Εφαρμογές Ανάλυσης Σήματος στη Γεωδαισία

Παρουσίαση 2η: Αρχές εκτίμησης παραμέτρων
Μέρος 1ο

Βασίλειος Δ. Ανδριτσάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Γεώργιος Χλούπης
Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Τοπογραφίας και Γεωπληροφορικής
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών: Γεωχωρικές τεχνολογίες

Περιεχόμενα παρουσίασης

- Ανάλυση δεδομένων και συνόρθωση παρατηρήσεων
- Ντετερμινιστική και στοχαστική αντιμετώπιση
- Εκτίμηση παραμέτρων (ανεπηρέαστη γραμμική εκτίμηση – BLUE)
- Εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης
- Η μέθοδος των εξισώσεων παρατηρήσεων
- Ειδικές περιπτώσεις

Ανάλυση δεδομένων

- **Φυσικό σύστημα** → τμήμα του φυσικού κόσμου που αναλύεται αγνοώντας την εξάρτησή του από τον περιβάλλοντα χώρο

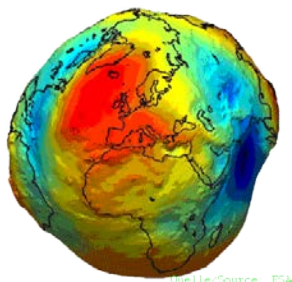
- **Παράμετροι συστήματος** → περιγραφή του φυσικού συστήματος μέσα από εξισώσεις

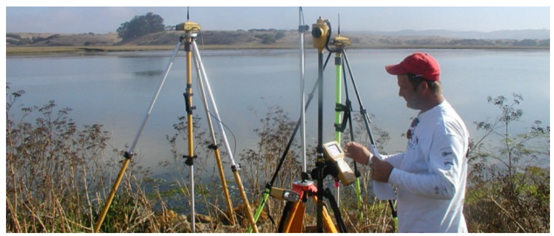
- **Μαθηματικό μοντέλο** → η δυνατότητα περιγραφής του φυσικού συστήματος με μαθηματικές εξισώσεις

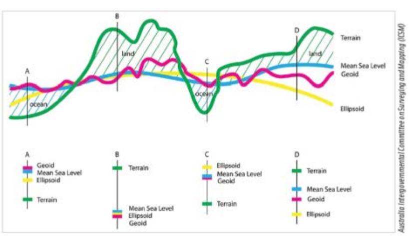
- **Παράμετροι συστήματος** → παρατηρούμενες παράμετροι

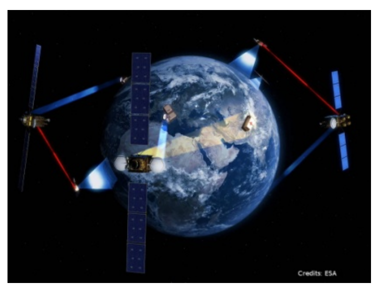
Ανάλυση δεδομένων

Φυσικό σύστημα → Παρατηρούμενες παράμετροι → Μαθηματικό μοντέλο → Προσομοίωση

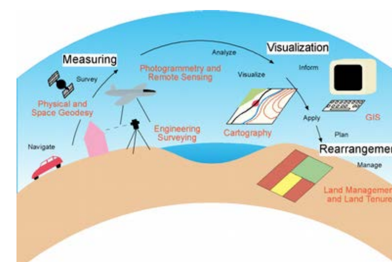








$$\mathbf{F}\left(\mathbf{y}^{a},\mathbf{x}^{a}\right)=\mathbf{0}$$



Ανάλυση δεδομένων

- Ερμηνεία φυσικού συστήματος → **λογική** και **παρατήρηση**

- **Παρατήρηση** → συλλογή δεδομένων για την ερμηνεία του φυσικού συστήματος → **λογική** θεωρία

- Συλλογή και ανάλυση δεδομένων → πρακτική αξιοποίηση της θεωρητικής γνώσης

- **Συνόρθωση** → μέθοδος ανάλυσης δεδομένων (Gauss, Legendre + θεωρία πιθανοτήτων και μαθηματική στατιστική)
  1. Δεδομένα ανάλυσης → παρατηρήσεις → αριθμητικές τιμές μετρήσεων
  2. Η ύπαρξη σαφούς θεωρίας → μαθηματικές εξισώσεις

Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδου συνόρθωσης

- **Μαθηματικό μοντέλο** → σύνολο εξισώσεων → εμφάνιση μετρούμενων παραμέτρων και αγνώστων παραμέτρων

- Περισσότερη πληροφορία από την απαραίτητη → **έλεγχος της επίδρασης των σφαλμάτων των μετρήσεων**

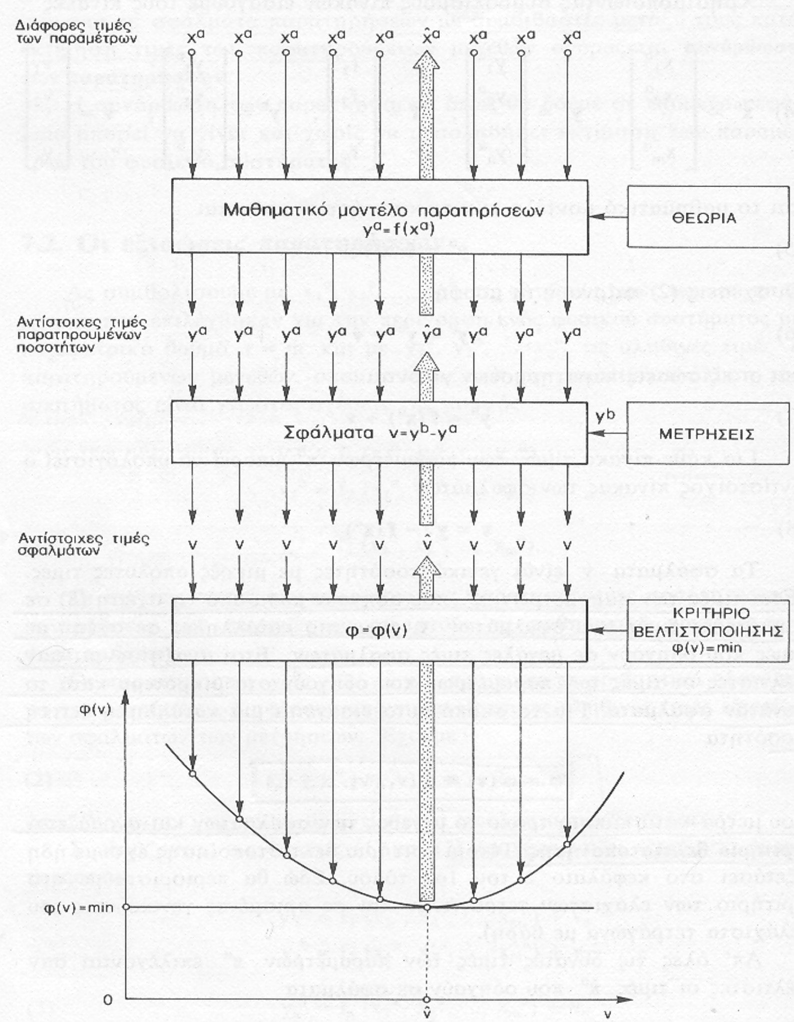
- Μαθηματικό μοντέλο → απλοποιημένη περιγραφή φυσικού συστήματος → **σφάλματα παρατηρήσεων**

- **Σφάλμα παραμέτρου = παρατήρηση – παρατηρούμενη παράμετρος**

Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδου συνόρθωσης

Διαδικασία

συνόρθωσης



Σχήμα 1: Σχηματικό διάγραμμα της βέλτιστης εκτίμησης παραμέτρων με τη μέθοδο των εξισώσεων παρατηρήσεων.

Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδου συνόρθωσης

- Κριτήριο → **Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων (ΜΕΤ) των σφαλμάτων των παρατηρήσεων**

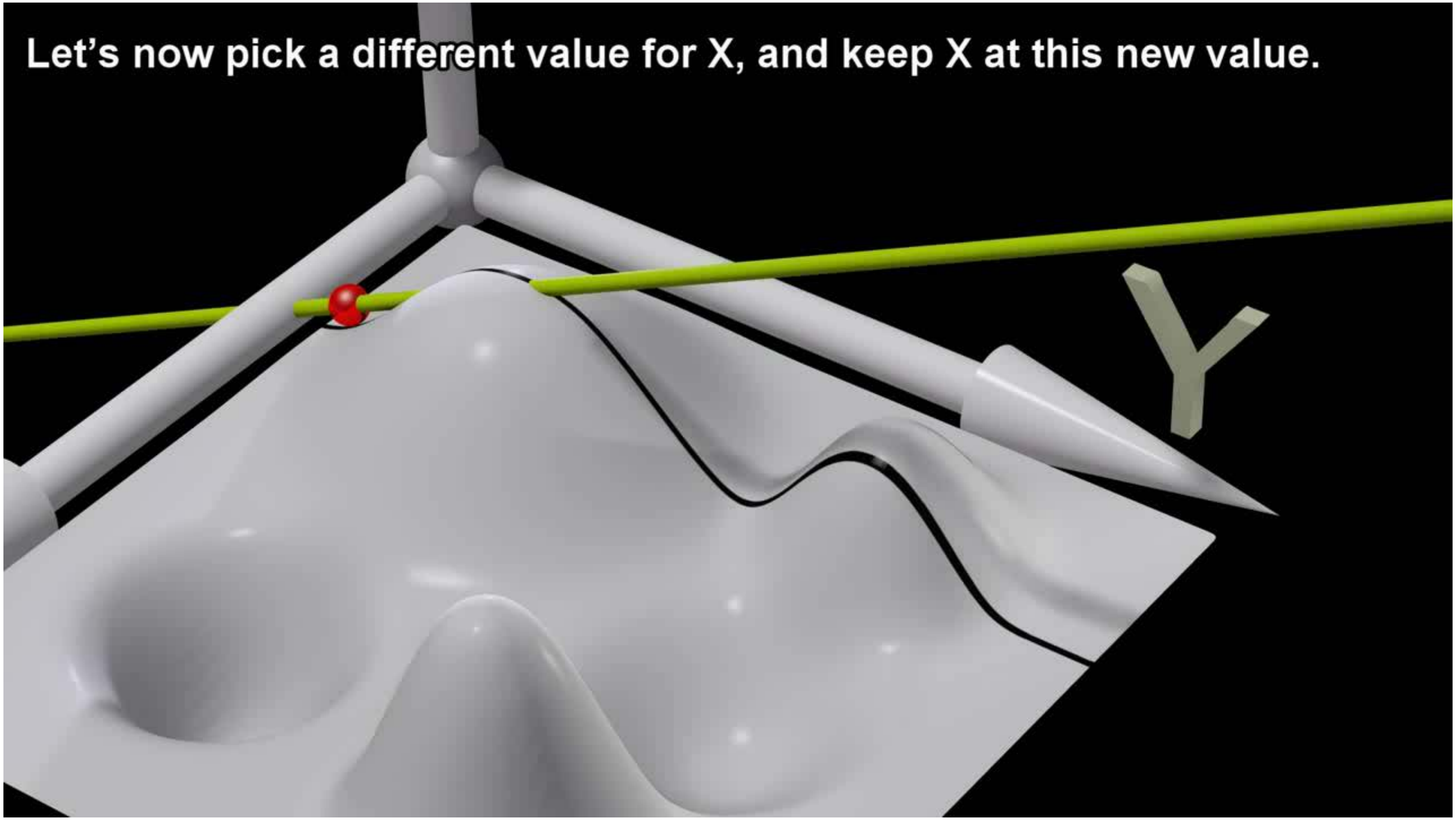
- Γιατί επικράτησε;

- **Ελαχιστοποίηση συνάρτησης** → μηδενισμός παραγώγων της

- Συναρτήσεις $2^{ου}$ βαθμού → παράγωγος $1^{ου}$ βαθμού → **απλές γραμμικές εξισώσεις**

- **Μειονέκτημα** → ομοιόμορφη αντιμετώπιση σφαλμάτων → **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με βάρη** → ποιος ο τρόπος καθορισμού;

Μερικές παράγωγοι και ελαχιστοποίηση



Στοχαστικός χαρακτήρας της συνόρθωσης

- Η ανάγκη εύρεσης των βαρών εισάγει το **στοχαστικό χαρακτήρα**
- **Στοχαστικός χαρακτήρας** → μελέτη σφαλμάτων → **μέτρο ακρίβειας παρατηρήσεων**
- **Στοχαστικός χαρακτήρας** → θεωρία πιθανοτήτων → άγνωστη η πραγματική τιμή, **γνωστή η περιγραφή της συμπεριφοράς** → «άπειρο δείγμα»
- Παρατήρηση → στοχαστική ποσότητα → άθροισμα ντετερμινιστικής (όχι τυχαίας) παρατηρούμενης παραμέτρου και τυχαίου σφάλματος

$$y^b = y^a + v$$

Στοχαστικός χαρακτήρας της συνόρθωσης

Εκτίμηση παραμέτρων

↓

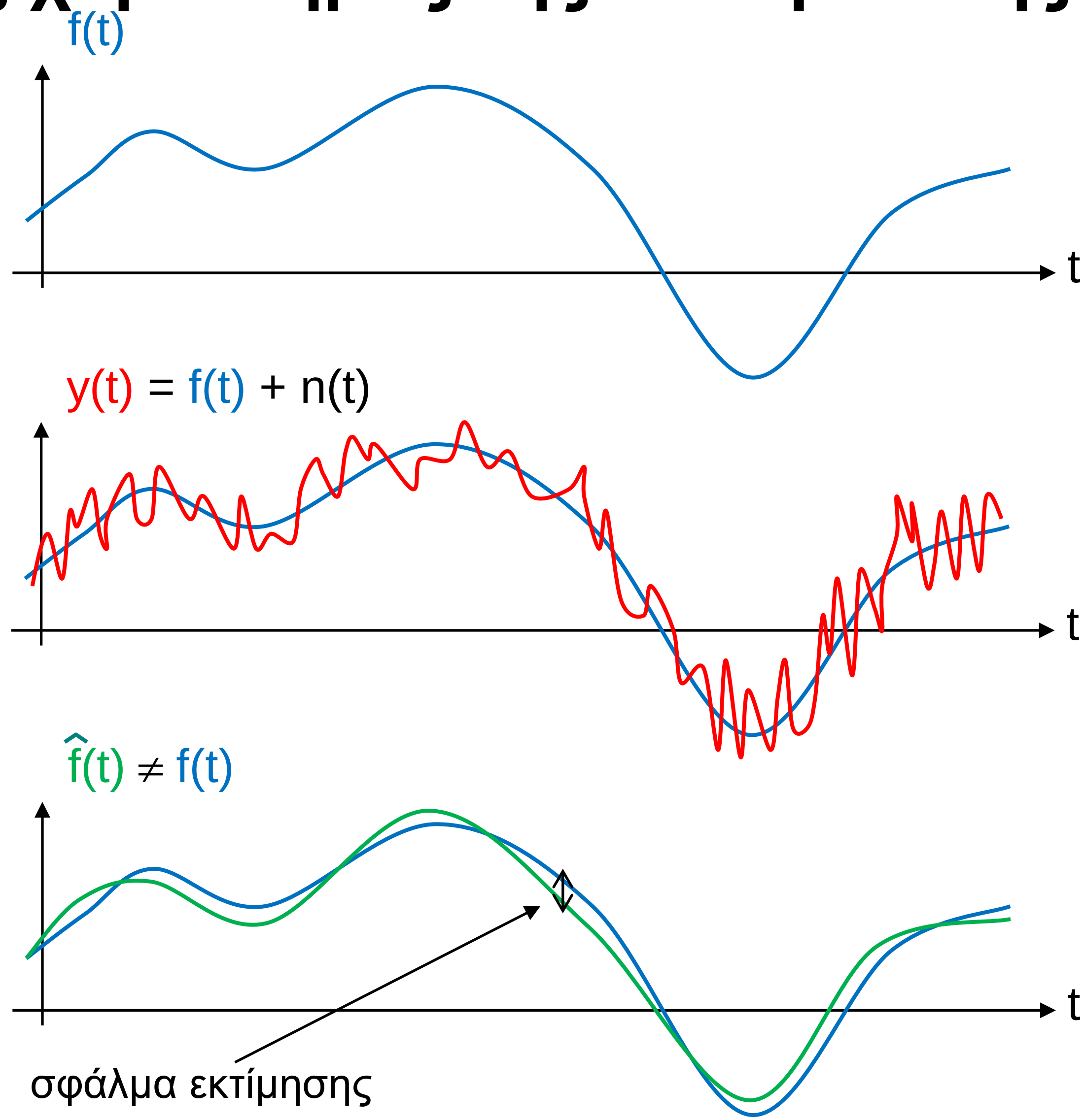
Εισαγωγή κριτηρίων βέλτιστης εκτίμησης

↓

Εκτίμηση σφάλματος

↓

Στατιστική αξιολόγηση και ερμηνεία αποτελεσμάτων



- Παρατηρήσεις και σήματα → εκτίμηση παραμέτρων

Στοχαστικός χαρακτήρας της συνόρθωσης

- **Βέλτιστη εκτίμηση** αγνώστων παραμέτρων → μεταφορά στοχαστικού χαρακτήρα από παρατηρήσεις

