδιάστατων συναρτήσεων μεταβλητότητας σφάλματος που προκύπτουν από την ολοκλήρωση ως προς το αζιμούθιο, για το έτος 1998 και για τα δεδομένα του T/P. Τα σχήματα αναφέρονται στις δύο διαφορετικές μεθόδους προσέγγισης των συναρτήσεων μεταβλητότητας σφάλματος των δεδομένων. Όπως και στην



Σχήμα 7.34: Διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος και η μονοδιάστατη αναπαράστασή της για τα δεδομένα του T/P και για το έτος 1998, ακολουθώντας την προσέγγιση CORSSH. Τα σημεία αντιπροσωπεύουν τις εμπειρικές τιμές και η συνεχής γραμμή την αναλυτική έκφραση, η οποία βασίζεται στο εκθετικό μοντέλο  $C = a \cdot e^{-b\psi}$ , όπου  $a = 20.852$  και  $b = 0.746$ . Ισοδιάστατη καμπύλων  $1 \text{ cm}^2$ .

προηγούμενη εφαρμογή δημιουργήθηκε ένα γενικευμένο αρχείο σεναρίου (script file) για την αυτοματοποίηση της όλης διαδικασίας και την εκτίμησης της χρονικής διάρκειας των υπολογισμών. Η συνολική χρονική διάρκεια της διαδικασίας έφτασε τις 9 ώρες, 29 λεπτά και 33 δευτερόλεπτα σε έναν προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Pentium III στα 450 MHz σε περιβάλλον Linux (πυρήνας 2.2.9).

Οι υπολογισμένες συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος του θορύβου και του σήματος, τα πεδία των μέσων ετήσιων αλτιμετρικών παρατηρήσεων, οι παρατηρήσεις των ανωμαλιών της βαρύτητας και το προσομοιωμένο πεδίο των σφαλμάτων τους εισήχθησαν σε ένα σύστημα πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 6. Οι εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας υπολογίστηκαν, τόσο με την χρησιμοποίηση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων που υπολογίζονται με τη μέθοδο CORSSH, όσο και με τη χρήση των συναρτήσεων της μεθόδου SLA. Οι μέσες ετήσιες



Σχήμα 7.35: Διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος και η μονοδιάστατη αναπαράστασή της για τα δεδομένα του T/P και για το έτος 1998, ακολουθώντας την προσέγγιση SLA. Τα σημεία αντιπροσωπεύουν τις εμπειρικές τιμές και η συνεχής γραμμή την αναλυτική έκφραση, η οποία βασίζεται στο εκθετικό μοντέλο  $C = a \cdot e^{-b\psi}$ , όπου  $a = 19.326$  και  $b = 0.606$ . Ισοδιάσταση καμπύλων  $1 \text{ cm}^2$ .

εκτιμήσεις με συναρτήσεις πυκνότητας φάσματος υπολογισμένες από την CORSSH μέθοδο παρουσιάζονται στον πίνακα 7.24, ενώ οι διαφορές στις εκτιμήσεις από τη χρησιμοποίηση των δύο διαφορετικών μεθόδων υπολογισμού των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων παρατίθενται στον πίνακα 7.25. Σημειώνεται, ότι οι μεγάλες τιμές της ωκεάνιας

Πίνακας 7.24: Μέσες ετήσιες εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας (τιμές σε m).

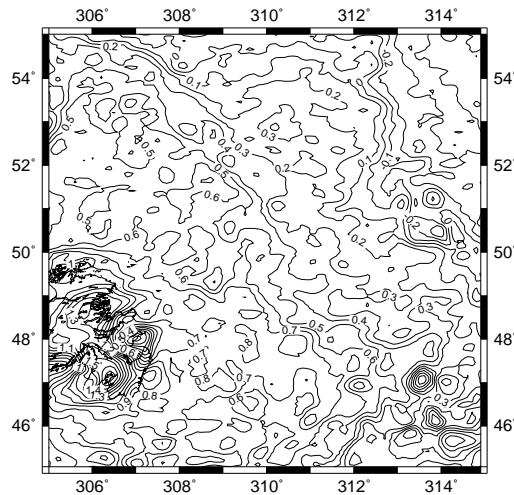
Έτος	M	E	MT	MTΣ	TA
1993	1.795	-0.533	0.379	0.533	$\pm 0.374$
1994	1.721	-0.585	0.373	0.527	$\pm 0.373$
1995	1.736	-0.544	0.372	0.518	$\pm 0.361$
1996	1.766	-0.558	0.388	0.533	$\pm 0.365$
1997	1.880	-0.518	0.393	0.551	$\pm 0.387$
1998	1.914	-0.507	0.388	0.542	$\pm 0.379$

τοπογραφίας παρουσιάζονται στις περιοχές ηπειρωτικών εκτάσεων και θεωρούνται εξ ορισμού λανθασμένες. Οι διαφορές στις εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας κυκλοφορίας που προκύπτουν από τη χρήση συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων, οι οποίες προέκυψαν με τις δύο διαφορετικές μεθόδους (CORSSH και SLA) είναι ελάχιστες, όπως παρουσιάζονται και στον πίνακα 7.25. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει τη χαμηλή ευαισθησία της μεθόδου στο θόρυβο εισόδου, κάτι που αναφέρθηκε και στις μελέτες προσομοίωσης του πρώτου μέρους, καθώς επίσης και σε διάφορες άλλες μελέτες [4], [2]. Η εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας για το έτος 1996 απεικονίζεται στο σχήμα 7.36, όπου τα χαρακτηριστικά μικρού μήκους κύματος που εμφανίζονται αποδίδονται στην ανομοιογενή κατανομή των θαλάσσιων δεδομένων και στην προβληματική προσέγγιση των σφαλμάτων στις ανωμαλίες ελευθέρου αέρα στη θάλασσα (βλ., π.χ., ανάλυση από Engelis

Πίνακας 7.25: Διαφορές στις ετήσιες εκτιμήσεις του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας από τη χρησιμοποίηση διαφορετικών μεθόδων για τον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλιμάτων (τιμές σε m).

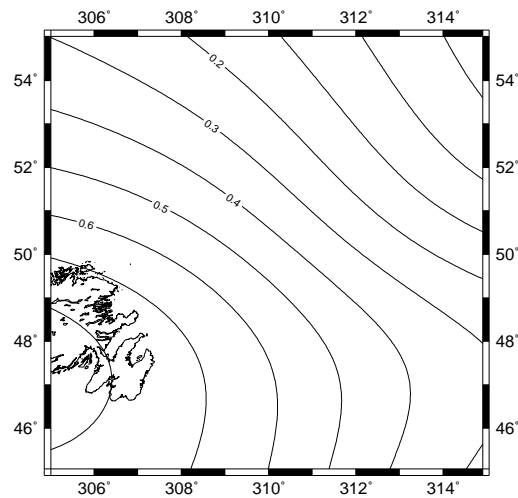
Έτος	M	E	MT	MTΣ	TA
1993	0.014	-0.012	0.001	0.003	±0.003
1994	0.004	-0.004	0.001	0.001	±0.001
1995	0.008	-0.009	0.000	0.002	±0.002
1996	0.010	-0.016	0.000	0.003	±0.003
1997	0.011	-0.017	0.000	0.003	±0.003
1998	0.018	-0.031	0.000	0.004	±0.004

[11]). Η μεγάλη κλίση των καμπύλων ίσης τιμής (gradients) στο κάτω αριστερά μέρος του σχήματος αποδίδονται στην παρουσία των ηπειρωτικών εκτάσεων.



Σχήμα 7.36: Εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας για το έτος 1996. Ισοδιάσταση καμπύλων 0.1 m.

Ακολούθησαν δύο συγκρίσεις με μοντέλα σφαιρικών αρμονικών της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας. Μια συγκρίσιμη λύση με την ανάλυση της παγκόσμιας δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας του Levitus [23] σε σφαιρικές αρμονικές, όπως παρουσιάστηκε από τον Engelis [12], λαμβάνεται με την εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού φίλτρου Gauss στις εκτιμήσεις της μεθόδου των συστημάτων εισόδου-εξόδου. Τα μήκη κύματος μικρότερα από τις  $10^\circ$  ( $1111 \text{ km}$  - βαθμός ανάπτυξης  $36$ ) απομακρύνθηκαν. Η επιλογή αυτή πραγματοποιήθηκε έτσι ώστε να διατηρηθούν μόνον οι συχνότητες οι άμεσα συγκρίσιμες με τη λύση του Engelis. Οι φιλτραρισμένες εκτιμήσεις της ωκεάνιας τοπογραφίας παρουσιάζονται στο σχήμα 7.37. Συγκρίνοντας το σχήμα 7.37 με το σχήμα 14 του Engelis [12] παρατηρούνται όμοια χαρακτηριστικά στις δύο προσεγγίσεις. Η συνολική συμπεριφορά του φιλτραρισμένου πεδίου παρουσιάζεται σχεδόν η ίδια με τη λύση με καθαρά ωκεανογραφικά δεδομένα. Εντούτοις, παρατηρείται μια διαφορά στάθμης ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις. Αυτή η διαφορά στάθμης είναι δυνατό να εξηγηθεί



Σχήμα 7.37: Εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας για το έτος 1996 μετά την εφαρμογή χαμηλοπερατού φίλτρου. Ισοδιάσταση καμπύλων 0.1 m.

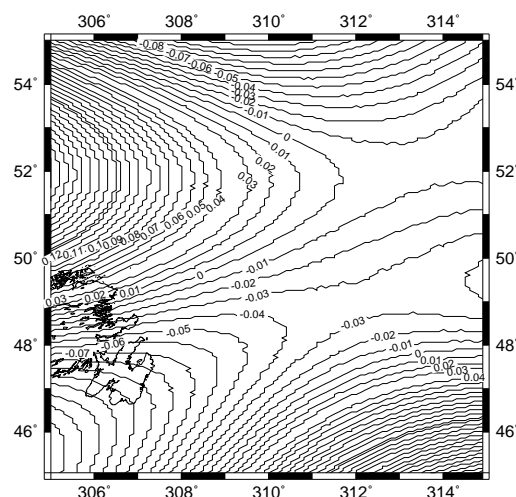
από τη διαφορά μεταξύ της εκτίμησης του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας, η οποία υπολογίζεται με τη θεωρία των συστημάτων και του συνολικού μεγέθους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας, όπως περιγράφεται από τη λύση του Engelis. Ειδικότερα στην περιοχή μελέτης είναι παρόντα το Ρεύμα του Labrador και οι άκρες του Ρεύματος του Κόλπου, τα οποία επηρεάζουν την τοπική λύση. Μια ακόμη λογική εξήγηση για την ύπαρξη της διαφοράς στάθμης ανάμεσα στις δύο λύσεις είναι η συνήθης αδυναμία των ωκεανογραφικών λύσεων: μια επιφάνεια ίσης πίεσης των 2250 mb χρησιμοποιήθηκε ως ισοδυναμική επιφάνεια αναφοράς της ωκεανογραφικής λύσης [11]. Μια τέτοια επιφάνεια φαίνεται πιο πιθανό να αντιπροσωπεύει μια σταθμική επιφάνεια σε παγκόσμια κλίμακα [24]. Η αβεβαιότητα της παραπάνω επιλογής είναι δυνατό να οδηγήσει στη διαφορά στάθμης μεταξύ των δύο λύσεων. Ακόμη, η περίοδος μελέτης των δύο εκτιμήσεων διαφέρει, με αποτέλεσμα κάποιες ασυμφωνίες να εισάγονται και από αυτή τη διαφορά στη χρονική κλίμακα. Τέλος, η αβεβαιότητα της επιφάνειας αναφοράς των θαλάσσιων ανωμαλιών της βαρύτητας σε συνδυασμό με το προβληματικό περιβάλλον των μετρήσεων εισάγει ποικιλία σφαλμάτων, τα οποία και αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4.

Μια δεύτερη σύγκριση της τοπικής εκτίμησης και της παγκόσμιας λύσης σφαιρικών αρμονικών του Pavlis et al. [31] πραγματοποιήθηκε στη συνέχεια. Οι συντελεστές των σφαιρικών αρμονικών της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας προσδιορίστηκαν μετά από μια προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων στην έξοδο του Παράλληλου Μοντέλου Ωκεάνιας Κυκλοφορίας (POCM-4B) [35], μέχρι το βαθμό ανάπτυξης 30. Περισσότερα για Παράλληλο Μοντέλο Ωκεάνιας Κυκλοφορίας δίνονται στο κεφάλαιο 5. Τα αποτελέσματα του POCM-4B που χρησιμοποιήθηκαν, προσδιορίστηκαν για την περίοδο 1993 και 1994 (κύκλοι του T/P 11–84) [31]. Για τη σύγκριση χρησιμοποιήθηκε η εκτίμηση του στάσιμου μέρους της δυναμικής ωκεάνιας τοπογραφίας για το έτος 1994. Η εφαρμογή ενός χαμηλοπερατού φίλτρου με αποκοπτόμενο μήκος κύματος τα 1333.33 km (αρμονικός βαθμός 30) οδήγησε σε εκτίμηση συγκρίσιμη με την ωκεανογραφική λύση. Οι δύο λύσεις συγκρίθηκαν πριν και μετά την εφαρμογή παραμετρικών μοντέλων απομάκρυνσης της διαφοράς στάθμης και της μέσης τάσης και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 7.26. Όπως φαίνεται στον πίνακα 7.26, η τοπική αλτιμετρική/βαρυτημετρική λύση και η παγκόσμια καθαρά ωκεανογραφική λύση συμφωνούν

Πίνακας 7.26: Διαφορές μεταξύ της φιλτραρισμένης εκτίμησης της ωκεάνιας τοπογραφίας και της παγκόσμιας λύσης σφαιρικών αρμονικών του μοντέλου POCM-4B (τιμές σε m).

	M	E	MT	TA
Πριν την εφαρμογή παραμετρικού μοντέλου	-0.957	-1.380	-1.258	$\pm 0.092$
Μετά την εφαρμογή παραμετρικού μοντέλου	0.281	-0.152	0.000	$\pm 0.073$

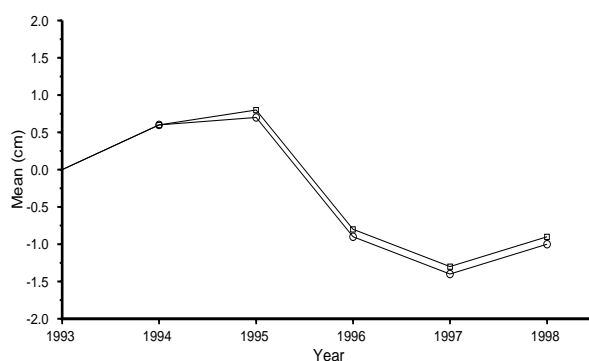
με μια ακρίβεια της τάξης των 7.3 cm, ύστερα από την απομάκρυνση της διαφοράς στάθμης (bias) και της κλίσης (trend). Η διαφορά στάθμης και η κλίση που παρουσιάζονται μπορούν να αποδοθούν στους ίδιους λόγους που περιγράφηκαν και στην προηγούμενη σύγκριση. Η διαφορετική μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για κάθε εκτίμηση (παγκόσμια λύση με τη βοήθεια ανάπτυξης σε σφαιρικές αρμονικές – τοπική λύση στηριζόμενη σε επίπεδες συναρτήσεις πυρήνες και ακολουθώντας τη θεωρία των συστημάτων), όπως επίσης και η απουσία του χρονικά μεταβαλλόμενου μέρους της ωκεάνιας τοπογραφίας στην τοπική λύση είναι υπεύθυνες για την παρουσία υπολοιπόμενων μεγάλου μήκους κύματος σφαλμάτων, τα οποία και διακρίνονται καθαρά στο σχήμα 7.38. Οι διαφορετικές μεθοδολογίες (παγκόσμια και τοπική προσέγγιση) και



Σχήμα 7.38: Διαφορές μεταξύ της τοπικής φιλτραρισμένης εκτίμησης της ωκεάνιας τοπογραφίας και της παγκόσμιας λύσης για το 1994, ύστερα από την απομάκρυνση της διαφοράς στάθμης και της μέσης τάσης. Ισοδιάσταση καμπύλων 0.01 m.

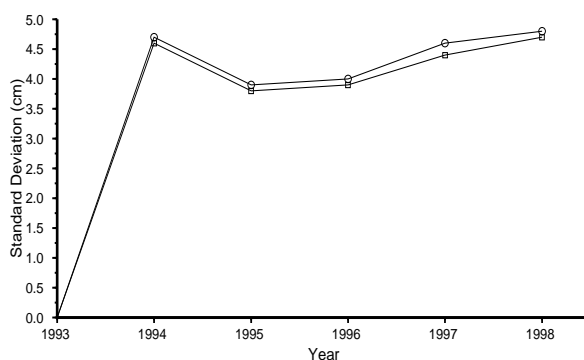
οι επιδράσεις τους στην τελική εκτίμηση παρουσιάζονται από τον Engelis [10].

Για την επιβεβαίωση του στάσιμου χαρακτήρα της εκτίμησης της ωκεάνιας τοπογραφίας υπολογίστηκαν οι διαφορές σε σχέση με την εκτίμηση του 1993. Η μέση τιμή των διαφορών, τόσο στην περίπτωση της CORSSH μεθόδου, όσο και στην περίπτωση της SLA μεθόδου προσδιορισμού των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, παρουσιάζονται στο σχήμα 7.39. Όπως φαίνεται, οι διαφορές στη μέση τιμή βρίσκονται πολύ κοντά στο μηδέν μέσα στα όρια της χρονικής περιόδου που εξετάζεται. Ένα παρόμοιο διάγραμμα παρουσιάζεται στο σχήμα 7.40 που αφορά στις TA των διαφορών με αναφορά την εκτίμηση της ωκεάνιας τοπογραφίας του 1993. Οι TA παρουσιάζουν μια σχετικά σταθερή ακρίβεια, μέσα στα όρια των ακριβειών της



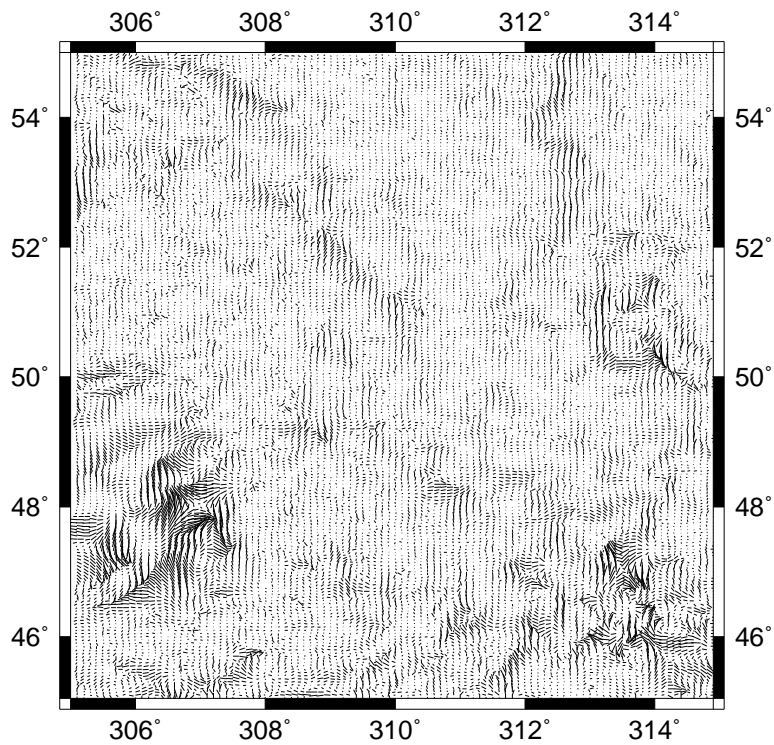
Σχήμα 7.39: Διαφορές στη μέση τιμή των εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας με έτος αναφοράς το 1993 (τιμές σε cm). □: CORSSH μέθοδος. ○: SLA μέθοδος.

μεθόδου των συστημάτων. Βέβαια, για την επιβεβαίωση όλων των παραπάνω εξυπακούεται ότι είναι απαραίτητη η ανάλυση δεδομένων για μεγαλύτερη χρονική περίοδο μελέτης.

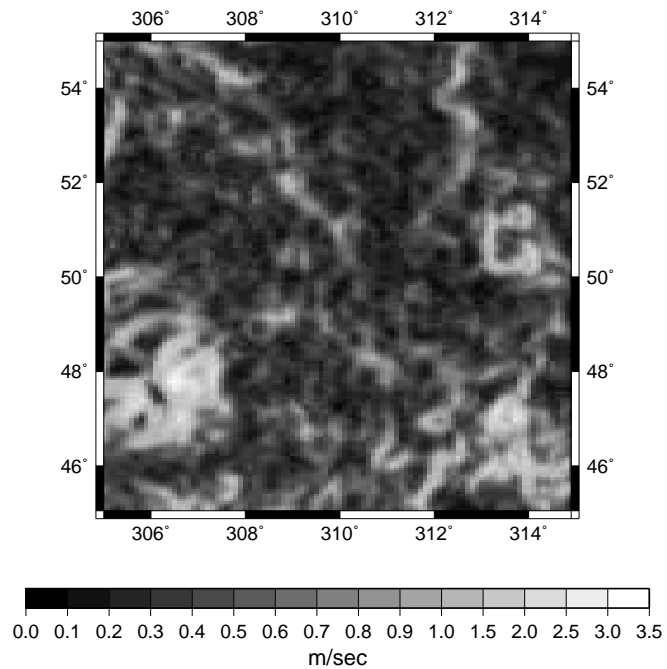


Σχήμα 7.40: Διαφορές στην τυπική απόκλιση των εκτιμήσεων του στάσιμου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας με έτος αναφοράς το 1993 (τιμές σε cm). □: CORSSH μέθοδος. ○: SLA μέθοδος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει στη συγκεκριμένη περίπτωση η μελέτη της κίνησης των ρευμάτων στην περιοχή. Οι εξισώσεις της γεωστροφικής ροής στην περίπτωση ωκεάνιων εκτάσεων ισχύουν με ικανοποιητική ακρίβεια και παρουσιάζουν την κίνηση των κυριότερων σταθερών ρευμάτων των ωκεανών. Η διεύθυνση των ρευμάτων στην περίπτωση του Βορείου Ατλαντικού παρουσιάζεται στο σχήμα 7.41. Το μέγεθος των ταχυτήτων των ρευμάτων παρουσιάζεται στο σχήμα 7.42, όπου και διακρίνονται οι μεγάλες ταχύτητες των ρευμάτων στον ανοιχτό ωκεανό. Παρατηρούνται βέβαια και μεγάλα μεγέθη ταχυτήτων των ρευμάτων κοντά στις ηπειρωτικές περιοχές. Οι τιμές αυτές είναι αναξιόπιστες, αφού, όπως έχει αναφερθεί, η γεωστροφική μέθοδος αποκλίνει κοντά στις ακτές. Οι τιμές αυτές πρέπει να αγνοούνται σε μία μελέτη της κυκλοφορίας των υδάτων. Από τη μελέτη των δύο σχημάτων διακρίνεται η συνιστώσα του Ρεύματος του Κόλπου στο κάτω μέρος και δεξιά του σχήματος, η οποία κινείται προς ανατολάς. Η συνιστώσα αυτή συνεχίζει μέχρι τις ακτές της Μεγάλης Βρετανίας και επιστρέφει στις ανατολικές πολιτείες των Η.Π.Α. πραγματοποιώντας έναν από τους πιο γνωστούς μεγάλους κύκλους (gyres) και έχοντας ως αποτέλεσμα το ισχυρό Ρεύμα του Κόλπου. Στο κέντρο



Σχήμα 7.41: Οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των ρευμάτων στην περιοχή του Labrador ακολουθώντας τη γεωστροφική θεώρηση της ωκεάνιας κυκλοφορίας.



Σχήμα 7.42: Το μέγεθος της ταχύτητας ροής των ρευμάτων στην περιοχή του Labrador.

της περιοχή διακρίνεται ένα άλλο ρεύμα που αντιστοιχεί στη συνισταμένη των ρευμάτων της περιοχής του Labrador. Η κίνηση των ρευμάτων όπως παρουσιάζεται στα σχήματα 7.41 και 7.42 αντιπροσωπεύουν τη σταθερή ροή στην περίπτωση των παραδοχών της γεωστροφικής θεωρίας. Όπως φαίνεται, τα μεγέθη των ταχυτήτων ροής των υδάτων στην περιοχή του Βόρειου Ατλαντικού δεν ξεπερνούν τις τιμές του 1.5 – 2 m/sec στον ανοιχτό ωκεανό. Η διαφορά του μεγέθους των διανυσμάτων της παρούσας εφαρμογής και της εφαρμογής στην Ανατολική Μεσόγειο οφείλεται κατά κύριο λόγο στις αποκλίσεις της γεωστροφικής θεώρησης στην περίπτωση κλειστών θαλάσσιων περιοχών. Η περίπτωση του Βόρειου Ατλαντικού μπορεί να θεωρηθεί ως πιο αντιπροσωπευτική για τη μελέτη της κίνησης των υδάτων, βάσει της γεωστροφικής θεώρησης και γι' αυτό επιλέχθηκε για την ανάλυση.

### 7.3.3 Προσδιορισμός γεωειδούς στον Ελληνικό χώρο. Εφαρμογή συστήματος απλής εισόδου - απλής εξόδου

Παρουσιάζεται η εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων εισόδου - εξόδου στην προσέγγιση του γεωειδούς στον Ελληνικό χώρο. Η παρούσα αριθμητική εφαρμογή αποτελεί την εξέλιξη στην προσέγγιση του γεωειδούς στον Ελληνικό χώρο, όπως παρουσιάζεται από τους Τζιανός and Ανδριτσάνος [38]. Για την προσέγγιση χρησιμοποιείται σύστημα απλής εισόδου ανωμαλιών της βαρύτητας και απλής εξόδου αποχών του γεωειδούς. Οι τιμές των ανωμαλιών της βαρύτητας που χρησιμοποιούνται είναι σημειακές και αναφέρονται στο ελλειψοειδές του GRS80 [30] και στο δίκτυο αναφοράς της βαρύτητας IGSN71 [26]. Τα δεδομένα προέρχονται από τη βάση βαρυτημετρικών δεδομένων [21] και από το ψηφιακό αρχείο της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού. Το σύνολο των σημειακών τιμών είναι 75158.

Για τον υπολογισμό των τοπογραφικών διορθώσεων και των έμμεσων επιδράσεων στα υψόμετρα του γεωειδούς χρησιμοποιήθηκε το παγκόσμιο μοντέλο τοπογραφίας GLOBE [14], το οποίο έχει διακριτική ικανότητα  $30'' \times 30''$  και αναφέρεται μόνο στις ηπειρωτικές εκτάσεις. Επιλέχθηκε μια ευρύτερη περιοχή από  $30^\circ \leq \phi \leq 46^\circ$  και  $14^\circ \leq \lambda \leq 33^\circ$ , από τα δεδομένα της οποίας υπολογίστηκαν οι επιδράσεις λόγω αναγλύφου. Το πεδίο περιέχει συνολικά  $1921 \times 2281 = 4381801$  υψόμετρα. Στις θαλάσσιες περιοχές αποδόθηκε η μηδενική τιμή. Οι υπολογισμένες τιμές των διορθώσεων λόγω αναγλύφου και της έμμεσης επίδρασης στα υψόμετρα του γεωειδούς παρουσιάζονται στον πίνακα 7.27. Στον πίνακα 7.27 παρουσιάζονται

Πίνακας 7.27: Οι επιδράσεις του αναγλύφου.

	M	E	MT	MTΣ	TA
Διορθώσεις λόγω αναγλύφου $t_c$ (mGal)	89.795	-10.561	2.373	3.464	$\pm 2.524$
Έμμεση επίδραση $N_{ind}$ (m)	0.000	-0.295	-0.009	0.027	$\pm 0.025$

αρνητικές τιμές των διορθώσεων λόγω αναγλύφου, οι οποίες σύμφωνα με τη θεωρία είναι λανθασμένες. Οι τιμές αυτές οφείλονται κατά κύριο λόγο στην επίδραση της καμπυλότητας της Γης και λαμβάνονται ως μηδενικές [13].

Τα σημειακά δεδομένα αναφέρθηκαν καταρχήν στα δύο παγκόσμια γεωδυναμικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν: το EGM96 και το GPM98b. Η στατιστική ανάλυση των τιμών των μετρήσεων πριν και μετά την αναγωγή στα μοντέλα παρουσιάζεται στον πίνακα 7.28. Όπως

Πίνακας 7.28: Οι ανηγμένες στα γεωδυναμικά μοντέλα παρατηρήσεις (τιμές σε mGal).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g_{FA}$	276.920	-222.470	-9.979	75.867	$\pm 75.208$
$\Delta g_{FA} - \Delta g_{EGM96}$	279.455	-134.694	-3.870	28.304	$\pm 28.038$
$\Delta g_{FA} - \Delta g_{GPM98}$	276.193	-218.651	-1.167	16.518	$\pm 16.476$

φαίνεται από τον πίνακα 7.28, η αναγωγή στα γεωδυναμικά μοντέλα εξομαλύνει το πεδίο των ανωμαλιών της βαρύτητας. Αυτό φαίνεται, τόσο από τη μέση τιμή, όσο και από την τυπική απόκλιση των ανηγμένων δεδομένων. Επίσης, διακρίνεται η επιπλέον εξομάλυνση των παρατηρήσεων με τη χρήση του παγκόσμιου μοντέλου πολύ υψηλής ανάπτυξης GPM98b. Ο βαθμός 1800, μέχρι τον οποίο αναπτύσσεται το μοντέλο, επιτρέπει τη βελτίωση στην αναγωγή των δεδομένων, αφού, κατά τη διαδικασία απομάκρυνσης, απομονώνονται μόνον οι πολύ υψηλές συχνότητες. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές που παρουσιάζονται αναφέρονται σε πιθανά χονδροειδή σφάλματα και απομακρύνονται, όπως σχολιάζεται στη συνέχεια. Θεωρητικά, η εξομάλυνση συνεχίζεται με την απομάκρυνση και των υψηλών συχνοτήτων επίδρασης της τοπογραφίας, μέσω των τοπογραφικών διορθώσεων. Τα πλήρως ανηγμένα δεδομένα (ανωμαλίες Faye) παρουσιάζονται στον πίνακα 7.29, για κάθε γεωδυναμικό μοντέλο. Αντίθετα με

Πίνακας 7.29: Οι ανωμαλίες Faye στην περιοχή του Ελλαδικού χώρου (τιμές σε mGal).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g_{FA} - \Delta g_{EGM96} + t_c$	369.250	-136.165	-1.497	28.343	$\pm 28.304$
$\Delta g_{FA} - \Delta g_{GPM98} + t_c$	365.988	-220.122	1.206	17.144	$\pm 17.101$

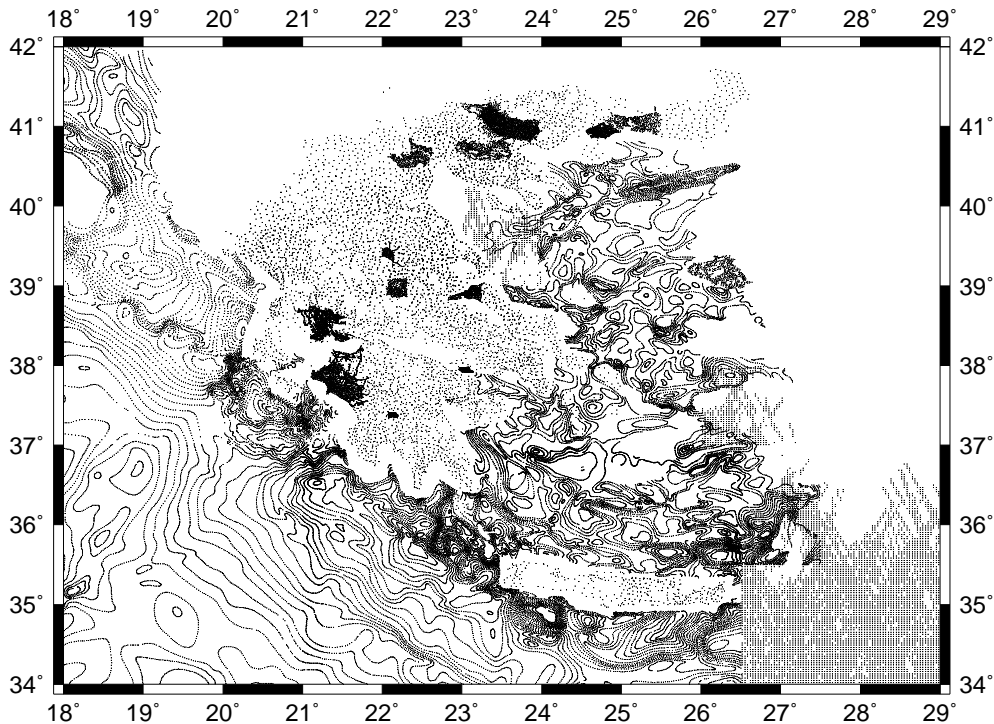
τα αναμενόμενα, οι διορθώσεις λόγω αναγλύφου χειροτερεύουν τα αποτελέσματα. Το γεγονός αυτό μπορεί να οφείλεται:

- στα σφάλματα στο ψηφιακό μοντέλο εδάφους, τα οποία οδηγούν αναπόφευκτα σε σφάλματα στον υπολογισμό των διορθώσεων. Τα ψηφιακά μοντέλα εδάφους, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, δημιουργούνται κυρίως με την επεξεργασία φωτογραμμετρικών και τηλεπισκοπικών εικόνων, όπως επίσης και με την ψηφιοποίηση κατάλληλων χαρτογραφικών υποβάθρων. Οι ακρίβειες των υψομέτρων που λαμβάνονται είναι συνήθως της τάξης των κάποιων μέτρων και σπανιότερα των κάποιων εκατοστών. Η αναγκαιότητα νέων ακριβέστερων μοντέλων τοπογραφίας και βαθυμετρίας οδήγησε τη NASA σε μία αποστολή αφιερωμένη στην τριδιάστατη αποτύπωση της γήινης επιφάνειας. Η αποστολή Shuttle Radar Topography Mission – SRTM [33] ξεκίνησε στις 11 Φεβρουαρίου του 2000 και αποσκοπεί στην αποτύπωση του μεγαλύτερου τμήματος της επιφάνειας με μεγάλη διακριτική ικανότητα.
- στα σφάλματα στις σημειακές ανωμαλίες της βαρύτητας. Η απομάκρυνση των χονδροειδών και συστηματικών σφαλμάτων είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια της μεθόδου της σημειακής προσαρμογής, όπως περιγράφεται από τον Tscherning [37].
- στο συνδυασμό των δύο προηγούμενων.