- **Ανεπηρέαστη εκτίμηση** → ταύτιση προσδοκίας με πραγματική τιμή → απουσία συστηματικού χαρακτήρα

- **Βέλτιστη ανεπηρέαστη εκτίμηση (Best Unbiased Estimation – BUE)** → απουσία **συστηματικών** επιδράσεων (**ανεπηρέαστη**) και **ελάχιστης μεταβλητότητας** (περιορισμός **τυχαίων** επιδράσεων – **βέλτιστη**)

- **Πρόβλημα** → προσδιορισμός συνάρτησης παρατηρήσεων που οδηγεί σε ανεπηρέαστη εκτίμηση ελάχιστης μεταβλητότητας

Βέλτιστη γραμμική ανεπηρέαστη εκτίμηση

- Από το σύνολο των συναρτήσεων επιλέγονται **μόνο οι γραμμικές**
- Συμβιβασμός → **απλότητα στους υπολογισμούς**
- Γραμμικές συναρτήσεις → εκτιμήσεις που προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων
- **Βέλτιστη γραμμική ανεπηρέαστη εκτίμηση (Best Linear Unbiased Estimation – BLUE)**
- BLUE και BUE ταυτίζονται στην περίπτωση που τα τυχαία σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- Οι εναλλακτικές βασίζονται στη δυνατότητα **διαφορετικών αλλά ισοδύναμων μορφών του μαθηματικού μοντέλου**

- <u>Ταυτόσημα αποτελέσματα</u>

- Παρατηρήσεις → παράμετροι περιγραφής του φυσικού συστήματος → κάθε παράμετρος του συστήματος μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτησή τους

- **Παραμετρικός βαθμός φυσικού συστήματος** → απαραίτητος ελάχιστος αριθμός παραμέτρων για την περιγραφή του συστήματος

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- **Μαθηματικό μοντέλο συνόρθωσης** → σύνδεση παρατηρήσεων με τις άγνωστες παρατηρούμενες παραμέτρους και τα άγνωστα σφάλματα

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{y}^a + \mathbf{v}$$

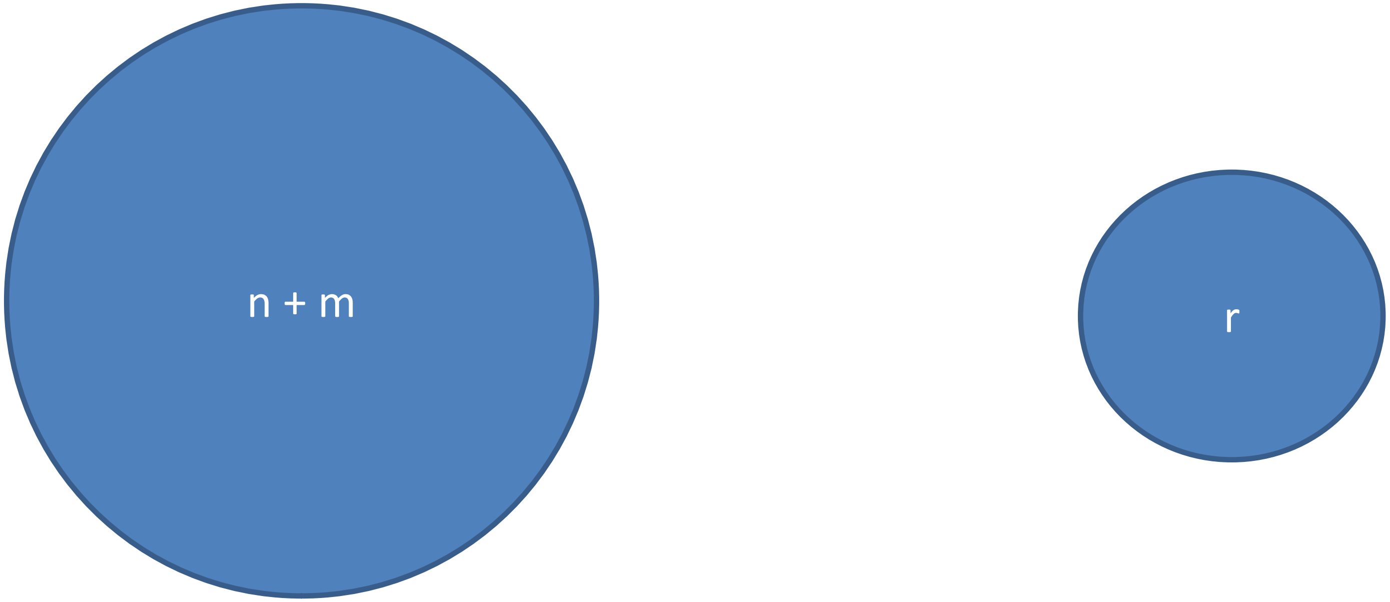
- Επιπλέον, ανεξάρτητες μαθηματικές εξισώσεις που συνδέουν παρατηρούμενες παραμέτρους με (**ενδεχόμενες**) άγνωστες παραμέτρους

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{y}^a, \mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$$

- Το πλήθος των ανεξάρτητων εξισώσεων συνδέεται με το πλήθος των διαθέσιμων παρατηρήσεων, των αγνώστων και με τον παραμετρικό βαθμό του φυσικού συστήματος

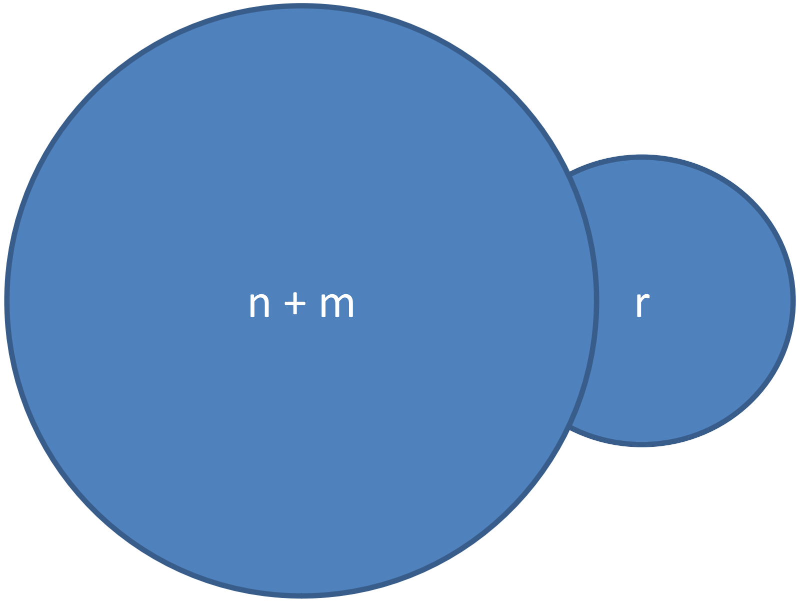
Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- n → παρατηρούμενες παράμετροι
- m → άγνωστες παράμετροι
- r → παραμετρικός βαθμός φυσικού συστήματος
- s → πλήθος ανεξαρτήτων εξισώσεων



Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

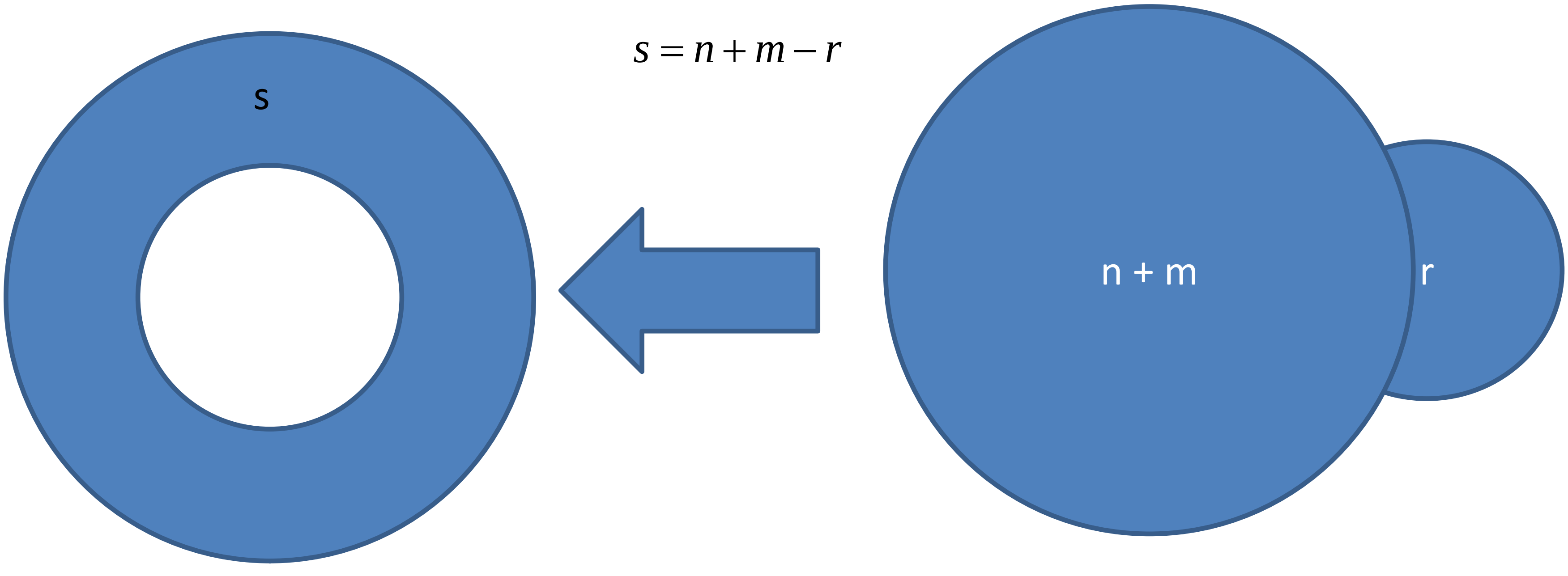
- n → παρατηρούμενες παράμετροι
- m → άγνωστες παράμετροι
- r → παραμετρικός βαθμός φυσικού συστήματος
- s → πλήθος ανεξαρτήτων εξισώσεων



Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- n → παρατηρούμενες παράμετροι
- m → άγνωστες παράμετροι
- r → παραμετρικός βαθμός φυσικού συστήματος
- s → πλήθος ανεξαρτήτων εξισώσεων

$$s = n + m - r$$

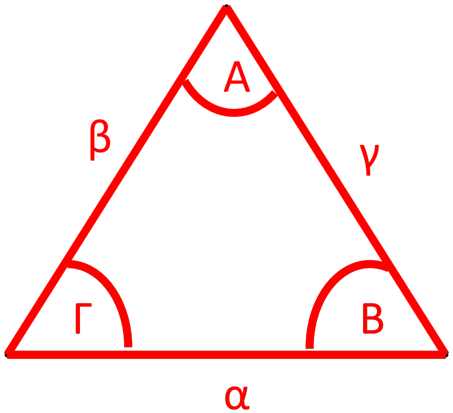


Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- **Βαθμοί ελευθερίας ενός προβλήματος συνόρθωσης** → ο αριθμός των επιπλέον παρατηρούμενων παραμέτρων πέρα των ελαχίστων που απαιτούνται για την περιγραφή του φυσικού συστήματος

$$f = n - r$$

- Ανάλογα με την ύπαρξη και τον αριθμό των αγνώστων παραμέτρων *m* και τη μορφή των εξισώσεων σύνδεσης προκύπτουν οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης



Φυσικό σύστημα → τρίγωνο (σχήμα + μέγεθος)

Σχήμα – μέγεθος φυσικού συστήματος →
παραμετρικός βαθμός $r = 3$

Παρατηρούμενες παράμετροι →
Παρατηρήσεις $n = 6$

Βαθμοί ελευθερίας $f = n - r = 3$

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- **Μέθοδος των εξισώσεων παρατήρησεων (έμμεσων παρατηρήσεων – parametric adjustment)**

$m = r$ $\qquad s = n$ $\qquad \mathbf{y}^a - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών (conditional adjustment)

$m = 0$ $\qquad s = n - r$ $\qquad \mathbf{g}\left(\mathbf{y}^a\right) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των μικτών εξισώσεων (combined adjustment)

$0 < m \leq r$ $\qquad n - r < s = n + m - r \leq n$ $\qquad \mathbf{F}\left(\mathbf{y}^a, \mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- Μέθοδος των εξισώσεων παρατήρησεων (έμμεσων παρατηρήσεων – parametric adjustment)

$m = r$ $\qquad$ $s = n$ $\qquad$ $\mathbf{y}^a - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών (conditional adjustment)

$m = 0$ $\qquad$ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ $\qquad$ $\mathbf{y}^a\big) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των μικτών εξισώσεων (combined adjustment)

$0 < m \leq r$ $\qquad$ $n - r < s = n + m - r \leq n$ $\qquad$ $\mathbf{F}\left(\mathbf{y}^a, \mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- Μέθοδος των εξισώσεων παρατήρησεων (έμμεσων παρατηρήσεων – parametric adjustment)

$m = r$ $\quad$ $s = n$ $\quad$ $\mathbf{y}^a - \mathbf{f}(\mathbf{x}^a) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών (conditional adjustment)

$m = 0$ $\quad$ $s = n - r$ $\rightarrow$ ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- Μέθοδος των μικτών εξισώσεων (combined adjustment)

$0 < m \le r$ $\quad$ $n - r < s = n + m - r \le n$ $\quad$ $\mathbf{F}(\mathbf{y}^a, \mathbf{x}^a) = \mathbf{0}$

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- Μέθοδος των εξισώσεων παρατήρησεων (έμμεσων παρατηρήσεων – parametric adjustment)

$m = r$ $\quad$ $s = n$ $\quad$ $\mathbf{y}^a - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των εξισώσεων συνθηκών (conditional adjustment)

ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

$s = n - r$ $\quad$ $\mathbf{g}\left(\mathbf{y}^a\right) = \mathbf{0}$

- Μέθοδος των μικτών εξισώσεων (combined adjustment)

$0 < m \leq r$ $\quad$ $n - r < s = n + m - r \leq n$ $\quad$ $\mathbf{F}\left(\mathbf{y}^a, \mathbf{x}^a\right) = \mathbf{0}$

Οι εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης

- Ισοδύναμες μεταξύ τους μέθοδοι → πηγάζουν από το ίδιο γενικό μοντέλο

- Κάθε επιμέρους μοντέλο μπορεί να προκύψει από το άλλο
  - **Αντικατάσταση** αγνώστων παραμέτρων με νέες
  - **Απαλοιφή** άγνωστης παραμέτρου και εξίσωσης
  - **Προσθήκη** νέας άγνωστης παραμέτρου και εξίσωσης

- **Μέθοδος εξισώσεων συνθηκών** → εξισώσεις παρατηρήσεων με απαλοιφή αγνώστων

- **Μέθοδος μικτών εξισώσεων** → εξισώσεις παρατηρήσεων με απαλοιφή <u>μέρους</u> των αγνώστων

Μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις

- Μέχρι στιγμής υποθέτουμε ότι παρατηρούμενες και άγνωστες παράμετροι ανήκουν στο φυσικό σύστημα που εξετάζουμε

- Με την εκτίμηση των παρατηρούμενων και των αγνώστων παραμέτρων είναι δυνατός ο υπολογισμός **οποιασδήποτε άλλης παραμέτρου του φυσικού συστήματος**

$$\hat{q} = q\left(\hat{\mathbf{y}}^{a}\right) \quad \hat{q} = q\left(\hat{\mathbf{x}}^{a}\right) \quad \hat{q} = q\left(\hat{\mathbf{y}}^{a}, \hat{\mathbf{x}}^{a}\right)$$