Με την απομάκρυνση των υψηλών και των χαμηλών συχνοτήτων μέσω της μεθόδου απομάκρυνσης-επαναφοράς, το πεδίο των υπολοιπόμενων σημάτων, θεωρητικά, πρέπει να είναι πλήρως εξομαλυνσμένο. Αυτό φυσικά δε συμβαίνει, γιατί δεν είναι δυνατό να απομακρυνθούν εντελώς τα χαρακτηριστικά του πεδίου με τη χρήση των θεωρητικών μοντέλων και των μοντέλων τοπογραφίας. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή η μέση τιμή των ανηγμένων μετρήσεων είναι αρκετά κοντά στο μηδέν, ενώ και η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων βελτιώνεται αισθητά με τη χρήση της μεθόδου απομάκρυνσης και επαναφοράς. Παρόλα αυτά, οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές που εμφανίζονται παραπέμπουν σε «ύποπτες» παρατηρήσεις. Για την απομάκρυνση των χονδροειδών σφαλμάτων ακολουθήθηκε ο έλεγχος  $3 \cdot rms$ . Οι παρατηρήσεις πάνω από το απόλυτο αυτό όριο απομακρύνθηκαν ως «ύποπτες». Τα στατιστικά των τελικών ανηγμένων παρατηρήσεων, ο αριθμός των σημείων που απέμειναν, καθώς και το ποσοστό των μετρήσεων που απομακρύνθηκαν παρουσιάζονται στον πίνακα 7.30. Στα σχήματα 7.43 και 7.44 παρουσιάζονται η αρχική και τελική κατανομή των τιμών βαρύτητας μετά την απομάκρυνση των «ύποπτων» μετρήσεων. Από τη μελέτη των σχημάτων φαίνεται ότι απομακρύνονται κυρίως ομάδες μετρήσεων από συγκεκριμένες περιοχές (π.χ., ομάδα μετρήσεων στο βόρειο

Πίνακας 7.30: Οι ανηγμένες τιμές των ανωμαλιών βαρύτητας, μετά την απομάκρυνση ύποπτων τιμών.

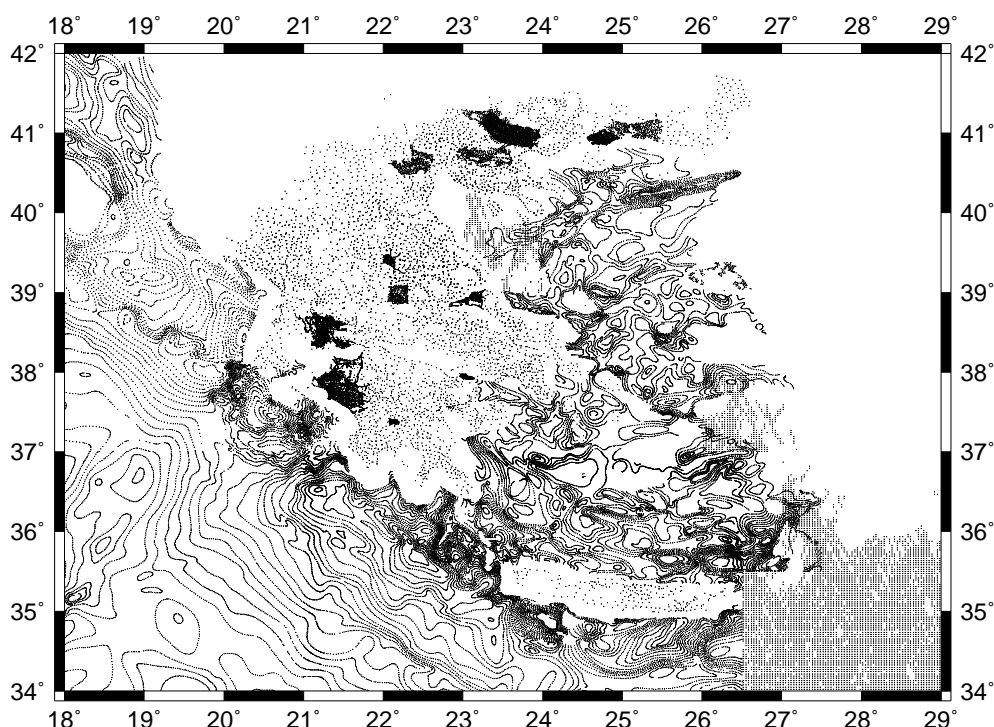
	M	E	MT mGal	MTΣ	TA	Απέμειναν	Απομακρύνθηκαν %
EGM96	77.863	-77.707	-1.860	25.960	±25.893	74012	1.5
GPM98	37.714	-37.681	-0.186	12.572	±12.570	72143	4



Σχήμα 7.43: Η κατανομή των ανηγμένων ανωμαλιών βαρύτητας πριν την απομάκρυνση των «ύποπτων» παρατηρήσεων (75158 τιμές).

τιμήμα της Εύβοιας). Αυτό είναι δυνατό να οφείλεται σε συστηματικά σφάλματα του συγκεκριμένου συνόλου τιμών. Επιπλέον, απομακρύνονται κάποιες τιμές στην ορεινή Ελλάδα, οι οποίες είναι πιθανότερο να περιέχουν κάποια σφάλματα λόγω αναγωγής. Είναι ευνόητο ότι με την τεχνική αυτή πιθανώς απομακρύνονται και μετρήσεις, οι οποίες δεν περιέχουν κάποιο σφάλμα, απλώς περιγράφουν τις έντονες γεωμορφολογικές ιδιαιτερότητες των περιοχών. Οι έντονες αυτές ιδιαιτερότητες χαρακτηρίζουν τα σημεία των μετρήσεων μετά την απομάκρυνση των μοντέλων βαρύτητας και τοπογραφίας. Οι μετρήσεις αυτές είναι όμως ελάχιστες στον αριθμό, αφού στη χειρότερη περίπτωση αφαιρείται μόλις το 4% των αρχικών μετρήσεων.

Ακολούθησε η πρόγνωση των δεδομένων σε πλέγμα. Χρησιμοποιήθηκαν δύο αλγόριθμοι παρεμβολής: η παρεμβολή με τη χρήση κεντροβαρικού μέσου όρου μέσω του προγράμματος *geogrid* [36] και η παρεμβολή με τη χρήση καμπύλων *splines* συνεχούς καμπυλότητας μέσω της υπορουτίνας *surface* [34]. Στην περίπτωση του EGM96 επιλέχθηκε ο κάρναβος που προέκυψε από την εφαρμογή κεντροβαρικού μέσου όρου, λόγω της προσέγγισης των στατιστικών τιμών με τα στατιστικά των αυθεντικών σημειακών δεδομένων. Τα δεδομένα σε μορφή πλέγματος, καθώς επίσης και πεδίο τυχαίου θορύβου TA 5 mGal εισάγονται στο σύστημα απλής εισόδου



Σχήμα 7.44: Η κατανομή των ανηγμένων ανωμαλιών βαρύτητας μετά την απομάκρυνση των «ύποπτων» παρατηρήσεων (72143 τιμές).

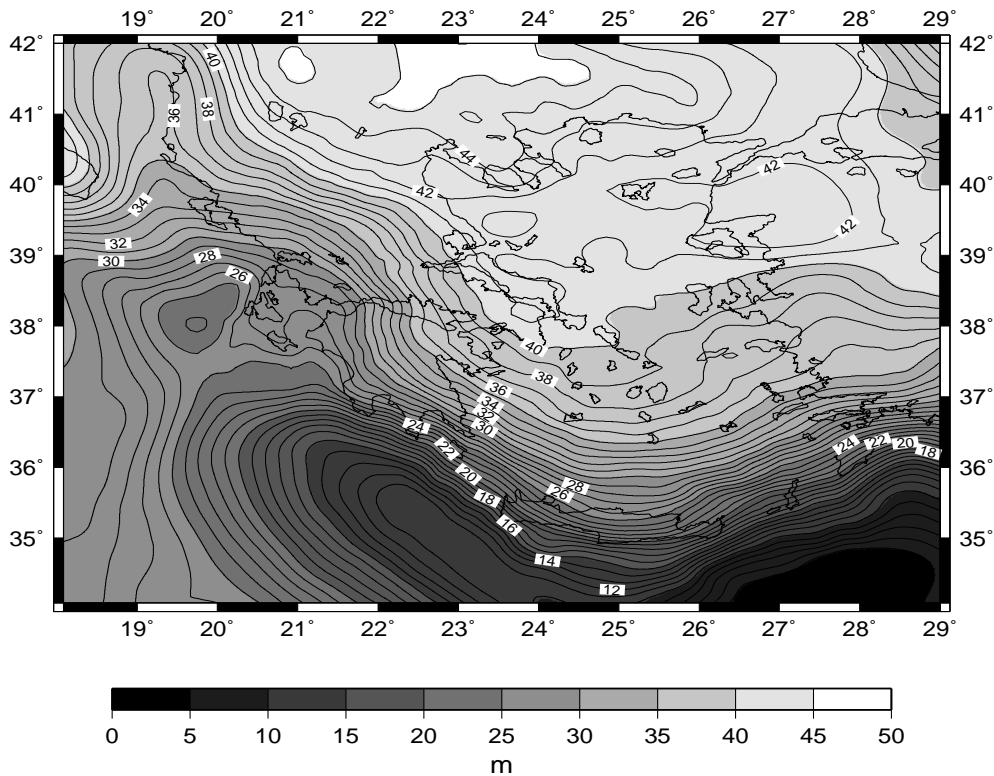
- απλής εξόδου με θόρυβο. Υπολογίζεται η συνεισφορά των ανηγμένων δεδομένων και επαναφέρονται οι αποχές του γεωδυναμικού μοντέλου και η έμμεση επίδραση στα υψόμετρα του γεωειδούς. Η όλη διαδικασία παρουσιάζεται στον πίνακα 7.31 και η τελική λύση για τον Ελληνικό χώρο απεικονίζεται στο σχήμα 7.45.

Πίνακας 7.31: Η διαδικασία επαναφοράς στην προσέγγιση των αποχών του γεωειδούς με τη χρήση του γεωδυναμικού μοντέλου EGM96 (τιμές σε m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$N_{EGM96}$	45.580	1.130	30.881	32.708	$\pm 10.779$
$N_{EGM96} + N_{I/O}$	46.024	1.398	31.640	33.476	$\pm 10.936$
$N_{EGM96} + N_{I/O} + N_{IND}$	46.011	1.398	31.630	33.465	$\pm 10.928$

Όμοια διαδικασία ακολουθήθηκε και την περίπτωση της χρησιμοποίησης του μοντέλου υψηλής ανάπτυξης GPM98. Στην περίπτωση αυτή μελετήθηκαν και οι επιδράσεις των διαφορετικών μεθόδων πρόγνωσης-παρεμβολής σε πλέγμα. Η διαδικασία της τελικής λύσης με τη χρήση της παρεμβολής μέσω κεντροβαρικού μέσου όρου παρουσιάζεται στον πίνακα 7.32 και η αντίστοιχη τελική λύση με τη χρήση καμπύλων παρεμβολής splines δίνεται στον πίνακα 7.33.

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς με παρατηρήσεις εισόδου τις ανωμαλίες ελεύθερου αέρα σε πλέγμα, οι οποίες προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση του αλγορίθμου του κεντροβαρικού μέσου όρου, όπως επίσης και η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος των προγνώσεων αποχών του γεωειδούς, παρουσιάζονται στο σχήμα 7.46 και 7.47, αντίστοιχα. Η συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος των εκτιμήσεων των



Σχήμα 7.45: Οι τελικές αποχές του γεωειδούς στον Ελληνικό χώρο χρησιμοποιώντας το γεωδυναμικό μοντέλο EGM96 ως μοντέλο αναφοράς.

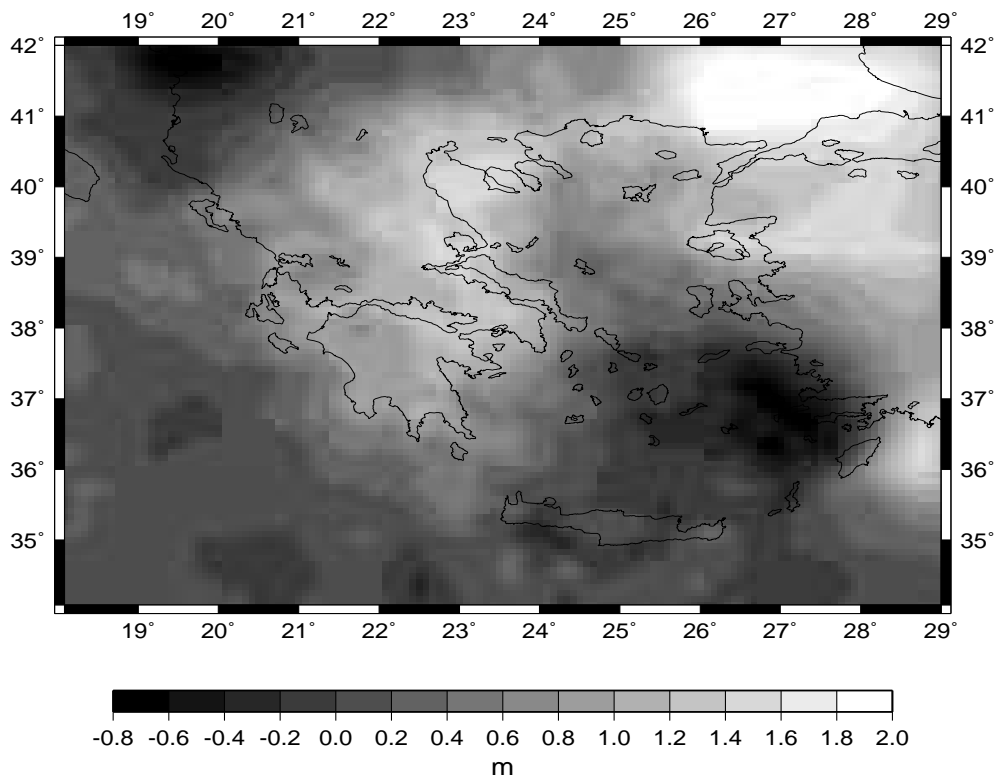
Πίνακας 7.32: Τα στατιστικά της επαναφοράς του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98 και των έμμεσων επιδράσεων στην περίπτωση πρόγνωσης των δεδομένων σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου (τιμές σε m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$NGPM_{98}$	46.689	1.616	30.980	32.763	$\pm 10.660$
$NGPM_{98} + N_{I/O}$	47.228	1.596	31.504	33.347	$\pm 10.932$
$NGPM_{98} + N_{I/O} + N_{IND}$	47.005	1.596	31.495	33.336	$\pm 10.925$

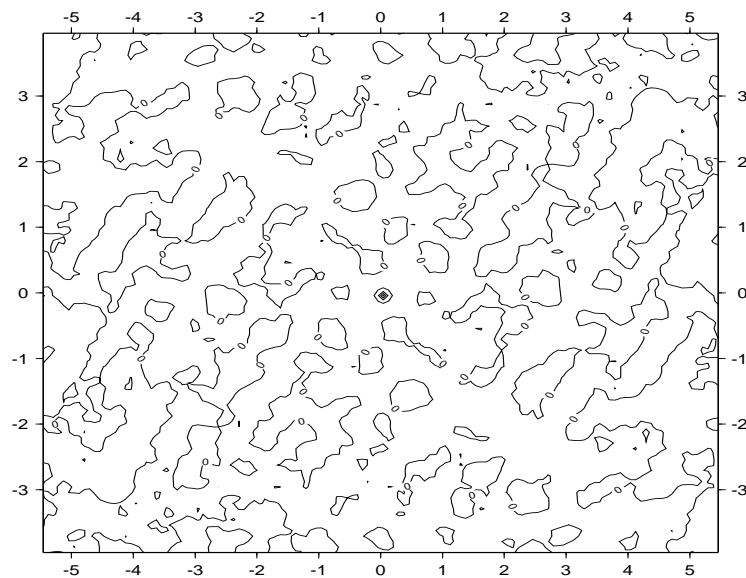
Πίνακας 7.33: Τα στατιστικά της επαναφοράς του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98 και των έμμεσων επιδράσεων στην περίπτωση πρόγνωσης των δεδομένων σε πλέγμα με τη βοήθεια καμπύλων splines (τιμές σε m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$NGPM_{98}$	46.689	1.616	30.980	32.763	$\pm 10.660$
$NGPM_{98} + N_{I/O}$	46.074	1.171	30.697	32.509	$\pm 10.702$
$NGPM_{98} + N_{I/O} + N_{IND}$	45.905	1.171	30.688	32.498	$\pm 10.695$