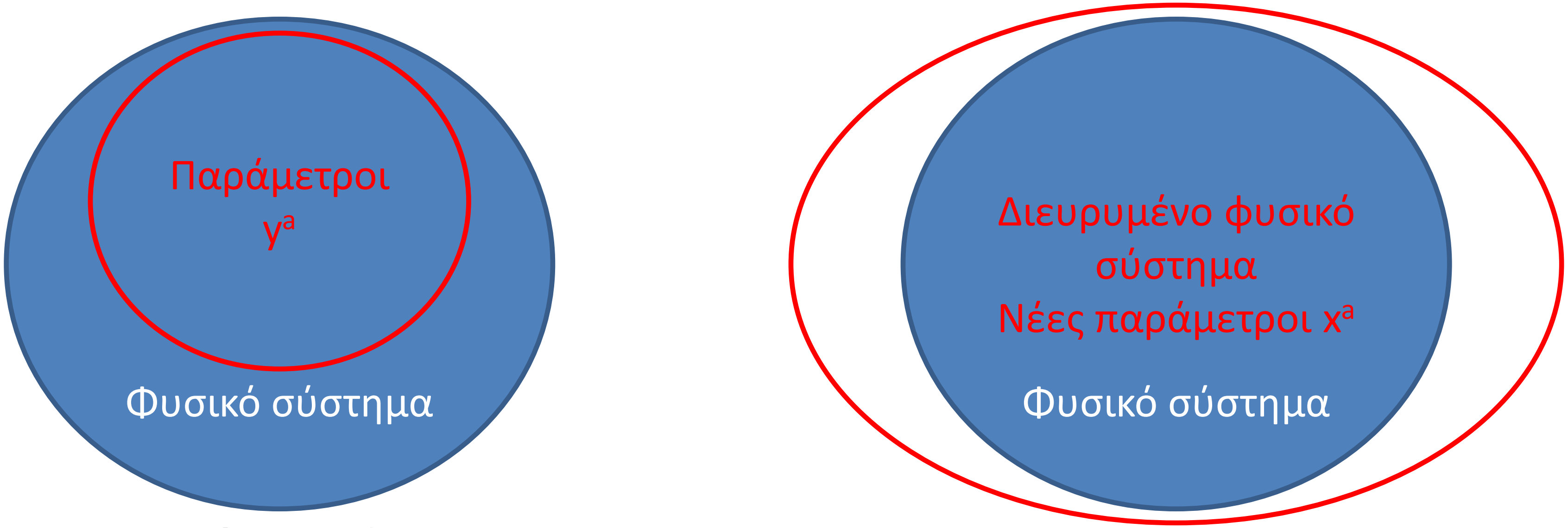
Πιθανές μορφές παραμέτρου q του φυσικού συστήματος

Μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις

- Ειδικές περιπτώσεις → άγνωστες παράμετροι εκτός του φυσικού συστήματος που δεν μπορούν να προσδιοριστούν ακόμα και αν οι τιμές των παρατηρούμενων παραμέτρων ήταν γνωστές → **μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό**

- Δύο περιπτώσεις χρήσης μοντέλων χωρίς πλήρη βαθμό
  1. Οι παρατηρούμενες παράμετροι καλύπτουν μόνο μέρος του φυσικού συστήματος → **υποσύνολο** που εμπεριέχεται στο υπό μελέτη σύστημα
  2. Αλγοριθμική ευκολία στη διαμόρφωση των εξισώσεων με τη χρήση νέων άγνωστων παραμέτρων που δεν ανήκουν στο αρχικό σύστημα → **διεύρυνση** φυσικού συστήματος

Μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις



Περίπτωση 1

Περίπτωση 2

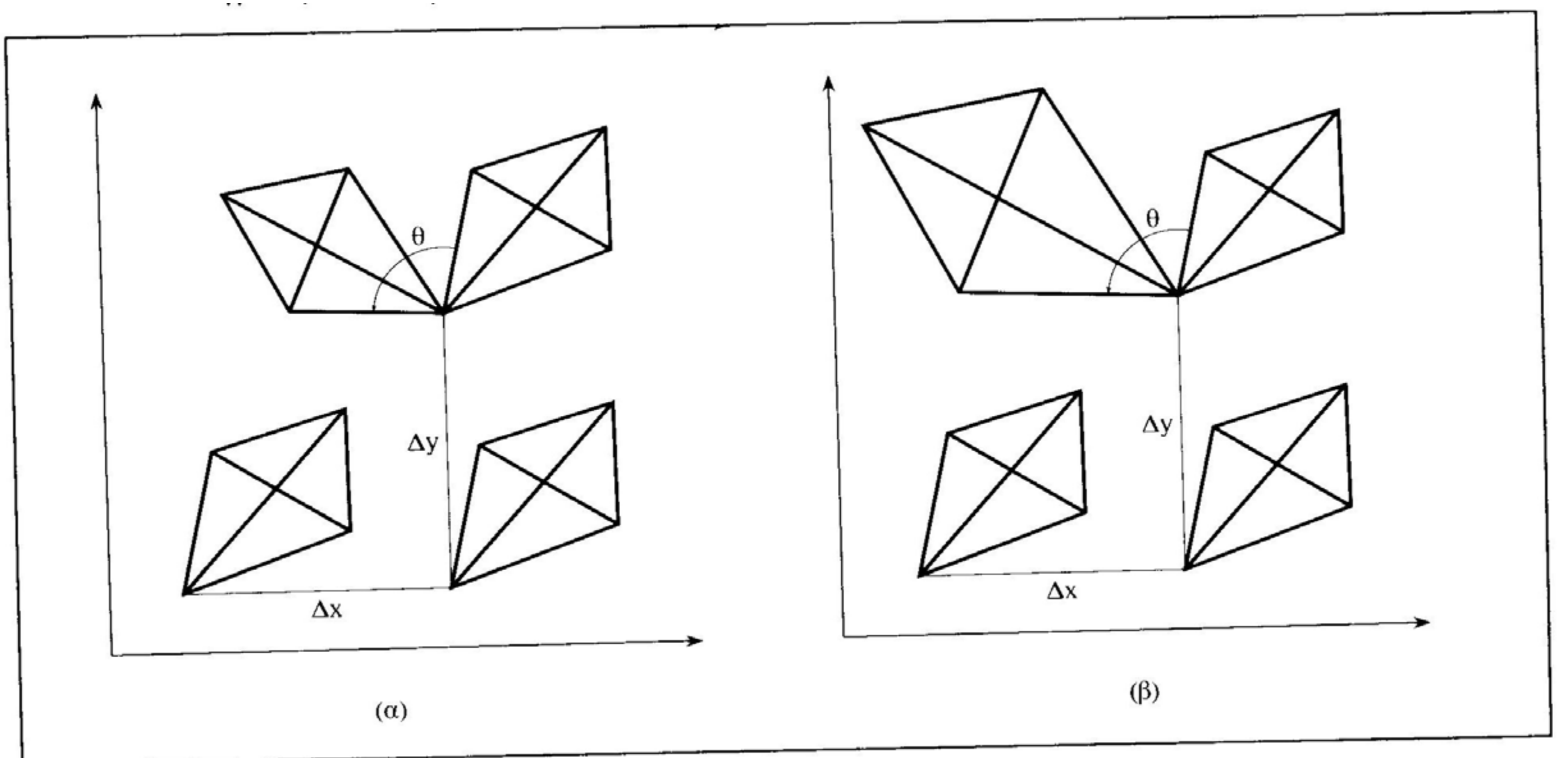
Π.χ., βέλτιστη προσαρμογή καθέτων ευθειών → παρατηρήσεις x, y δε δίνουν πληροφορία για την καθετότητα → επιπλέον δεσμεύσεις βάσει συντελεστών

Π.χ., περίπτωση συντεταγμένων στην Τοπογραφία → χωρίς εκ των προτέρων πληροφορία για το σύστημα αναφοράς είναι αδύνατο να υπολογιστούν

- Εμφάνιση αδυναμίας βαθμού → αδυναμία αντιστροφής πίνακα → απειρία λύσεων

Μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις

- Παράδειγμα οριζόντιου τοπογραφικού δικτύου



Σχήμα 1. α) Με τις παρατηρήσεις των γωνιών και των πλευρών που έχουν γίνει στο δίκτυο, ορίστηκε το σχήμα του και το μέγεθός του. Το δίκτυο μπορεί να μετακινηθεί κατά Δx, παράλληλα προς τον άξονα των x, κατά Δy, παράλληλα προς τον άξονα y, και τέλος να στραφεί κατά γωνία Δθ γύρω από μία από τις κορυφές του χωρίς να αλλοιωθεί ούτε το σχήμα του ούτε το μέγεθός του. β) Ένα δίκτυο με το ορισμένο από τις παρατηρήσεις σχήμα μπορεί να υποστεί παράλληλες μεταθέσεις προς τους άξονες (κατά Δx και Δy), στροφή Δθ αλλά και μια μεγέθυνση ή σμίκρυνση) λ.

Μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις

- Τέχνασμα για την επίτευξη λύσης → εισαγωγή δεσμεύσεων $\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{a}\right)=\mathbf{0}$

- Εισάγονται *k* αριθμός δεσμεύσεων έτσι ώστε να διευρυνθεί ο παραμετρικός βαθμός *r* του αρχικού φυσικού συστήματος

- Όταν ο αριθμός των δεσμεύσεων είναι ίσος με τη διαφορά των αγνώστων παραμέτρων και του παραμετρικού βαθμού → **ελάχιστες δεσμεύσεις (minimal constraints)**

- Ο αριθμός τους είναι ίσος με την αδυναμία βαθμού του συστήματος και έχουν την ιδιότητα να μην επηρεάζουν τις εκτιμήσεις και τις (συμ)μεταβλητότητές τους

Μοντέλα χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις

- Εξισώσεις παρατηρήσεων με *k* δεσμεύσεις

$$r + k = m \qquad s = n + k \qquad \begin{aligned} \mathbf{y}^a - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}\left(\mathbf{x}^a\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Μικτές εξισώσεις με *k* δεσμεύσεις

$$k < m \leq r + k \qquad n + k - r < s = n + m - r \leq n + k \qquad \begin{aligned} \mathbf{F}\left(\mathbf{y}^a, \mathbf{x}^a\right) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{h}\left(\mathbf{x}^a\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Αλγόριθμος εξισώσεων παρατηρήσεων

- Μαθηματικό μοντέλο

$$\mathbf{y}^a = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right)$$

$$\begin{aligned} y_1^a &= f_1\left(x_1^a, x_2^a, \ldots, x_m^a\right) \\ y_2^a &= f_2\left(x_1^a, x_2^a, \ldots, x_m^a\right) \\ &\vdots \\ y_n^a &= f_n\left(x_1^a, x_2^a, \ldots, x_m^a\right) \end{aligned}$$

- Στοχαστικό μοντέλο

$$\mathrm{E}\left\{\mathbf{v}\right\} = \mathbf{0} \qquad \mathrm{E}\left\{\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right\} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ y_1^b \\ y_2^b \\ \vdots \\ y_n^b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1^b & y_2^b & \cdots & y_n^b \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma^2_{y_1^b} & \sigma_{y_1^b y_2^b} & \cdots & \sigma_{y_1^b y_n^b} \\ \sigma_{y_2^b y_1^b} & \sigma^2_{y_2^b} & \cdots & \sigma_{y_2^b y_n^b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{y_n^b y_1^b} & \sigma_{y_n^b y_2^b} & \cdots & \sigma^2_{y_n^b} \end{bmatrix} \end{array}$$

Αλγόριθμος εξισώσεων παρατηρήσεων

- Γραμμικοποίηση

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{y}^a + \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{y}^b = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right) + \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{y}^b = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^o\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{y}^a}{\partial \mathbf{x}^a}\right|_o \left(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^o\right) + \mathbf{v} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{y}^b - \mathbf{y}^o = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

- Δομή βασικών πινάκων (**b** → διάνυσμα ανηγμένων παρατηρήσεων)

$$\mathbf{b} = \mathbf{y}^b - \mathbf{y}^o = \mathbf{y}^b - \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^o\right) = \begin{bmatrix} y_1^b - y_1^o \\ y_2^b - y_2^o \\ \vdots \\ y_n^b - y_n^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^b - f_1\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o\right) \\ y_2^b - f_2\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o\right) \\ \vdots \\ y_n^b - f_n\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o\right) \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος εξισώσεων παρατηρήσεων

- Δομή βασικών πινάκων (**A** → πίνακας σχεδιασμού της συνόρθωσης)

$$\mathbf{A}=\left.\frac{\partial \mathbf{y}^a}{\partial \mathbf{x}^a}\right|_o = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1^a & \cdots & x_j^a & \cdots & x_m^a \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1^a \\ \vdots \\ y_i^a \\ \vdots \\ y_n^a \end{array} & \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \iddots \\ & \ddots & \vdots & \iddots & \\ \cdots & \cdots & \left.\frac{\partial y_i^a}{\partial x_i^a}\right|_o & \cdots & \cdots \\ & \iddots & \vdots & \ddots & \\ \iddots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

Αλγόριθμος εξισώσεων παρατηρήσεων

- Δομή βασικών πινάκων (**P** → πίνακας των βαρών των παρατηρήσεων)

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ y_1^b \\ y_2^b \\ \vdots \\ y_n^b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1^b & y_2^b & \cdots & y_n^b \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma^2_{y_1^b} & \sigma_{y_1^b y_2^b} & \cdots & \sigma_{y_1^b y_n^b} \\ \sigma_{y_2^b y_1^b} & \sigma^2_{y_2^b} & \cdots & \sigma_{y_2^b y_n^b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{y_n^b y_1^b} & \sigma_{y_n^b y_2^b} & \cdots & \sigma^2_{y_n^b} \end{bmatrix} \end{array}$$

- **C** → γνωστός → $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$

- $\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ **Q** → γνωστός, σ^2 = άγνωστη

Αλγόριθμος εξισώσεων παρατηρήσεων

- Αλγόριθμος συνόρθωσης (βέλτιστες εκτιμήσεις)

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}} \quad \boxed{\mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{x}}^{a} = \mathbf{x}^{o} + \hat{\mathbf{x}}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}} \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{y}}^{a} = \mathbf{y}^{b} - \hat{\mathbf{v}}}$$

- Εκτίμηση ακρίβειας αλγορίθμου συνόρθωσης

1. **C** → γνωστός

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}^{a}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}^{a}} = \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

2. **C** = σ²**Q**

$$\hat{\sigma}^{2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{n-m}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}^{a}} = \hat{\sigma}^{2}\mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^{2}\left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}^{a}} = \hat{\sigma}^{2}\left(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

Αλγόριθμος εξισώσεων παρατηρήσεων

- Βήματα

1. Επιλογή προσεγγιστικών αγνώστων παραμέτρων $\mathbf{x}^o$. Η επιλογή γίνεται μέσα από κατάλληλες σχέσεις υπολογισμού ή αυθαίρετες προσεγγιστικές τιμές → πιθανότητα σφαλμάτων γραμμικοποίησης
2. Αναλυτική παραγώγιση των εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου
3. Υπολογισμός των παραγώγων αντικαθιστώντας τις άγνωστες παραμέτρους με αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές από το βήμα 1. → πίνακας **A**
4. Υπολογισμός των προσεγγιστικών τιμών των παρατηρούμενων χρησιμοποιώντας το μαθηματικό μοντέλο και τις προσεγγιστικές των αγνώστων του βήματος 1.
5. Υπολογισμός του διανύσματος των ανηγμένων παρατηρήσεων **b** → Τιμές παρατηρήσεων – προσεγγιστικές τιμές παρατηρούμενων παραμέτρων
6. Υπολογισμός πίνακα **N** και διανύσματος **u** κανονικών εξισώσεων
7. Υπολογισμός εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}^a$
8. Υπολογισμός εκτίμησης διανύσματος σφαλμάτων $\hat{\mathbf{v}}$
9. Υπολογισμός εκτίμησης των παρατηρούμενων παραμέτρων $\hat{\mathbf{y}}^a$
10. Εκτίμηση πινάκων ακρίβειας των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων, των σφαλμάτων των παρατηρήσεων και των παρατηρούμενων παραμέτρων

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Οι άγνωστες παράμετροι είναι περισσότεροι από τον παραμετρικό βαθμό του φυσικού συστήματος ($m > r$) και ανεξάρτητες μεταξύ τους

- Άγνωστες → σύνολο θεμελιωδών παραμέτρων σε νέο διευρυμένο φυσικό σύστημα που περιέχει το αρχικό

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Π.χ., συντεταγμένες → διευρυμένο φυσικό σύστημα → «σχήμα, μέγεθος και θέση»
- Αρχικό σύστημα → παρατηρήσεις → «σχήμα και μέγεθος»

- Γραμμικοποίηση → r(**A**) < m → |**N**| = 0 → απειρία λύσεων
- Πώς μπορεί να γίνει η συνόρθωση, όταν δεν υπάρχει αντιστροφή του **N**;

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Ο προσδιορισμός της λύσης γίνεται με τη βοήθεια $k = m - r$ συναρτήσεων → δεσμεύσεις $\mathbf{z}^a = \mathbf{h}(\mathbf{x}^a) = \mathbf{0}$

- Αυτού του είδους οι δεσμεύσεις οδηγούν σε μία μοναδική λύση χωρίς να επηρεάζουν τις εκτιμήσεις των παρατηρούμενων παραμέτρων → **ελάχιστες δεσμεύσεις (minimum constraints)**

- Γραμμικοποιημένες εξισώσεις:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{z}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{u} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{n - m + k}$$

Ομογενείς ελάχιστες δεσμεύσεις

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\right) \qquad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) \qquad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Δομή γραμμικοποιημένου πίνακα δεσμεύσεων **H** (*k* × *m*) και διανύσματος **z** (k × 1)

$$\mathbf{H} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}^a)}{\partial \mathbf{x}^a}\right|_o = \begin{array}{c} \\ h_1(x^a) \\ \vdots \\ h_i(x^a) \\ \vdots \\ h_k(x^a) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1^a & \cdots & x_j^a & \cdots & x_m^a \end{array} \\ \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \iddots \\ & \ddots & \vdots & \iddots & \\ \cdots & \cdots & \left.\frac{\partial h_i(x^a)}{\partial x_i^a}\right|_o & \cdots & \cdots \\ & \iddots & \vdots & \ddots & \\ \iddots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}^o) = \begin{bmatrix} h_1(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o) \\ h_2(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o) \\ \vdots \\ h_k(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o) \end{bmatrix}$$