αποχών του γεωειδούς έχει τη μορφή συνάρτησης παλμού Dirac και είναι λογικό, αφού τα σφάλματα στην είσοδο παρουσιάζονται ως τυχαία. Η μεταβλητότητα της συνάρτησης υπολογίστηκε στα  $2.121 \text{ cm}^2$ . Η μορφή της συνάρτησης θα ήταν εντελώς διαφορετική στην περίπτωση χρησιμοποίησης πληροφορίας για την ακρίβεια των μετρήσεων και τη χρονική

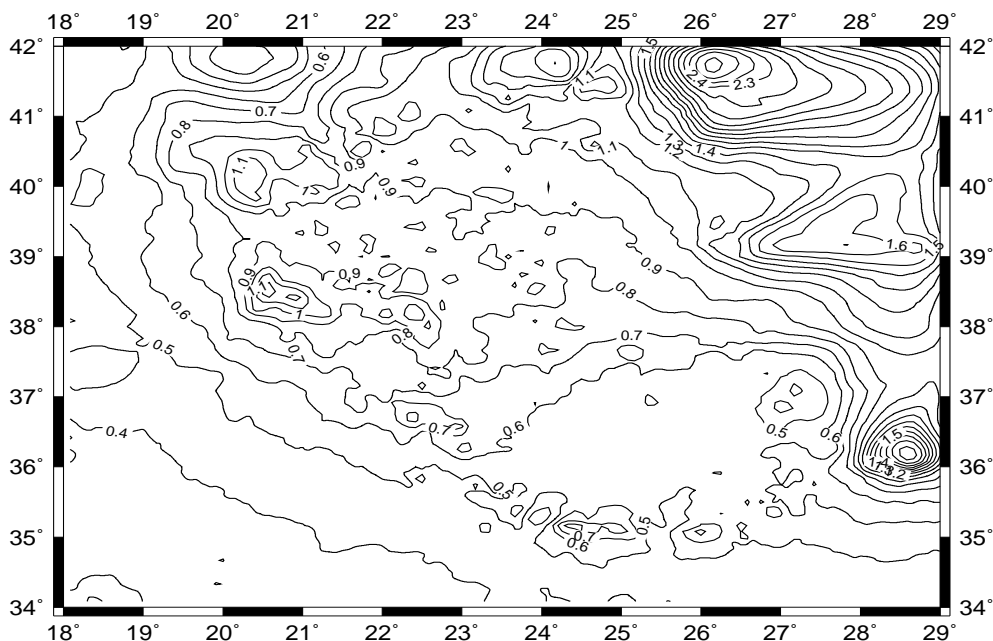


Σχήμα 7.46: Οι εκτιμήσεις των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς με μοντέλο αναφοράς το GPM98 και πρόγνωση των ανωμαλιών της βαρύτητας σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου (τιμές σε m).



Σχήμα 7.47: Η διδιάστατη συνάρτηση μεταβλητότητας σφάλματος των εκτιμήσεων των των ανηγμένων αποχών του γεωειδούς με μοντέλο αναφοράς το GPM98 και πρόγνωση των ανωμαλιών της βαρύτητας σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου (τιμές σε  $cm^2$ ).

περίοδο κάθε σειράς παρατηρήσεων, όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα παραδείγματα προσέγγισης της θαλάσσιας τοπογραφίας. Η επίδραση των διαφορετικών αλγορίθμων πρόγνωσης σε πλέγμα προκύπτει από τα αποτελέσματα των πινάκων 7.32 και 7.33. Οι διαφορές των εκτιμήσεων της μεθόδου εισόδου - εξόδου εξαιτίας των τεχνικών πρόγνωσης σε πλέγμα αποτυπώνονται στο σχήμα 7.48. Από το σχήμα 7.48 φαίνεται καθαρά ότι οι περιοχές



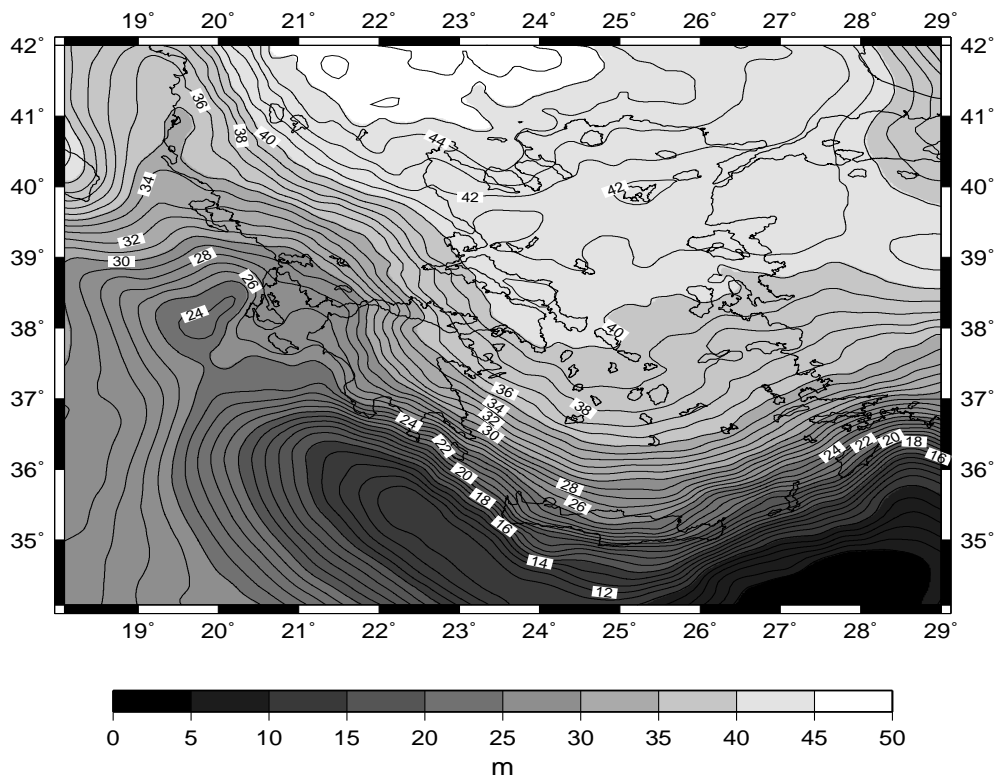
Σχήμα 7.48: Οι διαφορές στην εκτίμηση των αποχών του γεωειδούς της μεθόδου εισόδου - εξόδου εξαιτίας των διαφορετικών τεχνικών πρόγνωσης σε πλέγμα. Μοντέλο GPM98 (τιμές σε m).

που παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες διαφορές στη λύση βρίσκονται στα σύνορα του Ελλαδικού χώρο, όπου η απουσία δεδομένων οδηγεί στην πρόγνωση τιμών χαμηλής ακριβείας. Η τελική προσέγγιση των αποχών του γεωειδούς με μοντέλο αναφοράς το GPM98 παρουσιάζεται στο σχήμα 7.49, στην περίπτωση χρησιμοποίησης δεδομένων ανωμαλιών της βαρύτητας, τα οποία προκύπτουν από πρόγνωση σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου. Οι διαφορές στην εκτίμηση των τελικών αποχών του γεωειδούς μεταξύ των λύσεων που αναφέρονται σε διαφορετικά μοντέλα αναφοράς (GPM98 - EGM96) παρουσιάζονται στον πίνακα 7.34, ενώ η γεωγραφική κατανομή τους απεικονίζεται στο σχήμα 7.50. Όπως φαίνεται από το σχήμα

Πίνακας 7.34: Οι διαφορές μεταξύ των δύο λύσεων – GPM98 - EGM96 (τιμές σε m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
Διαφορές	2.202	-2.912	-0.135	0.527	±0.509

7.50, οι μεγάλες διαφορές εντοπίζονται κυρίως στις περιοχές με αραιή κάλυψη δεδομένων, ή και πλήρη απουσία παρατηρήσεων. Αυτό είναι φυσικό, αφού στις περιοχές αυτές η μόνη διαφορά στη λύση είναι η χρησιμοποίηση διαφορετικού μοντέλου αναφοράς. Σημειώνεται ότι και στις

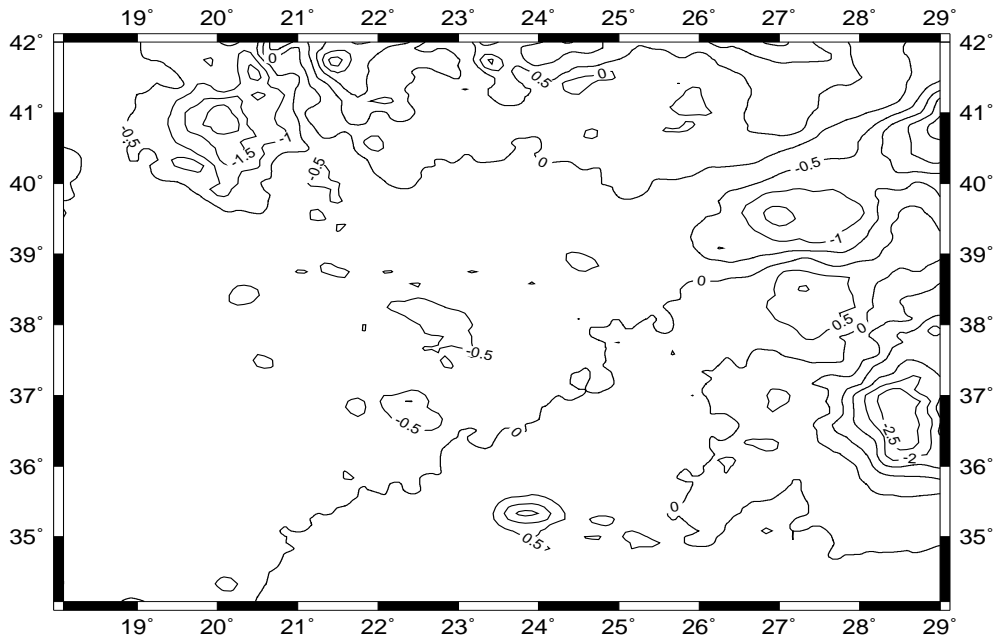


Σχήμα 7.49: Οι τελικές αποχές του γεωειδούς στον Ελληνικό χώρο χρησιμοποιώντας το γεωδυναμικό μοντέλο GPM98 ως μοντέλο αναφοράς.

δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα ανωμαλιών βαρύτητας, τα οποία αναφέρθηκαν σε πλέγμα με τη βοήθεια κεντροβαρικού μέσου όρου, έτσι ώστε κάθε διαφορά λόγω αλγορίθμου παρεμβολής να απαλειφθεί. Στις προβληματικές περιοχές, το μοντέλο υψηλής ανάπτυξης προσεγγίζει σε υψηλότερο βαθμό το φάσμα του πεδίου βαρύτητας και για το λόγο αυτόν αποτυπώνει καλύτερα τις αποχές του γεωειδούς.

Η παραπάνω σύγκριση γίνεται περισσότερο κατανοητή με τη χρησιμοποίηση εξωτερικών δεδομένων. Οι συγκρίσεις με δεδομένα, τα οποία δε σχετίζονται με τις βαρυτημετρικές λύσεις, είναι δυνατό να οδηγήσουν σε ασφαλέστερα συμπεράσματα για την ποιότητα των δύο εκτιμήσεων. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης εφαρμογής χρησιμοποιούνται μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμισης, οι οποίες συγκρίνονται με τις εκτιμήσεις των τελικών αποχών του γεωειδούς. Καταρχήν, χρησιμοποιούνται 35 σημεία στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλονίκης [3], [46]. Οι συγκρίσεις πραγματοποιήθηκαν πριν και μετά την εφαρμογή ενός μετασχηματισμού τεσσάρων παραμέτρων [19]. Τα αποτελέσματα πριν και μετά το μετασχηματισμό παρουσιάζονται στον πίνακα 7.35. Όπως φαίνεται, τα αποτελέσματα βελτιώνονται αισθητά με τη χρήση ενός μοντέλου υψηλής ανάπτυξης. Απομακρύνοντας τα υπολοιπόμενα σφάλματα λόγω διαφοράς στάθμης και κλίσεων η ΤΑ των διαφορών είναι της τάξης των 4 εκατοστών. Παρόμοια σύγκριση πραγματοποιήθηκε σε ακόμη 10 σημεία στην περιοχή του Αστακού Αιτωλοακαρνανίας, τα οποία μετρήθηκαν στα πλαίσια διπλωματικής εργασίας του Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του Α.Π.Θ. [48], [47]. Οι συγκρίσεις πριν και μετά την εφαρμογή του παραμετρικού μοντέλου μετασχηματισμού παρουσιάζονται στον πίνακα 7.36. Η βελτίωση των συγκρίσεων με τη χρησιμοποίηση του μοντέλου υψηλής ανάπτυξης παρουσιάζεται και στην περιοχή του Αστακού.

Ακολούθησε η σύγκριση στις θαλάσσιες περιοχές χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του δορυφόρου T/P. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν όλες οι τιμές των υψών της στιγμιαίας θαλάσ-



Σχήμα 7.50: Οι διαφορές μεταξύ των δύο λύσεων – GPM98 - EGM96 (τιμές σε m).

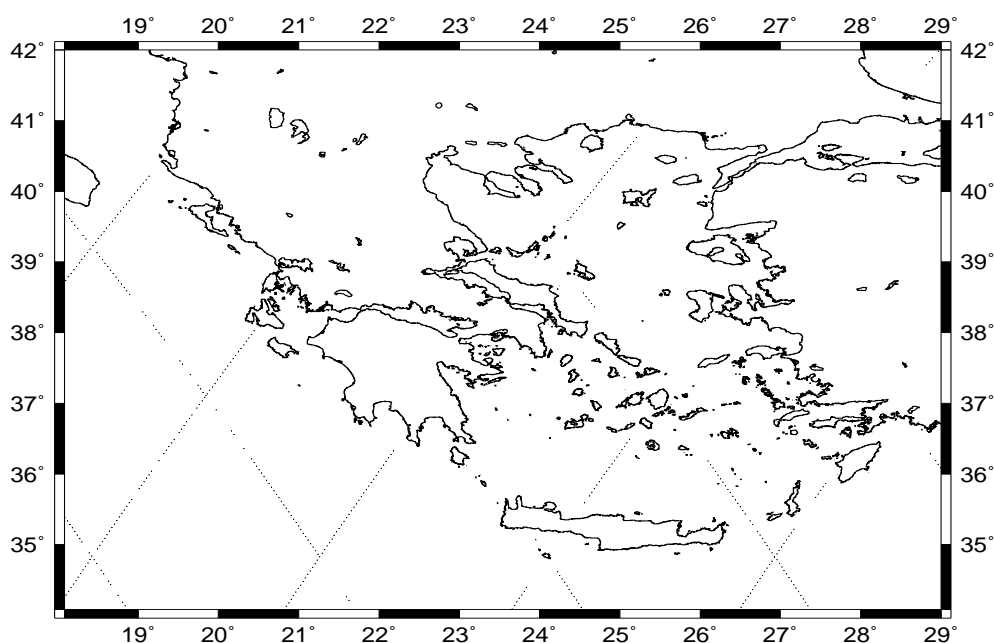
Πίνακας 7.35: Οι διαφορές μεταξύ της βαρυτημετρικής λύσης και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλονίκης.

Πριν το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-3.067	-2.540	-2.772	$\pm 0.123$
Λύση με αναφορά το GPM98	-3.055	-2.759	-2.905	$\pm 0.060$
Μετά το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-0.084	0.114	0.000	$\pm 0.048$
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.095	0.106	0.000	$\pm 0.039$

σίας στάθμης, διορθωμένες σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3, του κύκλου υπ' αριθμό 200. Προσδιορίστηκαν οι διαφορές σε 382 συνολικά σημεία, η κατανομή των οποίων φαίνεται στο σχήμα 7.51. Τα στατιστικά των συγκρίσεων πριν και μετά την εφαρμογή ενός παραμετρικού μοντέλου μετασχηματισμού, τόσο για την περίπτωση της λύσης με αναφορά το GPM98, όσο και στην περίπτωση της λύσης με αναφορά το EGM96 παρουσιάζονται στον πίνακα 7.37. Από τις συγκρίσεις επιβεβαιώνεται για ακόμη μία φορά η μεγάλη συνεισφορά των μοντέλων υψηλής ανάπτυξης. Οι διαφορές που παρατηρούνται είναι φυσιολογικές, αφού κατά τη διαδικασία δεν αφαιρέθηκε από τα αλτιμετρικά δεδομένα η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία, τόσο το σχεδόν στάσιμο μέρος της, όσο και το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος. Το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος είναι δυνατό να έχει μεγάλη επίδραση στα αποτελέσματα των συγκρίσεων, αφού λαμβάνονται δεδομένα ενός και μόνο κύκλου. Οι διαφορές στα σημεία μπορεί να θεω-

Πίνακας 7.36: Οι διαφορές μεταξύ της βαρυτημετρικής λύσης και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή του Αστακού Αιτωλοακαρνανίας.

Πριν το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-0.922	-0.701	-0.821	$\pm 0.065$
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.702	-0.517	-0.655	$\pm 0.053$
Μετά το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-0.054	0.057	0.000	$\pm 0.028$
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.051	0.055	0.000	$\pm 0.027$



Σχήμα 7.51: Η κατανομή των μετρήσεων του T/P.

ρηθεί ότι αποτελούν μία εκτίμηση της θαλάσσιας τοπογραφίας στις συγκεκριμένες γεωγραφικές θέσεις.

Για την επιβεβαίωση την συνεισφοράς των τοπικών δεδομένων βαρύτητας και τοπογραφίας οι ίδιες συγκρίσεις πραγματοποιήθηκαν μεταξύ των μετρήσεων GPS και χωροστάθμησης και των αποχών, οι οποίες προκύπτουν από τη χρήση των γεωδυναμικών μοντέλων και μόνο. Οι συγκρίσεις στην περιοχή της Θεσσαλονίκης παρουσιάζονται στον πίνακα 7.38, ενώ οι αντίστοιχες συγκρίσεις για την περιοχή του Αστακού δίνονται στον πίνακα 7.39. Με μελέτη των πινάκων 7.35, 7.38, 7.36 και 7.39 διακρίνεται καθαρά η βελτίωση των συγκρίσεων με τη συνεισφορά όλων των δεδομένων βαρύτητας και τοπογραφίας.

Πίνακας 7.37: Οι διαφορές μεταξύ της βαρυτημετρικής λύσης και των υψών της στιγμιαίας στάθμης της θάλασσας του T/P (κύκλος 200 – τιμές σε m).

Πριν το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-3.081	-0.292	-0.912	±0.360
Λύση με αναφορά το GPM98	-1.792	-0.226	-0.830	±0.276
Μετά το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-2.148	0.414	0.000	±0.250
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.526	0.601	0.000	±0.182

Πίνακας 7.38: Οι διαφορές μεταξύ των αποχών των βαρυτημετρικών μοντέλων και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλονίκης.

Πριν το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-1.527	-0.879	-1.186	±0.230
Λύση με αναφορά το GPM98	-1.745	-1.471	-1.634	±0.063
Μετά το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-0.227	0.260	0.000	±0.139
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.091	0.158	0.000	±0.051

Πίνακας 7.39: Οι διαφορές μεταξύ των αποχών των βαρυτημετρικών μοντέλων και των αποχών που προκύπτουν από μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης στην ευρύτερη περιοχή του Αστακού Αιτωλοακαρνανίας.

Πριν το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-0.541	0.740	0.593	±0.057
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.045	0.200	0.063	±0.075
Μετά το μετασχηματισμό				
	E	M	MT	TA
Λύση με αναφορά το EGM96	-0.058	0.059	0.000	±0.029
Λύση με αναφορά το GPM98	-0.054	0.057	0.000	±0.028

### 7.3.4 Συνδυασμός ανωμαλιών της βαρύτητας και μετρήσεων GPS για τον προσδιορισμό γεωειδούς συνδυασμού

Για το αριθμητικό αυτό παράδειγμα επιλέχθηκε η περιοχή της Θεσσαλονίκης εξαιτίας της ύπαρξης μετρήσεων GPS σε γνωστά σημεία ορθομετρικών υψομέτρων. Μια αρχική εκτίμηση των αποχών του γεωειδούς στην περιοχή και η μελέτη τους συγκρινόμενες με μετρήσεις GPS και γεωμετρικής χωροστάθμησης παρουσιάζεται από τους Ανδριτσάνο κ.α. [46] και από τους Andritsanos et al. [3].

Για τον προσδιορισμό του γεωειδούς συνδυασμού χρησιμοποιήθηκαν 408 σημειακές τιμές ανωμαλιών της βαρύτητας, οι οποίες είναι μέρος του ψηφιακού αρχείου της Γ.Υ.Σ., όπως επίσης και 35 σημεία GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης, τα οποία μετρήθηκαν κατά τη διάρκεια έρευνας μεταξύ του Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του Τμήματος Αγρονόμων και Το-

πογράφων Μηχανικών του Α.Π.Θ. και της Γ.Υ.Σ. Οι σημειακές τιμές των ανωμαλιών βαρύτητας αναφέρθηκαν στο παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο υψηλής ανάπτυξης GPM98 και διορθώθηκαν από τις επιδράσεις του αναγλύφου χρησιμοποιώντας το ψηφιακό μοντέλο εδάφους του προγράμματος GLOBE [14]. Η διαδικασία αναγωγής περιγράφεται στον πίνακα 7.40. Όπως φαίνεται, η απομάκρυνση του γεωδυναμικού μοντέλου και η εφαρμογή των διορθώσεων

Πίνακας 7.40: Οι αναγωγή των σημειακών ανωμαλιών βαρύτητας στην περιοχή της Θεσσαλονίκης (τιμές σε mGal).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g_{FA}$	153.466	-9.685	57.854	66.701	$\pm 33.196$
$\Delta g_{FA} - \Delta g_{GPM98}$	72.464	-57.721	11.965	20.424	$\pm 16.553$
$\Delta g_{FA} - \Delta g_{GPM98} + t_c$	74.173	-53.945	14.148	21.439	$\pm 16.108$

λόγω αναγλύφου εξομαλύνει το πεδίο των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα. Ακολούθησε η δημιουργία καννάβου  $3' \times 3'$  των ανηγμένων ανωμαλιών στην περιοχή  $40.^\circ 25' \leq \phi \leq 41^\circ$  και  $22.^\circ 45' \leq \lambda \leq 24^\circ$  χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του κεντροβαρικού μέσου όρου μέσω του προγράμματος *geogrid* [36]. Τα στατιστικά του πεδίου που προέκυψε, το οποίο αποτελεί και το πεδίο εισόδου στο πολλαπλό σύστημα, παρουσιάζονται τον πίνακα 7.41. Το ανηγμένο πεδίο

Πίνακας 7.41: Τα στατιστικά του πεδίου εισόδου των ανωμαλιών της βαρύτητας (τιμές σε mGal).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$\Delta g_{red}$	70.721	-36.031	13.998	17.321	$\pm 10.202$

των ανωμαλιών της βαρύτητας απεικονίζεται στο σχήμα 7.52.

Από τα δεδομένα εισόδου των μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης αφαιρέθηκε η επίδραση του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98 και απομακρύνθηκε η έμμεση επίδραση της τοπογραφίας. Αυτό πραγματοποιήθηκε για τη συμβατότητα με το πεδίο των ανωμαλιών ελευθέρου αέρα. Η αναγωγή των αποχών GPS παρουσιάζεται στον πίνακα 7.42. Ακολούθησε

Πίνακας 7.42: Η αναγωγή των αποχών GPS (τιμές σε m).

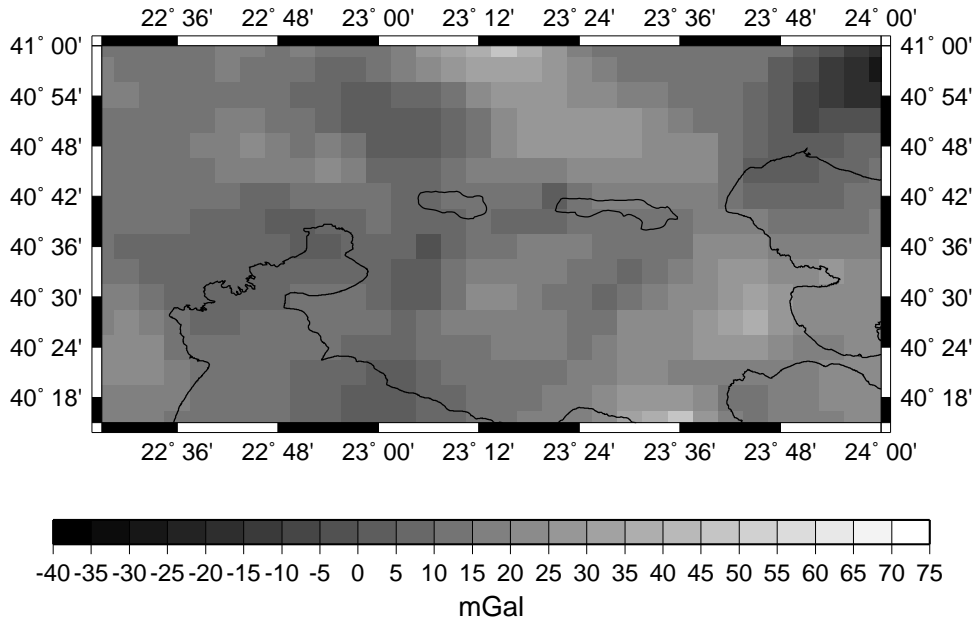
	M	E	MT	MTΣ	TA
$N_{GPS}$	42.312	41.322	41.748	41.749	$\pm 0.239$
$N_{GPS} - N_{GPM98}$	-1.476	-1.721	-1.647	1.647	$\pm 0.052$
$N_{GPS} - N_{GPM98} - N_{IND}$	-1.455	-1.718	-1.642	-1.643	$\pm 0.055$

η πρόγνωση σε πλέγμα στη ίδια περιοχή με τις ανωμαλίες ελευθέρου αέρα. Το πεδίο εισόδου στο πολλαπλό σύστημα έχει τη μορφή καννάβου  $16 \times 32$  και τα στατιστικά του δίνονται στον πίνακα 7.43. Το ανηγμένο πεδίο των αποχών GPS απεικονίζεται στο σχήμα 7.53.

Πίνακας 7.43: Τα στατιστικά του πεδίου εισόδου των αποχών GPS (τιμές σε m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$N_{red}$	-1.496	-1.691	-1.630	1.630	$\pm 0.023$

Η χρήση των FFT στην εύρεση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος ακολουθώντας την άμεση μέθοδο προσδιορισμού (periodogram) προϋποθέτει την πρόγνωση των δεδομένων σε πλέγμα με τα όποια προβλήματα αυτή συνεπάγεται στην εξομάλυνση των σημάτων. Η

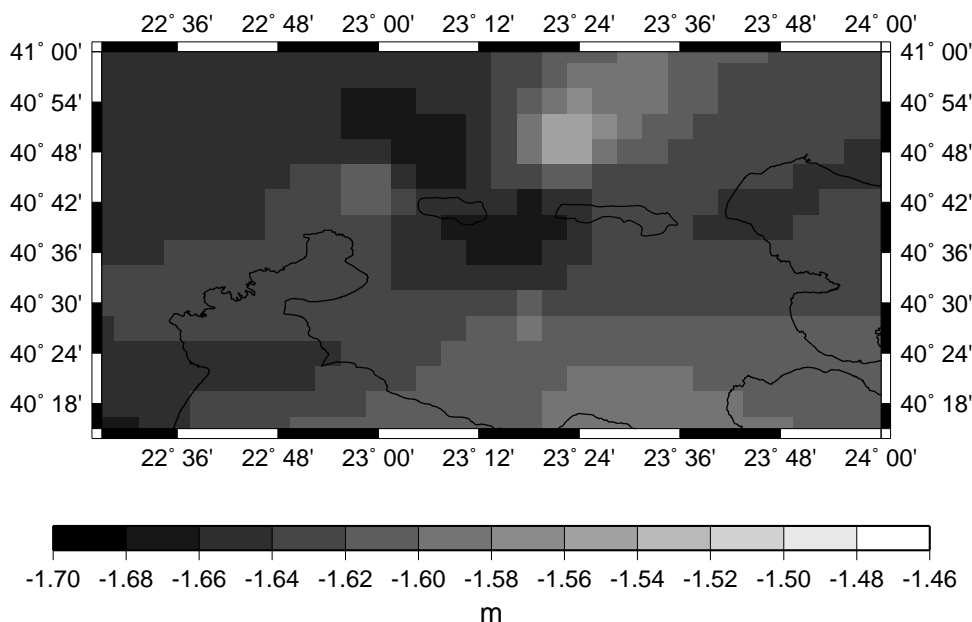


Σχήμα 7.52: Το πεδίο εισόδου των ανηγμένων ανωμαλιών ελευθέρου αέρα.

χρήση των σημειακών τιμών στην εύρεση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, μέσω παραμετρικών μοντέλων, όπως παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6, αποτελεί τη λύση στο πρόβλημα της πρόγνωσης σε πλέγμα. Το συγκεκριμένο πρόβλημα παρουσιάζεται έντονο στην περίπτωση των μετρήσεων GPS, λόγω της χαμηλής διακριτικής ικανότητας των μετρήσεων. Η αδυναμία αυτή φαίνεται καθαρά στο σχήμα 7.53, όπου διακρίνεται η αδυναμία περιγραφής των υψηλών συχνοτήτων του φάσματος των αποχών του γεωειδούς.

Ένα ακόμη πρόβλημα, το οποίο έχει αναφερθεί και στις προηγούμενες εφαρμογές, σχετίζεται με το θόρυβο των μετρήσεων στην είσοδο. Για την προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του σφάλματος στην είσοδο είναι απαραίτητες επαναλαμβανόμενες μετρήσεις, ή πληροφορίες για τις χρονικές περιόδους των μετρήσεων. Η απαίτηση αυτή είναι πολύ δύσκολο να εφαρμοστεί στις βαρυτημετρικές παρατηρήσεις λόγω του υψηλού κόστους. Το πρόβλημα αυτό θα αντιμετωπιστεί στο μέλλον με τις προβλεπόμενες βαρυτημετρικές δορυφορικές αποστολές (π.χ., GOCE). Όσον αφορά στις μετρήσεις GPS, το πρόβλημα του θορύβου είναι δυνατό να αντιμετωπιστεί κατάλληλα με την υλοποίηση μόνιμων σταθμών στην περιοχή μελέτης και τη μέτρηση σε σημεία πύκνωσης ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή χρησιμοποιήθηκαν πεδία τυχαίου θορύβου, οι τιμές των οποίων ακολουθούν την κανονική κατανομή με  $\sigma_A = 5$  mGal και  $\sigma_{cm} = 5$  cm αντίστοιχα.

Τα πεδία των παρατηρήσεων και των θορύβων εισόδου εισήχθησαν στο πολλαπλό σύστημα διπλής εισόδου - απλής εξόδου. Η μεταβλητότητα του σφάλματος της εκτίμησης των αποχών συνδυασμού είναι  $2.62 \text{ cm}^2$ . Η τελική λύση των αποχών, μετά την επαναφορά του μοντέλου αναφοράς και τη διόρθωση λόγω έμμεσης επίδρασης στα υψόμετρα του γεωειδούς, παρουσιάζεται στον πίνακα 7.44 και απεικονίζεται στο σχήμα 7.54. Ακολούθησαν οι συγκρίσεις των αποχών του γεωειδούς που προέκυψαν με τη βοήθεια του αλγορίθμου εισόδου-εξόδου με τις μετρήσεις στα 35 σημεία GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης. Τα αποτελέσματα πριν και μετά την εφαρμογή ενός παραμετρικού μοντέλου τεσσάρων παραμέτρων [19] παρουσιάζονται στον



Σχήμα 7.53: Το πεδίο εισόδου των ανηγμένων αποχών GPS.

Πίνακας 7.44: Οι τελικές αποχές συνδυασμού στην περιοχή της Θεσσαλονίκης (τιμές σε m).

	M	E	MT	MTΣ	TA
$NGPM_{98}$	44.270	41.207	42.903	42.909	$\pm 0.717$
$NGPM_{98} + N_{I/O}$	43.816	40.672	42.454	42.461	$\pm 0.738$
$NGPM_{98} + N_{I/O} + N_{IND}$	43.785	40.672	42.450	42.456	$\pm 0.733$

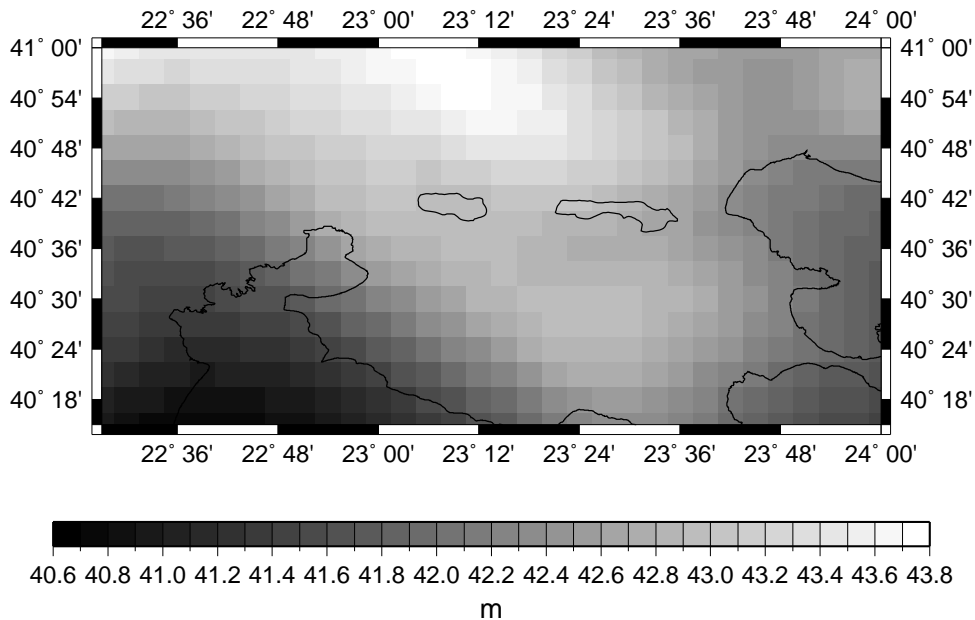
πίνακα 7.45. Η βελτίωση των διαφορών με την αφομοίωση (assimilation) των μετρήσεων των

Πίνακας 7.45: Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων των συνδυασμένων αποχών του γεωειδούς στα 35 σημεία του δικτύου της Θεσσαλονίκης (τιμές σε m).