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Κάθε διαφορετική επιλογή ελαχίστων δεσμεύσεων οδηγεί σε διαφορετικές εκτιμήσεις για τις άγνωστες παραμέτρους $\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}$

- Μία ειδική επιλογή ελαχίστων δεσμεύσεων → ελαχιστοποιεί το ίχνος του πίνακα των (συμ)μεταβλητοτήτων των αγνώστων → **εσωτερικές δεσμεύσεις (inner constraints)**

$$\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{A}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \qquad \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} = \min$$

$$\mathbf{N}^{+} = \left(\mathbf{N} + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\right)^{-1} - \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right)^{-2}\mathbf{E}$$

Γενικευμένος αντίστροφος → **ψευδοαντίστροφος**

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{+}\mathbf{u}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{n - m + k}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2\mathbf{N}^{+}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\left(\mathbf{N} + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}^{a}} = \hat{\sigma}^2\mathbf{A}\left(\mathbf{N} + \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Όταν χρησιμοποιηθούν δεσμεύσεις σε αριθμό μεγαλύτερο από τις ελάχιστες → **πλεονάζουσες δεσμεύσεις (full constraints)**

- Παράδειγμα → ένταξη τοπογραφικού δικτύου στο ΕΓΣΑ87

- Δεσμεύσεις περισσότερες από την αδυναμία βαθμού του συστήματος

($k > m - r$)

- Οι πλεονάζουσες δεσμεύεις επηρεάζουν τις εκτιμήσιμες παραμέτρους → «ουσιαστικές» δεσμεύσεις

Εξισώσεις παρατηρήσεων χωρίς πλήρη βαθμό

- Λύση πλεοναζουσών δεσμεύσεων

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\right)\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{z}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

- Ακρίβεια της εκτίμησης

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}^a} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\right)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\left(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\right)\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right]$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}^a} = \hat{\sigma}^2\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\right)\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{n - m + k}$$

Μη γραμμικές εκτιμήσεις

- Όταν οι προσεγγιστικές τιμές των αγνώστων παραμέτρων δεν είναι δυνατό να υπολογιστούν → **αυθαίρετες τιμές** → ανάπτυγμα Taylor με μεγάλες τιμές για τους όρους 2ης τάξης και πάνω

$$\mathbf{y}^a = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^o\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^a\right)}{\partial \mathbf{x}^a}\right|_o \left(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^o\right) + \mathbf{e}$$

⇨ Σφάλματα γραμμικοποίησης

- Επίδραση στην **αξιοπιστία** των τελικών αποτελεσμάτων

- Μέθοδοι αντιμετώπισης
  1. Μέθοδος **μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων**
  2. Μέθοδος των **διαδοχικών προσεγγίσεων**

Μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων

- Βήματα
  1. Επιλογή προσεγγιστικών των αγνώστων
  2. Υπολογισμών βασικών πινάκων συνόρθωσης

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{a}\right)}{\mathbf{x}^{a}}\right|_{o}, \quad \mathbf{y}^{o} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{o}\right), \quad \mathbf{b} = \mathbf{y}^{b} - \mathbf{y}^{o}$$

  3. Εκτίμηση των διορθώσεων στις προσεγγιστικές $\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}$

     Εάν $\sqrt{\left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)} < \varepsilon$, όπου ε μικρός θετικός αριθμός, μεταφορά στο 5.

  4. Υπολογισμός των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων και με αυτές ως προσεγγιστικές επιστροφή στο 2.

  5. Υπολογισμός των εκτιμήσεων των σφαλμάτων και της ακρίβειας της συνόρθωσης $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\sigma}^{2}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}}, \ldots$

Ειδικές περιπτώσεις
Άθροιση κανονικών εξισώσεων

- Δύο ξεχωριστές ομάδες παρατηρήσεων με κοινές άγνωστες παραμέτρους

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2$$

- Αν αναλυθούν ξεχωριστά

$$\left(\mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1\right)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1$$
$$\left(\mathbf{A}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2\right)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2$$

- Αν οι δύο σειρές αναλυθούν από κοινού (θεωρώντας τις δύο ομάδες παρατηρήσεων ασυσχέτιστες)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

Ειδικές περιπτώσεις
Άθροιση κανονικών εξισώσεων

- Απόδειξη θεωρήματος άθροισης κανονικών εξισώσεων

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

$$\boxed{\left(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2\right)\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\right)}$$

- Για *k* ασυσχέτιστες ομάδες παρατηρήσεων

$$\boxed{\left(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \ldots + \mathbf{N}_k\right)\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k\right)}$$

Ειδικές περιπτώσεις
Άθροιση κανονικών εξισώσεων

- Σημασία → υπάρχει δυνατότητα συμμετοχής νέων σειρών παρατηρήσεων σε ήδη υπάρχουσες κανονικές εξισώσεις

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1}^{\mathbf{T}} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}$$
$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1}^{\mathbf{T}} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{b}_{k+1}$$

- Αν έχουν διατηρηθεί οι αρχικές κανονικές εξισώσεις, απλώς προστίθενται οι νέοι πίνακες σύμφωνα με το θεώρημα άθροισης

$$\left[\left(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \ldots + \mathbf{N}_k\right) + \mathbf{N}_{k+1}\right]\hat{\mathbf{x}} = \left[\left(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k\right) + \mathbf{u}_{k+1}\right]$$

- Οι άγνωστες παράμετροι είναι κοινές σε όλες τις ομάδες παρατηρήσεων

Ειδικές περιπτώσεις
Άθροιση κανονικών εξισώσεων

- Το θεώρημα ισχύει και όταν <u>μόνο κάποιες</u> άγνωστες είναι κοινές μεταξύ των ομάδων των παρατηρήσεων

$$\mathbf{b}_1 = \dot{\mathbf{A}}_1\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} + \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{b}_2 = \dot{\mathbf{A}}_2\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_2 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{v}_2$$

$\dot{\mathbf{x}}$ Κοινές άγνωστες παράμετροι και για τις δύο ομάδες

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ Μη κοινές άγνωστες παράμετροι

- Από κοινού κανονικές εξισώσεις

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{A}}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

Ειδικές περιπτώσεις
Άθροιση κανονικών εξισώσεων

- Πίνακες κανονικών εξισώσεων από κοινού

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\dot{\mathbf{A}}_1 & \dot{\mathbf{A}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\dot{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\dot{\mathbf{A}}_2 & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\dot{\mathbf{A}}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

- Οι πίνακες δημιουργούνται από την άθροιση των αντίστοιχων πινάκων των επιμέρους κανονικών εξισώσεων, όταν αυτοί διευρυνθούν εισάγοντας **μηδενικά στις θέσεις των αγνώστων παραμέτρων που δεν περιέχονται στις επιμέρους εξισώσεις**

Ειδικές περιπτώσεις
Συνόρθωση με προϋπάρχουσες εκτιμήσεις για τις άγνωστες

- Περίπτωση → χρήση προϋπάρχουσας εκτίμησης για τις άγνωστες

- Η εκτιμήσεις και ο πίνακας (συμ)μεταβλητοτήτων τους από παλαιότερη συνόρθωση αξιοποιούνται σε συνδυασμό με τις νέες παρατηρήσεις

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x} + \mathbf{v}_\mathbf{x}$$
$$\mathrm{E}\{\mathbf{v}_\mathbf{x}\} = 0$$
$$\mathrm{E}\{\mathbf{v}_\mathbf{x}\mathbf{v}_\mathbf{x}^\mathbf{T}\} = \mathbf{C}_\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{v}_\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{P}_\mathbf{x}\mathbf{v}_\mathbf{x} = \min$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$$
$$\mathbf{P}_\mathbf{x} = \mathbf{C}_\mathbf{x}^{-1}$$

- **Λύση** → Εφαρμογή του θεωρήματος άθροισης των κανονικών εξισώσεων

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{b} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\mathbf{x}^b\right)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathbf{T}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{x}} = \mathbf{P}_\mathbf{x}^{-1} - \left(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}$$

Εφαρμογή

Απευθείας γραμμικές εξισώσεις παρατήρησης

- Εκτίμηση βέλτιστης ευθείας (εφαρμογή εξισώσεων παρατήρησης)

Για την προσέγγιση του άξονα ενός δρόμου μετρήθηκαν οι συντεταγμένες πέντε σημείων. Ζητούνται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων της εξίσωσης ευθείας του άξονα του δρόμου. Οι τεταγμένες y_i να θεωρηθούν ως παρατηρήσεις ασυσχέτιστες και ίδιας αλλά άγνωστης ακρίβειας, ενώ οι τετμημένες x_i θα θεωρηθούν σταθερές

i	x_i (m)	y_i (m)
1	5009.05	10001.30
2	5012.10	10003.05
3	5014.60	10005.80
4	5018.40	10007.15
5	5020.00	10008.00

- Εξισώσεις παρατήρησης → $y_i = ax_i + b$

- Απευθείας γραμμικό μοντέλο

(δε χρειάζεται γραμμικοποίηση) →

$$\mathbf{y}^b = \mathbf{Ax} + \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^b \\ \vdots \\ y_5^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_5 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή

Γραμμές εντολών MATLAB – OCTAVE – Βέλτιστη εκτίμηση a, b

```
Command Window
>> x=points1(:,1)
x =

   5009.05000000000
   5012.10000000000
   5014.60000000000
   5018.40000000000
   5020.00000000000

>> y=points1(:,2)
y =

   10001.3000000000
   10003.0500000000
   10005.8000000000
   10007.1500000000
   10008.0000000000
```

Εισαγωγή δεδομένων

```
>> A=[x ones(5,1)]
A =

   5009.05000000000018      1.00000000000000
   5012.10000000000036      1.00000000000000
   5014.60000000000036      1.00000000000000
   5018.39999999999964      1.00000000000000
   5020.00000000000000      1.00000000000000
```

Πίνακας σχεδιασμού **A**

```
>> yb=y
yb =

   10001.3000000000
   10003.0500000000
   10005.8000000000
   10007.1500000000
   10008.0000000000
```

Διάνυσμα παρατηρήσεων
(γραμμική μορφή **b = y**^{b})

```
>> N=A'*A
N =

  1.25742680032500e+008  2.50741500000000e+004
  2.50741500000000e+004  5.00000000000000e+000
```

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}}$$

Πίνακας κανονικών εξισώσεων

```
>> u=A'*yb
u =

  2.50868424910000e+008
  5.00253000000000e+004
```

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b}}$$

Διάνυσμα κανονικών εξισώσεων

```
>> xest=inv(N)*u
xest =

  6.18388316594064e-001
  6.90394771766663e+003

>>
```

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}}$$

Εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων
→ απευθείας γραμμική εκτίμηση

Command Window | Editor | Documentation

Εφαρμογή

Γραμμές εντολών MATLAB – OCTAVE – Εκτίμηση ακρίβειας εκτίμησης

Command Window

```
>> N=A'*A
N =

  1.25742680032500e+008  2.50741500000000e+004
  2.50741500000000e+004  5.00000000000000e+000

>> u=A'*yb
u =

  2.50868424910000e+008
  5.00253000000000e+004

>> xest=inv(N)*u
xest =

  6.18388316594064e-001
  6.90394771766663e+003

>> v=yb-A*xest
v =

  -0.185714902123436
  -0.321799267736424
   0.882229940778416
  -0.117645662277937
  -0.257066968828440

>> var=(v'*v)/(5-2)
var =  0.332099463435920
>> Cx=var*inv(N)
Cx =

  4.13120694002275e-003  -2.07173004990343e+001
  -2.07173004990343e+001  1.03893806481465e+005

>> Cv=var*(eye(5)-A*inv(N)*A')
Cv =

   0.12766255679785332  -0.13160785949240164  -0.07191191920908067   0.01882591002155210   0.05703131180290395
  -0.13160785947762987   0.23489009854439161  -0.06901387752587819  -0.02615673673009283  -0.00811162481606701
  -0.07191191920194905  -0.06901387753352306   0.26546102989291004  -0.06302775867742977  -0.06150747452350113
   0.01882591004109993  -0.02615673672532622  -0.06302775866501947   0.21302775142256997  -0.14266916605475802
   0.05703131181379637  -0.00811162481996525  -0.06150747451976336  -0.14266916606343233   0.15525695356461591

>> Cy=var*(A*inv(N)*A')
Cy =

   0.20443690663806646   0.13160785949240164   0.07191191920908067  -0.01882591002155210  -0.05703131180290395
   0.13160785947762987   0.09720936489152819   0.06901387752587819   0.02615673673009283   0.00811162481606701
   0.07191191920194905   0.06901387753352306   0.06663843354300975   0.06302775867742977   0.06150747452350113
  -0.01882591004109993   0.02615673672532622   0.06302775866501947   0.11907171201334982   0.14266916605475802
  -0.05703131181379637   0.00811162481996525   0.06150747451976336   0.14266916606343233   0.17684250987130387

>>
```

Command Window | Editor | Documentation

$$\boxed{\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}}$$

Εκτίμηση σφαλμάτων παρατηρήσεων

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{n-m}$$

Εκτίμηση a-posteriori μεταβλητότητας

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}^a} = \hat{\sigma}^2\mathbf{N}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}^a} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

Εφαρμογή

Θεώρημα άθροισης κανονικών εξισώσεων

Σε επόμενη διαδικασία μετρήσεων παρατηρήθηκαν οι συντεταγμένες τριών νέων σημείων

i	x_i (m)	y_i (m)
6	5021.14	10008.96
7	5022.78	10009.98
8	5023.47	10010.40

Να εκτιμηθούν εκ νέου οι συντελεστές a και b της βέλτιστης εξίσωσης του άξονα του δρόμου κάνοντας χρήση του θεωρήματος της άθροισης των κανονικών εξισώσεων.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{v}_1$$
$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

$$\left(\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{A}_1\right)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{b}_1$$
$$\left(\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2\right)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_2\mathbf{b}_2$$

$$\boxed{\left(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \ldots + \mathbf{N}_k\right)\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k\right)}$$

Εφαρμογή

Γραμμές εντολών MATLAB – OCTAVE – Θεώρημα άθροισης κανονικών εξισώσεων

Command Window

```
>> x2=points2(:,1)
x2 =

   5021.14000000000
   5022.78000000000
   5023.47000000000

>> y2=points2(:,2)
y2 =

   10008.9600000000
   10009.9800000000
   10010.4000000000

>> A2=[x2 ones(3,1)]
A2 =

   5021.14000000000033      1.00000000000000
   5022.77999999999975      1.00000000000000
   5023.47000000000025      1.00000000000000

>> yb2=y2
yb2 =

   10008.9600000000
   10009.9800000000
   10010.4000000000

>> N2=A2'*A2
N2 =

  7.56754166689000e+007  1.50673900000000e+004
  1.50673900000000e+004  3.00000000000000e+000

>> u2=A2'*yb2
u2 =

  1.50821260846800e+008
  3.00293400000000e+004

>> Nall=N1+N2
error: 'N1' undefined near line 1 column 6
>> Nall=N+N2
Nall =

  2.01418096701400e+008  4.01415400000000e+004
  4.01415400000000e+004  8.00000000000000e+000

>> uall=u+u2
uall =

  4.01689685756800e+008
  8.00546400000000e+004

>> 
```

Command Window | Editor | Documentation

Εφαρμογή

Χρήση προϋπάρχουσας εκτίμηση για τις άγνωστες

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x} + \mathbf{v}_\mathbf{x}$$

$$\mathrm{E}\{\mathbf{v}_\mathbf{x}\} = 0$$

$$\mathrm{E}\{\mathbf{v}_\mathbf{x}\mathbf{v}_\mathbf{x}^\mathrm{T}\} = \mathbf{C}_\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{v}_\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{P}_\mathbf{x}\mathbf{v}_\mathbf{x} = \min$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$$

$$\mathbf{P}_\mathbf{x} = \mathbf{C}_\mathbf{x}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{b} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\mathbf{x}^b\right)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathrm{T}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{x}} = \mathbf{P}_\mathbf{x}^{-1} - \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}_\mathbf{x}\right)^{-1}$$

Περαιτέρω ενασχόληση: Να χρησιμοποιηθεί η προϋπάρχουσα πληροφορία για τις εκτιμήσεις των συντελεστών της ευθείας και του πίνακα (συμ)μεταβλητοτήτων (περίπτωση 1) για τη νέα εκτίμηση

Ανακεφαλαίωση

- Αναγκαιότητα μοντέλων συνόρθωσης και εκτίμησης παραμέτρων
- Εναλλακτικές μέθοδοι συνόρθωσης
- Μοντέλα με πλήρη και χωρίς πλήρη βαθμό – Δεσμεύσεις
- Αλγόριθμος μεθόδου εξισώσεων παρατηρήσεων
- Ειδικές περιπτώσεις αλγορίθμου
- Εφαρμογές