	E	M	MT	TA
Πριν το μετασχηματισμό	-1.315	-1.135	-1.239	$\pm 0.041$
Μετά το μετασχηματισμό	-0.056	0.079	0.000	$\pm 0.030$

αποχών GPS στο μοντέλο της λύσης, μέσω της μεθόδου των συστημάτων εισόδου-εξόδου διακρίνεται από τη σύγκριση των πινάκων 7.45 και 7.35 από τη χρήση μόνο βαρυτημετρικών δεδομένων για τον προσδιορισμό του γεωειδούς. Η βελτίωση αυτή φτάνει το 1 εκατοστό μετά την εφαρμογή του μοντέλου μετασχηματισμού. Η συνδυασμένη χρήση των μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης και των βαρυτημετρικών αποχών του γεωειδούς οδηγεί στην βελτιστοποίηση της προσέγγισης του γεωειδούς, λαμβάνοντας υπόψη τη συνεισφορά των ετερογενών δεδομένων.

Η αναγκαιότητα στη χρήση των τοπικών δεδομένων βαρύτητας και GPS στη βελτιστοποίηση



Σχήμα 7.54: Οι τελικές αποχές συνδυασμού του γεωειδούς στην περιοχή της Θεσσαλονίκης.

της προσέγγισης του γεωειδούς παρουσιάζεται στον πίνακα 7.46. Όπως φαίνεται από τη

Πίνακας 7.46: Τα αποτελέσματα το συγκρίσεων με τη χρήση μόνο του γεωδυναμικού μοντέλου GPM98.

	E	M	MT	TA
Πριν το μετασχηματισμό	-1.732	-1.466	-1.646	$\pm 0.056$
Μετά το μετασχηματισμό	-0.075	0.152	0.000	$\pm 0.047$

μελέτη των πινάκων 7.45 και 7.46, η χρήση των τοπικών δεδομένων και των μετρήσεων GPS βελτιώνει αισθητά τα αποτελέσματα. Ακόμη και πριν το μετασχηματισμό, οι διαφορές στα σημεία GPS με τη χρήση της συνδυασμένης προσέγγισης είναι μικρότερες από τις διαφορές μετά το μετασχηματισμό με τη χρήση του γεωδυναμικού μοντέλου και μόνο.

## 7.4 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν οι εφαρμογές της θεωρίας των συστημάτων στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας. Χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα προσομοίωσης, αλλά και πραγματικά δεδομένα. Μελετήθηκε η επίδραση της κατανομής και του μεγέθους του θορύβου εισόδου στις εκτιμήσεις εξόδου και στην ακρίβεια της προσέγγισης, οι συναρτήσεις μεταβλητότητας των σφαλμάτων των εκτιμήσεων, η επίδραση της μέσης τιμής των πεδίων και του βαθμού ανάπτυξης του γεωδυναμικού μοντέλου, η δυνατότητα συνδυασμού μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης, αλτιμετρικών παρατηρήσεων και βαρυτημετρικών δεδομένων μέσα από παραδείγματα προσομοίωσης των θορύβων εισόδου. Εξετάστηκαν οι συναρτήσεις

πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων των αλτιμετρικών παρατηρήσεων στην περιοχή της Ανατολικής Μεσογείου και προσεγγίστηκε η δυναμική θαλάσσια τοπογραφία, καθώς και μία εκτίμηση της ροής των υδάτων της περιοχής. Αναλύθηκαν οι ετήσιες συνιστώσες της θαλάσσιας τοπογραφίας, οι οποίες βασίζονται στις επαναλαμβανόμενες αλτιμετρικές παρατηρήσεις. Ακολούθησε η εφαρμογή σε περιφερειακή κλίμακα μελετώντας και την επίδραση δύο διαφορετικών μεθόδων προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος του θορύβου εισόδου. Τέλος, προσεγγίστηκε το γεωειδές για τον Ελληνικό χώρο χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συστημάτων, καθώς επίσης και το τοπικό γεωειδές συνδυασμού στην περιοχή της Θεσσαλονίκης.

Στα παραδείγματα του κεφαλαίου εφαρμόστηκε η θεωρία συνδυασμού των συστημάτων εισόδου-εξόδου που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 6, χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα, η συλλογή και επεξεργασία των οποίων περιγράφεται στα κεφάλαια 3, 4 και 5 και ακολουθήθηκαν οι θεωρίες της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 2 και 5. Στο επόμενο κεφάλαιο ακολουθούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή των θεωριών αυτών στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας, καθώς και οι προτάσεις για περαιτέρω έρευνα και εξέλιξη των μεθόδων.



# Βιβλιογραφία

- [1] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. Quasi-stationary Sea Surface Topography Estimation by the Multiple Input / Output Method. Submitted to Journal of Geodesy, 1999.
- [2] V. D. Andritsanos, M. G. Sideris and I. N. Tziavos. Sea Surface Topography Estimation by a Generalised Multiple Input / Output Method. Presented at XXII IUGG General Assembly, Birmingham, July 18–30, 1999.
- [3] V. D. Andritsanos, A. Fotiou, E. Paschalaki, C. Pikridas, D. Rossikopoulos and I. N. Tziavos. Local geoid computation and evaluation. *Physics and Chemistry of the Earth*, 25(1), pp. 63–69, 2000.
- [4] V. D. Andritsanos and I. N. Tziavos. Estimation of gravity field parameters by a multiple input/output system. *Physics and Chemistry of the Earth*, 25(1), pp. 39–46, 2000.
- [5] *AVISO User Handbook - Merged TOPEX/POSEIDON Products*. AVI-NT-02-101-CN, Third Edition, 1996.
- [6] *AVISO User Handbook - Corrected Sea Surface Heights*, 1997. AVI-NT-011-311-CN, Third Edition.
- [7] *AVISO User Handbook - Sea Level Anomalies*, 1997. AVI-NT-011-312-CN, Second Edition.
- [8] D. Behrend. Error Covariance Functions for Marine Gravity Data in the European Seas. Poster presented at the XXII IUGG General Assembly, Birmingham, July 18–30, 1999.
- [9] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Random data - Analysis and measurements procedures*. 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [10] T. Engelis. Analysis of Sea Surface Topography using SEASAT Altimeter Data. Report No. 343, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1983.
- [11] T. Engelis. Global Circulation for SEASAT Altimeter Data. *Marine Geodesy*, 9(1), pp. 45–69, 1985.
- [12] T. Engelis. Spherical Harmonic Expansion of the Levitus Sea Surface Topography. Report No. 385, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A, 1987.
- [13] R Forsberg. Study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modeling. Report No. 355, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1984.

- [14] *Global Land One-km Base Elevation (GLOBE) Project*. Internet resources: <http://www.ngdc.noaa.gov/seg/topo/globe.shtml>, 1999.
- [15] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 1, Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento, Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1992. Editor: F. Sansò.
- [16] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 2, Instituto de Astronomia y Geodesia, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid, Spain, 1992. Editor: M. J. Sevilla.
- [17] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 3, Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento, Politecnico di Milano, Milano, Italy, 1993. Editor: F. Sansò.
- [18] GEOMED group. Mare Nostrum – GEOMED. Report No. 4, Department of Geodesy and Surveying, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, Greece, 1993. Editors: D. Arabelos and I. N. Tziavos.
- [19] W. Heiskanen and H. Moritz. *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co, 1967.
- [20] J. F. Kirby. *The development and application of a new algorithm for ocean geoid recovery*. Dissertation, University of Edinburgh, 1996.
- [21] E. Lagios, S. Chailas and R. G. Hipkin. Newly compiled gravity and topographic data banks of Greece. *Geophys. J. Int.*, 126, pp. 287–290, 1996.
- [22] F. G. Lemoine, S. C. Kenyon, J. K. Factor, R. G. Trimmer, N. K. Pavlis, D. S. Chinn, C. M. Cox, S. M. Klosko, S. B. Luthcke, M. H. Torrence, Y. M. Wang, R. G. Williamson, E. C. Pavlis, R. H. Rapp and T. R. Olson. *The development of the Joint NASA GSFC and NIMA geopotential model EGM96*, 1998. NASA Technical Paper, 1998-206861.
- [23] S. Levitus. Climatological atlas of the world ocean. Professional Paper 13, NOAA, Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, 1982.
- [24] R. B. Montgomery. Comments on oceanic leveling. In *Deep Sea Research, Supp. to Vol. 16*, pp. 147–162. Pergamon, Oxford, 1969.
- [25] C. Morelli. Physiography, Gravity and Magnetism of the Tyrrhenian Sea. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XIII, pp. 275–309, 1970.
- [26] C. Morelli, C. Gantar, T. Honkasalo, R. K. McConnell, J. G. Tanner, B. Szabo, U. Uotila and C. T. Whalen. The International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN71). Report No. 4, I.U.G.G. – I.A.G., Publ. Spec., Paris, France, 1974.
- [27] C. Morelli, C. Gantar and M. Pisani. Bathymetry, Gravimetry and Magnetism in the Strait of Sicily and the Jonian Sea. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XVII, pp. 39–58, 1975.
- [28] C. Morelli, C. Gantar and M. Pisani. Geophysical Studies in the Aegean Sea and in the Eastern Mediterranean. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XVII, pp. 128–168, 1975.
- [29] C. Morelli, M. Pisani and C. Gantar. Geophysical Anomalies and Tectonics in the Western Mediterranean. *Bolletino Geofisica teorica ed applicata*, XVII, pp. 67–, 1975.
- [30] H. Moritz. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Géodésique, The Geodesist's Handbook*, (2), pp. 187–192, 1992.

- [31] N. K. Pavlis and C. M. Cox and Y. M. Wang and F. G. Lemoine. Further analyses towards the introduction of ocean circulation model information into geopotential solutions. Presented at the 2nd Joint Meeting of the International Gravity Commission and the International Geoid Commission held in Trieste, September 1998. To appear in *Bollettino di Geofisica teorica ed applicata*, 1998.
- [32] K. P. Schwarz. Data types and their spectral properties. In *Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China*, pp. 1–66, UCSE Report 60003, University of Calgary, Calgary, AB Canada, 1985.
- [33] *Shuttle Radar Topography Mission – SRTM*. Internet Resources: <http://www.jpl.nasa.gov/srtm>, 2000.
- [34] W. H. F. Smith and P. Wessel. Gridding with continuous curvature splines in tension. *Geophysics*, 55, pp. 293–305, 1990.
- [35] D. Stammer, R. Tokmakian, A. Semtner and C. Wunsch. How well does a  $1/4^\circ$  global circulation model simulate large-scale oceanic observations? *Journal of Geophysical Research*, 101(11), pp. 25779–25812, 1996.
- [36] C C Tscherning, P Knudsen and R Forsberg. Description of the GRAVSOFTE package. In *Proceedings of the 1st Continental Workshop on the Geoid in Europe*, Prague, May 11–14, 1992.
- [37] C. C. Tscherning. The Use of Optimal Estimation for Gross-error Detection in Databases of Spatially Correlated Data. *BGI, Bulletin d' Information*, 68, pp. 79–89, 1991.
- [38] I. N. Tziavos and V. D. Andritsanos. Recent geoid computations in the Hellenic area. *Physics and Chemistry of the Earth*, 24(1), pp. 91–96, 1999.
- [39] I.N. Tziavos, R. Forsberg, M.G. Sideris and V.D. Andritsanos. A comparison of satellite altimetry methods for the recovery of gravity field quantities. In *Proceedings of the IAG Scientific Assembly “Geodesy on the Move, Gravity, Geoid, Geodynamics and Antarctica”*, editors: R. Forsberg, M. Feissel and R. Dietrich, pp. 150–155, Rio de Janeiro, Brasil, September 3–9 1997.
- [40] I.N. Tziavos, J. Li and M.G. Sideris. A comparison of marine gravity field modeling methods using non-isotropic a-priori information. In *Proceedings of the IAG Symposium “Gravity, Geoid and Marine Geodesy”*, editors: J. Segawa, H. Fujimoto and S. Okubo, pp. 400–407, Tokyo, Japan, September 30 – October 5 1996.
- [41] I.N. Tziavos, M.G. Sideris and R. Forsberg. Combined satellite altimetry and shipborne gravimetry data processing. *Marine Geodesy*, 21, pp. 299–317, 1998.
- [42] I.N. Tziavos, M.G. Sideris and R. Forsberg. Marine gravity field modeling using shipborne gravity and geodetic mission altimetry data. *Geomatics Research Australasia*, 69, pp. 1–18, 1998.
- [43] I.N. Tziavos, M.G. Sideris and J. Li. Optimal spectral combination of satellite altimetry and marine gravity data. In *Proceedings of the XXI EGS General Assembly “Techniques for Local Geoid Determination”*, editors: I.N. Tziavos and M. Vermeer, pp. 41–56, The Hague, Netherlands, May, 6–10 1996.
- [44] G. Wenzel. Global models of the gravity field of high and ultra-high resolution. In *Lecture Notes of IAG’s Geoid School*. Milano, Italy, 1999.
- [45] P. Wessel and W. H. F. Smith. New version of generic mapping tools released. *EOS Trans. Amer. Geophys. U.*, 76, pp. 329, 1995.

- [46] Β. Δ. Ανδριτσάνος, Β. Καγιαδάκης, Γ. Κωστάκης, Ε. Μυλωνά-Κοτρογιάννη, Χ. Πικριδάς, Δ. Ρωσσικόπουλος, Η. Ν. Τζιαβός και Α. Φωτίου. Προσδιορισμός τοπικού γεωειδούς συνδυάζοντας μετρήσεις GPS, βαρύτητας και υψομετρίας. Εφαρμογή στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλονίκης. *Τεχνικά Χρονικά*, τεύχ. 3, pp. 61–74, 1999.
- [47] Β. Δ. Ανδριτσάνος, Κ. Ε. Κατσάμπαλος, Κ. Ε. Κεχαΐδου και Η. Ν. Τζιαβός. Βελτιστοποίηση τοπικού γεωειδούς με δεδομένα βαρύτητας, τοπογραφίας, πυκνότητας και GPS. *Τεχνικά Χρονικά*, τεύχ. 1-2, pp. 43–61, 1999.
- [48] Β. Δ. Ανδριτσάνος και Κ. Ε. Κεχαΐδου. *Βελτιστοποίηση τοπικού γεωειδούς με δεδομένα βαρύτητας, τοπογραφίας, πυκνότητας και GPS με χρήση πακέτων FFT και GIS*. Διπλωματική Εργασία. Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας. Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών. Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1996.
- [49] Αθ. Δερμάνης. *Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης – Τόμος 1*. Εκδόσεις Ζήτη, 1986.
- [50] Η. Ν. Τζιαβός. *Μελέτη του Βέλτιστου Συνδυασμού Ετερογενών Δεδομένων για τον Προσδιορισμό του γεωειδούς με Εφαρμογές στον Ελληνικό Χώρο*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του ΑΠΘ, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, 1984.

## Κεφάλαιο 8

# Συμπεράσματα – Προτάσεις

Στην παρούσα διατριβή αναλύθηκαν νέες μέθοδοι λύσεων συνδυασμού του πεδίου βαρύτητας και παρουσιάστηκαν οι εφαρμογές τους στις επιστήμες της φυσικής γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην περιγραφή των σύγχρονων μεθόδων προσέγγισης του πεδίου βαρύτητας και στις εν γένει αδυναμίες τους, οι οποίες οδηγούν στην αναγκαιότητα εισαγωγής νέων μεθόδων συνδυασμού. Αναπτύχθηκαν οι διαφορετικές ερμηνείες κάθε προσέγγισης (ντετερμινιστικό και στοχαστικό υπόβαθρο) και οι βασικές θέσεις των υποστηρικτών τους. Παρουσιάστηκε εκτενώς η χρήση των FFT στις μεθόδους προσέγγισης και οι συναρτήσεις πυρήνες των σχέσεων αναλύθηκαν τόσο σε επίπεδη, όσο και σε σφαιρική μορφή. Η εκτενής ανάλυση των φασματικών τεχνικών προσέγγισης κρίθηκε απαραίτητη εξαιτίας του φασματικού χαρακτήρα των νέων τεχνικών συνδυασμού. Αναλύθηκαν ακόμα οι βασικές πηγές των ετερογενών δεδομένων που χρησιμοποιούνται στην προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας και περιγράφηκαν οι αρχές μέτρησης, οι κυριότερες πηγές σφαλμάτων και η επεξεργασία και συνόρθωση των δεδομένων της αλτιμετρίας και της θαλάσσιας βαρυτημετρίας. Αναπτύχθηκαν επίσης τα βασικά στοιχεία της επιστήμης της φυσικής ωκεανογραφίας και οι σχέσεις τους με τις προσεγγίσεις του γήινου πεδίου βαρύτητας.

Η μέθοδος συνδυασμού που παρουσιάστηκε στη διατριβή στηρίζεται στην εφαρμογή της θεωρίας των συστημάτων εισόδου - εξόδου στις γεωεπιστήμες. Πρόκειται για μία φασματική τεχνική, η οποία συνδυάζει βέλτιστα ετερογενή δεδομένα αξιοποιώντας τις πληροφορίες για τη μορφή του φάσματός τους. Οι πληροφορίες αυτές παρέχονται μέσω της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των δεδομένων, η οποία αντιπροσωπεύει την ισχύ του σήματος των μετρήσεων σε συγκεκριμένες συχνότητες του φάσματος. Η αξιοποίηση των πληροφοριών αυτών πραγματοποιείται μέσα από την εισαγωγή κατάλληλων κριτηρίων για τον υπολογισμό των βέλτιστων συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας, δηλαδή των συναρτήσεων που συνδέουν τα σήματα εισόδου (παρατηρήσεις) με τα σήματα εξόδου (προγνώσεις). Τα κριτήρια αυτά στηρίζονται στην ελαχιστοποίηση του θορύβου στην έξοδο και στη θεωρούμενη γραμμικότητα των συστημάτων σύνδεσης. Στη διατριβή αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε για πρώτη φορά η γενικευμένη μορφή της θεωρίας, δηλαδή τα γενικεύμενα συστήματα πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου με θόρυβο και αποδείχθηκε η μορφή των εξισώσεων σύνδεσης σύμφωνα με τις αλγεβρικές θεωρίες των πινάκων. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην αλγοριθμική επεξεργασία των δεδομένων και συντάχθηκε κατάλληλος πηγαίος κώδικας σε fortran για την εφαρμογή της θεωρίας σε πρακτικές εφαρμογές. Το διάγραμμα ροής και τα βασικότερα σημεία του προγράμματος παρουσιάζονται στο παράρτημα 1.

Η μέθοδος των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου είναι μια τεχνική, με τη βοήθεια της οποίας είναι εφικτή η ταυτόχρονη χρησιμοποίηση δεδομένων από διαφορετικές πηγές, με την προϋπόθεση ότι είναι δυνατό να υπολογιστούν οι συναρτήσεις πυκνότητας του φάσματός τους και του φάσματος των σφαλμάτων τους. Αποτελεί, δηλαδή, μία μέθοδο συνδυασμού ετερογενών δεδομένων και πρόγνωσης συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας. Απαραίτητες είναι ακόμα και οι σχέσεις σύνδεσης των διαφόρων ποσοτήτων μεταξύ τους,

τόσο μεταξύ των δεδομένων, όσο και μεταξύ των δεδομένων και των προγνώσεων. Από τη στιγμή που οι ποσότητες που σχετίζονται με το πεδίο βαρύτητας συνδέονται με τη συνάρτηση του διαταραχτικού δυναμικού, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι εξίσωσεις σύνδεσης των δεδομένων της θεωρίας των συστημάτων. Βέβαια, η μέθοδος στηρίζεται στις φασματικές ιδιότητες των δεδομένων και, επομένως, απαιτείται η συνελικτική μορφή των ολοκληρωματικών σχέσεων που τα συνδέουν. Ο φασματικός χαρακτήρας της μεθόδου διευκολύνει την επεξεργασία μεγάλου πλήθους δεδομένων και την γρήγορη προσέγγιση της τελικής εκτίμησης. Το χαρακτηριστικό αυτό παρουσιάζεται ιδιαίτερα χρήσιμο στη σύγχρονη εποχή εξαιτίας του μεγάλου όγκου ετερογενών παρατηρήσεων που συλλέγονται για την περιγραφή του πεδίου. Εκτός από τον ετερογενή χαρακτήρα που προσδίδεται για πρώτη φορά σε φασματική μέθοδο, παρουσιάζεται και η δυνατότητα μετάδοσης των σφαλμάτων στα αποτελέσματα, κατά που δεν είναι δυνατό στις συνήθεις φασματικές τεχνικές. Η χρησιμοποίηση των εκ των προτέρων πληροφοριών για τα σφάλματα των παρατηρήσεων αξιοποιούνται από τη θεωρία των συστημάτων και προσεγγίζονται πληροφορίες για την εσωτερική ακρίβεια της εκτίμησης. Η ακρίβεια εκφράζεται μέσω του υπολογισμού της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων στην έξοδο, σε αναλογία με την εκτίμηση των συναρτήσεων μεταβλητότητας των σφαλμάτων των αγνώστων στη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής. Οι ομοιότητες και οι διαφορές των δύο μεθόδων παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 6. Η εκτίμηση των βέλτιστων συναρτήσεων σύνδεσης μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου (συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας) πραγματοποιείται με την εισαγωγή κριτηρίων ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων στην έξοδο, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα την κατάλληλη τροποποίηση των συναρτήσεων αυτών. Η συγκεκριμένη τροποποίηση πραγματοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης του λόγου θορύβου-προς-σήμα (noise-to-signal ratio). Μέσα από κατάλληλες αριθμητικές εφαρμογές προσομοίωσης αποδείχθηκε ότι, η εκτίμηση και η χρήση της βέλτιστης συνάρτησης απόκρισης συχνότητας έχει ως αποτέλεσμα το φιλτράρισμα σχεδόν του συνόλου του θορύβου εισόδου. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει τη μικρή ευαισθησία της μεθόδου στο μέγεθος των σφαλμάτων των παρατηρήσεων. Η ακρίβεια της πρόγνωσης, η οποία αντιστοιχεί στην ικανότητα συνδυασμού των σημάτων εισόδου, καθώς και στην ύπαρξη ή μη γραμμικότητας του μοντέλου, εκφράζεται μέσω των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων, οι οποίες είναι δυνατό να μετασχηματιστούν (αντίστροφη έμμεση μέθοδος – inverse correlogram) σε συναρτήσεις μεταβλητότητας σφάλματος των εκτιμήσεων των αγνώστων. Τονίζεται ακόμα η μεγάλη διαφορά στον υπολογιστικό χρόνο των φασματικών προσεγγίσεων σε σύγκριση με τις προσεγγίσεις στο χώρο των αποστάσεων. Αυτό οφείλεται καταρχήν στις μικρότερες διαστάσεις των πινάκων που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση της μεθόδου των συστημάτων. Ένα ακόμα πλεονέκτημα της τεχνικής αυτής είναι η διαίρεση των πινάκων κατά την τελική φάση της εκτίμησης ανά συχνότητα, αντί της πολύπλοκης διαδικασίας της αντιστροφής που εφαρμόζεται στη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής.

Σε αντίθεση με όλα τα παραπάνω, η γενικευμένη θεωρία των συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου παρουσιάζει και κάποιες αδυναμίες που καθιστούν την εφαρμογή της σχετικά δύσκολη, αλλά και που δίνουν τη δυνατότητα περαιτέρω έρευνας για την αποτελεσματική αντιμετώπισή τους. Μία βασική αδυναμία της μεθόδου είναι η απαίτηση παρατηρήσεων ασυσχέτιστων με τα σφάλματά τους στην είσοδο. Η παραδοχή αυτή είναι απαραίτητη για την προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και των εκτιμήσεων στη έξοδο. Επίσης, η αδυναμία απευθείας υπολογισμού των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος από τα σημειακά δεδομένα εισάγει κάποια αβεβαιότητα ως προς την καταλληλότητα των τεχνικών πρόγνωσης σε πλέγμα. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι η απαίτηση γνώσης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων των παρατηρήσεων. Όπως είναι γνωστό, μόνο οι μεταβλητότητες των μετρήσεων είναι γνωστές και όχι το σφάλμα το ίδιο. Για το λόγο αυτόν, επιλέγονται διάφορα μοντέλα στασιμότητας ή μοντέλα προσομοίωσης του θορύβου. Η στασιμότητα του θορύβου στην είσοδο οδηγεί στην απλοποίηση των πολύπλοκων σχέσεων των συστημάτων στο χώρο των συχνοτήτων. Όταν ληφθεί υπόψη η μη στασιμότητα του θορύβου, τότε οι απλές σχέσεις στο χώρο των συχνοτήτων οδηγούνται σε πολύπλοκες εξισώσεις της ίδιας μορφής με τη λύση στο χώρο των αποστάσεων.

Το πρόβλημα της στασιμότητας του θορύβου αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα σημεία της σύγχρονης έρευνας στη γεωδαιτική κοινότητα. Στην περίπτωση των επαναλαμβανόμενων αλτιμετρικών τροχιών είναι δυνατή η απευθείας εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των παρατηρήσεων μέσω κατάλληλων αλγοριθμικών διεργασιών που παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά στην παρούσα διατριβή. Οι τεχνικές αυτές παρέχουν τη δυνατότητα της προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων από τις επαναλαμβανόμενες τροχιές και έτσι προκύπτει η δυνατότητα εκτίμησης της αβεβαιότητας στις παρατηρήσεις. Βέβαια, όπως παρουσιάστηκε και στο κεφάλαιο 6, η μέθοδος αυτή λαμβάνει το χρονικά μεταβαλλόμενο μέρος της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας ως μέρος του σφάλματος των μετρήσεων. Επιπλέον, και στην περίπτωση αυτή ιδιαίτερη σημασία έχει και η τεχνική πρόγνωσης σε πλέγμα, η οποία είναι δυνατό να επηρεάσει τις εκτιμήσεις των συναρτήσεων περιγραφής της ακρίβειας των αλτιμετρικών δεδομένων.

Τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως αφορούν στην έρευνα που αναπτύχθηκε στην παρούσα διατριβή. Τα αριθμητικά παραδείγματα και οι μελέτες προσομοίωσης που αναλύθηκαν επιβεβαίωσαν την ομαλή εφαρμογή των νέων θεωριών στις προσεγγίσεις των παραμέτρων του γήινου πεδίου βαρύτητας. Ο συνδυασμός ετερογενών δεδομένων (π.χ., ανωμαλιών της βαρύτητας, μετρήσεων GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης, συντελεστών παγκόσμιων μοντέλων του πεδίου, αλτιμετρικών παρατηρήσεων, αποκλίσεων της καταχορύφου, ορθομετρικών υψομέτρων, κ.α.), τόσο σε ηπειρωτικές, όσο και σε θαλάσσιες περιοχές, πραγματοποιήθηκε με την εφαρμογή των νέων μεθόδων και τα αποτελέσματα από τις συγκρίσεις σε γνωστά σημεία είναι πολύ ενθαρρυντικά για την περαιτέρω ενασχόληση με το θέμα. Παρόλα τα αναμφισβήτητα πλεονεκτήματα της μεθόδου, υπάρχουν και αρκετές δυσκολίες στην εφαρμογή της στις γεωεπιστήμες, οι οποίες παρουσιάστηκαν και στο κύριο μέρος της διατριβής. Η εμπειρία της ενασχόλησης με τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι δυνατό να χρησιμεύσει ως οδηγός για την πρόταση μελλοντικών ερευνητικών ενασχολήσεων με τη θεωρία των συστημάτων.

Ένα πρώτο στάδιο βελτίωσης της μεθόδου είναι η εφαρμογή των νέων τεχνικών προσδιορισμού των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των δεδομένων. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιήθηκαν οι μη παραμετρικές μέθοδοι της άμεσης (periodogram) και έμμεσης (correlogram) προσέγγισης των συναρτήσεων αυτών. Οι μοντέρνες τεχνικές παραμετρικών μοντέλων (AR, MA, ARMA), οι οποίες αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2, είναι δυνατό να οδηγήσουν σε αντιπροσωπευτικότερα αποτελέσματα της ισχύος των σημάτων εισόδου. Οι τεχνικές αυτές θα πρέπει να αναλυθούν και να ελεγχθούν με κατάλληλους στατιστικούς ελέγχους για τη χρησιμότητα και την ποιότητα των προσδιοριστέων συντελεστών των μοντέλων.

Η ειδική μορφή των αλτιμετρικών δεδομένων, καθώς και οι ολοκληρωματικές εξισώσεις κίνησης των δορυφόρων, δίνουν τη δυνατότητα αξιοποίησής τους για την προσέγγιση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος, χωρίς τις εξομαλύνσεις από τη διαδικασία πρόγνωσης σε πλέγμα. Η κατάλληλη τροποποίηση των αλγορίθμων υπολογισμού του μετασχηματισμού FFT έχει ήδη παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία, όμως λείπει η εφαρμογή στη συγκεκριμένη δομή των αλτιμετρικών δεδομένων. Η παράκαμψη της παρεμβολής σε κάρναβο θα οδηγήσει σε ορθότερο υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των αλτιμετρικών δεδομένων και θα συνεισφέρει τα μέγιστα στην ανάλυση των σφαλμάτων των αλτιμετρικών μεθόδων.

Ένα επόμενο βήμα βελτίωσης είναι η εξέλιξη των μεθοδολογιών προσέγγισης των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων των βαρυτημετρικών δεδομένων και, γενικότερα, κάθε είδους μετρήσεων, το οποίο δεν είναι δυνατό να παρατηρείται με την επαναλαμβανόμενη μορφή των αλτιμετρικών δεδομένων. Όπως αναφέρθηκε και στο κυρίως μέρος, μόλις πρόσφατα παρουσιάστηκαν τρόποι υπολογισμού των συναρτήσεων (συμ)μεταβλητότητας των σφαλμάτων των μετρήσεων ανωμαλιών της βαρύτητας στη θάλασσα. Οι μέθοδοι αυτές στηρίζονται στη διαχρονική εξέταση των μετρήσεων ακολουθώντας τις ημερομηνίες παρατήρησης κάθε αποστολής. Η γενίκευση των διαδικασιών αυτών και σε άλλης μορφής δεδομένα (π.χ., δεδομένα GPS-γεωμετρικής χωροστάθμησης) θα οδηγήσει στη βελτιστοποίηση των μεθόδων συνδυασμού που παρουσιάστηκαν.

Μία ακόμα βελτιωμένη θεώρηση των διαδικασιών συνδυασμού θα προκύψει από την αντιμετώπιση του προβλήματος των περιοχών διαφορετικής κάλυψης δεδομένων. Ιδιαίτερα σε συνοριακές περιοχές μεταξύ θάλασσας και στεριάς υπάρχει το πρόβλημα της αδυναμίας συνολικής αντιμετώπισης των δεδομένων εξαιτίας της μη αλληλοκάλυψης των κατανομών. Το πρόβλημα αυτό εστιάζεται στην προσέγγιση της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των παρατηρήσεων, όταν μεγάλο τμήμα της περιοχής μελέτης παρουσιάζει έλλειψη δεδομένων. Η αντικατάσταση με μηδενικές τιμές δεν αποτελεί λύση, αφού μηδενική τιμή δεν ταυτίζεται με απουσία σήματος, αλλά με τιμή σήματος ίση με το μηδέν. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί κατάλληλα με την εφαρμογή των σύγχρονων τεχνικών υπολογισμού των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος και τη χρήση παραμετρικών μοντέλων για την περιγραφή της συμπεριφοράς τους.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η μορφή των αλτιμετρικών δεδομένων δίνει τη δυνατότητα προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας φάσματος των σφαλμάτων των παρατηρήσεων με τη βοήθεια κατάλληλης αλγοριθμικής επεξεργασίας. Στην περίπτωση αυτή, η συνιστώσα του χρονικά μεταβαλλόμενου μέρους της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας εισάγεται στη μεταβλητή του θορύβου. Η απομάκρυνση της συνιστώσας αυτής από το θόρυβο αποτελεί μία βελτιωμένη θεώρηση των αλγορίθμων προσέγγισης του θορύβου εισόδου. Στη συγκεκριμένη μορφή είναι δυνατός ο προσδιορισμός του χρονικά μεταβαλλόμενου τμήματος, παράλληλα με τη σχεδόν-στάσιμη συνιστώσα.

Στα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο των εφαρμογών χρησιμοποιήθηκε η επίπεδη προσέγγιση της συνάρτησης-πυρήνα των συνελικτικών σχέσεων του πεδίου βαρύτητας. Η ανάπτυξη της θεωρίας των συστημάτων με τη χρήση διδιάστατων ή μονοδιάστατων σφαιρικών πυρήνων θα οδηγήσει σε ακριβέστερα αποτελέσματα, από τη στιγμή που η συνάρτηση πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και των σημάτων εξόδου θα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις σύνδεσης τους στο χώρο των συχνοτήτων. Η χρήση των σφαιρικών προεγγίσεων των FFT θα διευκολύνει την εφαρμογή των θεωριών συνδυασμού σε ευρύτερες γεωγραφικές περιοχές, όπου η επίδραση της καμπυλότητας της Γης είναι σημαντική.

Στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν οι πληροφορίες από τις ωκεανογραφικές μετρήσεις χρησιμοποιήθηκαν κυρίως ως δεδομένα συγκρίσεων και ελέγχου των αποτελεσμάτων της μεθόδου. Ο συνδυασμός δεδομένων της γεωδαισίας και της ωκεανογραφίας είναι δυνατό να οδηγήσει σε πιο αξιόπιστα συμπεράσματα, ειδικότερα σε ό,τι αφορά την προσέγγιση της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας. Η διαδικασία συνδυασμού πρέπει να εφαρμοστεί με ιδιαίτερη προσοχή, εξαιτίας των ασυμφωνιών στη βασική επιφάνεια αναφοράς (βλ. κεφ. 5) και οπωσδήποτε να πραγματοποιηθεί σε ωκεάνιες περιοχές για να αποφευχθεί η επίδραση των ηπειρωτικών εκτάσεων. Σε κάθε περίπτωση, οι παραδοχές της γεωστροφικής θεώρησης πρέπει να λαμβάνονται υπόψη και η αδρανειακή κίνηση των υδάτων να μη λαμβάνει υπόψη την επίδραση της τριβής.

Τέλος, το μεγάλο πλήθος και η επαναληπτική δειγματοληψία των δεδομένων στις αναμενόμενες δορυφορικές αποστολές, οι οποίες έχουν ως κύριο στόχο την παρατήρηση του γήινου πεδίου βαρύτητας, θα αποτελέσουν ιδανικές εφαρμογές για τη θεωρία συνδυασμού που παρουσιάστηκε. Οι αποστολές CHAMP, GRACE και GOCE, οι οποίες ξεκινούν από τα τέλη του 2000, θα συνεισφέρουν στην κατανόηση του γήινου πεδίου βαρύτητας και στην παρατήρηση των διαχρονικών του μεταβολών. Η θεωρία των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου έχει τη δυνατότητα της επεξεργασίας των δεδομένων κάθε δορυφόρου, αλλά και συνδυασμού τους, για μία αξιόπιστη προσέγγιση των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας. Επιπλέον, σε συνδυασμό με τις σύγχρονες αλτιμετρικές αποστολές παρέχεται η δυνατότητα βελτιωμένης προσέγγισης, τόσο του γεωειδούς, όσο και της δυναμικής θαλάσσιας τοπογραφίας.

Συμπερασματικά, το θέμα της διατριβής που αναλύθηκε σχετίζεται με την ανάπτυξη νέων μεθόδων συνδυασμού ετερογενών δεδομένων και την εφαρμογή τους στη γεωδαισία και την

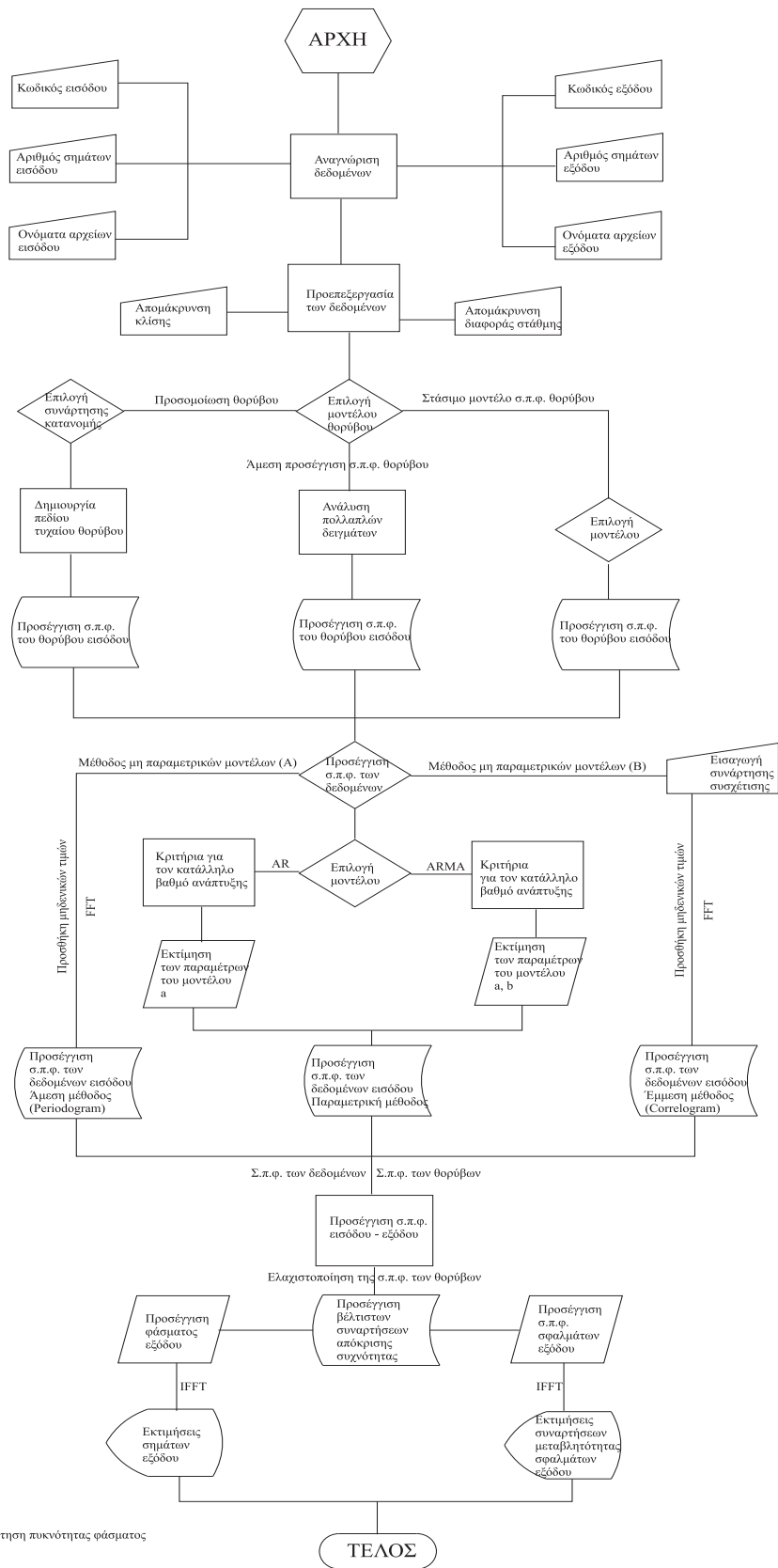
ωκεανογραφία. Παρουσιάστηκαν οι μέθοδοι προσέγγισης και οι τεχνικές μετρήσεων που χρησιμοποιούνται στη γεωδαισία, την ωκεανογραφία, τη δορυφορική αλτιμετρία και τη θαλάσσια βαρυτημετρία δίνοντας έμφαση στο θεωρητικό υπόβαθρο των μεθόδων, στις αρχές των μετρήσεων και τις πηγές των σφαλμάτων που επηρεάζουν τις τεχνικές αυτές. Παρουσιάστηκαν οι εξελεγμένοι αλγόριθμοι των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου σε μητρική μορφή δίνοντας έμφαση στην προσέγγιση των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος των δεδομένων και των σφαλμάτων της εκτίμησης. Επιπλέον αναλύθηκε το βασικό πρόβλημα του θορύβου εισόδου των μεθόδων συνδυασμού και παρουσιάστηκαν εφαρμογές τοπικής και περιφερειακής κλίμακας με έμφαση στον ελληνικό χώρο. Τα αποτελέσματα των εφαρμογών επιβεβαίωσαν τη χρησιμότητα των νέων μεθόδων στο συνδυασμό ετερογενών δεδομένων σε περιοχές στεριάς και θάλασσας. Η μέθοδος που εφαρμόστηκε παρουσιάζει πολλές δυνατότητες βελτίωσης και περαιτέρω ανάπτυξης, κάποιες από τις οποίες προτάθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.



# Παράρτημα Α

Ακολουθεί το λογικό διάγραμμα του προγράμματος fortran της θεωρίας των γενικευμένων συστημάτων πολλαπλής εισόδου - πολλαπλής εξόδου, το οποίο χρησιμοποιήθηκε στις εφαρμογές του κεφαλαίου 7. Η δομή των υπορουτινών έχει ως εξής:

- `ioprogr.f`: Κύριο μέρος του προγράμματος. Εισαγωγή διαστάσεων και διαχείριση πινάκων.
- `fft3d.f`: Υπορουτίνα της IMSL για τον υπολογισμό του διδιάστατου FFT.
- `fftcc.f`: Υπορουτίνα της IMSL για τον υπολογισμό του διδιάστατου FFT.
- `import1.f`: Υπορουτίνα για την εισαγωγή των δεδομένων και των θορύβων προσομοίωσης.
- `import2.f`: Υπορουτίνα για την εισαγωγή των δεδομένων και των υπολογισμένων συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος.
- `psdcomp.f`: Υπορουτίνα για τον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μέσω της άμεσης προσέγγισης (periodogram).
- `psdio.f`: Υπορουτίνα για τον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου χρησιμοποιώντας αναλυτικούς πυρήνες.
- `psdio_discr.f`: Υπορουτίνα για τον υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας φάσματος μεταξύ των σημάτων εισόδου και εξόδου χρησιμοποιώντας διακριτούς πυρήνες.
- `tranmtx.f`: Υπορουτίνα για τον έλεγχο αποθήκευσης των πινάκων που δημιουργούνται και τη διαμόρφωσή τους στη λύση των κανονικών εξισώσεων.
- `sysso1.f`: Υπορουτίνα για τη λύση των κανονικών εξισώσεων.
- `cludcmp.f`: Υπορουτίνα των Numerical Recipes για την LU ανάλυση των πινάκων.
- `clubksb.f`: Υπορουτίνα των Numerical Recipes για την LU αντικατάσταση των πινάκων.
- `cmulti.f`: Υπορουτίνα για τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών.



# Παράρτημα Β

Παρατίθεται η λίστα των διευθύνσεων του διαδικτύου που αναφέρθηκαν στο κείμενο. Επιπλέον, δίνονται διευθύνσεις, οι οποίες αφορούν στα περιεχόμενα του κάθε κεφαλαίου. Οι αναφορές αυτές παρουσιάζονται για την πληρέστερη και άμεση πρόσβαση στις ανάλογες πηγές πληροφοριών.

## Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

<http://www.gfz-potsdam.e/pb1/CHAMP/champ.htm>: Δορυφόρος CHAMP στο κέντρο GFZ.  
<http://www.csr.texas.edu/grace/mission>: Δορυφόρος GRACE στο Center for Space Research του Τέξας.  
<http://www.gfy.ku.dk/~cct/gocefi11.htm>: Δορυφόρος GOCE.

## Κεφάλαιο 2: Το πεδίο βαρύτητας

<http://www.gfy.ku.dk/~iag>: Διεθνής Ένωση Γεωδαισίας.  
<http://www.omp.obs-mip.fr/uggi>: Διεθνής Ένωση Γεωφυσικής και Γεωδαισίας.  
<http://www.mpae.gwdg.de/EGS/EGS.html>: Ευρωπαϊκή Γεωφυσική Ένωση.  
<http://ipmtf14.topo.polimi.it/~iges>: Διεθνής Υπηρεσία Γεωειδούς.  
<http://hpiers.obspm.fr>: Διεθνής Υπηρεσία για την Περιστροφή της Γης.  
<http://igsdb.jpl.nasa.gov/index.html>: Διεθνής Υπηρεσία για το Παγκόσμιο Σύστημα προσδιορισμού θέσης.  
<http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/egm96/contents.html>: Παγκόσμιο Γεωδυναμικό μοντέλο EGM96.  
<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>: ETOPO5 παγκόσμια τοπογραφική και βαθυμετρική βάση δεδομένων.  
<http://www.ngdc.noaa.gov/seg/topo/globe.shtml>: GLOBE παγκόσμια τοπογραφική βάση δεδομένων.  
<http://www.jpl.nasa.gov/srtm>: Δορυφορική τοπογραφική αποστολή Shuttle Radar Topography Mission.  
<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gebco>: General Bathymetric Chart of the Oceans – GEBCO.

## Κεφάλαιο 3: Η δορυφορική αλτιμετρία

<http://www.jpl.nasa.gov>: Jet Propulsion Laboratory – NASA.  
<http://www.jpl.nasa.gov/missions/seasat>: Δορυφόρος SEASAT.  
<http://southport.jpl.nasa.gov/scienceapps/seasat.html>: Δορυφόρος SEASAT.  
[http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/geosat\\_handbook/index.html](http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/geosat_handbook/index.html): Εγχειρίδιο του δορυφόρου GEOSAT.  
<http://www.esa.int>: Ευρωπαϊκή Υπηρεσία Διαστήματος.  
<http://www.cls.fr>: Collecte, Localisation, Satellites.  
[http://www.ifremer.fr/cersat/ACTIVITE/ERS/MISSION/E\\_ERS.HTM](http://www.ifremer.fr/cersat/ACTIVITE/ERS/MISSION/E_ERS.HTM): Δορυφόροι ERS.  
<http://www.esoc.esa.de/external/mso/ers.html>: Δορυφόροι ERS.  
<http://ersmonrp.esoc.esa.de/start.html>: Δορυφόροι ERS.  
<http://doris@www-projet.cst.cnes.fr:8060>: Σύστημα DORIS.  
<http://sirius-ci.cst.cnes.fr:8090>: AVISO Altimétrie.  
<http://www-ccar.colorado.edu/research/topex/html/topex.html>: Δορυφόρος TOPEX/POSEIDON.  
<http://topex-www.jpl.nasa.gov>: Δορυφόρος TOPEX/POSEIDON.  
<http://podaac.jpl.nasa.gov>: Δορυφόρος TOPEX/POSEIDON.  
<http://gfo.wff.nasa.gov>: Δορυφόρος Geosat-Follow-On.  
<http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/gdrs/gfo.html>: Δορυφόρος Geosat-Follow-On.  
<http://gfo.bmpcoe.org/Gfo>: Δορυφόρος Geosat-Follow-On.  
<http://tethys.jpl.nasa.gov/jason1>: Δορυφόρος Jason 1.  
<http://www-ocean.tamu.edu/topex-poseidon/jason.html>: Δορυφόρος Jason 1.  
[http://vislab-www.mps.navy.mil/~rtt/paper/sea\\_level.html](http://vislab-www.mps.navy.mil/~rtt/paper/sea_level.html): Συγκρίσεις αλτιμετρικών παρατηρήσεων με μετρήσεις παλιρροιογράφων σε παγκόσμια κλίμακα.  
<http://neptune.gsfc.nasa.gov/ocean.html>: Ocean Pathfinder Project.

<http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/926.html>: Space Geodesy Branch at Goddard Space Flight Center.  
<http://www.deos.tudelft.nl>: Delft Institute for Earth-Oriented Space Research.  
<http://topexnav-jpl.nasa.gov>: Δορυφόρος TOPEX/POSEIDON.  
<http://www.nbi.ac.uk/psms1/psms1.info.html>: Μόνιμη Υπηρεσία της Μέσης Θαλάσσιας Επιφάνειας.  
<http://www.sio.ucsd.edu>: Scripps Institute of Oceanography.  
[http://topex.ucsd.edu/marine\\_grav/mar\\_grav.html](http://topex.ucsd.edu/marine_grav/mar_grav.html): Θαλάσσια Γεωδαισία στο Scripps Institute of Oceanography.

#### **Κεφάλαιο 4: Η θαλάσσια βαρυτημετρία**

[http://sirius-ci.cst.cnes.fr:8110/bgi\\_debut\\_a.html](http://sirius-ci.cst.cnes.fr:8110/bgi_debut_a.html): Διεθνές Γραφείο Βαρυτημετρίας.

#### **Κεφάλαιο 5: Η ωκεάνια κυκλοφορία**

<http://www.soc.soton.ac.uk/OTHERS/woceipo/ipo.html>: Παγκόσμιο Πείραμα για την Ωκεάνια Κυκλοφορία – WOCE.  
<http://www-ocean.tamu.edu/WOCE/uswoce.html>: Παγκόσμιο Πείραμα για την Ωκεάνια Κυκλοφορία – WOCE.  
<http://www.cms.udel.edu/woce>: Παγκόσμιο Πείραμα για την Ωκεάνια Κυκλοφορία – WOCE.  
<http://www.wmo.ch/web/wcrp/wcrp-home.html>: Παγκόσμιο Πρόγραμμα για την Έρευνα του Κλίματος – WCRP.  
<http://www.ncdc.noaa.gov/coare/toga.html>: Παγκόσμιο Πρόγραμμα για τη Μελέτη των Τροπικών περιοχών – TOGA.  
[http://climate.acl.lanl.gov/models/pop/pop\\_frames.htm](http://climate.acl.lanl.gov/models/pop/pop_frames.htm): Μοντέλα Ωκεάνιας Κυκλοφορίας.  
<http://sci.aaas.org/aaas/computers/semtner.html>: Μοντέλα Ωκεάνιας Κυκλοφορίας.  
<http://www.gfdl.gov/~smg/MOM/MOM.html>: Μοντέλα Ωκεάνιας Κυκλοφορίας.  
<http://modb.oce.ulg.ac.be>: The Mediterranean Oceanic Database.  
<http://www.ncmr.ariadne-t.gr>: Εθνικό Κέντρο Θαλασσίων Ερευνών.  
<http://odf.ucsd.edu/OceanAtlas>: Ocean Atlas.

#### **Γενικές Αναφορές**

<http://imina.soest.hawaii.edu/gmt>: Generic Mapping Tools. Τα σχήματα της διατριβής και τμήμα των υπολογισμών πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση των εργαλείων αυτών.  
<http://op.gfz-potsdam.de/igmt>: Interactive GMT.  
<http://www.che.wisc.edu/octave/octave.html>: Υπολογιστικό πρόγραμμα Octave.  
<http://wizards.dupont.com/cristy/ImageMagick.html>: Πακέτο επεξεργασίας εικόνων ImageMagick.  
<http://www.latex-project.org/LaTeX-home.html>: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X document preparation system.  
<http://obelix.ee.duth.gr/eft/index.html>: GreekTeX, ελληνική γραφή στο L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.  
<http://www.lyx.org>: Επεξεργαστής κειμένου του L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.